

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Институт электронных и информационных систем

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ

Зав. Кафедрой АГ

Д.ф.м.н., профессор

_____ Т.Г. Сукачева

«__» _____ 20__ г.

Элективный курс «Геометрия треугольника»

Выпускная квалификационная работа

По направлению подготовки

44.03.05 Педагогическое образование

(с двумя профилями подготовки)

Профиль математика и информатика

Руководитель доцент КАГ

Е.М. Кондрушенко

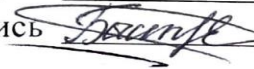
Дата _____

Подпись _____

Студент группы 5131

Е.С. Быстревская

Дата _____

Подпись  _____

Великий Новгород

2020

Содержание

Введение.....	2
Глава 1: Содержание элективного курса «Геометрия треугольника».....	7
1.1. Теоретические основы изучения темы: «Геометрия треугольника».....	7
1.1.1. «Геометрия треугольника» в школьном курсе геометрии.....	7
1.1.2. Дополнительные главы геометрии по теме: «Геометрия треугольника».....	9
1.2. Календарно-тематическое планирование элективного курса «Геометрия треугольника».....	22
Глава 2: Методика обучения материалам элективного курса «Геометрия треугольника».....	24
2.1. Методика работы с теоремами элективного курса «Геометрия треугольника».....	24
2.2. Методика работы с задачным материалом элективного курса «Геометрия треугольника».....	33
2.3. Использование дистанционных технологий в разработке элективного курса «Геометрия треугольника».....	46
Заключение.....	58
Список литературы.....	58

Введение

Геометрия – один из самых сложных, но очень интересных предметов, изучаемых в школе. Дисциплина включает в себя множество теорем, формул, аксиом, которые невозможно постичь в рамках школьного курса. Для того чтобы развивать содержание базового курса, удовлетворять познавательные интересы школьников, в учебные планы были введены элективные курсы, дополняющие содержание профиля. Элективный курс «Геометрия треугольника» позволяет развивать умения применять изученные понятия, методы для решения задач практического характера при необходимости с использованием информационных технологий.

Треугольник – это одна из самых простейших геометрических фигур, с которой мы знакомимся уже в детском саду, но именно он является стержнем, вокруг которого формируется курс геометрии. Многие геометрические задачи сводятся к применению свойств треугольников, его замечательных точек и линий.

Среди теорем о треугольниках есть такие, изучение которых позволяет существенно расширить круг геометрических задач. Значение их состоит, прежде всего, в том, что из них или с их помощью можно вывести большинство теорем геометрии, они служат основой многих дальнейших выводов. Таковыми являются теорема Пифагора, теорема синусов, теорема косинусов и т.д.

Но в геометрии треугольника много и таких теорем, авторы которых остались в истории науки только «благодаря треугольникам». Речь идет о теореме Чевы, теореме Менелая, теоремах о прямой и окружности Эйлера, теореме о прямой Симпсона, теореме Стюарта. Они привлекают своей простотой, изяществом и бесконечным таинством.

Актуальность темы исследования:

Применение опыта решения задач с использованием данных теорем помогает повысить уровень пространственного воображения и уровень логической культуры.

При обучении учащихся доказывать теоремы учителем ставится цель развития творческого мышления, а задачи, сопровождаемые красивыми чертежами, часто содержат неожиданные факты. Изучение данных теорем позволяет обучающимся расширить кругозор в геометрическом материале и овладеть методами исследования, которые помогают найти новые пути решения задач.

Объект исследования: процесс обучения решению геометрических задач с применением теоремы Чевы, теоремы Менелая, теорем о прямой и окружности Эйлера, теоремы о прямой Симпсона, теоремы Стюарта.

Предмет исследования: элективный курс по теме «Геометрия треугольника».

Цель исследования: разработка элективного курса по теме «Геометрия треугольника».

Задачи исследования:

1. проанализировать теоретический материал по теме «Геометрия треугольника» в школьном курсе геометрии;
2. рассмотреть дополнительные главы геометрии к школьному курсу, связанные с геометрией треугольника;
3. выделить теорию, подлежащую изучению на элективном курсе «Геометрия треугольника»;
4. разработать методику работы с теоремами элективного курса «Геометрия треугольника»;
5. разработать методику работы с задачным материалом элективного курса «Геометрия треугольника»;
6. разработать дистанционный курс «Геометрия треугольника»;
7. составить тематическое планирование на элективный курс «Геометрия треугольника».

Методы исследования:

1. изучение и анализ математической, методической и психолого-педагогической литературы;

2. систематизация теоретического и задачного материала;
3. классификация задачного материала по возможности использования на этапах усвоения теоретических знаний, формирования умений, применения знаний и умений;
4. составление задач, направленных на усвоение теоретических знаний, формирование умений, общих подходов к решению задач, развитие приемов мыслительной деятельности, как общих, так и частных;
5. наблюдение за деятельностью учащихся в процессе усвоения геометрических знаний, формирования умений с целью выделения этапов этих процессов, требующих более тщательной методической обработки;
6. анализ платформ для дистанционных курсов с целью выделения наиболее оптимальной с точки зрения простоты использования, доступности для учащихся.

Глава 1. Содержание элективного курса «Геометрия треугольника»

1.1. Теоретические основы изучения темы «Геометрия треугольника»

1.1.1. «Геометрия треугольника» в школьном курсе геометрии

Из школьного курса геометрии мы знаем, что с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров и точка пересечения высот. Эти четыре точки называются замечательными точками треугольника. Именно с этими точками связаны представленные далее теоремы.

В учебнике Л.С. Атанасяна [1] Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны треугольника.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

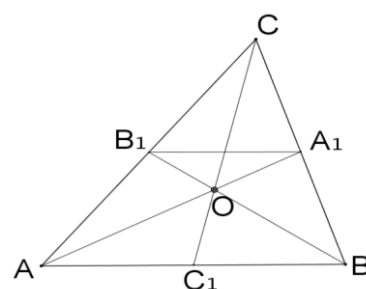


Рисунок 1

В учебнике Л.С. Атанасяна [1] при доказательстве данной теоремы используется подобие треугольников (рис. 1).

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

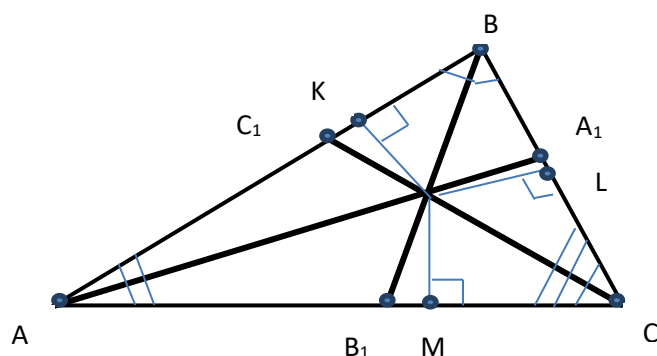


Рисунок 2

В учебнике Л.С. Атанасяна [1] данная теорема доказывается на основе свойства биссектрисы угла, которое формулируется следующим образом: каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.(рис.2)

Дадим определение серединного перпендикуляра. Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

В учебнике Л.С. Атанасяна [1] доказательство этой теоремы этой теоремы основывается на свойстве серединного перпендикуляра к отрезку, которое звучит следующим образом: каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка (рис.3).

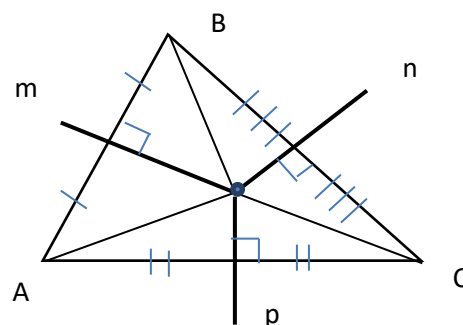


Рисунок 3

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Теорема. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

По учебнику Л.С. Атанасяна [1] прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$ (рис.4), где $A_2B_2 \parallel AB$, $B_2C_2 \parallel BC$,

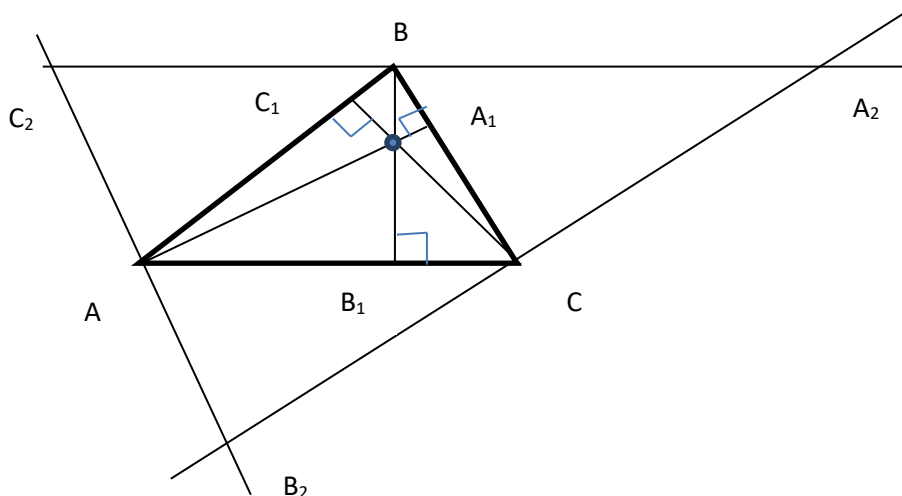


Рисунок 4

$$A_2C_2 \parallel AC.$$

Таким образом, мы рассмотрели теоремы о замечательных точках и линиях треугольника. В школьном курсе геометрии этот материал дан на базовом уровне, но часто для решения более сложных геометрических задач требуется использование дополнительных теорем, связанными с этими точками [1].

1.1.2. Дополнительные главы геометрии по теме: «Геометрия треугольника»

Рассмотрим теоремы, связанные с замечательными точками, знание которых были бы полезны ученикам.

Теорема (прямая Эйлера). Во всяком треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на одной прямой.

Доказательство:

При проведении доказательства рассмотрим возможные случаи:

1. Треугольник ABC равнобедренный, причем $AB=BC$, то медиана BD является высотой треугольника, а прямая BD – серединным перпендикуляром к стороне AC (рис. 5). Ясно, что в

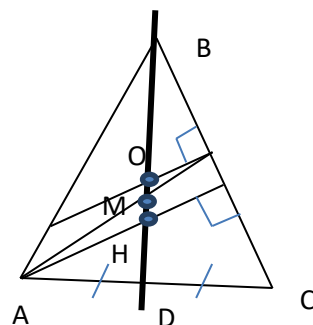


Рисунок 5

этом случае точка M является точкой пересечения медиан, точка H – точкой пересечения высот и точка O – точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на прямой BD . Это и есть в данном случае прямая Эйлера.

2. Треугольник ABC неравнобедренный и остроугольный (рис. 6). Пусть H – точка пересечения высот AA_2 и BB_2 ,

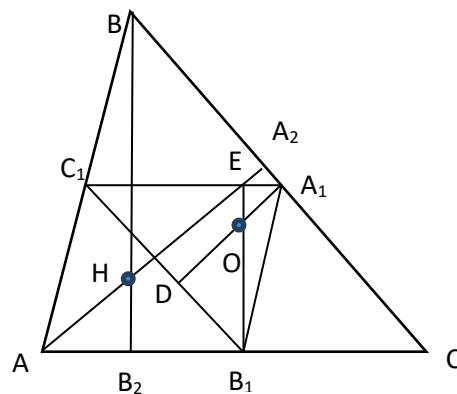


Рисунок 6

точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB , точка O – точка пересечения серединных перпендикуляров A_1D B_1E к сторонам BC и AC треугольника ABC . Заметим, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а коэффициент подобия равен 2:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$$

(свойство средней линии треугольника).

