

**Вопросы к экзамену по курсу "Теория меры и интеграла Лебега" гр. 3311, 2007 г.
(Вариант прошлого года)**

1. Системы подмножеств. Кольца, алгебры, σ -алгебры и их свойства. Теорема о наименьшей алгебре, содержащей кольцо.
2. Понятие полукольца множеств. Свойства и примеры полуколец.
3. Предложение о наименьшем кольце, содержащем полукольцо. Конструкции прямого образа и прямого произведения.
4. Понятие конечно-аддитивной меры (объема). Примеры и основные свойства.
5. Теорема о продолжении объема с полукольца на порожденное им кольцо.
6. σ -аддитивные меры. Критерии σ -аддитивности объема.
7. Критерии непрерывности снизу и сверху.
8. Классическая длина и ее σ -аддитивность.
9. Понятие внешней меры. Внешняя мера, порожденная мерой на полукольце. Свойства внешних мер.
10. Понятие измеримого множества. Теорема о структуре семейства измеримых множеств.
11. Свойства внешней меры на σ -алгебре измеримых множеств. Свойство регулярности. Понятие измеримой оболочки.
12. Внешняя мера, порожденная мерой на полукольце. Теорема о продолжении меры. Понятие пространства с мерой. Условие полноты.
13. Мера Лебега на прямой. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов.
14. Борелевские множества. Борелевская регулярность меры Лебега. Структура множеств, измеримых по Лебегу.
15. Измеримые функции. Теорема об эквивалентности различных условий измеримости.
16. Свойства измеримых функций. Измеримость точных верхней и нижней граней, верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.
17. Ступенчатые функции. Измеримость ступенчатых функций. Операции, сохраняющие класс ступенчатых функций.
18. Теорема об аппроксимации измеримой функции последовательностью ступенчатых функций и ее следствия. Измеримость суммы, произведения, частного измеримых функций.
19. Интеграл от ступенчатой функции. Корректность определения. Свойства интеграла от ступенчатой функции.
20. Определение интеграла от неотрицательной измеримой функции. Монотонность интеграла. Теорема о монотонной сходимости.
21. Свойства интеграла от неотрицательной измеримой функции.
22. Свойства, выполненные "почти всюду". Эквивалентные функции. Теорема об измеримости эквивалентных функций.
23. Теорема Леви и ее следствия. Счетная аддитивность интеграла.
24. Неравенство Чебышева и его следствия. Абсолютная непрерывность интеграла.
25. Суммируемые функции. Определение интеграла от суммируемой функции. Свойства интеграла.
26. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
27. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
28. Сравнение различных видов сходимости последовательностей измеримых функций.
29. Произведение мер. Счетная аддитивность произведения мер на полукольце цилиндрических множеств. Продолжение произведения мер на σ -алгебру измеримых множеств. Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.
30. Множества типов F_σ и G_δ и их свойства. Теорема о структуре множеств, измеримых относительно произведения σ -алгебр.
31. Теорема о восстановлении меры множества по мерами его сечений.
32. Теорема Фубини о выражении кратного интеграла через повторный.

- 33. Связь интеграла от измеримой функции с мерой ее подграфика.
- 34. Теорема Фубини для суммируемых функций.
- 35. Теорема о замене переменной под знаком интеграла и ее приложения.
- 36. Свойства меры Лебега-Стилтьеса dg с абсолютно непрерывной функцией g . Выражение интеграла по мере Стилтьеса через интеграл по мере Лебега.
- 37. Понятие функции распределения для измеримой функции и ее свойства. Приложение функций распределения к вычислению интегралов.
- 38. Пространства Лебега L^1 и L^2 , их полнота. Теорема Радона-Никодима.