

Контрольные работы по высшей математике
для студентов заочной формы обучения
(второй семестр)

Контрольная работа №3

Задание 1. Найти неопределенные интегралы.

Вариант 1. а) $\int x \cos 3x dx$ б) $\int \sin 2x \cos^2 x dx$ в) $\int \frac{3x^3+1}{x^2+4x-5} dx$

г) $\int \frac{1}{\sqrt{10x-x^2}} dx$

Вариант 2. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 4)}$ б) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ в) $\int (3x+5) \cos 2x dx$

г) $\int \cos^3 5x dx$

Вариант 3. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9\ln^2 x}}$ б) $\int \arcsin 3x dx$ в) $\int \frac{x^2+5}{x^2+2x-8} dx$

г) $\int \cos 6x \cos 4x dx$

Вариант 4. а) $\int (2x+1) \sin x dx$ б) $\int \frac{2x+1}{x^2-x} dx$ в) $\int \frac{4x}{\sqrt{16+10x+x^2}} dx$

г) $\int \sin^4 4x dx$

Вариант 5. а) $\int \frac{\arcsin^2 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ б) $\int \frac{dx}{\cos 2x}$ в) $\int \frac{x^3+2x^2+3}{x^2-x-2} dx$

г) $\int (3x+2) \sin 2x dx$

Вариант 6. а) $\int e^x \sqrt{e^x+2} dx$ б) $\int \frac{2x}{3x^2+x-4} dx$ в) $\int (2x+7) \sin 2x dx$

г) $\int \sin 4x \cos 7x dx$

Вариант 7. а) $\int \sqrt{2x+3} dx$ б) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$ в) $\int \frac{2x^2+5x+3}{x^2+9} dx$

г) $\int (5x+6) \cos 3x dx$

Вариант 8. а) $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$ б) $\int \frac{\ln x}{x^2 \sqrt{x}} dx$ в) $\int \frac{x^3+x+3}{x^2-1} dx$

г) $\int \cos^3 5x dx$

Вариант 9. а) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{9-4^x}}$ б) $\int \sin^4 x dx$ в) $\int \frac{3x^2+x+5}{x^2+2x} dx$

г) $\int \frac{\ln x}{x^3 \sqrt{x}} dx$

Вариант 10. а) $\int \frac{1-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ б) $\int e^{2x}(3x+2)dx$ в) $\int \frac{x^2+x+2}{x^2+2x+1} dx$
 г) $\int \sin 7x \cdot \sin 2x dx$

Задание 2. Вычислить определенные интегралы

Вариант 1	$\int_0^8 \sqrt{1+x} dx$
Вариант 2	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$
Вариант 3	$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 4x dx$
Вариант 4	$\int_0^1 x \arctg x dx$
Вариант 5	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$
Вариант 6	$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$
Вариант 7	$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$
Вариант 8	$\int_0^{0,5} \arcsin x dx$
Вариант 9	$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$
Вариант 10	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Задание III.

Вариант 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = (x+1)^2$ и $y^2 = x+1$.

Вариант 3. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox .

Вариант 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a \cos 3\varphi$, заданной в полярной системе координат.

Вариант 5. Найти длину одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.

Вариант 6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 7. Вычислить объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

Вариант 8. Вычислить объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

Вариант 9. Вычислить объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y = 0$, вокруг оси Oy .

Вариант 10. Вычислить объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, вокруг оси Oy .

Функции многих переменных

Задание IV.

Вариант 1. Дана функция $z = xy + x \sin \frac{y}{x}$. Показать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Вариант 2. Дана функция $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$. Показать, что

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - yx \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

Вариант 3. Дана функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Вариант 4. Дана функция $z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}$. Показать, что $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

Вариант 5. Дана функция $z = \sin^2(y - ax)$. Показать, что $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Вариант 6. Дана функция $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Вариант 7. Дана функция $z = \frac{\sin(x - y)}{x}$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Вариант 8. Дана функция $z = y^2 - x^2 + y \ln \frac{x}{y}$. Показать, что

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 + y^2.$$

Вариант 9. Дана функция $z = \cos y + (y - x) \sin y$. Показать, что

$$(x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Вариант 10. Дана функция $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$. Показать, что

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0.$$

Контрольная работа №4

Дифференциальные уравнения. Числовые и функциональные ряды

Задание I.

Решить дифференциальное уравнение или решить задачу Коши, если указаны начальные условия.

