

УДК 519. 833

В.А.Матвеев

УТОЧНЕННОЕ ПО КОНУСУ РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*Псковский государственный педагогический университет*

In this paper a multicriterion problem is considered. As a solution of this problem the cone optimality is defined. Such approach can be refined by a sequence of cones. The decision on a limiting cone refers as the optimal corrected solution of the multicriterion problem. Conditions of existence and uniqueness of such optimal corrected solution is presented. There is a modelling example of a multicriterion problem in which all optimal solution by cone are found and extracted the unique one corrected by cone .

**1. Оптимальность по конусу
в многокритериальной задаче**

Рассматривается задача принятия решений, качество решения в которой оценивается несколькими критериями. Используем терминологию и обозначения [1,2]. Моделью является многокритериальная задача

$$\langle X, f(x) \rangle. \quad (1)$$

Имеется одно лицо, принимающее решение (ЛПР). Задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$, среди которых ЛПР делает свой выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств или критериев.

Обычно информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию выигрыша

$f: X \rightarrow R^m, m \geq 1$. Значения этой функции каждому исходу ставят в соответствие количественную оценку для выделенных свойств $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Не уменьшая общности считаем, что критерии $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, являются позитивными. Тогда на содержательном уровне цель ЛПР состоит в выборе такого исхода, что доставляет возможно большие значения одновременно всем компонентам векторной функции выигрыша $f(x)$.

Общий подход к определению оценочной структуры в (1) предлагают конусные отношения. В многокритериальных и игровых задачах с векторными выигрышами такой подход представлен в [3,4].

Будем рассматривать выпуклый, острый, многогранный (полиэдральный) пространственный конус K [5]. Он порождает в векторном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq_k$ по праву

$$f \geq_k g \Leftrightarrow f - g \in K. \quad (2)$$

Такой конус K называют конусом доминирования в $R^m, m \geq 1$.

Часто рассматривается многогранный конус, который можно задать матрицей:

$$K = \{f \in R^m \mid Af \geq 0_m\}. \quad (3)$$

Будем считать, что матрица $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, m$ является неотрицательной, т.е. $a_{ij} \geq 0$. Кроме того, полагаем, что матрица A является невырожденной и в специально оговоренных случаях неразложимой [6]. Важными примерами многогранных конусов являются

$R_{\geq}^m = \{x \in R^m \mid Ex \geq 0_m\} = \{x \in R^m \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ (4) и его внутренность

$$R_{>}^m = \{x \in R^m \mid x_i > 0, i = 1, \dots, m\}. \quad (5)$$

Конусы $R_{\geq}^m, R_{>}^m$ определяются единичной матрицей E . Здесь и далее будем считать, что многогранный конус не содержит нулевой вектор. Использование векторной упорядоченности (2) позволяет определить в задаче (1) исходы, оптимальные по конусу K .

Определение 1. Исход $x^* \in X$ называется оптимальным по конусу K в задаче векторной оптимизации (1), если $\forall x \in X, x - x^* \notin K$. Если для конуса K выполнено включение $R_{>}^m \subset K$, то оптимальное решение $x^* \in X$ будем называть *максимальным по конусу*. Если рассматривать оптимальность относительно конуса $-K$, то решение будем называть *минимальным по конусу*.

Определение оптимального по конусу решения является достаточно общим. Оно включает в себя как частный случай Парето-оптимальные (оптимальные по Слейтеру) решения. Действительно, такие решения получаются в определении 1, если в качестве конуса доминирования использовать конус $R_{\geq}^m$ из (4) (конус $R_{>}^m$ из (5)).

Утверждение 1. Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f: X \rightarrow R^m, m \geq 1$, непрерывна, конус доминирования K является выпуклым, острым, многогранным пространственным в R^m . Тогда в (1) существует исход, оптимальный по конусу K .

Доказательство следует из существования гиперплоскости в R^m , разделяющей компактное множество X и соответствующий конус K .

