

Глава 3. Комбинаторика

Размещения, перестановки, сочетания

Основное правило комбинаторики: если первое действие можно выполнить n способами, а второе действие — m способами, то эти два действия последовательно можно выполнить $n \cdot m$ способами, а одно из них $n + m$ способами.

Пример:

Вы умеете готовить первое 4-мя способами, второе блюдо — 6-ю способами, третье блюдо — 3-мя способами. Сколько есть вариантов для обеда из 3х блюд?

$$4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$$

Сколько вариантов обеда из двух блюд?

$$4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 54$$

Определение. Число способов, которыми можно разместить k предметов по n ($k < n$) местам без повторений (с повторениями), называется числом размещений из n по k (с повторениями). Обозначается A_n^k ($\bar{A}_n^k$)

Лемма 1.

$$A_n^k = n(n-1) \cdot (n-k+1)$$

Доказательство.

Берем 1й предмет. Сколько для него есть вариантов размещения? - n вариантов.

Берем 2й предмет. Для него $(n-1)$ вариантов размещения.

...

Берем k -ый предмет. Для него $(n-(k-1))$ вариантов размещения.

Таким образом, $A_n^k = n(n-1) \cdot (n-k+1)$. Лемма доказана.

Также можно записать $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, по соглашению $A_n^0 = 1$.

Лемма 2.

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Пример:

Сколько существует вариантов для кода из 3х цифр:

1) *если все цифры различны;*

2) *могут повторяться?*

0 1 2 3 4

5 6 7 8 9

$$1) A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

$$2) \bar{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

Определение. Число размещений n предметов по n местам называется числом перестановок (подстановок). Обозначается P_n .

Лемма 3.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 1 = n!$$

Пример:

Вы купили стенку из 5 предметов. Сколько есть вариантов ее расстановки?

$P_5 = 5! = 120$ вариантов.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
P_n	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Определение. Число способов, которыми можно выбрать k предметов из n ($k < n$) без повторения (с повторениями), называется числом сочетаний из n по k (с повторениями).

Обозначается C_n^k ($\bar{C}_n^k$). Считаем, что $C_n^0 = 1$.

A_n^k — учитывает порядок, а C_n^k — не учитывает порядок.

Лемма 4.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, k \leq n$$

Доказательство.

Посчитаем число размещений другим способом.

1) Выберем k мест из n , число способов — C_n^k

2) Размещаем k предметов на выбранных k местах, число способов — P_k .

Следовательно, $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$ или

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Лемма доказана.

Следствие. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Пример:

Сколько существует вариантов заполнения билета лотереи 5 из 36, 6 из 49.

$$C_{36}^5 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992$$

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13983816$$

Лемма 5.

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

Доказательство.

Каждому способу поставим в соответствие число, состоящее из нулей и единиц по следующему правилу. Сначала столько единиц, сколько раз берем первый предмет, потом добавляем 0, и пишем столько единиц, сколько раз берем второй предмет, затем добавляем 0 и так далее. В конце столько единиц, сколько раз берем n предмет.

Таким образом, каждому способу ставится в соответствие число, состоящее из k единиц и $n-1$ нулей. Число таких чисел равно числу способов, которыми можно выбрать $n-1$ место для нулей или k мест для единиц из $n+k-1$ мест, то есть равно $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.

Пример к доказательству:

1100111001

1й предмет берем 2 раза

2й предмет берем 0 раз

3й предмет берем 3 раза

4й предмет — 0 раз.

5й предмет — 1 раз.

$$N = 5, k = 2 + 3 + 1 = 6$$

Пример:

Сколько есть способов разложить 10 яблок по двум корзинам; трем корзинам?

$$C_2^{10} = C_{2+10-1}^{10} = C_{2+10-1}^1 = C_{11}^1 = 11.$$

$$C_3^{10} = C_{3+10-1}^{3-1} = C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66.$$

