

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



УДК 66.015.2:536.24

А.Г.Муравьев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ СОИЗМЕРИМЫХ ФАЗОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ НА ЧАСТИЦЕ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

The model of joint passing of the heat- and mass transfer under commensurable phase resistance on the basis of the known model of the heat- or mass transfer inside the particle of the disperse phase is constructed. In case of the interphase transfer of one component the dimensionless mean temperature on the particle volume depends on time and four other parameters. The given relations are presented for parameter values specific for the cases when the particle of the disperse phase is a drop moving in a layer of gas, or a bulb, moving in a layer of liquid.

Одним из способов математического моделирования процессов тепло- и массопереноса в дисперсных слоях является решение задачи переноса на твердой частице, пузырьке или капле (в дальнейшем будем называть единичное включение дисперсной фазы частицей) с последующим осреднением полученных результатов по слою. В настоящее время созданы и широко применяются модели тепло- или массопереноса внутри частицы дисперсной фазы, когда движением в ней можно пренебречь [1], когда движение носит циркуляционный [2] и турбулентный характер [3]. Эти модели разработаны для случая, когда все сопротивление переносу сосредоточено в дисперсной фазе, т.е. получено решение дифференциального уравнения тепло- или массопереноса внутри частицы при граничных условиях первого рода на ее поверхности. Для того, чтобы получить решение того же уравнения при граничных условиях третьего рода, т.е. для случая соизмеримых фазовых сопротивлений, был разработан метод [4-6], основанный на применении формулы Дюамеля и интегральных балансовых соотношений потоков тепла и массы на поверхности частицы. В данной работе строится модель совместного протекания тепло- и массообмена на частице при соизмеримых фазовых сопротивлениях с учетом теплового эффекта межфазного перехода.

Пусть в общем случае дисперсная и сплошная фазы содержат m компонентов. Далее будем обозначать эти компоненты индексом i . Начальная мольная доля компонентов внутри частицы x_{di0} , вдали от частицы в сплошной фазе $x_{ci\infty}$, а также начальная температура частицы T_0 и температура вдали от частицы в сплошной фазе T_∞ считаются постоянными и заданными. Предполагается, что мольные доли компонентов на поверхности частицы в дисперсной x_{dif} и сплошной x_{cif} фазах зависят только от времени и связаны между собой равновесной зависимостью $x_{cif} = m_i x_{dif}$, где m_i — константа фазового равновесия. Температура на поверхности T_f зависит только от времени. Тепло- и массоперенос в сплошной фазе описываются с помощью осредненных по поверхности частицы коэффициентов теплоотдачи α и массоотдачи β , которые считаются постоянными. Стефанов поток не учитывается. Необходимо определить, как меняются со временем средние по объему частицы температура T_{cp} и мольные доли компонентов x_{disp} .

Если k -й компонент присутствует только в одной из фаз, и межфазная поверхность для него непроницаема, то необходимость решения дифференциального уравнения массо-

переноса для данного компонента теряет смысл. Назовем эти компоненты инертными и исключим их из дальнейшего рассмотрения. Следует учесть, что если внутри частицы инертные компоненты отсутствуют, то там выполняется условие $\sum_{i=1}^m x_{di} = 1$, которое позволяет

также уменьшить на единицу количество дифференциальных уравнений массопереноса в дисперсной фазе. Пусть число оставшихся компонентов n .

Далее перейдем к формулировке задачи в безразмерном виде. Введем безразмерные временные аргументы t_T, t_i для функций, описывающих соответственно изменение температуры и мольных долей компонентов внутри частицы $t_T = a_d \tau / R^2, t_i = D_{di} \tau / R^2, i = 1, 2, \dots, n$, где τ — время; a_d — коэффициент температуропроводности внутри частицы; D_{di} — коэффициент диффузии компонента i в дисперсной фазе; R — характерный размер частицы (для сферических частиц это радиус).

Затем необходимо так определить безразмерные средние по объему частицы температуру Φ_T и мольные доли компонентов Φ_i , чтобы их начальные значения были равны нулю $\Phi_T = (T_{cp} - T_0) / (T_\infty - T_0); \Phi_i = (x_{disc} - x_{di0}) / ((x_{cic} / m_i - x_{di0}))$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом на поверхности частицы безразмерные мольные доли компонентов Φ_{if} и безразмерная температура Φ_{Tf} будут определяться выражениями $\Phi_{if} = (x_{dif} - x_{di0}) / ((x_{cic} / m_i - x_{di0}))$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\Phi_{Tf} = (T_f - T_0) / (T_\infty - T_0)$.

