

ББК 74.262.21

М.Б.Калашникова, Л.А.Сергеева

**ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЯЗЫКА УЧАЩИМИСЯ 1-6-х КЛАССОВ**

The main principles of the conception of organization of comprehensive mastering of mathematics with the help of revealing of the specific of the mathematical language are formulated. The principles of selection of concrete contents for creation of educational situation and organization of pupils' speech activities are given too.

Современная образовательная действительность все чаще обращается к ситуациям, в которых возникает необходимость в действенных, лично-значимых условиях для по-

нимания, а не для запоминания учащимися изученного. В настоящее время особо остро стоит проблема разработки методики достижения понимания применительно к предмету математики.

В ряде исследований последних лет выделены основные направления создания методики, ориентированной на понимание школьниками изучаемого: диалогизация школьного курса математики, осуществление перевода текста с одного языка на другой, различные интерпретации абстрактных математических понятий. Однако, как показывает анализ психологических затруднений учащихся в раскрытии смысла математических знаков и терминов, одна из причин непонимания учащимися математических фактов имеет «внутренний» характер и заключается в особом месте математики среди других естественнонаучных дисциплин, в специфике объектов, изучаемых математикой, в непонимании этой специфики школьниками. Анализ реального учебного процесса показывает, что в сознании подавляющего большинства учащихся существует глубокое противоречие между формой, заключающей математическое знание, знаком, выражающим содержание этого знания, и, наконец, самим содержанием. В сознании школьника математический объект отождествляется с формой его описания, происходит подмена содержания изучаемого материала манипулированием знаками, о смысле которых оперирующий ими и не задумывается. Результат — снижение или полное отсутствие познавательной мотивации у учащихся при изучении курса математики.

В своем исследовании мы исходим из понимания того, что математика, являясь *естественной наукой*, изучает природу, используя с этой целью специфическое *средство* — *математический язык*, который представляет собой не только форму для хранения содержания, для записи мысли, но и выступает в роли *источника нового знания*, средства преобразования полученного знания, инструмента познания. Соответственно школьный математический язык, являющийся и средством описания, и средством познания явлений окружающего мира, имеет связанные со спецификой предмета математики особенности, влияющие на процесс усвоения школьниками математических понятий.

Нельзя «оторвать» математический язык от математики и изучать его отдельно, но, как показывает наше исследование понимания математики школьниками, *разумное выделение и подчеркивание специфики языка предмета при изучении его содержания способствует раскрытию школьниками особенностей изучаемого математического содержания, повышению учебной мотивации и, следовательно, более осмысленному и глубокому восприятию ими математических фактов*.

Вопрос о том, какие элементы математического языка, влияющие на понимание данного предмета школьниками, должны стать предметом обсуждения, специально не изучался, не выделялись специфические особенности школьного математического языка, отражающие особенности математических объектов. Немногочисленные методические работы по проблеме изучения математического языка (см. [1-4] и др.) при всей ценности представленного в них фактического материала рассматривают его только как средство записи математических фактов. Организация понимающего усвоения школьниками математики через раскрытие особенностей используемого предметного языка потребовала выделения специфики школьного математического языка с различных точек зрения и раскрытия роли этой специфики в процессе понимания учащимися математики.

Выделение специфических особенностей математического языка мы осуществляли по трем направлениям: анализ специфики, связанной с различной природой самих математических объектов; анализ особенностей знаков, используемых для фиксации математических фактов и для организации познавательной деятельности по получению нового знания; анализ специфики использования и понимания школьниками математических терминов как имен понятий.

При анализе специфики языка, связанной с различной природой математических объектов, мы руководствовались выделенными А.Н.Колмогоровым [5] и С.Клини [6] четырьмя областями человеческой деятельности, которые связаны с предметом математики:

1) изучение реального мира и практическое воздействие на него, 2) содержательная математика, 3) формализованная математика, 4) метаматематика.

