

Домашняя работа.

п.26. (Условие не перетисовано).

Решение. $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$. (гр. Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$)

1) $n = 6$ — небольшое

а) $k = 3$ $P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6-3} =$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$$

$$\Rightarrow 20 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{8}{27} = \frac{160}{729} \approx 0,2195$$

б) $k < 4$ $P_6(k < 4) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3)$

$$P_6(0) = C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{64}{729} = \frac{64}{729}$$

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{243} = \frac{192}{729}$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{16}{81} = \frac{240}{729}$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$P_6(k < 4) = \frac{64}{729} + \frac{192}{729} + \frac{240}{729} + \frac{160}{729} = \frac{656}{729} = 0,8999$$

2) $n = 120$ (n велико, формулу Бернулли не используем)

а) $k = 35$ (локальная теор. Лапласа)

$$x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n p q}} = \frac{35 - 120 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{120 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{35 - 40}{\sqrt{\frac{240}{9}}} = \frac{-5}{5,16} = -0,97$$

По табл. 3 $\varphi(-0,97) = \varphi(0,97) = 0,2492$

$$P_{120}(35) = \frac{1}{\sqrt{n p q}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{5,16} \cdot 0,2492 = 0,0483$$

$$b) \text{ or } 30 \text{ go } 50 \quad k_1 = 30 \quad k_2 = 50$$

$$x_1 = \frac{30 - 40}{5,16} = \frac{-10}{5,16} = -1,94 \quad \Phi(-1,94) = -\Phi(1,94) = \text{табл. 4}$$

$$x_2 = \frac{50 - 40}{5,16} = \frac{10}{5,16} = 1,94 \quad = -0,4738$$

$$P_{120}(30; 50) = \Phi(1,94) - \Phi(-1,94) = 0,4738 - (-0,4738) = 0,9476$$

$$b) k < 45 \quad k_1 = 0 \quad k_2 = 44$$

$$x_1 = \frac{0 - 40}{5,16} = -7,75 \quad \Phi(-7,75) = -\Phi(7,75) = -0,5$$

$$x_2 = \frac{44 - 40}{5,16} = \frac{4}{5,16} = 0,78 \quad \Phi(0,78) = 0,2823$$

$$P_{120}(k < 45) = \Phi(0,78) - \Phi(-7,75) = 0,2823 - (-0,5) = 0,7823$$

$$30. \quad n = 3000 \quad p = \frac{2}{1000} \Rightarrow a = n \cdot p = 3000 \cdot \frac{2}{1000} = 6$$

$$1) k = 5 - \text{табл. 1.}$$

$$P_{3000}(5) = 0,16062$$

a \ k	5
6	16062

табл. 1

$$2) k < 3$$

$$P_{3000}(k < 3) = P_{3000}(k \leq 2) = \text{табл. 2} = 0,06197$$

a \ m	2
6	06197

табл. 2

$$3) k > 7 \quad P_{3000}(k > 7) = 1 - P_{3000}(k \leq 7) = \text{табл. 2} = 1 - 0,74398 = 0,25602$$

Тема: "Числовые характеристики
дискретной случайной величины (ДСВ);"

ДСВ X задана законом распределения.

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ (двумя способами) и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Отметить на числовой оси значения ДСВ, найденные $M(X)$ и $\sigma(X)$.

35.

X	-4	0	2	6
P	0,2	0,5	0,1	?

 - закон распределения ДСВ X

$$P_4 = 1 - (0,2 + 0,5 + 0,1) = 1 - 0,8 = 0,2$$

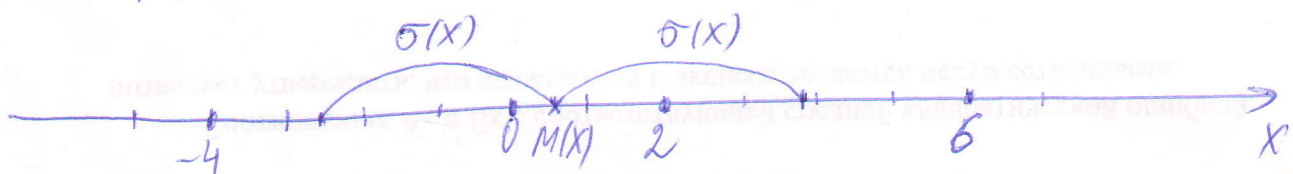
X	-4	0	2	6
P	0,2	0,5	0,1	0,2

$$M(X) = \sum X_i \cdot P_i = -4 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,2 = -0,8 + 0 + 0,2 + 1,2 = 0,6$$