Теперь можно воспользоваться формулой Дюамеля [7], которая для функций Φ_i и Φ_T после осреднения по объему частицы будет иметь вид

$$\Phi_i = \frac{\partial}{\partial t_i} \int_0^{t_i} \Phi_{if}(\lambda) \Phi_{i0}(t_i - \lambda) d\lambda; \Phi_T = \frac{\partial}{\partial t_T} \int_0^{t_T} \Phi_{Tf}(\lambda) \Phi_{T0}(t_T - \lambda) d\lambda. \quad (1)$$

Функции Φ_{i0} и Φ_{T0} определяются при решении внутренней задачи для известных моделей массо- и теплопереноса в частице, (см., напр., [1-3]). Если дифференциальные уравнения переноса тепла и массы внутри частицы решаются методом Фурье, и для частиц одинаковых размеров его можно описать в рамках одной и той же модели, то функции Φ_{i0} и Φ_{T0} можно представить в следующем виде:

$$\Phi_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(-\mu_j t_i), i = 1, 2, \dots, n; \Phi_{T0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(-\mu_j t_T), \quad (2)$$

где A_j и μ_j — постоянные коэффициенты, определяемые в рамках конкретной модели.

Связь между величинами Φ_{if} и Φ_i можно получить, если учесть, что изменение количества компонента i в частице в единицу времени равно потоку этого компонента, проходящего через межфазную поверхность. Данное соотношение можно представить в безразмерном виде следующим образом:

$$\Phi_{if} = 1 - \gamma_i (d\Phi_i / dt_i), \quad (3)$$

где $\gamma_i = D_{di} C_d / 3 C_c m_i R \beta_i$, C_d, C_c — мольные концентрации в дисперсной и сплошной фазах соответственно.

Связь между величинами Φ_{Tf} и Φ_T можно получить, если учесть, что изменение средней температуры частицы в единицу времени определяется тепловым потоком, движущимся от межфазной поверхности вглубь дисперсной фазы, а он в свою очередь представляет собой алгебраическую сумму количества тепла, выделяющегося или поглощающегося в единицу времени при переходе компонентов из одной фазы в другую через поверхность частицы и теплового потока, идущего на нагрев сплошной фазы. Данное балансовое соотношение можно представить в безразмерном виде следующим образом:

$$\Phi_{Tf} = 1 - (1/3Bi)(d\Phi_T / dt_T) + \sum_{i=1}^n \gamma_{iT} (1 - \Phi_{if}), \quad (4)$$

где $\gamma_{iT} = \frac{C_e \beta_i (x_{ci0} - m_i x_{di0})}{\alpha(T_\infty - T_0)} r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; $Bi = \alpha R / \lambda_d$ — число Био; λ_d — теплопровод-

ность в дисперсной фазе; r_i — удельная мольная теплота, выделяющаяся при переходе компонента i из сплошной в дисперсную фазу.

После подстановки в формулы (1) выражений (2)-(4) получается система интегродифференциальных уравнений для определения функций Φ_i и Φ_T :

$$\Phi_i = \int_0^{t_i} \left(1 - \gamma_i \frac{d\Phi_i}{d\lambda} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \mu_j \exp(-(t_i - \lambda) \mu_j) \right) d\lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5)$$

$$\Phi_T = \int_0^{t_T} \left(1 - \frac{1}{3Bi} \frac{d\Phi_T}{d\lambda} + \sum_{i=1}^n \gamma_{iT} (1 - \Phi_{iT}) \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \mu_j \exp(-(t_T - \lambda) \mu_j) \right) d\lambda. \quad (6)$$

Эти уравнения решаются с помощью преобразования Лапласа. После несложных алгебраических преобразований изображение функции Φ_i можно представить следующим образом:

$$F_i(\sigma) = \frac{\frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \mu_j}{\sigma + \mu_j}}{1 + \gamma_i \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \mu_j}{\sigma + \mu_j}}. \quad (7)$$