Далее, высоты A_1D и B_1E треугольника $A_1B_1C_1$ являются отрезками серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC , и потому эти высоты пересекаются в точке O .

Высоты BB_2 и B_1E в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ являются сходственными. Точно так же сходственными являются отрезки этих высот BH и B_1O .

Поэтому $\frac{BH}{B_1O} = 2$.

Проведем медиану BB_1 треугольника ABC и отрезок HO (рис. 7). Пусть M – точка пересечения. Треугольники BMH и B_1MO подобны по двум углам. Коэффициент подобия этих треугольников равен 2, так как $\frac{BH}{B_1O} = 2$.

Поэтому и $\frac{BM}{MB_1} = 2$, т. е. точка M делит медиану BB_1 в отношении 2:1, считая от вершины B . Следовательно, точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC .

3. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом B (рис. 8). Точка H – точка пересечения высот совпадает с вершиной B , точка O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

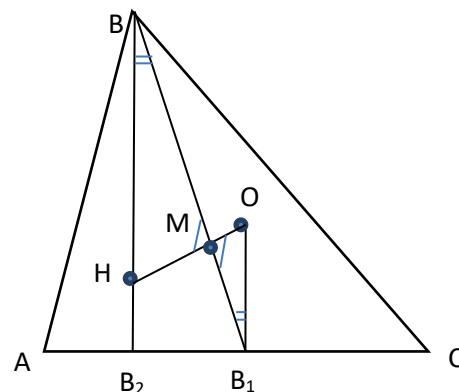


Рисунок 7

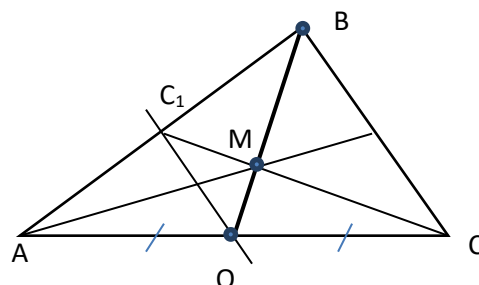


Рисунок 8

совпадает с серединой гипотенузы AC , и так как точка M – точка пересечения медиан лежит на медиане BO , то все три точки H , M и O лежат на прямой BO . Теорема доказана[2].

Теорема (окружность Эйлера) В неравностороннем треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности, центром которой является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной

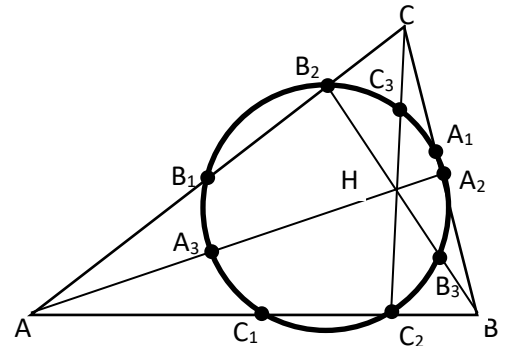


Рисунок 9

окружности, а ее радиус в два раза меньше радиуса описанной окружности.

Доказательство:

Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают середины сторон противоположных

соответствующим вершинам, H – точка пересечения высот треугольника; A_2, B_2, C_2 – основания высот, опущенных из соответствующих вершин, A_3, B_3, C_3 – середины отрезков AH, BH и CH . Докажем, что точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ принадлежат одной

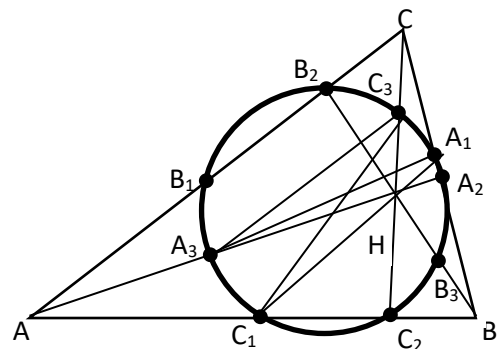


Рисунок 10

окружности. Проведем окружность через точки C_1, C_2 и C_3 . Отрезок C_1C_3 будет ее диаметром (рис.9).

A_1C_1 – средняя линия треугольника ABC , то $A_1C_1 \parallel AC$. Так как A_1C_3 – средняя линия треугольника BCH , то $A_1C_3 \parallel BH$. Значит, $\angle C_1A_1C_3 = 90^\circ$ и, следовательно, точка A_1 принадлежит этой окружности (рис.10).

Аналогично, так как A_3C_3 – средняя линия треугольника AHC , то $A_3C_3 \parallel AC$. Так как C_1A_3 – средняя линия треугольника ABH , то $C_1A_3 \parallel BH$. Значит, $\angle C_1A_3C_3 = 90^\circ$ и, следовательно, точка A_3 принадлежит этой окружности.

$A_1C_1 A_3C_3$ – прямоугольник и, значит, A_1A_3 – диаметр окружности. Так как $\angle A_1A_2A_3 = 90^\circ$, то A_2 принадлежит окружности.

Таким образом, мы доказали, что этой окружности принадлежат точки A_1 , A_2 и A_3 . Аналогично доказывается, что этой окружности принадлежат точки B_1 , B_2 , B_3 . Теорема доказана [3].

Теорема (прямая Симпсона) Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.

Доказательство:

Пусть D – произвольная точка описанной около треугольника ABC окружности, тогда получим четырехугольник

$ABCD$. Так как сумма углов A и C равна 180 градусов, то либо угол A равен углу C и они равны 90 градусов и тогда прямая Симпсона будет прямая AC , либо один из этих углов острый, а другой тупой.

Пусть угол A острый. Рассмотрим два случая: угол ACD , а значит, и равный ему угол ABD острый (рис. 11); оба эти угла тупые (рис. 12).

В первом случае основание P перпендикуляра, проведенного из точки D к прямой AB , лежит между A и B , основание R перпендикуляра к AC лежит между A и C , а основание Q перпендикуляра к BC – вне отрезка BC .

Во втором случае все три основания перпендикуляров лежат вне сторон

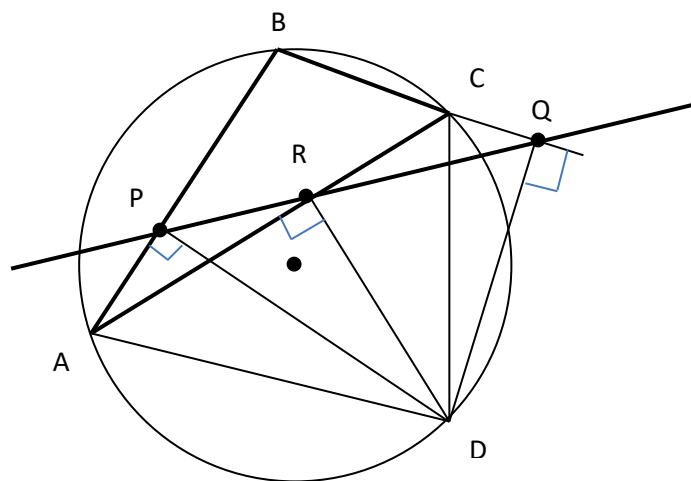


Рисунок 11

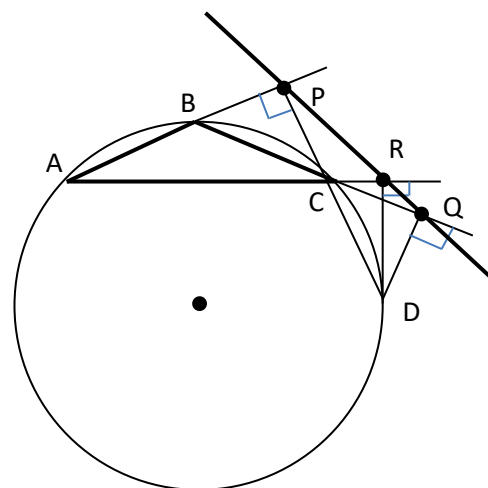


Рисунок 12

треугольника.

Ход рассуждений для этих двух случаев в основном одинаковый. Поэтому проведем доказательство для первого случая, отмечая при необходимости в скобках отличие ситуации во втором случае.

Отрезок AD виден из точек P и R под прямым углом, поэтому точки P, R, A и D лежат на окружности с диаметром AD. Следовательно, угол $\angle PRA = \angle PDA$ как углы, вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу.

Отрезок CD виден из точек R и D под прямым углом, поэтому точки R, Q, C и D лежат на окружности с диаметром CD. Следовательно, $\angle QRC = \angle QDC$ (во втором случае $\angle QRC + \angle QDC = 180^\circ$).

Но $\angle PDA = 90^\circ - \angle BAD$, а $\angle QDC = 90^\circ - \angle QCD = 90^\circ - (180^\circ - \angle BCD) = 90^\circ - \angle BCD$, поскольку $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Следовательно, $\angle PDA = \angle QDC$.

Из полученных равенств $\angle PRA = \angle PDA$, $\angle QRC = \angle QDC$ и $\angle PDA = \angle QDC$ следует: $\angle PRA = \angle QRC$ (во втором случае $\angle QRC + \angle PRA = 180^\circ$). Но это и означает, что точки P, R и Q лежат на одной прямой. Теорема доказана [2].

Теорема Стюарта. Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то

$$AD^2 = AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} + AB^2 \cdot \frac{CD}{BC} - BD \cdot$$

CD. (9)

Доказательство:

Применим теорему косинусов к треугольникам ACD и ABD (рис.13):

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC,$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB.$$

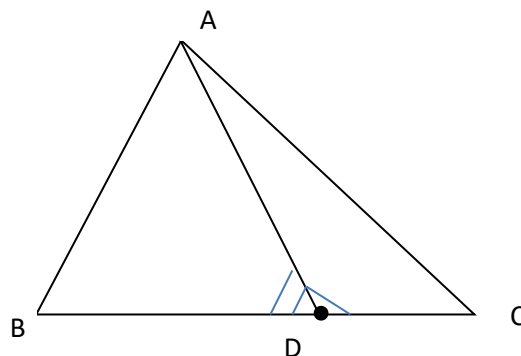


Рисунок 13

Умножив первое равенство на BD, а второе – на CD и сложив, получим:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BD + DC^2 \cdot BD - \\ - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot BD \cdot \cos ADC + AD^2 \cdot CD + DB^2 \cdot CD - \\ - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot CD \cdot \cos ADB. (10)$$

Так как $BD + DC = BC$, то

$$AD^2 \cdot BD + AD^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BC, \\ DC^2 \cdot BD + DB^2 \cdot CD = DC \cdot BD \cdot BC.$$

Далее, углы ADC и ADB смежные, поэтому $\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB$, и, следовательно, $\cos ADC = \cos(180^\circ - \angle ADB) = -\cos ADB$.

Таким образом, равенство (10) принимает вид

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD \cdot BC.$$

Разделив его на BC , приходим к равенству (9). Теорема доказана [3].

Теперь перейдем к рассмотрению теорем Чебы и Менелая.

Существуют различные способы доказательства данных теорем. Рассмотрим два подхода к формулировкам и доказательству данных теорем.

Первый подход реализуется в дополнительных главах геометрии [2]. Опишем его.

Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах AB , BC и AC точки C_1 , A_1 , B_1 . Поставим такой вопрос: при каком расположении этих точек отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке?

Ответ на поставленный вопрос дает теорема, которую связывают с именем итальянского инженера и математика Джованни Чебы (1648 – 1734).

В качестве вспомогательной к доказательствам теорем Чебы и Менелая, рассмотрим следующую задачу:

На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки K и M так, что $AK:KC=m:n$, $BM:MC=p:q$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O (рис. 14). Доказать, что $AO:OM = \frac{m}{n} \left(\frac{q}{p} + 1 \right)$.