Объекты содержательной математики представляют собой *идеальные модели* реальных объектов, их свойств, отношений, не имеющие материального, знакового воплощения и представляющие собой словесные описания свойств, отношений соответствующих отрезков действительности (число, действие сложения, величина и др.). Имена моделей (знаки, системы знаков, построенных по определенным правилам, и соответствующие им слова естественного языка) дают информацию о способах построения соответствующей модели. Одной и той же модели может соответствовать множество различных имен, отражающих различные аспекты обозначаемого явления.

Формальная математика представляет собой построение искусственного математического языка как формализованного языка. Объекты формальной математики представляют собой модели отрезка реальной действительности, полученные в результате формализации частей содержательной математики, имеющие *языковую, знаковую форму*, позволяющие заменить изучаемое явление более простым с целью его изучения и связанные с соответствующим отрезком реальной или математической действительности посредством интерпретации. Объективные трудности для понимания математического содержания заложены и в *двойственности* объектов формальной математики: в школьном курсе на этапе построения они выступают и в роли имени объекта содержательной математики, и в роли знаковой модели, являющейся объектом непосредственного изучения и преобразования.

В своем исследовании мы рассматривали математический язык, во-первых, как язык описания реальной действительности, построения специфической математической модели процессов и явлений реального мира; во-вторых, как совокупность языков, созданных для описания предметных областей, которые становятся *объектами дальнейшего исследования* с позиции языка; в-третьих, как язык науки, служащий для *описания и изучения* предметного языка.

В основу анализа специфики используемых в школьном математическом языке знаков и их систем мы положили работы по психологии, логике, семиотике [7,8]. В частности, мы рассмотрели выделенные в семиотике при анализе проблемы знаков три аспекта — семантический, синтаксический и прагматический; использовали систему отношений, которую обычно выражают схематично в виде так называемого семантического треугольника с вершинами: *знак* (имя предмета) — *смысл имени* (концепт) — *предмет, названный данным именем* (денотат) [9].

В содержательной теории знак или система знаков представляет собой лишь имя предмета и используется для фиксации математических фактов. Денотат имен (знаков и систем знаков), используемых в содержательных математических теориях, либо отсутствует в привычном для ученика понимании как воспринимаемый объект, обладающий чувственно-наглядной предметностью, либо в качестве денотата в школьном курсе понимается теоретико-множественная интерпретация имени. Применительно к знакам, используемым в содержательной математике в качестве имен математических объектов, понять значит «усвоить смысл», постигнуть содержание, хранящееся в данной форме — имени. Смысловое значение знака содержательной математики меняется в зависимости от контекста, в котором он используется.

В формальной теории система знаков используется для организации познавательной деятельности для получения нового знания, математические знаки являются лингвистическими символами, из которых строятся новые лингвистические объекты. Понимание знаков формальной теории связано с «*приданием смысла*» знакам, аксиомам и правилам теории, используемым для преобразования знаковых выражений. Формализованный язык математики — это *язык деятельности* по формированию нового математического знания.

Усвоение каждого математического понятия, даже высокого уровня абстрактности, так или иначе связано с анализом языка. Мы столкнулись, в частности, с необходимостью для организации понимающего усвоения математики, связанного с построением целостных

представлений учащихся о системе математических понятий, классификации математических понятий с учетом специфики «природы» математических объектов, образующих объем соответствующего понятия, особенностей математического языка, используемого для образования математических моделей, обозначения объектов и понятий в речи:

- 1) понятия, связанные с наблюдением математической действительности,
- 2) понятия, связанные с конструированием языковых объектов для дальнейшей познавательной деятельности,
- 3) понятия, связанные с исследованием математической действительности,
- 4) понятия, связанные с обобщением,
- 5) понятия, связанные с математическим творчеством

Анализируя процесс абстрагирования, приводящий к формированию понятий содержательной математики, мы отметили абстрактность математического термина, отсутствие в большинстве случаев «чувственных впечатлений», связанных с данным математическим термином, превращение слова (математического термина), его фонетического звучания «в особый чувственно воспринимаемый предмет» [10].