Это выражение представляет собой дробную рациональную функцию, которую можно разложить на элементарные дроби, определив предварительно корни полинома, стоящего в знаменателе. Обозначим эти корни $-v_{ij}$. Тогда функцию $F_i(\sigma)$ можно представить в виде суммы элементарных дробей:

$$F_i(\sigma) = \frac{C_0}{\sigma} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{ij}}{\sigma + v_{ij}}, \quad (8)$$

где C_0, C_{ij} — коэффициенты, которые можно найти следующим образом. Так как выражения (7) и (8) равны при любых значениях переменной σ , то умножим их правые части на σ и приравняем при $\sigma = 0$. Коэффициент C_0 принимает значение 1. Коэффициенты C_{ij} находятся аналогично. Для этого нужно умножить правые части выражений (7) и (8) на $\sigma + v_{ij}$ и приравнять их при $\sigma = -v_{ij}$.

$$C_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{1 - \frac{v_{ij}}{\mu_k}} \right] \left(1 - \frac{v_{ij}}{\mu_j} \right) \left[\prod_{m=1}^{j-1} \frac{1 - \frac{v_{ij}}{\mu_m}}{1 - \frac{v_{ij}}{\mu_j}} \right] \left[\prod_{m=j+1}^{\infty} \frac{1 - \frac{v_{ij}}{\mu_m}}{1 - \frac{v_{ij}}{\mu_j}} \right]. \quad (9)$$

После обратного преобразования Лапласа получим

$$\Phi_i = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \exp(-v_{ij} t_i); \quad \Phi_{iT} = 1 - \gamma_i \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} v_{ij} \exp(-v_{ij} t_i). \quad (10)$$

Теперь значения Φ_{iT} из выражения (10) подставляются в уравнение (6) с заменой аргументов t_i на t_T :

$$\Phi_T = \int_0^{t_T} \left(1 - \frac{1}{3Bi} \frac{d\Phi_T}{d\lambda} + \sum_{i=1}^n \gamma_{iT} \gamma_i \frac{a_d}{D_{di}} \frac{d\Phi_i}{d\lambda} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \mu_j \exp(-(t_T - \lambda) \mu_j) \right) d\lambda.$$

Затем полученное уравнение решается так же, как уравнение (6). Изображение функции Φ_T можно представить в следующем виде:

$$F_T(\sigma) = \frac{\left(\frac{1}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \gamma_{iT} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{ij} v_{ij}}{\sigma + v_{ij} \frac{D_{di}}{a_d}} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \mu_j}{\sigma + \mu_j}}{1 + \frac{1}{3Bi} \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \mu_j}{\sigma + \mu_j}}.$$

Очевидно, что в совокупность корней полинома, стоящего в знаменателе дробной рациональной функции $F_T(\sigma)$ входят как корни $-v_{ij} D_{di}/a_d$, так и дополнительные корни $-\eta_j$, которые находятся при решении относительно σ уравнения

$$1 + \frac{1}{3Bi} \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j \mu_j}{\sigma + \mu_j} = 0.$$

Тогда функцию $F_T(\sigma)$ можно также представить в виде суммы элементарных дробей следующим образом:

$$F_T(\sigma) = \frac{E_0}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_{ij}}{\sigma + v_{ij} \frac{D_{di}}{a_d}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j}{\sigma + \eta_j},$$

где E_0, E_{ij}, D_j — постоянные коэффициенты. Эти коэффициенты можно найти в соответствии с изложенным выше методом. Коэффициент $E_0 = 1$, а E_{ij} и D_j можно представить в следующем виде:

$$D_j = \left(1 - \eta_j \sum_{i=1}^n \gamma_i \gamma_{iT} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{ik}}{D_{di} - \frac{\eta_j}{v_{ik}}} \right) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{1 - \frac{\eta_j}{\mu_m}} \left(1 - \frac{\eta_j}{\mu_j} \right) \prod_{p=1}^{j-1} \frac{1 - \frac{\eta_j}{\mu_p}}{1 - \frac{\eta_j}{\eta_p}} \prod_{p=j+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta_j}{\mu_p} \right) \left(1 - \frac{\eta_j}{\eta_p} \right) \right]; \quad (11)$$

$$E_{ij} = -\gamma_i \gamma_{iT} C_{ij} v_{ij} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{1 - \frac{D_{di} v_{ij}}{a_d \mu_k}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{D_{di} v_{ij}}{a_d \mu_m}}{1 - \frac{D_{di} v_{ij}}{a_d \eta_m}} \right]. \quad (12)$$