Вариант 1	а) $y' = \frac{3x+2y}{2x-3y}$	б) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$
Вариант 2	а) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$	б) $y'' - \frac{y'}{x} = xe^x$
Вариант 3	а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$	б) $y'' y^3 = 1$
Вариант 4	а) $y' - 2\frac{y}{x} + x = 0$	б) $y'' x \ln x - y' = 0$
Вариант 5	а) $y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2}$	б) $y''(y-1) = 2(y')^2$
Вариант 6	а) $y' + \frac{2x-5}{x^2} y = \frac{5}{x^4}$	б) $xy'' + y' = 1$
Вариант 7	а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$	б) $y'' - \frac{y'}{x} = \sqrt{x}$
Вариант 8	а) $y' = \frac{y}{x-y}$	б) $y'' y^3 + 1 = 0$
Вариант 9	а) $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$	б) $y'' - \frac{y'}{x} = -\frac{1}{x^2}$
Вариант 10	а) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$	б) $y'' \operatorname{tg} x = 2y'$
Вариант 11	а) $y' = y + x$	б) $yy'' = 1 + (y')^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$
Вариант 12	а) $xy' + y - e^x = 0$, $y(\ln 2) = 1$	б) $yy'' = 1 + (y')^2$
Вариант 13	а) $y' + y = \cos x$,	б) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$,

	$y(0) = 0,5$	$y(0) = 0, y'(0) = 3$
Вариант 14	а) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$ $y(0) = 0$	б) $yy'' + (y')^2 = 0$
Вариант 15	а) $y' = 2y + e^x - x,$ $y(0) = 0,25$	б) $y'' + 2x(y')^2 = 0$
Вариант 16	а) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2,$ $y(1) = 1$	б) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$
Вариант 17	а) $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2,$ $y(0) = 1$	б) $yy'' + (y')^2 = x$
Вариант 18	а) $y' = x^2 - 2x - y$	б) $(y-1)y'' = 2(y')^2$
Вариант 19	а) $xy' + y = y^2 \ln x,$ $y(1) = 1$	б) $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$
Вариант 20	а) $y' + y = 2x,$ $y(0) = -1$	б) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$
Вариант 21	а) $xy' - \frac{y}{x+1} = x,$ $y(1) = 0$	б) $y'' = e^{2y},$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$
Вариант 22	а) $y' = y - x + 1$	б) $y''y^3 = 1,$ $y(0,5) = 1, y'(0,5) = 1$
Вариант 23	а) $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$	б) $yy'' = y' + (y')^2$

Вариант 24	а) $xy^2y' - y^3 = \frac{1}{3}x^4$	б) $2yy'' = 1 + (y')^2$
Вариант 25	а) $y' + 3y = e^{-x} + e^{-3x},$ $y(0) = 1$	б) $yy'' - (y')^2 = y^2y'$
Вариант 26	а) $xy' + y = 2x \ln x + x$	б) $3y'y'' = 2y,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
Вариант 27	а) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$	б) $2y'' = 3y^2,$ $y(-2) = 1, y'(-2) = -1$
Вариант 28	а) $xy^2y' = x^2 + y^3$	б) $y''y^3 = -1,$ $y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
Вариант 29	а) $y' = -y + e^x - 2x,$ $y(0) = 0,5$	б) $y'' = 1 - (y')^2$
Вариант 30	а) $y' + y = \sin x,$ $y(0) = 1$	б) $yy'' = (y')^2$
Вариант 31	а) $y' + 2y = e^xy^2$	б) $xy'' + y' = 1$

Задание II.

Решить линейные неоднородные уравнения.

Вариант 1	1) $y'' + 2y' + 2y = \sin x + 2\cos x$ 2) $y''' + 2y'' = 3e^x + 18 + 36x$
Вариант 2	1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$ 2) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$

Вариант 3	1) $y'' - 4y' + 3y = e^x$ 2) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 25e^x + 48x$
Вариант 4	1) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$ 2) $y''' - y' = -2x$
Вариант 5	1) $y''' + y' = \cos 2x$ 2) $y''' - 2y'' = e^{2x}$
Вариант 6	1) $y'' - 4y = e^x + e^{2x}$ 2) $y''' - 2y'' + 10y' = \cos 2x$
Вариант 7	1) $y'' + 4y = e^x + \sin x$ 2) $y''' - 2y'' + y' = 2x + 1$
Вариант 8	1) $y'' - 4y' + 3y = e^x$ 2) $y^{IV} - y = \cos x$
Вариант 9	1) $y'' + 9y = \sin x$ 2) $y'' - 6y' + 5y = 2x + 1 + e^{5x}$
Вариант 10	1) $y'' + 6y' + 18y = 36x + 12$ 2) $y''' - 6y'' = \sin x + e^{6x}$
Вариант 11	1) $y'' - 6y' + 9y = \sin x + 2\cos x$ 2) $y''' + 4y' = 2x + e^x$
Вариант 12	1) $y'' - 4y' + 5y = 2x + 3$ 2) $y'' - 2y' + y = \sin x + e^x$
Вариант 13	1) $y'' - 6y' + 25y = e^{-2x}$ 2) $y'' - 10y' + 25y = \sin x \cos 2x$
Вариант 14	1) $y'' + 5y' + 6y = 24e^x + e^{-2x}$ 2) $y^{IV} - 4y''' + 4y'' = \sin x$