Утверждение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и конусы доминирования K_1, K_2 . Пусть $X_1^* \subset X, X_2^* \subset X$ множества исхо-

дов, оптимальных по конусу K_1, K_2 соответственно.

Тогда из $K_1 \subset K_2$ следует включение $X_2^* \subset X_1^*$.

Действительно, пусть $x^* \in X_2^*$. Тогда, согласно определению 1, $x - x^* \notin K_2$. По условию $K_1 \subset K_2$, значит $x - x^* \notin K_1$. Последнее означает, что $x^* \in X_1^*$. Следовательно, $X_2^* \subset X_1^*$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Рассматривается многокритериальная задача (1) и многогранный конус доминирования $K = \{x \in R^m \mid Ax \geq 0_m\}$ с неотрицательной матрицей A (3). Тогда максимальные по конусу K исходы являются оптимальными по Парето.

Таким образом, оптимальность по конусу является уточнением оптимального по Парето решения. Такой подход позволяет сократить множество претендентов на оптимальный исход. В то же время предпочтение по конусу порождает определенные вопросы, связанные с наилучшим решением задачи (1). Во-первых, какие свойства, какой содержательный смысл имеют оптимальные по конусу решения, чем они выделяются среди паретовских решений? Во-вторых, каким образом выбирать конус доминирования, ведь таких конусов бесконечное множество? В-третьих, как уточнять оптимальное по конусу решение, если таких решений достаточно много?

Рассмотрим конус доминирования, представленный многогранным конусом (3) с неотрицательной невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, m$. Не уменьшая общности можно считать, что матрица A является стохастической [7]. У такой матрицы

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1, i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Произвольную неотрицательную невырожденную матрицу можно привести к условию (6), вынося из каждой строки соответствующий множитель. Хотя матрица при таком преобразовании изменится, но конусы доминирования для исходной и преобразованной матриц будут совпадать.

Каждая строка стохастической матрицы A определяет новый критерий. В этом критерии учитывается отношение ЛПР к принимаемому решению. В то же время совокупность строк матрицы A представляет неопределенность ЛПР относительно общей итоговой цели. Строки матрицы можно представлять, как мнения нескольких экспертов относительно итоговой цели. Эксперты по-разному видят конечную цель, поэтому строки матрицы линейно-независимы (матрица является невырожденной). Вместе с тем мнение экспертов является важной информацией и позволяет сократить множество претендентов на оптимальное решение. Рассмотрим модельный пример применения оптимального по конусу решения в многокритериальной задаче.

Пример. Рассматривается двухкритериальная задача (1), где множество допустимых исходов $X = R \times \Psi = [0, 1] \times [0, \pi/2]$. Это множество представлено на рис.1. Задан векторный критерий

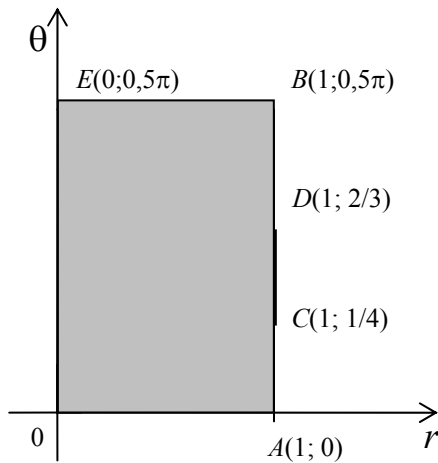


Рис.1

$f(r, \theta) = (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Здесь допустимые исходы $(r, \theta) \in R \times \Psi = [0, 1] \times [0, \pi/2]$. Предполагается, что ЛПР в двухкритериальной задаче выбирает исход так, чтобы доставить возможно большие значения обоим критериям: $f_1(r, \theta) = r \cos \theta$ и $f_2(r, \theta) = r \sin \theta$. Они являются позитивными. Такая двухкритериальная задача представлена как система в

$$\langle [0, 1] \times [0, \pi/2], (r \cos \theta, r \sin \theta) \rangle. \quad (7)$$

Оценочная структура в задаче определяется в области достижимости

$$f(X) = \{(f_1, f_2) \in R^2 \mid f_1 = r \cos \theta, f_2 = r \sin \theta, (r, \theta) \in R \times \Psi = [0, 1] \times [0, \pi/2]\}.$$

Она представлена на рис.2.