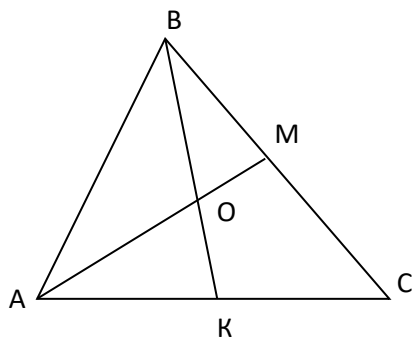


Рисунок 14

Дано: $\triangle ABC$

$K \in AC$, $AK:KC=m:n$

$M \in BC$, $BM:MC=p:q$

$$AM \cap BK = O$$

$$\text{Доказать: } AO:OM = \frac{m}{n} \left(\frac{q}{p} + 1 \right)$$

Решение:

Через точку М проведем прямую, параллельную ВК. Она пересекает сторону АС в точке D, и согласно обобщению теоремы Фалеса

$$KD:DC = BM:MC = p:q.$$

Пусть $AK=mx$. Тогда в соответствии с условием задачи $KC=nx$, а так как $KD:DC=p:q$, то $KD = \frac{pn}{p+q} \cdot x$. Снова воспользуемся обобщением теоремы Фалеса:

$$AO:OM = AK:KD = mx: \frac{p}{p+q} \cdot nx = \frac{m}{n} \left(\frac{q}{p} + 1 \right).$$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы Чевы.

Теорема Чевы. Если на сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС взяты соответственно точки C_1 , A_1 , B_1 , то отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (1)$$

Доказательство:

1. Пусть отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке О. (рис.15)

Докажем, что выполнено равенство (1). По

теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} \left(1 + \frac{CA_1}{A_1B} \right) \text{ и } \frac{AO}{OA_1} = \frac{C_1A}{BC_1} \left(1 + \frac{A_1B}{CA_1} \right).$$

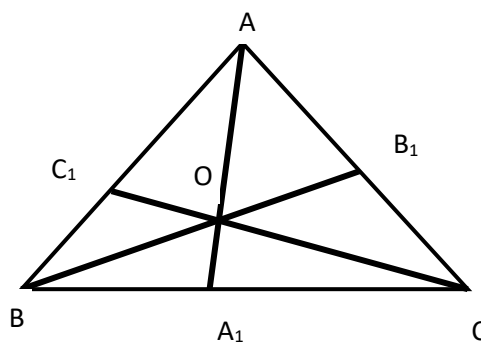


Рисунок 15

Левые части этих равенств одинаковы, значит, равны и правые части.

Приравнявая их, получаем $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC}{A_1B} = \frac{C_1A}{BC_1} \cdot \frac{BC}{CA_1}$.

Разделив обе части на правую часть, приходим к равенству (1).

2. Докажем обратное утверждение. Пусть точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах на сторонах AB, BC и AC так, что выполнено равенство (1). Докажем, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и проведем прямую CO (рис 16). Она пересекает сторону AB в некоторой точке, которую обозначим C_2 . Так как отрезки AA_1, BB_1 и

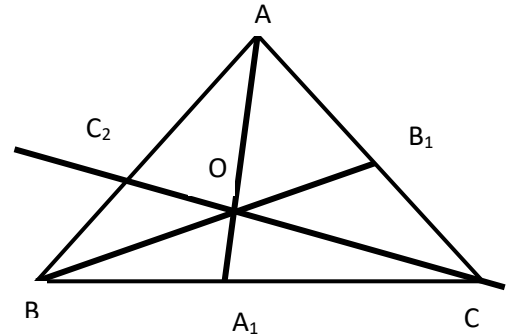


Рисунок 16

CC_2 пересекаются в одной точке, то по доказанному в первом пункте $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot$

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1. \quad (2)$$

Итак, имеют место равенства (1) и (2).

Сопоставляя их, приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$, которое показывает, что точки C_1 и C_2 делят сторону AB в одном и том же отношении. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O . Теорема доказана [2].

Замечание. Мы брали точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC . Если же только одна из этих точек берется на соответствующей стороне, а две другие – на продолжениях сторон, то справедливо следующее утверждение:

Если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке либо параллельны, то выполняется равенство (1) и, обратно, если выполняется равенство (1), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Перейдем теперь к теореме, которая названа в честь Менелая Александрийского, древнегреческого математика и астронома, жившего в I в.н.э.

Теорема Менелая. Если на сторонах АВ и ВС и продолжении стороны АС (либо на продолжениях сторон АВ, ВС и АС) взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (3)$$

Доказательство:

1. Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис.17). Докажем, что выполнено равенство (3). Проведем прямые AD, BE и CF параллельно прямой B_1A_1 . Согласно обобщению теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{DA_1}{A_1C} \text{ и } \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BA_1}{A_1D}.$$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получаем:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{A_1B}{CA_1}, \text{ откуда } \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

т.е. выполнено равенство (3).

2. Докажем обратное утверждение. Пусть точка B_1 взята на продолжении стороны АС, а точки C_1 и A_1 – на сторонах АВ и ВС, причем так, что выполнено равенство (3). Докажем, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Прямая B_1C_1 пересекает сторону ВС в некоторой точке A_2 (рис. 18). Так как B_1 , C_1 и A_2 лежат на одной прямой, то по доказанному в первом пункте

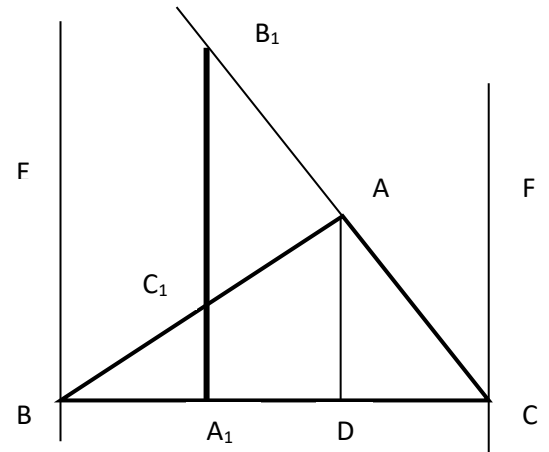


Рисунок 17

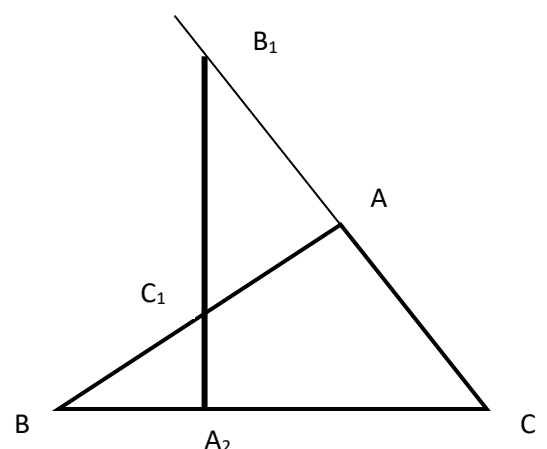


Рисунок 18

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), приходим к равенству $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_2}{A_2B}$, которое показывает, что точки A_1 и A_2 делят сторону BC в одном и том же отношении. Следовательно, точки A_1 и A_2 совпадают, и, значит точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Аналогично доказывается обратное утверждение в случае, когда все три точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на продолжениях соответствующих сторон. Теорема доказана [2].

Второй подход подразумевает более общие формулировки теорем Чебы и Менелая, доказательства которых основаны на понятие вектор, коллинеарные векторы и простое отношение трех точек.

Под простым отношением трех точек понимается A, B, C лежащих на одной прямой понимается $K = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}}$, ($K = (AB, C)$). При этом если векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ сонаправлены, то простое отношение трех точек положительно и равно отношению длин его векторов. Если же векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ противоположно направлено, то простое отношение трех точек будет отрицательным и противоположным по знаку отношению длин его векторов. На основе этих положений и доказывается теорема Менелая.

Теорема Менелая: Дан треугольник ABC . Три несовпадающие с вершинами различные точки A_1 , B_1 , C_1 , взятые на прямых BC , CA и AB принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = -1$.

Необходимость:

Дано: треугольник ABC , $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

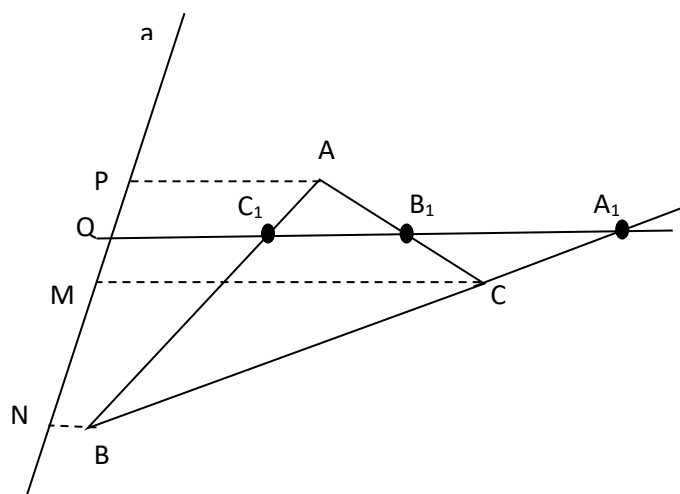


Рисунок 19

Доказать: $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = -1$.

Доказательство:

Проведем прямую a не параллельную прямой A_1C_1 (рис. 19). Спроектируем точки A, B, C на прямую a по направлению прямой A_1C_1 и рассмотрим простые отношения трех точек. Получим:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QM}} \quad (1)$$

$$\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{QP}} \quad (2)$$

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QN}} \quad (3)$$

Перемножим полученные равенства (1), (2) и (3):

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} &= \frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{QP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QN}} \\ \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} &= \frac{\overrightarrow{NM}}{\overrightarrow{MN}} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PM}} \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QP}} \\ \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \\ \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} &= -1 \end{aligned}$$

Итак: $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = -1$

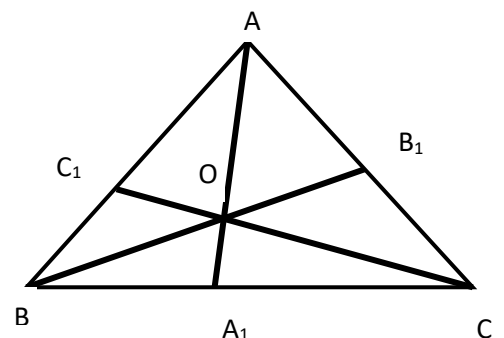
Достаточность:

Дано: треугольник ABC , $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$, A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = -1$.

Доказать: A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Доказательство:

Предположим, что $B_1 \notin C_1A_1$, тогда существует точка $B_2 \in C_1A_1$, что по



доказанному $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{B_2A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$. Тогда $\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{B_2A}} = \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}$, а это и означает, что $B_1=B_2$.

А теперь, используя теорему Менелая, докажем теорему Чеви.

Теорема Чеви: Если на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC или на их продолжениях взять точки A_1 , B_1 , C_1 , не совпадающие с вершинами, то для того чтобы прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 проходили через одну точку или были параллельны необходимо и достаточно чтобы

$$(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = 1$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1 \right).$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 проходят через одну точку.

Необходимость:

Дано: треугольник ABC , $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.