После обратного преобразования Лапласа определяемая функция Φ_T примет вид

$$\Phi_T = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} D_j \exp(-\eta_j t_T) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij} \exp(-v_{ij} D_{di} t_T / a_d). \quad (13)$$

В рамках построенной модели протекание процесса массопереноса зависит от коэффициентов, входящих в решение внутренней задачи и параметра γ . Для упомянутых выше моделей массопереноса внутри частицы [1-3] полученное решение анализировалось ранее [4,8,9]. В данной работе будет проанализировано влияние соответствующих параметров на протекание процесса теплопереноса.

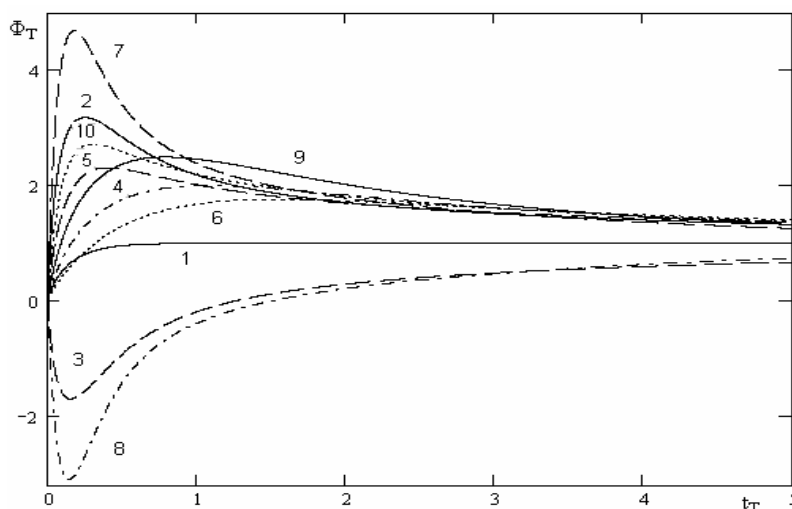
Возьмем случай, когда рассматривается массоперенос только одного компонента. Индекс i , характеризующий номер компонента, при этом отбросим. Если ввести число Льюиса $Le = D_d/a_d$ и обозначить $\delta = \gamma \gamma_T$, то, анализируя полученное решение, можно сделать вывод, что изменение с течением времени средней безразмерной температуры внутри частицы при совместном протекании процессов тепло- и массопереноса при соизмеримых фазовых сопротивлениях зависит от четырех независимых параметров γ, Bi, Le, δ . Параметры γ и Bi характеризуют соотношение фазовых сопротивлений при массопереносе и теплопереносе соответственно. Число Льюиса Le характеризует соотношение интенсивности

протекания процессов теплопереноса и массопереноса внутри частицы. Параметр δ характеризует влияние массопереноса на теплоперенос. Из соотношений (11)-(13) следует, что функция Φ_T зависит от параметра δ линейно. При этом нужно учесть, что этот параметр может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от характера процесса и условий его проведения.

Кроме того, поведение функции Φ_T зависит от решения внутренней задачи тепло- и массопереноса, которое определяется совокупностью констант A_j, μ_j . В данной работе анализ поведения функции Φ_T будет проведен на примере двух моделей, которые наиболее часто используются при описании процессов переноса в дисперсных системах. Первая модель соответствует случаю отсутствия движения внутри частицы. Для массопереноса эта модель получила название модели Ньюмена [1]. Вторая модель, получившая название модели Кронига — Бринк [2], описывает явления переноса тепла и массы внутри частицы при развитой циркуляции и больших числах Пекле.

Проанализируем полученное решение при значениях параметров процесса, когда частица дисперсной фазы является каплей, движущейся в слое газа, или пузырьком, движущимся в слое жидкости. Такие дисперсные системы часто встречаются в аппаратах испарительного охлаждения, абсорбции, ректификации и т. д.