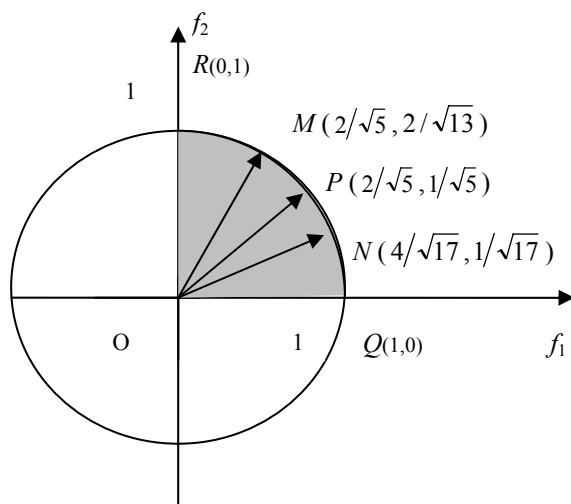


Рис.2

Задан многогранный конус доминирования

$$K = \left\{ x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2 \right\}. \quad (8)$$

Рассмотрим оценки допустимых исходов, представленные на рис.2. Расположим конус доминирования в R^2 так, что его вершина совпадает с оценкой некоторого исхода. Если в этом случае множество точек конуса не пересекается с множеством оценок всех

допустимых исходов (за исключением общей вершины), то соответствующий исход является оптимальным по конусу K . В соответствии с этим оптимальные по конусу исходы расположены на стороне AB (рис.1) и их оценки — на дуге NPM (рис.2). В этом случае $r^* = 1$. Выделим на дуге оценки, оптимальные по конусу. Они расположены на участке дуги NM (рис.2). В пространстве критериев координаты точки N находятся из условия $\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{4}{1}$, а точки M — из условия

$$\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{3}{2}.$$

В результате получаем координаты точек $N(f_1^N, f_2^N) = (4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$, $M(f_1^M, f_2^M) = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$. На дуге NM (рис.2) представлены все оценки, оптимальные по конусу. Этим оценкам соответствуют оптимальные исходы. На рис.1 эти исходы составляют отрезок CD . Координаты точки C найдем из условия $(r^* \cos \theta^*, r^* \sin \theta^*) = (4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$, а точки D — из условия $(r^* \cos \theta^*, r^* \sin \theta^*) = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$.

В данном примере получены все максимальные по конусу исходы

$$(r^*, \theta^*), \quad r^* = 1, \quad \arctg 1/4 \leq \theta^* \leq \arctg 2/3.$$

Они изображены отрезком CD на рис.1. Множество соответствующих оценок

$$(f_1^*, f_2^*) \in \{(r^* \cos \theta^*, r^* \sin \theta^*) \mid r^* = 1,$$

$$\arctg 1/4 \leq \theta^* \leq \arctg 2/3\}$$

отмечены дугой NM на рис.2.

Заметим, что в данной многокритериальной задаче (7) максимальные по конусу решения являются уточнением максимальных по Парето решений.

Уточнение оптимального по конусу решения

Рассмотренный выше пример показывает, что оптимальность по конусу позволяет сузить множество претендентов на наилучшее решение в многокритериальной задаче. Так, на рис.1 сторона AB представляет оптимальные по Парето решения, а его часть — отрезок CD — выделяет оптимальные по конусу K решения. Этот подход позволяет существенно сузить множество оптимальных решений. Но это не снимает проблему уточнения решения. Оптимальных по конусу решений может быть достаточно много. Рассмотрим следующую последовательность уточнений.