Доказать: $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = 1$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BB_1C$ и AA_1 (рис. 20) и воспользуемся теоремой Менелая

$$(BC, A_1) \cdot (CB_1, A) \cdot (B_1B, O) = -1;$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1O}}{\overrightarrow{OB}} = -1 \right) \quad (1) \text{Аналогично}$$

для $\triangle ABB_1$ и CC_1 : $(BB_1, O) \cdot (B_1A, C) \cdot$

$$(AB, C_1) = -1;$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{BO}}{\overrightarrow{OB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{CA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1 \right) \quad (2).$$

Перемножим (1) и (2):

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1O}}{\overrightarrow{OB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BO}}{\overrightarrow{OB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{CA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1;$$

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BO}}{\overrightarrow{OB}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1O}}{\overrightarrow{OB_1}} = 1;$$

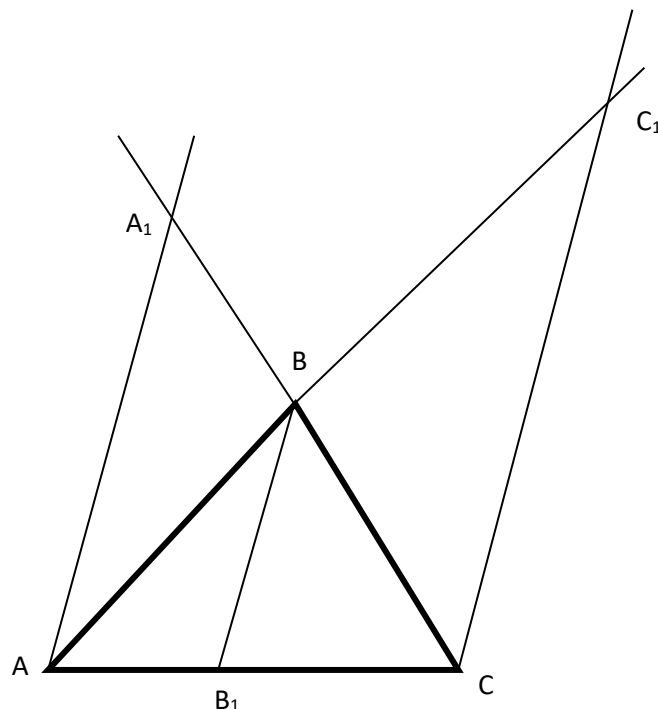


Рисунок 21

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1;$$

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

Достаточность:

Дано: треугольник ABC, $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$,

$$(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = -1.$$

Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.

Доказательство:

$BB_1 \cap AA_1 = O, O \notin CC_1, CO \cap AB = C_1^*$; Тогда по предположению $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1^*) = 1$ и по условию $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = 1$ или $(AB, C_1^*) = (AB, C_1)$, а это значит, что $C_1^* = C_1$ и делаем вывод, что CC_1 проходит через O.

Второй случай: прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны.

Необходимость:

Дано: треугольник ABC, $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB, AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

Доказать: $(BC, A_1) \cdot (CA, B_1) \cdot (AB, C_1) = 1$

Доказательство:

В случае, когда прямые могут быть параллельными (рис.21):

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{AC}};$$

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB_1}};$$

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{AC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB_1}}$$

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1$$

Доказательство достаточности проводится также методом от противного.

1.2. Тематическое планирование элективного курса «Геометрия треугольника»

Таблица 1 – Тематическое планирование элективного курса «Геометрия треугольника»

№ п/п	Тема	Содержание	Количество часов
1	Теорема Чевы	Прямая и обратная теорема Чевы, решение задач на применение теоремы.	5
2	Теорема Менелая	Прямая и обратная теорема Менелая, решение задач на применение теоремы.	5
3	Прямая Эйлера	Понятие прямой Эйлера, теорема о прямой Эйлера, применение теоремы в решении задач.	5
4	Окружность Эйлера	Понятие окружности Эйлера, теорема об окружности Эйлера, решение задач на применение теоремы.	5
5	Прямая Симсона	Понятие прямой Симпсона, теорема о прямой Симсона, решение задач на применение теоремы.	5
6	Теорема Стюарта	Теорема Стюарта, решение задач на применение теоремы.	5
7	Урок -	Повторение изученных	4

	обобщение полученных знаний	понятий, теорем, решение задач из ОГЭ.	
Всего часов:			34

Глава 2: Методика работы над материалами элективного курса «Геометрия треугольника»

2.1. Методика работы с теоремами элективного курса «Геометрия треугольника»

При доказательстве теорем решаются следующие методические задачи:

- учащиеся знакомятся с тем материалом из содержания теоремы и ее доказательства, который используется при изложении дальнейшего теоретического материала и решении разнообразных задач;
- развитие навыков логического мышления (неосознанного использования законов логики и правил вывода, умения различать прямую и обратную теорему, свойства и признаки понятий, необходимые и достаточные условия, формулировать предложения в различных формах и т.д.);
- обучение учащихся рационально записывать ход рассуждений, обосновывать свои суждения, использовать аналитико-синтетический метод в рассуждениях;
- развитие умения анализировать теорему, исследовать математические ситуации, выделять условия и требования, в которых происходит доказательство, разбивать рассуждения на логические шаги, обосновывая каждый шаг.

Есть два подхода к обучению учащихся понимать и доказывать теоремы. Во-первых, теорема является новым материалом, который подлежит изучению и включает следующие этапы:

1. подготовка к изучению нового;
2. мотивация изучения нового материала;
3. введение нового – организация его восприятия и понимания;
4. закрепление;
5. применение.

Во-вторых, теорема – задача на доказательство, которая выражает какое-то отношение, свойство, и по этой причине рекомендации,

относящиеся к различным этапам решения задач, например, таким как обучение анализу условия, поиск идеи доказательства можно использовать и в методике изучения теорем.

При обучении учащихся теоремам могут иметь место различные методы: абстрактно-дедуктивный, конкретно-индуктивный. Выбор метода обучения диктуется содержанием теоремы, методом ее доказательства, конкретными возможностями учащихся. Выбор метода осуществляется при логико-математическом анализе материала, подлежащего изучению.

Методическую работу над теоремой, вводимой конкретно-индуктивным путем, можно проводить по следующему плану:

1. В основу для формированию подготовительных задач положить моменты в доказательстве теоремы, которые могут показаться учащимся сложными для понимания.

2. Сформулировать проблему, для которой потребуется новая теорема. Для того чтобы мотивировать учащихся к изучению теорем, чтобы обучение превратилось в увлекательный процесс, необходимо предлагать интересные задачи практического характера, для решения которых требуется изучить новый материал.

3. Формулировка теоремы. Выделение условия и заключения. Работа с чертежом.

Мы часто сталкиваемся с тем, что заучивание формулировок теорем учащимися происходит без понимания их смысла. А если учащийся сам находит новое доказательство и формулирует теорему, то отпадает необходимость заучивания. Для того чтобы учащиеся смогли самостоятельно получить формулировку теоремы, они могут выполнять различные построения, измерения, вычисления, использовать модели.

Для устранения проблем с пониманием формулировки и доказательства теорем надо разделить формулировку на данные и требование, условие и заключение. Записи условия и заключения теоремы должны быть выполнены так, чтобы по записи можно было полностью восстановить текст

формулировки теоремы. И в то же время запись условия не должна содержать ничего лишнего.

4. Поиск доказательства теоремы.

Здесь можно попытаться найти звенья доказательства, используя различные методы поиска. Учитель вопросами направляет мыслительную деятельность обучающихся.

5. Разработка плана доказательства.

6. Строгое доказательство теоремы. Оформление доказательства.

Доказательство теоремы учащиеся могут получить с большой долей самостоятельности, если это доказательство предъявлено ученикам в виде последовательности задач, доступных для самостоятельного решения.

7. Доказательство теоремы на измененном чертеже.

После получения и осуществления идеи доказательства теоремы, после записи доказательства теоремы необходим этап закрепления полученного доказательства. Этот этап является закреплением самого доказательства и предшествует закреплению и применению формулировки теоремы.

Этап закрепления доказательства в изучении теоремы предполагает работу по выявлению идеи, метода доказательства и отдельные его шаги. При осуществлении этапа закрепления полученного доказательства можно варьировать обозначения на неизменном чертеже, а также сам чертеж.

8. Применение теоремы к решению задач.

9. Дать возможность обучающимся подумать над другим способом доказательства теоремы (в классе или дома) [9].

Таким образом, суть данного метода заключается в следующем: теорема в готовом виде не сообщается, проводится специальная работа по «подведению» учащихся к теореме, обнаружению соответствующей математической закономерности. Итогом этой работы является формулирование изучаемой теоремы.

Рассмотрим конкретно – индуктивный метод работы с теоремами на примере доказательства теоремы Симсона.

Начнем работу с формулировки задачи о прямой Симсона, но при этом учащимся дано только условие задачи, а результат, т.е. то, что требуется найти, учащиеся должны сформулировать самостоятельно.

Доказать, что если из произвольной точки M окружности, описанной около треугольника ABC , опустить перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения, то.....

Для того чтобы учащиеся могли найти требуемое, им предлагается выполнить чертеж (условие задачи) в компьютерной среде GeoGebra. Далее на чертеже менять положение точки M и треугольника ABC и ответить на вопрос, где будут находиться основания перпендикуляров.

При построении чертежа в данной среде, учащиеся могут придерживаться следующего алгоритма:

1. построим произвольный треугольник ABC ;
2. построим окружность, описанную около построенного произвольного треугольника ABC .
3. выберем на этой окружности произвольную точку D ;
4. опустим из выбранной нами точки D перпендикуляры на все стороны или на их продолжения;
5. обозначим точки оснований перпендикуляров.

Меняя положение точки M и параметры треугольника ABC убеждаемся, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Таким образом, мы подошли к формулировке теоремы:

Теорема: прямая Симпсона. Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.

Дано: $\triangle ABC$,

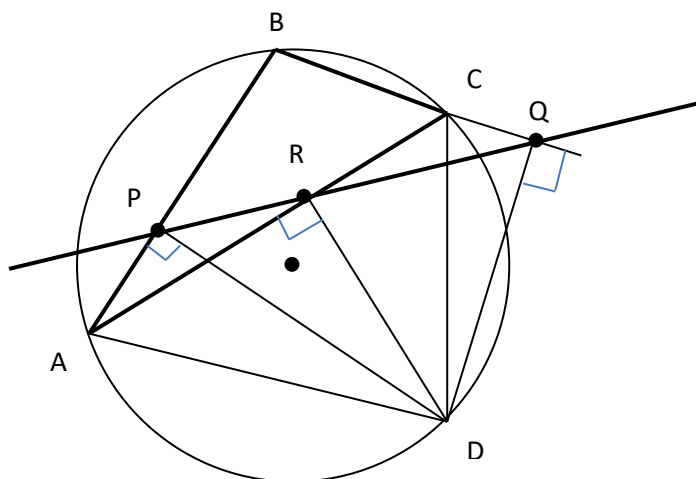


Рисунок 22

окружность, описанная около $\triangle ABC$,

D – произвольная точка, принадлежащая данной окружности

$DP \perp AB$, $DR \perp AC$, $BC \perp DQ$

P , R , Q – основания перпендикуляров, опущенных на стороны (их продолжения) $\triangle ABC$

Доказать: P , R , Q лежат на одной прямой

Поиск доказательства:

Пусть D – произвольная точка описанной около треугольника ABC окружности, тогда получим четырехугольник $ABCD$. Так как сумма углов A и C равна 180 градусам, то либо угол A равен углу C и они равны 90 градусов и тогда прямой Симпсона будет прямая AC , либо один из этих углов острый, а другой тупой.

Пусть угол A острый. Рассмотрим два случая: угол ACD , а значит, и равный ему угол ABD острый (рис. 22); оба эти угла тупые (рис. 23).

В первом случае основание P перпендикуляра, проведенного из точки D к прямой AB , лежит между A и B , основание R перпендикуляра к AC лежит между A и C , а основание Q перпендикуляра к BC – вне отрезка BC .

Во втором случае все три основания перпендикуляров лежат вне сторон треугольника.