Бином Ньютона

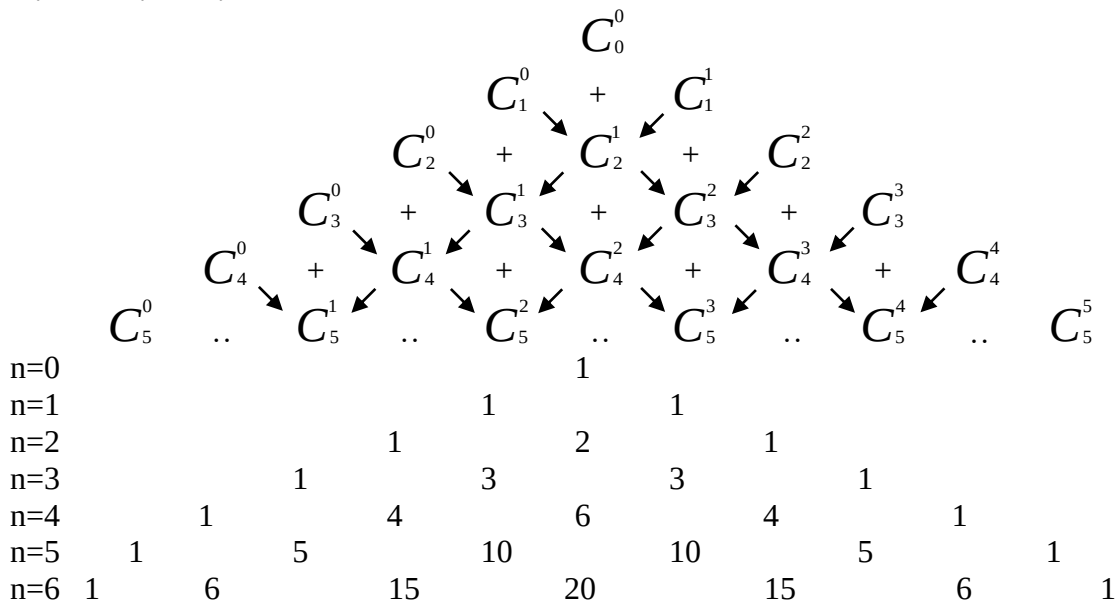
Лемма 6. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, 1 \leq k \leq n$

Доказательство.

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Треугольник Паскаля

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$



Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(x+y)^n = x^n + n \cdot x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2}y^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot x^{n-k}y^k + \dots + y^n$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Данная формула называется биномом Ньютона, а C_n^k — также называются биномиальными коэффициентами.

Доказательство.

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)}_{n \text{ раз}} = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} y^k$$

$x^{n-k}y^k$ — выбираем y в k -скобках.

Число одночленов $x^{n-k}y^k$ равно числу способов выбрать k -скобок из n , то есть $C_n^k \Rightarrow a_k = C_n^k$.

Примеры.

$$1. (x+y)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{4-k} y^k = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^2 + y^4$$

$$2. (x+y)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{6-k} y^k =$$

$$\left(C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15; C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20 \right)$$

$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$3. (2-x)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k 2^{5-k} (-x)^k =$$

$$\left(C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10 \right)$$

$$= 2^5 + 5 \cdot 2^4(-x) + 10 \cdot 2^3(-x)^2 + 10 \cdot 2^2(-x)^3 + 5 \cdot 2(-x)^4 + (-x)^5 = 2^5 - 5 \cdot 2^4x + 10 \cdot 2^3x^2 - 10 \cdot 4 \cdot x^3 + 10x^4 - x^5.$$

4.

$$(x+y)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^{9-k} y^k = 1 \cdot x^9 y^0 + 9 \cdot x^8 y^1 + 36 \cdot x^7 y^2 + 84 \cdot x^6 y^3 + 126 \cdot x^5 y^4 +$$

$$+ 126 \cdot x^4 y^5 + 84 \cdot x^3 y^6 + 36 \cdot x^2 y^7 + 9 \cdot x^1 y^8 + 1 \cdot x^0 y^9 = x^9 + 9 \cdot x^8 y + 36 \cdot x^7 y^2 +$$

$$+ 84 \cdot x^6 y^3 + 126 \cdot x^5 y^4 + 126 \cdot x^4 y^5 + 84 \cdot x^3 y^6 + 36 \cdot x^2 y^7 + 9 \cdot x^1 y^8 + y^9.$$

Следствие 1.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

Доказательство.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k; x = y = 1;$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

Следствие 2.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

Следствие 3.

$$\sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

Доказательство.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k - \text{ дифференцируем по } y$$

$$n(x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} k y^{k-1}; x = y = 1$$

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k$$

Теорема о числе подмножеств конечного множества

Пусть A — конечное множество. Обозначим $P(A)$ — множества подмножеств A .

Теорема 2.

$$|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n \quad (P(A) = 2^A).$$

Доказательство 1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. При выборе

B для каждого элемента 2 варианта: 2 вар., ..., 2 вар. $\Rightarrow 2^n$ — вариантов для B .

