УДК 517.95

П.В.Лысухо

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

The uniqueness conditions of the locally restricted generalized entropic solution of Cauchy problem for the quasilinear first-order equation are found.

Многие математические модели, возникающие в естествознании (например, в газовой и гидродинамике, в теории транспортных потоков и т.д.), приводят к квазилинейным уравнениям первого порядка (законам сохранения), описывающим процесс временной эволюции изучаемых явлений. Поэтому актуальна проблема построения классов корректности решений таких уравнений при условии, что начальное состояние неизвестных величин задано (что соответствует задаче Коши).

Итак, рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(R^n)$, $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times R^n$, с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty_{\text{loc}}\left(R^n\right). \tag{2}$$

Предполагается, что производная $\varphi'(u)$ удовлетворяет следующему ограничению на рост:

$$|\varphi'(u)| \le \Phi(|u|), \tag{3}$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма на R^n, а Φ — возрастающая функция на $R_+ = [0, +\infty)$. Такая постановка задачи приводит к необходимости введения обобщенных решений, теория которых развита в работах С.Н.Кружкова [1]. Напомним определение обобщенного энтропийного решения задачи (1), (2) в смысле С.Н.Кружкова: локально ограниченная функция $u = u(t, x) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Pi_T)$ называется *обобщенным энтропийным решением* (о.э.р.) задачи Коши (1), (2), если

а) $\forall k \in R$ $|u - k|_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \le 0$ в смысле распределений на Π_T (в $D'(\Pi_T)$);

б) $\operatorname{ess}\lim\limits_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0$ в $L^1_{\text{loc}}\left(R^n\right)$, т.е. существует множество $\varepsilon \subset (0,T)$ полной меры Лебега, такое, что при $t \in \varepsilon$, $u(t,\cdot) \in L^1_{\text{loc}}\left(R^n\right)$ и $u(t,\cdot) \to u_0$ в $L^1_{\text{loc}}\left(R^n\right)$ при $t \to 0+$, $t \in \varepsilon$.

В [1] установлено, что существует единственное ограниченное о.э.р. задачи (1), (2) для любой начальной функции $u_0 \in L^\infty\left(R^n\right)$. Как недавно выяснилось (см. [2,3]), для более широкого класса локально ограниченных о.э.р. задача (1), (2) некорректна: ни один из положительных результатов (таких, как существование, единственность, принципы максимума) в общем случае не верен. В этой связи актуальна задача выделения классов корректности задачи Коши (1), (2) среди локально ограниченных функций, что и является целью этой работы.

В настоящей работе найдено новое ограничение на рост о.э.р., при котором о.э.р. задачи (1), (2) единственно. Это ограничение определяет следующие классы начальных функций и соответствующих о.э.р.:

$$B^0_\Phi = \left\{u_0(x) \in L^\infty_{\text{loc}}\left(R^n\right) \mid \exists C > 0,\ \Phi(|u_0(x)|) \le C(|x| + 1)\right\},$$

$$B_\Phi = \left\{u(t,x) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Pi_T) \mid \exists C = C(t) \in L^\infty_{\text{loc}}(R_+) : \Phi(|u(t,x)|) \le C(t)(|x| + 1)\right\}.$$

В случае степенной функции $\Phi(u)$ существование и единственность о.э.р. задачи (1), (2) из класса B_Φ установлены в [4]. В настоящей работе результаты [4], касающиеся единственности о.э.р., обобщаются на случай произвольной функции Φ. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $u_0(x) \in B_\Phi^0$. Тогда обобщенное энтропийное решение $u(t, x) \in B_\Phi$ задачи (1), (2) единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(t, x)$, $u_2(t, x) \in B_\Phi$ — два о. э. р. задачи (1), (2). Выберем $\tau < T$. Тогда найдется константа $C = C(\tau)$, такая, что для почти всех $(t, x) \in \Pi_\tau$

$$\Phi(|u_1(t, x)|) \le C(|x| + 1), \ \ \Phi(|u_2(t, x)|) \le C(|x| + 1). \tag{4}$$

Для выбора этой константы заметим, что по определению класса B_Φ выполнены неравенства $\Phi(|u_1(t, x)|) \le C_1(t)(|x| + 1)$ и $\Phi(|u_2(t, x)|) \le C_2(t)(|x| + 1)$ и можно положить $C = \max(\|C_1\|_\infty, \|C_2\|_\infty)$. Так как C_1 и C_2 — локально ограниченные функции и $\tau < T$, то величина C конечна.

Как показано в [1], при $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ справедливо соотношение

$$|u_1 - u_2|_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}(u_1 - u_2)\,(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))] \le 0 \text{ в } D'(\Pi_\tau). \tag{5}$$

Это соотношение доказывается известным методом «удвоения переменных» и является основой доказательства единственности ограниченного обобщенного энтропийного решения в [1]. Ввиду локальности (5) ясно, что это неравенство верно и для локально ограниченных обобщенных энтропийных решений u_1 и u_2.