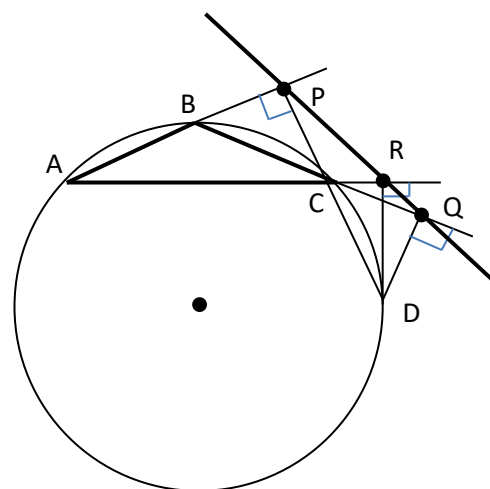


Рисунок 23

Ход рассуждений для этих двух случаев в основном одинаковый. Поэтому проведем доказательство для первого случая. Заметим, если угол $\angle ARP$ равен углу $\angle QRC$, то точки P, R, Q лежат на одной прямой.

План доказательства:

1. $\angle PRA = \angle PDA$
2. $\angle QRC = \angle QDC$
3. $\angle PDA = \angle QDC$
4. $\angle PRA = \angle QRC$

Доказательство:

Отрезок AD виден из точек P и R под прямым углом, поэтому точки P, R, A и D лежат на окружности с диаметром AD . Следовательно, угол $\angle PRA = \angle PDA$ как углы, вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу.

Отрезок CD виден из точек R и D под прямым углом, поэтому точки R, Q, C и D лежат на окружности с диаметром CD . Следовательно, $\angle QRC = \angle QDC$ (во втором случае $\angle QRC + \angle QDC = 180^\circ$).

Но $\angle PDA = 90^\circ - \angle BAD$, а $\angle QDC = 90^\circ - \angle QCD = 90^\circ - (180^\circ - \angle BCD) = 90^\circ - \angle BCD$, поскольку $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Следовательно, $\angle PDA = \angle QDC$.

Из полученных равенств $\angle PRA = \angle PDA$, $\angle QRC = \angle QDC$ и $\angle PDA = \angle QDC$ следует: $\angle PRA = \angle QRC$ (во втором случае $\angle QRC + \angle PRA = 180^\circ$). Но это и означает, что точки P, R и Q лежат на одной прямой. Теорема доказана [2].

Работа над теоремой, вводимой абстрактно-дедуктивным путем, может проходить по следующему плану:

1. рассматриваются задачи, подготавливающие обучающихся к восприятию теоремы, ее доказательства;
2. формулируется теорема;
3. выделяются условие и заключение теоремы;
4. выполняется чертеж;

5. проводится доказательство теоремы;
6. выделяется план доказательства;
7. приводится схема взаимообусловленности геометрических теорем;
8. проводится доказательство теоремы на измененном чертеже;
9. теорема иллюстрируется на конкретных примерах, моделях;
10. применение теоремы к решению задач [9].

Рассмотрим абстрактно – дедуктивный метод работы с теоремами на примере доказательства теоремы Менелая. Для того чтобы ребят подвести к необходимости изучения теоремы Менелая, можно предложить следующий комплекс задач.

Задача №1: В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите периметр треугольника ABC, если $AC = 4$; $DC = 2$; $BD = 3$ (рис.24).

Задача №2 (задача по готовому чертежу) (Рис.25)

Задача 3. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD:DC = 1:3$, а точка O делит AD в отношении $AO:OD = 5:2$. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC? (рис.26)

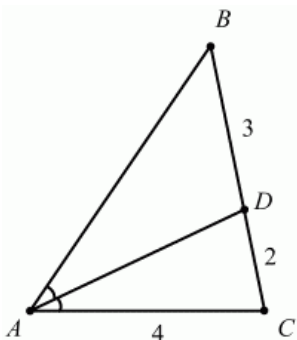


Рисунок 24

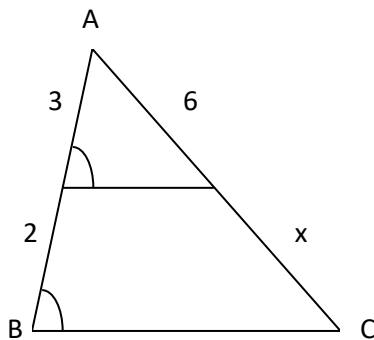


Рисунок 25

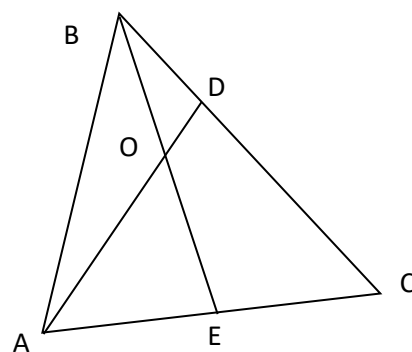


Рисунок 26

Формулируем теорему:

Теорема Менелая Пусть прямая пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1 , B_1 , C_1 , то справедливо соотношение $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

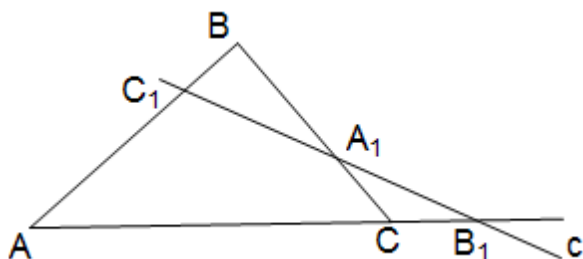


Рисунок 27

Дано: $\triangle ABC$

$c \cap BC = A_1$, $c \cap AB = C_1$, $c \cap AC = B_1$

Доказать: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

Доказательство:

а) Пусть A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, причем A_1 - на стороне BC , C_1 - на стороне AB , B_1 - на продолжении стороны AC за точку C . (рис.28)

Для применения теории подобия, необходимо выполнить дополнительное построение:

проведем $CK \parallel AB$. Получим $\triangle KCB_1$ и $\triangle C_1AB_1$.

$$\text{Получим: } \triangle KCB_1 \sim \triangle C_1AB_1 \Rightarrow \frac{KC}{AC_1} = \frac{CB_1}{AB_1} \quad (1)$$

Аналогично получаем для $\triangle BC_1A_1$ и $\triangle SKA_1$

$$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle SKA_1 \Rightarrow \frac{BC_1}{KC} = \frac{BA_1}{A_1C} \quad (2)$$

Для того чтобы получить (*) осталось перемножить равенства (1) и (2).

$$\frac{KC}{AC_1} \cdot \frac{BC_1}{KC} = \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{BA_1}{A_1C}$$

После применения тождественных преобразований получим искомое равенство:

$$\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$$

Заметим, что теорема Менелая проста для применения, но здесь важно увидеть нужную конфигурацию - треугольник и секущую, причем такие, что два отношения в равенстве Менелая будут известны, тогда можно будет

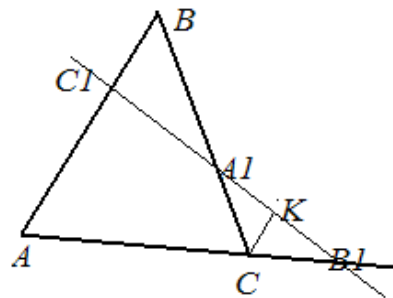


Рисунок 28

найти третье. Для того чтобы, ребята потренировались в выделении треугольника, секущей и точки ее пересечения с каждой стороной треугольника или продолжением, можно предложить выполнить задание.

Задание: На следующих рисунках (рис.29-31) указать треугольник, секущую и точки ее пересечения с каждой стороной треугольника или продолжением:

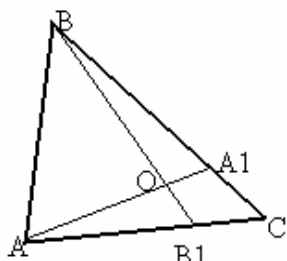


Рисунок 29

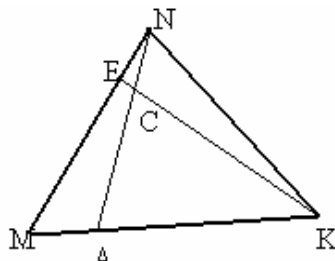


Рисунок 30

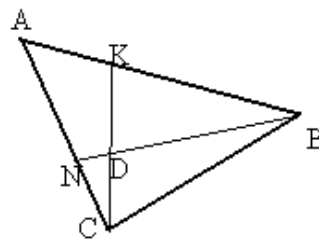


Рисунок 31

После выполнения данного задания можно вернуться к Задаче №3 и попробовать ее решить с помощью этой теоремы Менелая.

Задача 3. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD:DC = 1:3$, а точка O делит AD в отношении $AO:OD = 5:2$. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?

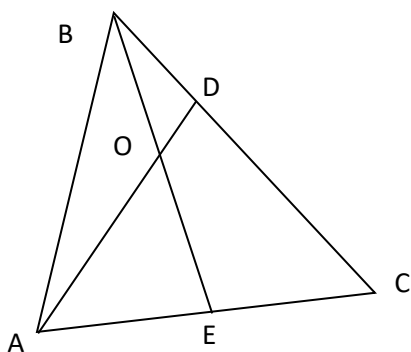


Рисунок 32

Дано:

$\triangle ABC, D \in BC, BD:DC = 1:3$

$O \in AD, AO:OD = 5:2$

$BO \cap AC = E$

Найти $AE:EC$

Решение:

Рассмотрим $\triangle ADC$: $B \in DC, O \in AD, E \in AC$; O, B, E лежат на одной прямой;

По теореме Менелая $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DO}{OA} = 1$.

Так как $BD:DC = 1:3$, то $CB:BD = 4:1$,

Подставляем, получаем $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} = 1, \frac{AE}{EC} = \frac{5}{8}$.

Наличие всех рассмотренных этапов при обучении каждой теореме требует большого расхода времени. И в полном, развернутом виде все этапы могут быть представлены лишь в отдельных, удобных для этого случаях. А в различных конкретных ситуациях на первый план выдвигается то один, то другой этап, предпочтение отдается то поиску формулировки, то обучению записи полученного доказательства, то поиску идеи доказательства, то исследованию – в зависимости от требований ситуации.

Выделим возможные уровни усвоения учащимися теорем. Учащийся:

1. правильно формулирует теорему, понимает каждое слово в формулировке;
2. может привести свой пример на применение формулировки;
3. может повторить доказательство;
4. понимает идею и план доказательства, может варьировать обозначения, чертеж, метод доказательства;
5. узнает и применяет теорему в знакомой ситуации;
6. узнает и применяет теорему в незнакомой ситуации.

Приведенные уровни усвоения теоремы являются перечислением дидактических целей – целей обучения, которые учитель ставит на отдельных уроках по изучению той или иной теоремы. В соответствии с выделенными целями строится урок – выбираются методы и формы работы, строятся системы упражнений.

2.2. Методика работы с задачным материалом элективного курса «Геометрия треугольника»

Обучение геометрии осуществляется, в первую очередь, через задачи. Задачи одновременно являются и целью, и средством обучения геометрии. Целью, потому что на занятиях происходит специальное обучение решению задач определенных видов. Средством, потому что через решение задач происходит ознакомление обучающихся с новыми математическими методами, новыми математическими понятиями, фактами. В процессе

решения задач происходит развитие мышления, памяти, внимания и других психических и нравственных качеств личности обучающихся [8].

Решение геометрических задач основывается на следующих методах:

1. метод дополнительного построения основывается на дополнении исходного чертежа элементами, которые помогут увидеть связь между тем, что дано и тем, что необходимо найти;
2. метод подобия заключается в выделении подобных фигур, то есть фигур, у которых стороны увеличены или уменьшены в равное число раз;
3. метод замены, суть его в замене исходной фигуры на фигуру с той же искомой величиной, чтобы найти ее было легче;
4. метод введения вспомогательного неизвестного подразумевает составление уравнения (системы уравнений) на основе условия задачи, а в качестве вспомогательных аргументов выбираются величины, которые вместе с данными составляют набор элементов, однозначно задающих некоторую фигуру;
5. метод площадей заключается в нахождении искомых величин с помощью привлечения разных формул для нахождения площади одной фигуры;
6. метод «вспомогательных объемов» состоит в том, что объем фигуры выражается двумя способами, а затем составив равенство из полученных выражений и решив его, мы получим искомую величину;
7. Векторный метод основывается на применении свойств операций над векторами и условий коллинеарности и компланарности векторов в решении задач;
8. Координатный метод, его суть заключается в ведении удобной системы координат, выделении координат точек и решении простых задач в координатах.