Обозначим через K_1 конус K из (3) и $X_1^* \subset X$ — соответствующее множество оптимальных по этому конусу решений. Этот конус определен матрицей A . Обозначим через K_2 и $X_2^* \subset X$ конус и множество оптимальных по нему решений для матрицы A^2 . Аналогично для натурального n обозначим

K_n и $X_n^* \subset X$ конус и множество оптимальных по этому конусу решений, определенных матрицей A^n .

Утверждение 4. Пусть матрица A является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда для любого натурального n

а) матрица A^n является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;

б) для соответствующих конусов имеет место включение $K_n \subset K_{n+1}$;

в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений имеет место включение $X_n^* \subset X_{n+1}^*$.

Пункт а) следует из правила умножения неотрицательных матриц. Многогранный конус K_n определяется как решение однородной системы линейных неравенств $A^n f \geq 0_m$. Многогранный конус K_{n+1} определяется как решение для следствия последней системы, именно, $A^{n+1} f = AA^n f \geq 0_m$. Напомним, что элементы матрицы A неотрицательны. Поэтому имеет место включение конусов $K_n \subset K_{n+1}$. Наконец, в) следует из утверждения 2.

Для матрицы A из утверждения 4 верны условия теоремы Фробениуса [8].

Утверждение 5. Пусть матрица A является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда существует предел последовательности матриц $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_0$. Матрица A_0 является положительной, вырожденной, с рангом, равным 1, все строки матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$, и сумма координат этого вектора равна 1.

Последнее утверждение является основанием для уточнения оптимального по конусу K решения, определенного матрицей A .

Определение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и многогранный конус K (3), определенный квадратной матрицей A порядка m . Считаем, что матрица A является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической.

Пусть вектор $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$,

является левым собственным вектором для собственного значения $\lambda = 1$ матрицы A . Тогда исход

$$x^* \in \arg \max_{x \in X} (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x))$$

будем называть *уточненным по конусу K оптимальным (максимальным, минимальным) решением* многокритериальной задачи (1).

Утверждение 6. Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f: X \rightarrow R^m$, $m \geq 1$, непрерывна, квадратная матрица

A порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует оптимальное решение, уточненное по конусу K , и этот конус определяется матрицей A .

Существование уточненного решения следует из компактности множества допустимых исходов X и непрерывности функции, соответствующей функции цели.

Утверждение 7. Уточненное по конусу K оптимальное (максимальное, минимальное) решение $x^* \subset X$ в многокритериальной задаче (1) является оптимальным (максимальным, минимальным) по конусу K решением и, значит, оптимальным (максимальным, минимальным) по Парето решением.

Уточненное по конусу оптимальное решение многокритериальной задачи (1) является также оптимальным по конусу решением. Этот конус K_0 определяется положительной матрицей $A_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ и согласно утверждению 5

$$K_0 = \{f \in R^m \mid A_0 f \geq 0_m\} = \{f \in R^m \mid \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m \geq 0, \alpha^T A = \alpha^T\}. \quad (9)$$

Здесь вектор-строка $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$,

$\alpha_i > 0$, является левым собственным вектором для матрицы A или собственным вектором для строк этой матрицы, относящимся к наибольшему положительному собственному значению $\lambda = 1$. В этом случае по определению левого собственного вектора $\alpha^T A = \alpha^T$. Тогда для любого вектора $f \in R^m$ выполнено условие $\alpha^T A f = \alpha^T f$. Из полученного равенства векторов следует, что неравенство из (9) есть следствие системы неравенств $A f \geq 0_m$ из (3). Значит, верно включение конусов $K \subset K_0$, где K_0 из (9). В этом случае по утверждению 2 уточненное по конусу K оптимальное решение является оптимальным по конусу K , а согласно утверждению 3 — оптимальным по Парето.

Теорема. Пусть квадратная матрица A порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда

а) существует предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_0$;

б) предельная матрица A_0 является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической, и все строки этой матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$ $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0;$$

в) для последовательности матриц A^n , $n = 1, 2, \dots$, соответствующая последовательность многогранных конусов K_n , $n = 1, 2, \dots$, определенная аналогично (3), удовлетворяет цепочке включений $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \subset K_0$.