$$D(X) = \underbrace{\sum (X_i - M(X))^2 \cdot P_i}_{1 \text{ способ}} = (-4 - 0,6)^2 \cdot 0,2 + (0 - 0,6)^2 \cdot 0,5 + (2 - 0,6)^2 \cdot 0,1 + (6 - 0,6)^2 \cdot 0,2 = 21,16 \cdot 0,2 + 0,36 \cdot 0,5 + 1,96 \cdot 0,1 + 29,16 \cdot 0,2 = 4,232 + 0,18 + 0,196 + 5,832 = 10,44$$

$$D(X) = \underbrace{\sum X_i^2 \cdot P_i - M(X)^2}_{2 \text{-й способ}} = (-4)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,1 + 6^2 \cdot 0,2 - (0,6)^2 = 3,2 + 0 + 0,4 + 7,2 - 0,36 = 10,8 - 0,36 = 10,44$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{10,44} = 3,23$$



36.

X	-4	0	2	6
P	0,1	0,2	0,2	0,5

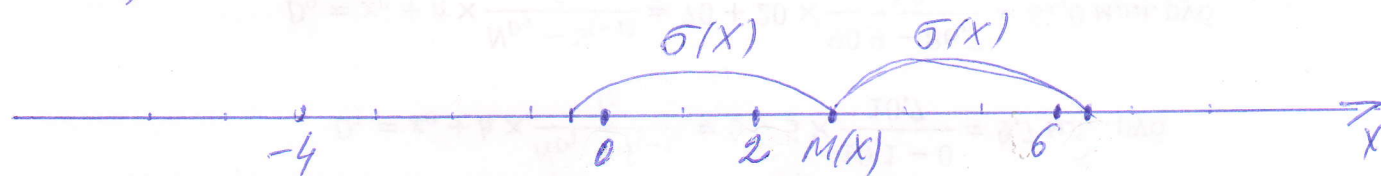
$$p_4 = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,2) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$M(X) = -4 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,5 = -0,4 + 0 + 0,4 + 3 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Icn. } D(X) &= (-4-3)^2 \cdot 0,1 + (0-3)^2 \cdot 0,2 + (2-3)^2 \cdot 0,2 + (6-3)^2 \cdot 0,5 = \\ &= 49 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,5 = 4,9 + 1,8 + 0,2 + 4,5 = \\ &= 11,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Icn. } D(X) &= (-4)^2 \cdot 0,1 + 0^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,2 + 6^2 \cdot 0,5 - 3^2 = \\ &= 1,6 + 0 + 0,8 + 18 - 9 = 11,4 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{11,4} = 3,38$$



37.

X	43	47	49	53
P	0,1	0,2	0,2	0,5

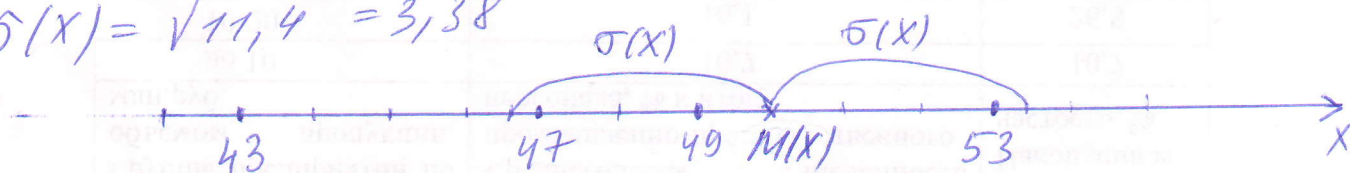
$$p_1 = 1 - (0,2 + 0,2 + 0,5) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$M(X) = 43 \cdot 0,1 + 47 \cdot 0,2 + 49 \cdot 0,2 + 53 \cdot 0,5 = 4,3 + 9,4 + 9,8 + 26,5 = 50$$

$$\begin{aligned} D(X) &\stackrel{\text{Icn.}}{=} (43-50)^2 \cdot 0,1 + (47-50)^2 \cdot 0,2 + (49-50)^2 \cdot 0,2 + (53-50)^2 \cdot 0,5 = \\ &= 49 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,5 = 4,9 + 1,8 + 0,2 + 4,5 = 11,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &\stackrel{\text{Icn.}}{=} 43^2 \cdot 0,1 + 47^2 \cdot 0,2 + 49^2 \cdot 0,2 + 53^2 \cdot 0,5 - 50^2 = 184,9 + \\ &+ 441,8 + 480,2 + 1404,5 - 2500 = 2511,4 - 2500 = 11,4 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{11,4} = 3,38$$



$D/3 : \approx 3,8$

Тема "Нормальное распределение"
Задание не переносю!