Условно в процессе обучения учащихся решению геометрических задач можно использовать следующую классификацию задач:

1. задачи по готовым чертежам;
2. ключевые задачи;

3. задачи обязательного уровня;
4. задачи повышенного уровня, нестандартные задачи [6].

Остановимся подробнее на каждом из них.

1. Решение задач по готовым чертежам

Неоценимую помощь в усвоении и закреплении новых понятий и теорем в процессе обучения учащихся приемам работы с чертежом оказывают упражнения на готовых чертежах, которые дают возможность наращивать темп работы на уроках, то есть в течение минимума времени усвоить и повторить большой объем материала.

Важное значение в процессе обучения геометрии имеет умение устанавливать соотношение между данными и искомыми. Часто связь между данными и искомыми задачи раскрывается с помощью применения основных понятий и теорем, в результате использования других данных.

Для того, чтобы решить подобного рода задачу, необходимо уметь выделять на чертеже фигуры, которые нужны для решения. Учащимся требуются хорошие знания основных понятий и теорем, высокая логическая подготовка: умение рассуждать, анализировать, преобразовывать задачу, а также выделять нужные отношения и связи на чертеже [4].

Упражнения способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают умению грамотно рассуждать, находить в них общее и делать различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы. Большинство таких задач рационально использовать в качестве устных упражнений. При их выполнении происходит активная мыслительная деятельность учащихся, что в свою очередь приводит к эффективному произвольному запоминанию определений, свойств и признаков изучаемых фигур. Определения, свойства и признаки рассматриваемых фигур периодически повторяются в процессе выполнения разнообразных упражнений, что приводит в итоге к продуктивному запоминанию.

Задачи на готовых чертежах готовят учащихся к запоминанию и самостоятельному решению таких задач, для которых эти упражнения являются элементами [5].

2. Решение ключевых задач

Задачи, формулировки и способы решения которых применяются при решении других задач темы часто называют ключевыми задачами.

Метод ключевых задач – метод составления системы задач, созданной по принципу: каждая задача системы использует результат решения одной какой-либо задачи.

Ключевые задачи – это средство решения других задач, которое способствует усвоению с одной стороны метода решения, показанного в ключевой задаче, с другой стороны позволяет увидеть взаимосвязи отдельных тем школьного курса геометрии. Поэтому сформированная таким методом система задач является не только средством повторения, но также средством систематизации учебного материала [7].

Существуют различные способы подбора ключевых задач. Системы ключевых задач формируются в зависимости от особенностей учащихся.

Разберем несколько методов подбора ключевых задач. Один из методов основывается на умениях, сформировавшихся у обучающихся в результате изучения темы. Учителю необходимо подобрать задачи, соответствующие умениям, которые планируется сформировать. На следующем этапе требуется выбрать минимальное количество задач, которые обязательны для изучения и понимания учащимися. Если ученик научиться решать эти задачи, то он сможет найти пути решения для любой задачи из учебника.

Также существуют критерии отбора ключевых задач:

1. соответствие программе по данной теме;
2. степень использования при изучении последующих тем;
3. затраты времени по обучению учащихся решению задач;
4. оптимальность алгоритмов решения задач;
5. возможность поразить учащихся красотой решения.

Еще один метод подборки ключевых задач – это метод исключения и дополнения. Для его реализации необходимо обратиться к задачам из учебника. Выбираем первую задачу, которая будет кандидатом на включение в систему ключевых задач. Затем переходим ко второй задаче и далее проводим анализ задач - кандидатов:

1. вторая задача аналогична первой. Сравниваем эти задачи и принимаем решение, какую из этих задач оставить для дальнейшей работы;
2. если вторая задача отличается от первой, то эту задачу следует включить в список кандидатов;
3. если вторая задача включает в себя первую, то, возможно, первую следует исключить, а вторую включить в список кандидатов и т.д. Переходим от задачи к задаче, таким образом, формируя систему ключевых задач.

В результате, проработав все задачи из учебника, у нас останутся 3–6 задач. Они и будут включены в число ключевых задач, отобранных на основе учебника.

Следующий метод подбора ключевых задач основывается на методах решения по изучаемому материалу, которые учитель выделяет для работы с учащимися. Произвести выборку задач можно, опираясь на следующий план действий:

1. рассматриваем задачи в учебнике и дополнительных источниках;
2. соотносим задачи с методами решения, которые подобраны для работы с учащимися;
3. выбираем 3–6 задач, при решении которых будут применяться все подобранные учителем методы решения задач.

Важно, что сложные методы могут быть заложены в нескольких ключевых задачах. Это позволяет показать несколько вариантов реализации метода.

Существует еще один метод подбора ключевых задач, который называется комбинаторным, который реализуется с помощью выделения

объектов, фигурирующих в задачах на ту или иную тему. Далее рассматриваются возможные варианты комбинаций этих объектов, и затем подбирается задача для наиболее важной комбинации.

Таким образом, производится подборка ключевых задач и методы их решения. Учитель должен взять те решения ключевых задач, которые будет использовать на уроке. Подобранные методы должны быть применимы к более широкому множеству задач [10].

На следующем этапе необходимо определиться, в какой последовательности ключевые задачи будут разбираться на уроке.

При этом следует руководствоваться следующими рекомендациями:

1. Начинать необходимо с ключевых задач.
2. Задачи, при решении которых необходимо использовать учебный материал внешкольного курса лучше разобрать в завершение урока. Самые красивые и яркие задачи лучше отнести на вторую часть урока, чтобы под влиянием работы с ними ученики преодолели естественную усталость.
3. Ключевая задача, которая может быть использована для решения другой ключевой задачи, должна быть разобрана ранее. Таким образом, учащиеся смогут потренироваться в распознавании и применении ключевых задач.
4. Чтобы учащиеся смогли преодолеть естественную усталость, во второй половине урока разбираются самые интересные и яркие задачи.
5. В процессе урока желательно чередование задач с громоздкими записями с теми, которыми не требую обширных письменных пояснений.
6. В число первых лучше включать задачи, связанные с предыдущей темой, а далее разбирать задачи, которые используются в последующих темах. В результате использования ключевых задач выстраивается наглядная модель мыслительного процесса.

Таким образом, реализуется возможность перехода от «школы памяти» к «школе мышления». Конечно, не каждый учащийся может решить задачу повышенного уровня сложности, но понять и воспроизвести этапы решения

может каждый. Учащиеся перестают быть слушателями и превращаются в активных участников образовательного процесса.

В процессе работы над ключевыми и комбинированными задачами у учащихся вырабатываются навыки и умения, формирующие базу для изучения предмета на углубленном уровне. Практическое применение полученных знаний выходит на первый план. Становиться более актуальным переход к нестандартным задачам [7].

3. *Решение стандартных задач обязательного уровня.*

Следующим этапом после изучения ключевых задач и способов их решения является работа над стандартными задачами. Под стандартной задачей понимается геометрическая задача, решение которой проводится по готовым правилам. Эти правила вытекают из определений или теорем, определяющих алгоритм решения этих задач. Для получения решения стандартной задачи ученику необходимо уметь определять вид задачи и этапы ее решения.

Геометрические задачи по характеру требований подразделяются на три основных вида:

1.Задачи на нахождение искомого. Основное требование в задачах этого вида – найти какое-то искомое. Под искомым может подразумеваться величина, отношение, объект, форма предмета и т.д. Из курса геометрии сюда относятся вычислительные задачи на нахождения длины отрезка, величины угла, площадь фигуры, объём тела и т.п.

2.Задачи на доказательство или объяснение. В задачах этого класса требование состоит в том, чтобы убедиться в справедливости некоторого утверждения, или проверить верность или ложность этого утверждения, или объяснить, почему имеет место то или иное явление, тот или иной факт. Все задачи, требование которых начинается со слов «доказать», «проверить» или содержащие вопрос «Почему?», обычно относятся к этому классу задач.

3.Задачи на преобразование или построение. В геометрических задачах такого вида требуется построить или преобразовать какую-либо фигуру в

соответствии с заданными условиями. Особенность задач такого плана – это требование из заданного объекта построить другой объект с заранее известными свойствами.

Очень важно уметь определять вид задачи. Это умение позволяет получить готовый алгоритм решения, то есть использовать известный метод решения подобных задач. Часто не получается определить вид задачи, но в этом случае возможно применить приемы, например, разбиения на подзадачи известного вида.

Решение задачи – это процесс, который состоит из ряда этапов. Рассмотрим план работы над геометрической задачей:

1. анализ задачи;
2. схематическая запись задачи;
3. поиск способа решения задачи;
4. осуществление решения задачи;
5. проверка решения задачи;
6. исследование задачи;
7. формулировка ответа задачи;
8. анализ решения задачи.

По выше изложенному плану мы видим, что процесс решения задачи сложен и многогранен. На этапе анализа необходимо понять условие задачи, разобраться в выдвигаемых требованиях. Важным этапом является схематическая запись задачи, на котором мы строим чертеж, если он требуется и выполняем краткую запись условий и требований. Важно при выполнении чертежа на глаз придерживаться отношений элементов, которые связывают фигуры. Иногда это помогает «увидеть» то свойство фигуры, опираясь на которое можно решить задачу. При выполнении краткой записи необходимо указать объект, о котором идет речь в задаче, а потом записывать его характеристики и свойства. Параллельно с анализом можно осуществлять поиск решения задачи. Самым распространенным методом поиска решения задач используется метод восходящего анализа, общая схема которого имеет

вид: чтобы доказать утверждение необходимо подобрать то утверждение, из которого оно следует, затем необходимо найти утверждение, из которого следует ранее подобранное и т.д., пока не найдем истинное утверждение, исходя из условия. Рассуждая в обратном порядке, доказываем требуемое утверждение [6].

Существуют и другие методы поиска решения задач:

1. нисходящий анализ;
2. анализ в форме расчленения;
3. индуктивный метод;
4. переформулировка задачи и другие.

Запись решения геометрической задачи выполняется с выделением цепочек рассуждений, в каждой из которых либо сначала формулируется вывод, а затем после слов «так как» перечисляются все посылки, на основании которых этот вывод сделан, либо наоборот.

После завершения решения задачи необходимо удостовериться в его правильности, убедиться в том, что все условия учтены, все шаги решения обоснованы.

Заключительным этапом решения является этап исследования задачи. Этот этап необязателен, но очень полезен для формирования исследовательских умений у обучающихся. На данном этапе оценивается рациональность решения задачи, возможности использования других способов решения, рассматриваются варианты частных выводов, которые можно сделать из предложенного решения.

Вышеизложенный план решения задачи можно считать лишь примерным. Этапы решения в реальном процессе переплетаются так, например, анализируя задачу, мы параллельно осуществляем поиск способа решения. А план решения формулируется не до начала решения, а в процессе. Поиск решения заключается в нахождении идеи решения [6].

4. *Решение задач повышенного уровня, нестандартных задач.*

Задачи, для которых нет общих правил и положений, определяющих алгоритм их решения, относятся к нестандартным задачам. Есть две основные операции, последовательно применяя которые можно решить нестандартную задачу: путем преобразования или переформулирования нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной задаче, и разбиении нестандартной задачи на несколько стандартных подзадач. Умению решать нестандартные задачи необходимо обучать заинтересовавшихся учащихся.

Рассмотрим процесс обучения учащихся решению геометрических задач, а именно реализацию данных этапов на примере теоремы Менелая.