г) соответствующая последовательность множеств, оптимальных по конусу K_n , $n = 1, 2, \dots$, решений в задаче векторной оптимизации (1) удовлетворяет включениям

$$X_1^* \supset X_2^* \supset X_3^* \supset \dots \supset X_n^* \supset \dots \supset X_0^*.$$

Единственность уточненного по конусу решения

Уточнение оптимального по конусу решения позволяет в некоторых случаях выделить в задаче векторной оптимизации (1) единственный наилучший исход. Условия существования единственного уточненного решения формулируются с использованием строгой вогнутости векторной функции цели [9].

Пусть множество допустимых исходов $X \subset R^n$ выпукло. Векторная функция векторного аргумента $f: X \rightarrow R^m$, $m \geq 1$ называется *вогнутой (строго вогнутой)* на множестве X , если каждая компонента этой функции является вогнутой (строго вогнутой) на этом множестве, т.е. для любых $i = 1, \dots, m$, $x \neq y \in X$, выполнено неравенство

$$0,5(f_i(x) + f_i(y)) \leq f_i(0,5(x + y)) \\ (0,5(f_i(x) + f_i(y)) < f_i(0,5(x + y))).$$

Утверждение 8. Пусть в задаче векторной оптимизации (1) векторная функция $f: X \rightarrow R^m$, $m \geq 1$, будет вогнутой на компактном множестве $X \subset R^n$ и найдется по крайней мере одно такое $j = 1, \dots, m$, что скалярная функция $f_j(x)$ будет строго вогнутой на этом множестве, многогранный конус K определен в соответствии с (3) квадратной матрицей A , которая является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует единственный уточненный по конусу исход.

Согласно определению 2 уточненным по конусу оптимальным решением многокритериальной задачи (1) является исход $x^* \in \arg \max_{x \in X} (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x))$. По теореме матрица A однозначно определяет левый собственный вектор, относящийся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$. Это вектор $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$.

Тогда функция

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x)$$

является строго вогнутой, поскольку такими же являются и функции $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, и по крайней мере одна из них строго вогнута. Тогда последняя линейная комбинация представляет строго вогнутую функцию. Наконец, строго вогнутая функция достигает максимального значения на компактном множестве в единственной точке (см. [9]).

Пример (продолжение). Продолжим рассмотрение задачи (8). Для нее конус доминирования K представлен в (9). Его можно задать с помощью стохастической матрицы, которую так же, как и в (9), обозначим A :

$$K = \left\{ x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2 \right\}.$$

Найдем предел последовательности матриц $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_0$. Наибольшее собственное значение матрицы A есть $\lambda = 1$. Соответствующий левый собственный вектор $x^T = (2/3, 1/3)$. Тогда по теореме матрица $A_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. По определению 2 уточ-

ненным по конусу K максимальным решением многокритериальной задачи (8) будут решения задачи математического программирования (задача максимизации)

$$\{[0, 1] \times [0, \pi/2], 2r \cos \theta + r \sin \theta\}.$$

Здесь максимальное значение достигается при $r^\# = 1$, $\theta^\# = \arctg 1/2$. Эти же значения будут доставлять единственное уточненное максимальное по конусу решение двухкритериальной задачи (7). Это решение представлено на рис.1. Уточненный максимальный по конусу векторный выигрыш составит $f^\# = (f_1^\#, f_2^\#) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Он приведен в критериальном пространстве на рис.2.

В заключение отметим, что полученные результаты расширяют возможности оптимизации многокритериальных систем различного назначения.

1. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.
2. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Кн. дом «Университет», Высшая школа, 2002. 288 с.
3. Вишнякова О.М. // Тр. Псковского политехн. ин-та. 2004. №8.1. С.7-11.
4. Матвеев В.А. // Тр. Псковского политехн. ин-та. 2004. №8.1. С.11-20.
5. Ногин В.Д. Указ. соч. С.42.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. С.352.
7. Там же. С.381.
8. Там же. С.355.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. С.169.