Выделенная специфика школьного математического языка, отражающая особенности математики как науки, специфику математических объектов, послужила основой для создания методической системы, направленной на достижение понимания математики школьниками, в частности учащимися 1-6-х классов. Этот возраст был определен нами по ряду причин. Во-первых, в это время закладывается фундамент дальнейшего обучения математике. От усвоения понятий учащимися во многом зависит их общее ориентирование в математической деятельности, что существенно влияет на последующее продвижение школьников в этой области знаний. Во-вторых, за каждым знаком, термином изучаемого в этом возрасте математического понятия стоит отрезок реальной действительности, моделью которого служит соответствующий математический объект. Построенные модели в дальнейшем, при изучении формальной математики, будут служить базой для интерпретации формальных знаковых конструкций. В-третьих, непонимание школьниками источника математических понятий, некоторая видимая свобода создания математических объектов путем конструирования их имен, приводит к формализму в знаниях учащихся, зазубриванию учениками определений понятий. В-четвертых, большинство понятий, изучаемых в 1-6-х классах, используются в повседневной жизни. «Количество», «множество», «непрерывность», «число», «область», «равенство» — понятия не только математические, но и онтологические, они необходимы для нормальной ориентации человека во внешнем мире, для систематизации данных опыта. Эта особенность первичных математических понятий создает у школьника иллюзию «понятности» термина, взятого вне его научного определения, но зачастую смысл, вкладываемый в него окружающими детей взрослыми, отличен от математического значения. В-пятых, именно в данный возрастной период у учащихся может сформироваться стойкая положительная познавательная мотивация по отношению к данному школьному курсу или, наоборот, «обученная беспомощность», которая не позволит далее успешно постигать школьный курс алгебры и геометрии.

На базе разработанной концепции были сформулированы принципы отбора конкретного содержания для создания учебных ситуаций, обеспечивающих через выявление и раскрытие школьниками специфики математического языка достижение более глубокого и осознанного понимания изучаемого содержания.

1. *Принцип учета специфики используемого математического языка* в отборе вопросов для обсуждения. В частности, для раскрытия значения терминов, обозначающих понятия содержательной математики, особо важно создание наглядного и двигательного образа как необходимого условия понимания и использования термина, «собрание» разнообразных свойств объектов, принадлежащих объему соответствующего понятия, извлеченных из учебного и жизненного опыта учеников. При работе с терминами, обозначающими понятия формальной математики, необходимо учитывать, что объекты, принадлежащие объемам этих понятий, представляют собой языковые объекты, образованные по формальным пра-

вилам из знаков алфавита языка. Поэтому владение соответствующим термином предполагает знание учащимися формальных правил конструирования математических объектов, умение путем конструирования привести пример объекта, принадлежащего объему понятия, понимание цели формальных преобразований языковых объектов. Необходимо учитывать двойственность знаковых систем как имен математических моделей реальных явлений, процессов и как языковых объектов формальной математики, записанных посредством знаков алфавита по формальным правилам.

2. *Принцип раскрытия психологических особенностей выражения мысли на математическом языке.* Эти особенности связаны с иной, чем в естественном языке, понятийной системой.

3. *Принцип множественности математических языков* для выражения математического факта и использования в познавательной деятельности. Организация на уроке деятельности по прямому и обратному переводу сообщения с естественного языка на различные метаязыки позволяет уже на первых ступенях обучения показать учащимся психологические особенности выражения мысли на строгом математическом языке, познакомить их с одной из процедур обретения смысла — переводом.

4. *Принцип дифференциации смысла терминов и знаков языка содержательной математики.* Данный принцип основан на анализе работ психологов и психолингвистов Дж.Брунера, А.А.Залевской, Д.А.Норман, Н.И.Чуприковой [11-14], которые утверждают, что постижение смысла математических терминов в языке содержательной математики должно идти от раскрытия смысла «комплексного сигнала, включающего в себя слово». Для понимания учащимися математического языка необходимо включать термины в разнообразные контексты, в разнообразные схемы знаний о мире, и в результате анализа целостного восприятия отрезка окружающей действительности происходит осмысление учащимися значения термина.