Пример задачи по готовому чертежу:

На следующих рисунках (рис. 33-35) указать треугольник, секущую и точки ее пересечения с каждой стороной треугольника или ее продолжением, для которых удобно применить теорему Менелая:

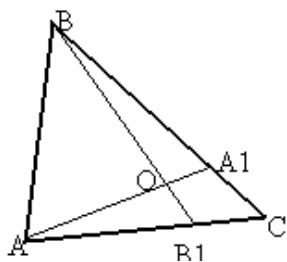


Рисунок 33

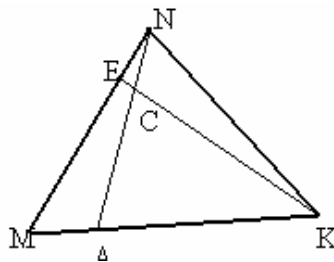


Рисунок 34

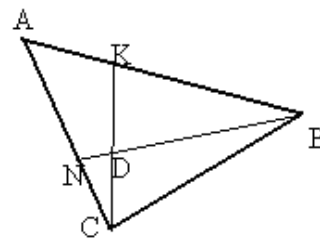


Рисунок 35

Решение:

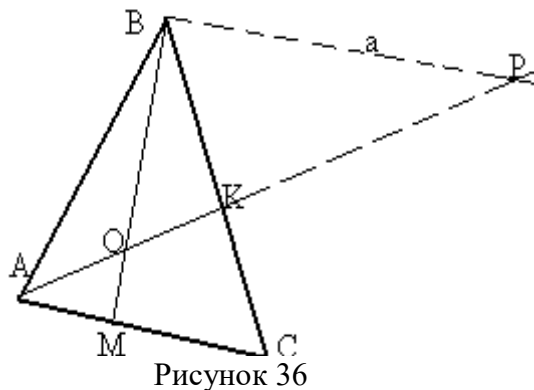
На Рис. 33 применить теорему Менелая мы можем к треугольнику BB_1C , так как есть секущая AA_1 , которая пересекает сторону BC в точке A_1 , продолжение стороны CB_1 в точке A и сторону BB_1 в точке O .

На Рис. 34 применить теорему Менелая мы можем к треугольнику MNA , так как есть секущая EK , которая пересекает сторону MN в точке E , продолжение стороны MA в точке K и сторону NA в точке C .

На Рис. 35 применить теорему Менелая мы можем к треугольнику ABN , так как есть секущая KC , которая пересекает сторону AB в точке K , продолжение стороны AN в точке C и сторону NB в точке D .

Пример ключевой задачи:

В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC – точка K так, что $AM:MC = 2:3$, $BK:KC = 4:3$. В каком отношении АК делит отрезок BM?



Дано: $\triangle ABC$

$$M \in AC, AM:MC = 2:3$$
$$K \in BC, BK: KC = 4:3$$

Найти: ВО:ОМ.

Решение:

Рассмотрим ΔMBC :

АК – секущая (пересекает две стороны и продолжение третьей стороны треугольника МВС);

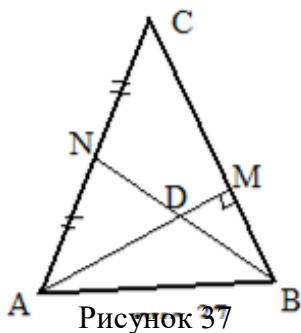
$A \in MC, O \in BM, K \in BC$; A, O, K лежат на AK (на одной прямой).

По теореме Менелая: $\frac{BO}{OM} \cdot \frac{MA}{AC} \cdot \frac{CK}{KB} = 1$, $\frac{BO}{OM} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 1$, $\frac{BO}{OM} = \frac{10}{3}$.

ОТВЕТ: $\frac{BO}{OM} = \frac{10}{3}$.

Пример задачи обязательного уровня:

В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ ($AC=BC$) проведены медиана BN и высота AM , которые пересекаются в точке D . $AD=5$, $DM=2$. Найти S_{ABC} .



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,

BN – медиана,

AM – высота,

$$\text{BN} \cap \text{AM} = \text{D}$$

AD=5, DM=2

Найти: S_{ABC} .

Решение:

Для того, чтобы найти искомое, а именно $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AM$, необходимо найти CB.

Для этого рассмотрим $\triangle AMC$: $AN=NC$, так как BN – медиана;

$AM = AD + DM = 5 + 2 = 7$; NB – секущая; $N \in AC$, $B \in CM$, $D \in AM$. Тогда по теореме Менелая получим:

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MD}{DA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{2}{5} = 1; \frac{CB}{BM} = \frac{5}{2}; \frac{CM}{BM} = \frac{3}{2}.$$

Пусть коэффициент пропорциональности равен k, тогда $CM = 3k$, $BM = 2k$.

$\triangle ACM$ – прямоугольный, так как AM – высота, тогда для данного треугольника можно применить теорему Пифагора:

$$AC^2 = CM^2 + AM^2,$$

$$AC^2 = 9k^2 + 49;$$

$$AC = CB \Rightarrow AC = 5k ;$$

$$25k^2 = 9k^2 + 49,$$

$$16k^2 = 49,$$

$$k = \frac{7}{4}$$

$$\text{Тогда } CB = 5k = \frac{35}{4},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{4} \cdot 7 = \frac{245}{8}$$

$$\text{Ответ: } \frac{245}{8}$$

Пример задачи повышенного уровня:

Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 и треугольника ABC, если $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$

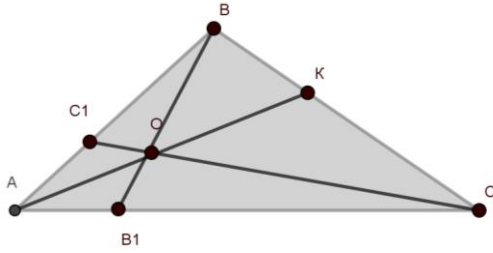


Рисунок 38

Дано: $\triangle ABC$

$$B_1 \in AC, C_1 \in AB$$

$$AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$$

$$BB_1 \cap CC_1 = O$$

$$AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$$

Доказать: $BK = KC$

Найти: $S_{AB_1OC_1} : S_{\triangle ABC}$

Решение:

а) Для того, чтобы доказать, что $BK = KC$, применим теорему Менелая:

$$\text{для } \triangle AKC \text{ и секущей } BB_1 \text{ имеем: } \frac{KO}{OA} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CB}{BK} = 1, (1)$$

$$\text{для } \triangle ABK \text{ и секущей } CC_1 \text{ имеем: } \frac{KO}{OA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CK} = 1 (2)$$

$$\text{так как по условию } \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B}, \text{ то } \frac{CB}{BK} = \frac{BC}{CK} \rightarrow CK = BK \text{ ч.т.д.}$$

б) Теперь найдем $S_{AB_1OC_1} : S_{\triangle ABC}$.

$$\text{Теорема Менелая для } \triangle C_1CB \text{ и секущей } AK \text{ имеем } \frac{C_1O}{OC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BA}{AC_1} = 1,$$

$$\text{т. к. } CK = KB, \text{ а } AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4, \text{ то } \frac{C_1O}{OC} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{для } \triangle B_1VC \text{ и секущей } AK \text{ имеем: } \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{AC}{AB_1} = 1 \rightarrow \frac{B_1O}{OB} = \frac{1}{5}$$

$\triangle AB_1V$ и $\triangle BCB_1$ имеют общую высоту, проведенную на сторону AC ,

$$\text{значит } \frac{S_{AB_1V}}{S_{BCB_1}} = \frac{1}{4}$$

Аналогично $\triangle AB_1V$ и $\triangle ABC$ имеют общую высоту, проведенную на

сторону AC , значит $\frac{S_{AB_1V}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}$, $\triangle CAC_1$ и $\triangle ABC$ имеют общую

высоту, проведенную на сторону AB , значит $\frac{S_{CAC_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}, \rightarrow 5S_{CAC_1} = S_{ABC} \rightarrow$

$$S_{CAC_1} = \frac{1}{5}S_{ABC}$$

$\triangle AOC$ и $\triangle AC_1O$ имеют общую высоту, проведенную на сторону CC_1 ,

значит

$$\frac{S_{AC_1O}}{S_{AOC}} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{1}{5},$$

$\triangle AC_1O$ и $\triangle ACC_1$ имеют общую высоту, проведенную на сторону CC_1 , значит

$$\frac{S_{AC_1O}}{S_{ACC_1}} = \frac{OC_1}{C_1C} = \frac{1}{6}, \rightarrow \frac{S_{AC_1O}}{S_{ABC}} = \frac{1}{30}$$

$$\text{Аналогично } \frac{S_{AB_1O}}{S_{ABC}} = \frac{1}{30} \rightarrow \frac{S_{AC_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{15}$$

2.3. Использование дистанционных технологий в разработке элективного курса «Геометрия треугольника»

На портале Система дистанционного обучения НовГУ на основе элективного курса «Геометрия треугольника» разработан дистанционный курс «Геометрия треугольника». В процессе создания курса были использованы следующие технологии: LearningApps.org, Quizizz.com, Googleform.com. В данном курсе предложены к изучению пять тем:

- Теорема Чевы;
- Теорема Менелая;
- Теоремы о прямой и окружности Эйлера;
- Теорема о прямой Симпсона;
- Теорема Стюарта [13].

Перед началом изучения курса учащимся предлагается вводная диагностика в виде теста по темам, необходимым для изучения данного курса.

Тест «Вводная диагностика»

1. Отрезок, соединяющий вершину и середину противоположной стороны треугольника, называется ...
 - а) Медиана;
 - б) Биссектриса;
 - в) Высота.
2. Луч, проведенный из вершины треугольника и делящий угол пополам, называется...

- а) Медиана;
 - б) Биссектриса;
 - в) Высота.
3. Перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположащую сторону треугольника, называется...
- а) Медиана;
 - б) Биссектриса;
 - в) Высота.
4. Верно ли, что биссектриса треугольника делит противоположащую сторону на отрезки, пропорциональные противоположащим сторонам треугольника?
- а) Верно;
 - б) Неверно.
5. Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении...
- а) 3:2
 - б) 2:1
 - в) 1:2
6. Верно ли, что параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки?
- а) Верно;
 - б) Неверно.
7. Треугольники называются подобными, если...
- а) все стороны равны;
 - б) сходственные стороны и соответствующие углы равны;
 - в) все углы равны;
 - г) сходственные стороны и углы равны.
8. Отношение площадей подобных треугольников равно...
- а) Коэффициенту подобия;
 - б) Квадрату коэффициента подобия.

9. Отношение площадей подобных треугольников равно...

- в) Коэффициенту подобия;
- г) Квадрату коэффициента подобия.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите периметр треугольника ABC, если AC=4, DC=2, BD=3.

- а) 23
- б) 25
- в) 15

После тестирования представлены лекции и задания по каждой из ранее перечисленных тем. В лекциях отражены биографические факты об ученых, чьи теоремы рассматриваются, а так же формулировки и доказательства представленных теорем.

Так после лекции о теореме Менелая для того чтобы проверить, разобрались ли обучающиеся как правильно записывать данную теорему для различных треугольников, предлагается выполнить следующее задание: Сопоставить чертеж с записью теоремы Менелая для данного чертежа. (рис.39)

Теорема Менелая на конкретных чертежах 2020-04-09

Diagram 1 (Top Left): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BD}{DN} \cdot \frac{NC}{CA} = 1$

Diagram 2 (Top Right): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1O}{BO} = 1$

Diagram 3 (Middle Left): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CD}{BK} \cdot \frac{KB}{AK} = 1$

Diagram 4 (Middle Right): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} = 1$

Diagram 5 (Bottom Left): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{ME}{EN} \cdot \frac{NC}{CK} \cdot \frac{KA}{AM} = 1$

Diagram 6 (Bottom Middle): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{ME}{EN} \cdot \frac{NC}{CA} \cdot \frac{AK}{KM} = 1$

Diagram 7 (Bottom Right): Triangle ABC with transversal line A1B1C1. Formula: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} = 1$

Рисунок 39

Далее представлен разбор простейших задач на применение теоремы Менелая, после чего учащиеся сталкиваются со следующим заданием:

Решение простейших задач на применение теоремы Менелая

*** Обязательно**

Задача №1: В треугольнике ABC проведена биссектриса AA₁ и медиана BB₁. Известно, что AB=2, AC=3. Найти отношение BO:OB₁. *

2 балла

Мой ответ _____

Задача №2: На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки N и K, так что AN:NC=m:n, AK пересекет NB в точке Q, BN:NQ=p:q. Найти BK:KC. *

3 балла

Мой ответ _____

Отправить

Рисунок 40

После лекции о теореме Чевы учащимся предлагается пройти тест, который содержит задания на понимание формулировки данной теоремы, на умение правильно записывать теорему для конкретного треугольника.