↕
n-раз

Доказательство 2.

$$1) 0 - \text{элемент} \text{ — } \emptyset \quad 1 = C_n^0$$

$$1 - \text{элемент} \quad C_n^1$$

$$2 - \text{элемента} \quad C_n^2$$

.....

$$k - \text{элементов} \quad C_n^k$$

.....

$$n - \text{элементов} \quad C_n^n$$

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$$

Доказательство 3.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
 Пусть $B \subset A, B \Leftrightarrow b_1 b_2 \dots b_n$, где $b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in B \\ 0, & \text{если } a_i \notin B \end{cases}$

$P(A) \Leftrightarrow \underbrace{000000}_{n\text{-раз}}, \dots, \underbrace{111111}_{n\text{-раз}} \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

□''

Пример:

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

0101 — $\{a_2, a_4\}$

1001 — $\{a_1, a_4\}$

Полиномиальная форма

$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

Определение. Число способов, которыми можно разбить множество A на m подмножеств так, чтобы в первом было $|A_1| = n_1$ элементов, во втором $|A_2| = n_2$ элементов, в последнем $|A_m| = n_m$ элементов, — называется числом сочетаний из n по $n_1, n_2, \dots, n_m$ и обозначается $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_m}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

$C_n^{n_1, n_2} = C_n^{n_1}$

Лемма 7.

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

Доказательство.

$A = A_1 \cup \dots \cup A_m$. Выбираем A_1 — число способов его выбрать — $C_n^{n_1}$

Выбираем A_2 — число способов — $C_{n-n_1}^{n_2}$

....

Выбираем A_m — число способов — $C_{n-n_1-\dots-n_{m-1}}^{n_m}$

$$\begin{aligned} C_n^{n_1, n_2, \dots, n_m} &= C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{m-1}}^{n_m} \\ &= \frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! (n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{m-1})!}{n_m! (n-n_1-\dots-n_m)!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \end{aligned}$$

Пример:

В группе 18 студентов, 8 отправили на Азот, 6 — на Планету, 4 — на «Растр». Сколькими способами можно это сделать?

$$C_{18}^{8,6,4} = \frac{18!}{8! 6! 4!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 9189180$$

18 студентов разбивают на три группы по 6 человек. Сколькими способами это можно сделать?

$$\frac{C_{18}^{6,6,6}}{3!} = \frac{18!}{(6!)^3 3!}$$

18 студентов на субботнике. 4х послали на мусор, 5х на окна, 3х на мебель. Сколько способов?

$$C_{18}^{4,5,3,[6]} = \frac{18!}{4! 5! 3! 6!}$$

Теорема 3.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, k_i \geq 0} C_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$$

Пример

$$(x + y + z)^3 = \sum_{k+l+q=3} C_3^{k,l,q} \cdot x^k y^l z^q$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2 y + x^2 z + x y^2 + y^2 z + x z^2 + y z^2) + 6xyz$$

$$C_3^{3,0,0} = 1 - 3 \text{ варианта}$$

$$C_3^{2,1,0} = 3 - 6 \text{ вариантов}$$

$$C_3^{1,1,1} = 6 - 1 \text{ вариант}$$

Найти коэффициент при t^{12} в разложении $(1 - 2t^3 + 3t^4)^{10}$

$$(1 - 2t^3 + 3t^4)^{10} = \sum_{k+l+q=10} C_{10}^{k,l,q} 1^k (-2t^3)^l (3t^4)^q = \sum_{k+l+q=10} C_{10}^{k,l,q} 2^l (-1)^l \cdot 3^q \cdot t^{3l+4q}$$

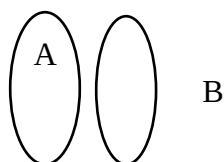
t^{12} -?

$$3l + 4q = 12$$

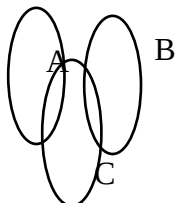
k	l	q
6	4	0
-	-	1
-	-	2
7	0	3

$$a_{12} = C_{10}^{6,4,0} 2^4 + C_{10}^{7,0,3} \cdot 3^3 = \frac{10!}{6! 4! 0!} \cdot 2^4 + \frac{10!}{7! 0! 3!} \cdot 3^3 = 6600$$

Принцип включения и исключения



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Теорема .

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n |A_k| - \sum_{k \neq l} |A_k \cap A_l| + \sum_{k \neq l, l \neq q, k \neq q} |A_k \cap A_l \cap A_q| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Пример:

В группе 20 студентов. 14 любят математику, 12 — футбол, 10 — девушек, 8 — математику и футбол, 6 — М и Д, 4 — Ф и Д

Сколько студентов любят одновременно М, Д и Ф.

Обозначим через А — М, В — Ф, С — Д.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$20 = 14 + 12 + 10 - 8 - 6 - 4 + x$$

$$x = |A \cap B \cap C| = 2.$$