Для капли возьмем число Льюиса $Le = 0,015$. В этом случае процессы теплопереноса в капле протекают значительно более интенсивно, чем процессы массопереноса. Графики зависимостей Φ_T от t_T при различных значениях параметров γ, Bi, δ и различных моделях переноса тепла и массы внутри капли представлены на рис.1. Параметр γ принимает значения 0,005 и 0,03. При $\gamma = 0,005$ значительная доля фазового сопротивления массопереносу содержится в дисперсной фазе, при $\gamma = 0,03$ сопротивления соизмеримы. Параметр Bi принимает значения 0,5 и 4. При $Bi = 0,5$ преобладает доля фазового сопротивления теплопереносу в сплошной фазе, при $Bi = 4$ сопротивления соизмеримы. Здесь и далее доли фазовых сопротивлений в процессах массопереноса и теплопереноса оценивались по соотношениям перепадов концентраций и температур в фазах. Пусть параметр δ принимает значения $-1, 0, +1$; $\delta = 0$ соответствует случаю отсутствия влияния массообме-



на на теплообмен.

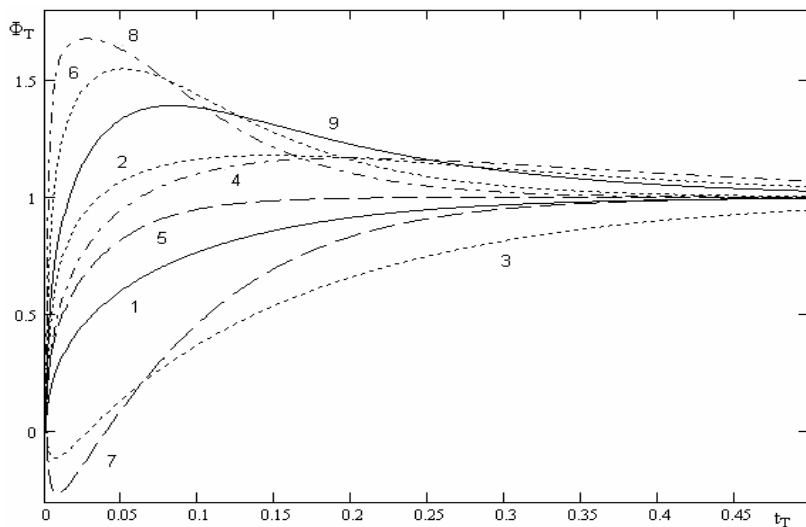
Рис.1. Зависимость Φ_T от t_T при $Le = 0,015$. Отсутствие циркуляции внутри частицы: 1 — $Bi = 4, \delta = 0$; 2 — $\gamma = 0,005, Bi = 4, \delta = 0,1$; 3 — $\gamma = 0,005, Bi = 4, \delta = -0,1$; 4 — $\gamma = 0,005, Bi = 0,5, \delta = 0,1$; 5 — $\gamma = 0,03, Bi = 4, \delta = 0,1$; 6 — $\gamma = 0,03, Bi = 0,5, \delta = 0,1$. Развитая циркуляция внутри частицы: 7 — $\gamma = 0,005, Bi = 4, \delta = 0,1$; 8 — $\gamma = 0,005, Bi = 4, \delta = -0,1$; 9 — $\gamma = 0,005, Bi = 0,5, \delta = 0,1$; 10 — $\gamma = 0,03, Bi = 4, \delta = 0,1$

Анализируя зависимости, представленные на рис.1, можно заметить следующее. Не-

смотря на то, что процессы теплопереноса в капле проходят значительно более интенсивно, чем процессы массопереноса, температура в капле приближается к равновесному значению по мере того, как приближается к равновесному значению концентрация. При этом процесс теплопереноса можно разделить на две стадии. На первой стадии температура капли меняется достаточно быстро. При этом в зависимости от значений параметров и характера теплопереноса внутри капли может достигаться экстремальное значение температуры, превышающее значение температуры в сплошной фазе. На графике это отражается в виде наличия соответствующего пика. При использовании модели с более интенсивным теплопереносом в дисперсной фазе (в нашем случае модель Кронига — Бринка для внутренней задачи) высота указанного пика увеличивается. Временная протяженность первой стадии близка к времени протекания процесса теплопереноса при отсутствии влияния на него массопереноса.

На второй стадии процесса теплопереноса происходит достаточно медленное изменение температуры капли при стремлении ее к значению температуры в сплошной фазе. Временная протяженность этой стадии определяется временем протекания процесса массопереноса.