5. *Принцип обмена субъективным опытом в диадах «ученик — учитель» и «ученик — ученик».* Необходимо организовать на уроке непосредственное общение учащихся, обмен их своим субъективным опытом, в ходе которого ими постигаются внутренние связи, отношения исследуемых предметов, явлений, формируется система понятий, где элементы находятся в связях друг с другом и образуют целостность, единство, обладающее определенной иерархической структурой. Кроме того, использование диалога на этапе изучения содержательной математики представляется важным в связи со спецификой используемого при этом математического языка — понятия содержательной математики не определяются, а *разъясняются* значения соответствующих терминов, употребление математических терминов в разнообразных контекстах является и показателем, и *средством* достижения понимания математики учащимися.

Средством, организующим диалог для раскрытия специфических особенностей математического языка, служит система проблемных вопросов на этапе изучения понятий первого уровня выделенной нами иерархии математических понятий — реальной ситуации, моделью которой служит рассматриваемый математический объект, имеющий в математическом языке данное имя, и на этапе изучения понятий второго уровня — элементов математического языка, в частности слов, предложений языка, текстов, через которые могут быть раскрыты специфические особенности математического языка, влияющие на понимание математики школьниками.

6. *Принцип создания ситуации успеха при изучении математического языка.* Предложенная концепция и условия ее реализации легли в основу методической системы, направленной на создание учебных ситуаций, в которых реализуются условия для достижения учащимися понимания математики через выявление и раскрытие специфики математического языка. Для создания учебных ситуаций используется система проблемных вопросов; реализация учебных ситуаций осуществляется через процедуры диалога, перевода с одного математического языка на другой, через интерпретацию математического факта явлениями и процессами реальной или идеальной (математической) действительности.

Преимуществом предлагаемой методической системы является то, что ее использование не связано с изменениями учебных программ и не требует изменений содержания школьных учебников.

Внедрение данной методики позволило:

- создать условия, способствующие достижению учащимися понимания математических фактов через раскрытие специфики математического языка;
 - организовать на уроке диалог «учитель — ученик», «ученик — ученик», в ходе которого возможно достижение понимания изучаемого содержания;
 - раскрыть психологические особенности выражения мысли на математическом языке;
 - подготовить учащихся к усвоению элементов формальной математики в курсе алгебры 7-8-х классов.
-

1. Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика. М.: Наука, 1991. 240 с.
2. Дорофеев Г.В. Язык преподавания математики и математический язык // Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. статей. / Сост. Н.С.Антонов, В.А.Гусев. М.: Просвещение, 1985. С.38-47; Дорофеев Г.В. // Математика в школе. 1999. №6. С.41-43.
3. Крейдлин Г.Е., Шмелев Д.А. // Математика в школе. 1989. №3. С.39-45.
4. Миракова Т.И. // Математика в школе. 1989. №1. С.64-72.
5. Колмогоров А.Н. Научные основы школьного курса математики // Математика в школе. 1969. №3. С.12-17; № 5. С.8-16; 1970. №2. С.27-32.
6. Клини С.К. Введение в метаматематику / Пер. с англ. А.С.Есенина-Вольпина. Под ред. В.А.Успенского. М.: ИЛ, 1957. 526 с.
7. Ветров А.А. Семиотика и ее основные проблемы. М.: Политиздат, 1968. 263 с.
8. Гамезо М.В. Автореф. дисс. ... д-ра психол. наук. М., 1977. 37 с.
9. Фреге Г. Логика и логическая семантика: Сб. тр. Уч. пособие для вузов. М.: Аспект. Пресс, 2000. 512 с.
10. Ильенков Э.В. Диалектика абстрактного и конкретного в научно-теоретическом мышлении. М.: Рос. пол-лит. энциклопедия, 1997. С.95.
11. Брунер Дж. Психология познания: за пределами непосредственной информации. М.: Прогресс, 1977. 412 с.
12. Залевская А.А. Введение в психолингвистику. Учебник для вузов. М.: Рос. гос. гуманит. ун-т, 2000. 382 с.
13. Норманн Д. Память и научение / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 159 с.
14. Чупркова Н.И. Психология умственного развития: принцип дифференциации. М.: Столетие, 1997. 480 с.