Вариант 15	1) $y'' - 2y' + 5y = 10x - 4$ 2) $y''' + y'' = \sin x \sin 3x$
Вариант 16	1) $y'' - 6y' + 8y = 16x - 12 + e^{2x}$ 2) $y'' - 16y' + 64y = \sin 2x + \cos 2x$
Вариант 17	1) $y'' + 8y' + 32y = 32x + 8 + 82e^x$ 2) $y''' - 8y'' = x + 2$
Вариант 18	1) $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$ 2) $y''' + 9y' = \sin x + 2x + 3$
Вариант 19	1) $y'' - 7y' + 12y = 36x - 21 + 6e^x$ 2) $y''' + 4y'' + 29y' = 2x + 3$
Вариант 20	1) $y'' + 4y' + 20y = 40x^2$ 2) $y'' - 6y' + 5y = \sin x + e^x$
Вариант 21	1) $y''' + y'' = \cos 2x$ 2) $y''' - 3y'' = e^{3x}$
Вариант 22	1) $y'' - 3y = e^x + e^{2x}$ 2) $y''' - 2y'' + 5y' = \cos x$
Вариант 23	1) $y'' + 6y = e^x$ 2) $y''' + 2y'' + y' = x + 2$
Вариант 24	1) $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ 2) $y^{IV} - y = \sin x$
Вариант 25	1) $y'' + 9y = \sin x$ 2) $y'' - 6y' + 5y = 2 + e^x$
Вариант 26	1) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ 2) $y'' - 16y' + 64y = \sin x + \cos x$

Вариант 27	1) $y'' + 8y' + 20y = 29e^x$ 2) $y''' - 6y'' = 2x + 2$
Вариант 28	1) $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$ 2) $y''' + 9y' = \sin 2x + 3$
Вариант 29	1) $y'' - 4y' + 4y = e^x$ 2) $y'' - 6y' = x$
Вариант 30	1) $y'' + 4y' + 13y = 18e^x$ 2) $y''' + 2y'' = 2x + 2$
Вариант 31	1) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ 2) $y'' + 4y' = \sin 4x + 2$

Задание III.

Исследовать сходимость числового ряда.

Вариант 1	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$
Вариант 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}}$
Вариант 3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 5}$
Вариант 4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(2n + 1)}$
Вариант 5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 1)^n}{n!}$

Вариант 6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 10 \sin n}{n^3 + n + 2}$
Вариант 7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{\sqrt{n} 3^n}$
Вариант 8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{8(n+1)!}$
Вариант 9	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^5}$
Вариант 10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)^2}$

Вариант 11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$
Вариант 12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2 + 2n + 5}$
Вариант 13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^3 + 3}$
Вариант 14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^3 n}{2^n (n+1)}$
Вариант 15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$
Вариант 16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3 + 2n + 3}$

Вариант 17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{n} 6^n}$
Вариант 18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}$
Вариант 19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2 \ln n + 3)^2}$
Вариант 20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{2n^2 + n}$
Вариант 21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n(2n+1)}$
Вариант 22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$

Вариант 23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+5}{n^3 + \sin n + 2}$
Вариант 24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{n+2} \cdot 5^n}$
Вариант 25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{n!}$
Вариант 26	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
Вариант 27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \ln n}{(n+5)^2}$

Вариант 28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$
Вариант 29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + \sqrt{n}}$
Вариант 30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 5 \cos n}{n^3 + 3}$
Вариант 31	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 4}{2n^3 + n + 3}$

Задание IV.

Найти область сходимости степенного ряда.

Вариант 1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} (x + 1)^n$
Вариант 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n$
Вариант 3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{3n - 2}}$
Вариант 4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n (n + 1)}$
Вариант 5	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$
Вариант 6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(n + 1)}$
Вариант 7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 8)^{3n}}{n^2}$

Вариант 8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$
Вариант 9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{\sqrt{2n+3}}$
Вариант 10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n n^5}{(n+1)!}$
Вариант 11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n!} (x+3)^n$
Вариант 12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+5}} (x-1)^n$
Вариант 13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{\sqrt{6n+2}}$
Вариант 14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n (n+1)}$
Вариант 15	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$
Вариант 16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2-x)^n}{n(2n+3)}$
Вариант 17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n^2}$
Вариант 18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$
Вариант 19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{\sqrt{2n+8}}$
Вариант 20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n n^3}{(n+2)!}$

Вариант 21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n!} (2x+1)^n$
Вариант 22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$
Вариант 23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{3n-2}}$
Вариант 24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n(3n+5)}$
Вариант 25	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (x+1)^n$
Вариант 26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+2)^n}{n(6n+5)}$
Вариант 27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$
Вариант 28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n \sqrt{5n+2}}$
Вариант 29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n^3}{(n+1)^4}$
Вариант 30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{2^n(n+2)}$
Вариант 31	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+3)^n}{n(n+2)}$