Найдите и прочитайте самостоятельно.

39. X - масса яблока, г.
 $a = 160$ г (a - среднее значение)

$$\sigma = 30 \text{ г.}$$

$$1) P(150 < X < 250) = ?$$

Воспользуемся формулой нормального распределения

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$a = M(X), \sigma = \sigma(X). \quad \Phi(x) - \text{табл. 4.}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } P(150 < X < 250) &= \Phi\left(\frac{250 - 160}{30}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 160}{30}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi(3) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0,49865 + 0,1293 = \\ &= 0,62795 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(X > 200) &= P(200 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 160}{30}\right) - \\ &= \Phi\left(\frac{200 - 160}{30}\right) = \Phi\left(\frac{40}{30}\right) = \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = \\ &= 0,5 - 0,4082 = 0,0918 \end{aligned}$$

40. X - вес порога, г. $a = 900$, $\sigma = ?$

$$\text{По условию, } P(X < 500) = \frac{4,5\%}{100\%} = 0,045.$$

По формуле норм. распределения:

$$P(X < 500) = P(-\infty < X < 500) = \Phi\left(\frac{500 - 900}{\sigma}\right) -$$

$$\begin{aligned} &= -\Phi\left(\frac{400}{\sigma}\right) + \underbrace{\Phi(+\infty)}_{=0,5} = 0,5 - \Phi\left(\frac{400}{\sigma}\right) = 0,045 \Rightarrow \\ &0,5 - \Phi\left(\frac{400}{\sigma}\right) = 0,045 \Rightarrow \Phi\left(\frac{400}{\sigma}\right) = 0,5 - 0,045 = 0,455 \end{aligned}$$

Воспользуемся табл. 4. Найдем внутри таблиц значение, близкое к 0,4550.

Там есть 4545 и 4554.

табл. 4.

X	0	9
1,6		4545
1,7	4554	

То есть

$$\Phi(1,69) = 0,4545$$

$$\Phi(1,7) = 0,4554$$

$$\text{У нас } \Phi\left(\frac{400}{\sigma}\right) = 0,455$$

тогда можно взять модель из 3-х вариантов

$$\frac{400}{\sigma} = 1,69, \quad \frac{400}{\sigma} = 1,7 \quad \text{или} \quad \frac{400}{\sigma} = 1,695$$

$$\text{Пусть будет } \frac{400}{\sigma} = 1,7 \Rightarrow \sigma = \frac{400}{1,7} \approx 235(2)$$

Найдем $P(X > 1 \text{ км})$. Т.к. все ростки измерены в граммах, то надо найти $P(X > 1000)$.

$$P(X > 1000) = P(1000 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{1000 - 900}{235}\right) =$$

$$\frac{\begin{array}{c} \text{|||||} \\ 1000 \end{array}}{x} = 0,5 - \Phi\left(\frac{100}{235}\right) = 0,5 - \Phi(0,43) =$$

$$= 0,5 - 0,1664 = 0,3336$$

41. X - мужской рост, см $a = 176, \sigma = ?$

$$\text{По условию } P(X > 2 \text{ м}) = P(X > 200) = \frac{2,1\%}{100\%} = 0,021$$

Рассмотрим $P(X > 200)$, используя формулу нормального распределения:

$$P(X > 200) = P(200 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{200 - 176}{\sigma}\right) =$$

$$\frac{\begin{array}{c} \text{|||||} \\ 200 \end{array}}{x} = 0,5 - \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0,021 \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0,5 - 0,021 = 0,4790$$

$$\text{т.о., } \frac{24}{\sigma} = 2,03 \text{ или } 2,04 \text{ или } 2,035$$

	3	4
2,0	4788	4793

$$\text{Пусть } \frac{24}{\sigma} = 2,03 \Rightarrow \sigma = \frac{24}{2,03} = 11,8(2)$$

Найдём $P(X > 166) = P(166 < X < +\infty) =$

$$\frac{\overbrace{11111111111111111111}^{11,8}}{166} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{166 - 176}{11,8}\right) =$$

$$= 0,5 - \Phi(-0,85) = 0,5 + \Phi(0,85) = 0,5 + 0,3023 = 0,8023$$

Д/з. № 42.