Для анализа процесса тепломассопереноса на пузырьке, движущемся в потоке жидкости, возьмем $Le = 0,76$, $Bi = 450$. Для данного значения числа Био все сопротивление теплопереносу можно считать сосредоточенным в дисперсной фазе. Графики зависимостей Φ_T от t_T при различных значениях параметров γ , δ и различных моделях переноса тепла и массы внутри пузырька представлены на рис. 2. Параметр γ при отсутствии циркуляции внутри пузырька принимает значения 0,03 и 0,08. При $\gamma = 0,03$ значительная доля фазового сопротивления массопереносу содержится в дисперсной фазе, при $\gamma = 0,08$ сопротивления соизмеримы. Для случая развитой циркуляции параметр γ принимает значения 0,01; 0,03 и 0,08. При $\gamma = 0,01$ значительная доля фазового сопротивления массопереносу содержится в дисперсной фазе, при $\gamma = 0,08$ — в сплошной фазе, а при $\gamma = 0,03$ сопротивления соизмеримы.



Параметр δ принимает значения $-1, 0, +1$.

Рис. 2. Зависимость Φ_T от t_T при $Le = 0,76$, $Bi = 450$. Отсутствие циркуляции внутри частицы: 1 — $\delta = 0$; 2 — $\gamma = 0,03$, $\delta = 0,1$; 3 — $\gamma = 0,03$, $\delta = -0,1$; 4 — $\gamma = 0,08$, $\delta = 0,1$. Развитая циркуляция внутри частицы: 5 — $\delta = 0$; 6 — $\gamma = 0,03$, $\delta = 0,1$; 7 — $\gamma = 0,03$, $\delta = -0,1$; 8 — $\gamma = 0,01$, $\delta = 0,1$; 9 — $\gamma = 0,08$, $\delta = 0,1$.

Поскольку значение числа Льюиса не сильно отличается от единицы, скорости протекания процессов теплопереноса и массопереноса в пузырьке близки. Поэтому, в отличие от капли, для пузырька отсутствуют ярко выраженные стадии протекания процесса теплопереноса. Наличие циркуляции внутри пузырька ускоряет процесс теплопереноса. Это особенно хорошо видно при сравнении кривых 1 и 5, для которых $\delta = 0$, т. е. отсутствует влия-

ние массопереноса на теплоперенос. Для пузырька так же, как и для капли, в зависимости от величины и знака параметра δ на графике зависимости Φ_T от t_T может появиться пик, содержащий максимум или минимум. Высота этого пика так же, как и для капли, увеличивается при увеличении параметра δ и при уменьшении параметра γ .

Итак, построена модель совместного протекания тепло- и массообмена на частице при соизмеримых фазовых сопротивлениях, с учетом теплового эффекта межфазного перехода, если известно решение внутренней задачи тепло- или массопереноса. Теплоперенос в сплошной фазе описывается с помощью коэффициента теплоотдачи, массоперенос — с помощью коэффициентов массоотдачи. В случае межфазного переноса одного компонента на временную зависимость безразмерной температуры влияют коэффициенты, входящие в решение внутренней задачи и четыре параметра γ , Bi , Le , δ . Приведены и проанализированы зависимости Φ_T от t_T для различных значений параметров γ , Bi , Le , δ , характерных для случаев, когда частица дисперсной фазы является каплей, движущейся в слое газа, или пузырьком, движущемся в слое жидкости.

1. Newman A.B. // Trans. AIChE. 1931. V.27. P.310-332.
2. Kronig R., Brink J.C. // Appl. Sci. Res. 1950. V.A2. N 2. P.142-148.
3. Handlos A., Baron T. // AIChE Journ. 1957. V.3. N 1. P.127-136.
4. Муравьев А.Г., Протодяконов И.О., Размолодин Л.П., Коротков А.Л. // ЖПХ. 1985. Т.58. №8. С.1799-1803.
5. Муравьев А. Г. // Деп. в ВИНТИ №2409-B90 от 07.05.90. 14 с.
6. Муравьев А.Г. // Вестник НовГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. 1999. №13. С.21-24.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 832 с.
8. Лыков А.В. Теплообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.
9. Муравьев А.Г. // Математическое моделирование и цифровая обработка изображений: Межвуз. сб. Новгород: НПИ, 1991. С.29-34.