Далее, как следует из (4) для почти всех $(t, x) \in \Pi_\tau$, $|x| > 1$, справедлива оценка

$$\max(\Phi(|u_1(t, x)|), \Phi(|u_2(t, x)|) \le 2C|x|.$$

С учетом условия (3) получим, что для почти всех $(t, x) \in \Pi_\tau$, $|x| > 1$,

$$|\varphi(u_2) - \varphi(u_1)| \left| \int_0^1 \varphi'((1-s)u_1 + su_2)(u_2 - u_1)ds \right| \le \int_0^1 |\varphi'((1-s)u_1 + su_2)|ds \cdot |u_2 - u_1|.$$

Оценим подынтегральную функцию.

$$|\varphi'((1-s)u_1 + su_2)| \le \Phi(|(1-s)u_1 + s_2u_2|) \le \Phi(\max|u_1|, |u_2|) \le \max(\Phi(|u_1|), \Phi(|u_2|)) \le 2C|x|,$$

так как Φ возрастает. Итак, для почти всех $(t, x) \in \Pi_\tau$, $|x| > 1$,

$$|\varphi(u_2) - \varphi(u_1)| \le 2C|x||u_2 - u_1|. \tag{6}$$

Выберем функцию $\beta(s) \in C_0^\infty(R)$, $\operatorname{supp}\beta(s) \subset [0,1]$, $\beta(s) \ge 0$, $\int \beta(s)ds = 1$, и положим при $\nu \in N$, $\nu(s) = \nu\beta(\nu s)$, $\theta_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s)ds$. Ясно, что последовательность $\delta_\nu(s)$ сходится к δ — мере Дирака в $D'(R)$ при $\nu \to \infty$; $0 \le \theta_\nu(t) \le 1$, $\theta_\nu(t) = 0$ при $t \le 0$, $\theta_\nu(t) = 1$ при $t \ge 1/\nu$ и, следовательно, последовательность $\theta_\nu(t)$ сходится поточечно при $\nu \to \infty$ к функции Хевисайда $\theta(t) = \begin{cases} 0, t \le 0, \\ 1, t > 0. \end{cases}$

Пусть $R > 0$ таково, что $r = Re^{-2C\tau} > 1$. Рассмотрим функцию $g(u) \in C_0^\infty(R_+)$ такую, что $g(u) \ge 0$, $g'(u) \le 0$ и $g(u) = 1$ при $u \in [0, R]$.

Положим далее при $0 < t_0 < t_1 < \tau$, $\nu \in N$ $\chi_\nu(t) = \theta_\nu(t - t_0) - \theta_\nu(t - t_1)$ и выберем пробную функцию $f = f(t, x) = \chi_\nu(t)p(t, x)$, где $p(t, x) = g(|x|e^{2Ct})$.

Ясно, что при достаточно больших ν $f \in C_0^\infty(\Pi_\tau)$, $f \ge 0$. Применив неравенство (5) к пробной функции f, получим после элементарных преобразований неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi\tau} |u_1 - u_2|(\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1))p(t, x)dtdx + \\ &+ \int_{\Pi\tau} [2C|x||u_1 - u_2| + \operatorname{sign}(u_1 - u_2) \times (\varphi(u_1) - \varphi(u_2), x/|x|)]e^{2Ct} g'\left(|x|e^{2Ct}\right)\chi_\nu(t)dtdx \ge 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что $|x|e^{2Ct} \le R$ при $|x| < 1$, и тогда $g'(|x|e^{2Ct}) = 0$, а при $|x| > 1$ с учетом (6)

$$|(\varphi(u_1) - \varphi(u_2), x/|x|)| \le |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \le 2C|x|\,|u_1 - u_2|.$$

Поэтому, ввиду условия $g' \le 0$, второй интеграл в (7) неположителен. Тогда из (7) следует, что $\int_{\Pi\tau} |u_1 - u_2|(\delta_\nu(t-t_0) - \delta_\nu(t-t_1))p(t_1 x)dtdx \ge 0,$ — можно переписать в виде

$$\int J(t)\delta_\nu(t-t_1)dt \le \int J(t)\delta_\nu(t-t_0)dt, \qquad (8)$$

где $J(t) = \int\limits_{R^n} | u_1(t_1,x) - u_2(t_1,x) | p(t_1,x)dx$.

Пусть $E \subset (0,\tau)$ — множество полной меры точек Лебега функции $J(t)$. Тогда при $t_0, t_1 \in E$ из (8) в пределе при $\nu \to \infty$ следует, что $J(t_1) \le J(t_0)$. Далее из начального условия вытекает соотношение

$$\underset{t_0 \to 0}{ess \lim} J(t_0) = \int\limits_{R^n} | u_0(x) - u_0(x) | p(0,x)dx = 0,$$

и из (8) следует, что $\forall t = t_1 \in E \quad J(t) = \int\limits_{R^n} |u_1 - u_2| p(t,x)dx = 0$, т.е. $u_1(t,x) - u_2(t,x)| \, p(t, x) = 0$ почти всюду в Π_τ. Поэтому $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ для почти всех $(t, x) \in \Pi_\tau$ таких, что $|x| < r = Re^{-2C\tau}$ и ввиду произвольности $r > 1$, $\tau \in (0, T)$ $u_1 = u_2$ почти всюду в Π_T. Таким образом, обобщенное энтропийное решение задачи (1), (2) единственно. Теорема доказана.

Отметим, что исследование именно неограниченных решений представляют не только теоретический, но и практический интерес, например — в динамике взрывных процессов.

1. Кружков С.Н. // Мат. сб. 1970. Т.81. №2. С.228-255.
2. Goritsky A.Yu., Panov E.Yu. // Russian J. of Math. Physics. 1999. Vol.6. №4. P.492-494.
3. Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю. // Тр. МИ РАН им. В.А.Стеклова. 2002. Т.236. С.120-133.
4. Panov E.Yu. On Correctness Classes of Locally Bounded Generalized Entropy Solutions to Cauchy Problem for First Order Quasilinear Equations — http://www.math.ntnu.no/conservation/2005/002.html