Тест «Теорема Чевы в треугольниках»

1. Выберите правильную запись теоремы Чевы для данного чертежа.

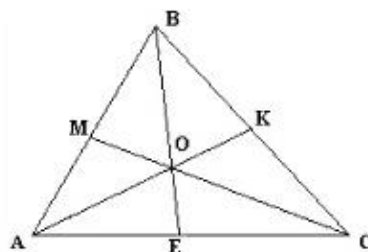


Рисунок 41

а) $\frac{AM}{MO} \cdot \frac{OC}{CE} \cdot \frac{OE}{EA} = 1$

$$\text{б) } \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1$$

$$\text{в) } \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\text{г) } \frac{MA}{BM} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{EC}{AE} = 1$$

2. Можно ли доказать следующее утверждение: "Медианы треугольника пересекаются в одной точке" с помощью теоремы Чевы?

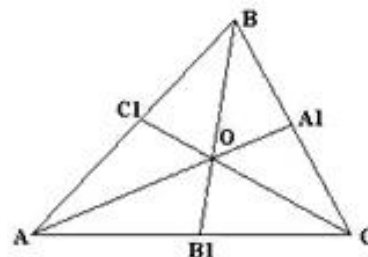


Рисунок 42

а) Можно;

б) Нельзя.

3. Выберите вариант ответа, в котором теорема Чевы для данного треугольника записана неверно.

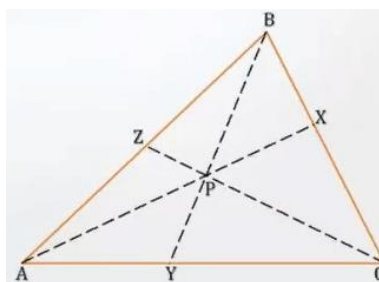


Рисунок 43

$$\text{а) } \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = 1$$

$$\text{б) } \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$$\text{в) } \frac{XB}{BZ} \cdot \frac{ZA}{AY} \cdot \frac{YC}{CX} = 1$$

$$\text{г) } \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

4. Можно ли следующее утверждение: "Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке" доказать с помощью теоремы Чевы? Если можно, то выберите вариант ответа, в котором доказательство является полным.

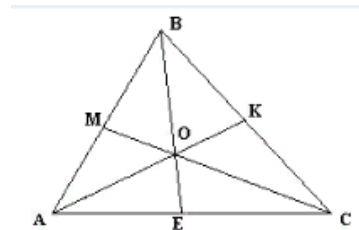


Рисунок 44

- а) Данное утверждение нельзя доказать с помощью теоремы Чевы;

- б) Доказательство:

Пусть BE , MC , AK – биссектрисы треугольника ABC .

Воспользуемся свойством: биссектриса угла треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные противолежащим к сторонам.

$$\text{Значит, } \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}; \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}.$$

Найдем произведение: $\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} = 1$, по теореме Чевы прямые BM , MC , AK пересекаются в одной точке.

- в) Доказательство:

BE , MC , AK – биссектрисы треугольника ABC .

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}; \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} = 1$$

- г) Доказательство:

Пусть BE , MC , AK – биссектрисы треугольника ABC .

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1;$$

Следовательно, биссектрисы пересекаются в одной точке.

5. Верно ли, что если на сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС взяты точки C_1 , A_1 , B_1 и выполняется следующее равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1, \text{ то отрезки } AA_1,$$

BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

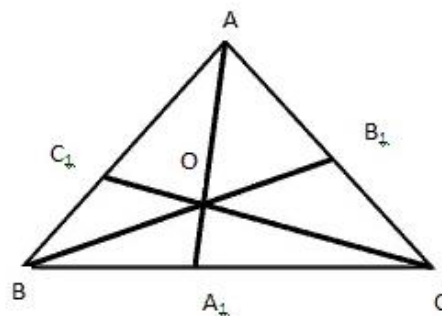


Рисунок 45

- а) Верно;
- б) Неверно.

После изучения теорем о прямой и окружности Эйлера, ребятам предлагается самостоятельно разобраться в применении данных теорем при решении задач, а затем необходимо пройти тестирование на понимание теорем и их доказательства.

Тест «Прямая и окружность Эйлера»

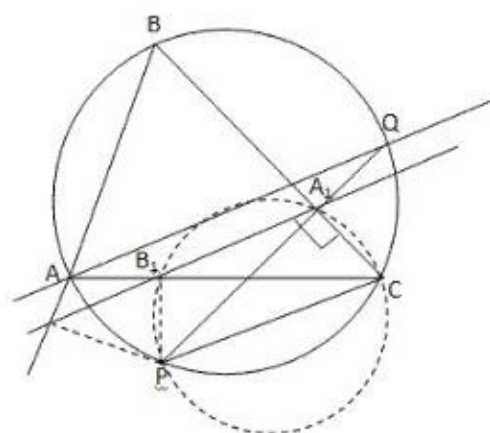
1. Какие точки лежат на прямой Эйлера?
 - а) точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения биссектрис;
 - б) точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров;
 - в) точка пересечения биссектрис, точка пересечения медиан и точка пересечения серединных перпендикуляров;
 - г) точка пересечения биссектрис, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров;
2. Какой теоретический факт лежит в основе доказательства теоремы о прямой Эйлера?
 - а) равенство треугольников;
 - б) теорема Фалеса;

- в) теорема синусов;
 - г) подобие треугольников.
3. Верно ли, что центром окружности Эйлера является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром вписанной окружности, а ее радиус в два раза меньше радиуса вписанной окружности?
- а) Верно;
 - б) Неверно.
4. О каком треугольнике идет речь в теореме об окружности Эйлера?
- Ответ: _____.
5. Верно ли, что, опираясь на рассмотренные примеры на применение теорем о прямой и окружности Эйлера, можно утверждать, что они применяются в задачах на доказательство?
- а) Верно;
 - б) Неверно.

После лекции «Прямая Симпсона» учащимся предлагается выполнить задания на выявление понимания теоремы и ее доказательства, а так же на умение устанавливать соотношение между данными и искомыми [11].

1. Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из _____, лежат на одной прямой.
- Ответ: _____.
2. В каких случаях прямая Симпсона совпадает со стороной треугольника?
- а) если угол А равен углу С;
 - б) если угол В равен углу D;
 - в) если угол А острый, угол С тупой;
 - г) если противолежащие углы равны;
 - д) если угол В острый, угол D тупой;
 - е) другое: _____.

3. Перед вами рассмотрено решение следующей задачи: Хорда PQ окружности, описанной около треугольника ABC, перпендикулярна стороне BC. Докажите, что прямая Симпсона параллельна прямой AQ. Но некоторые элементы доказательства перемешались. Сопоставьте номера пропусков с соответствующими элементами доказательства.



Дано: треугольник ABC,
окружность, описанная около
треугольника ABC,
PQ – хорда, PQ перпендикулярна BC
Доказать: $B_1A_1 \parallel AQ$.

Доказательство:
Точки P, B1, A1 и C лежат на окружности с диаметром PC.
Тогда 1) _____ как вписанные в эту окружность и опирающиеся на дугу A1C.
Но 2) _____ как вписанные в окружность (описанная около треугольника ABC) и
опирающиеся на дугу QC.
Получили, что 3) _____.
Тогда, $B_1A_1 \parallel AQ$, т.к. 4) _____ – соответственные, 5) _____.

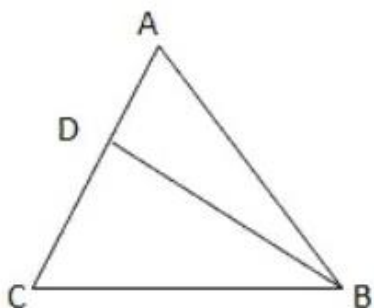
	$\angle CB_1A_1 =$ $\angle CAQ$	$\angle CB_1A_1$ и $\angle CAQ$	$\angle A_1PC =$ $\angle A_1B_1C =$ $\angle CAQ$	$\angle A_1PC =$ $\angle A_1B_1C$	$\angle QPC = \angle CAQ$
1)	☐	☐	☐	☐	☐
2)	☐	☐	☐	☐	☐
3)	☐	☐	☐	☐	☐
4)	☐	☐	☐	☐	☐
5)	☐	☐	☐	☐	☐

Рисунок 46

Далее после рассмотрения темы «Теорема Стюарта» учащимся предлагается выполнить тестовые задания, в которые входят теоретический опрос и решение простейших задач на применение данной теоремы [12].

Тест «Теорема Стюарта»

1. На основе каких математических данных доказана теорема Стюарта?
 - а) Теорема синусов;
 - б) Теорема косинусов;
 - в) Признаки равенства треугольников;
 - г) Признаки подобия треугольников.
2. В треугольнике ABC сторона AB равна 21, биссектриса BD равна $8\sqrt{3}$, а отрезок DC равен 8. Найти периметр треугольника ABC.



Дано: треугольник ABC,

BD – биссектриса,

AB=21, $BD=8\sqrt{3}$, DC=8.

Найти: $P_{\triangle ABC}$

Рисунок 47

Ответ: _____.

3. Точка D делит сторону треугольника ABC на отрезки BD=5 и DC=3. Так же известно, что AB=10, AC=12. Найти AD.

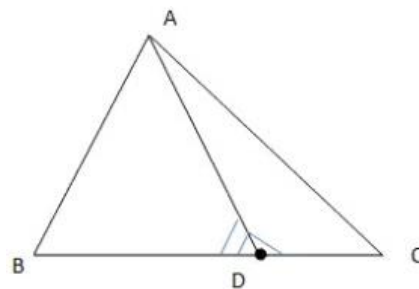


Рисунок 48

Ответ: _____.

4. В треугольнике TMH проведена медиана НО. Также известно, что MT=10, MH=6, HT=8. Найти ОН. (Ответ округлите до десятых) (рис.49)

- а) 5,5
- б) 5,4
- в) 8,1
- г) 3,8

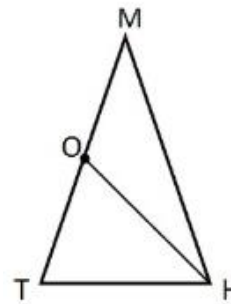


Рисунок 49

5. Выберите вариант ответа, в котором правильно записана теорема Стюарта для данного треугольника. (рис.47)

- а) $OH^2 = MH^2 \cdot \frac{TM}{OT} + TH^2 \frac{TM}{OM} - OM \cdot OT$
- б) $OH^2 = MH^2 \cdot \frac{OM}{TM} + TH^2 \frac{OT}{TM} - OM \cdot OT$
- в) $OH^2 = MH^2 \cdot \frac{OT}{TM} + TH^2 \frac{OM}{TM} - OM \cdot OT$
- г) $OH^2 = MH^2 \cdot \frac{TM}{MO} + TH^2 \frac{TM}{OT} - OM \cdot OT$

Для проверки знаний, полученных при изучении тем данного курса, разработана итоговая работа. В данной работе подобраны задания на знание теорем данного курса, применение их при решении задач. (рис. 48-50)

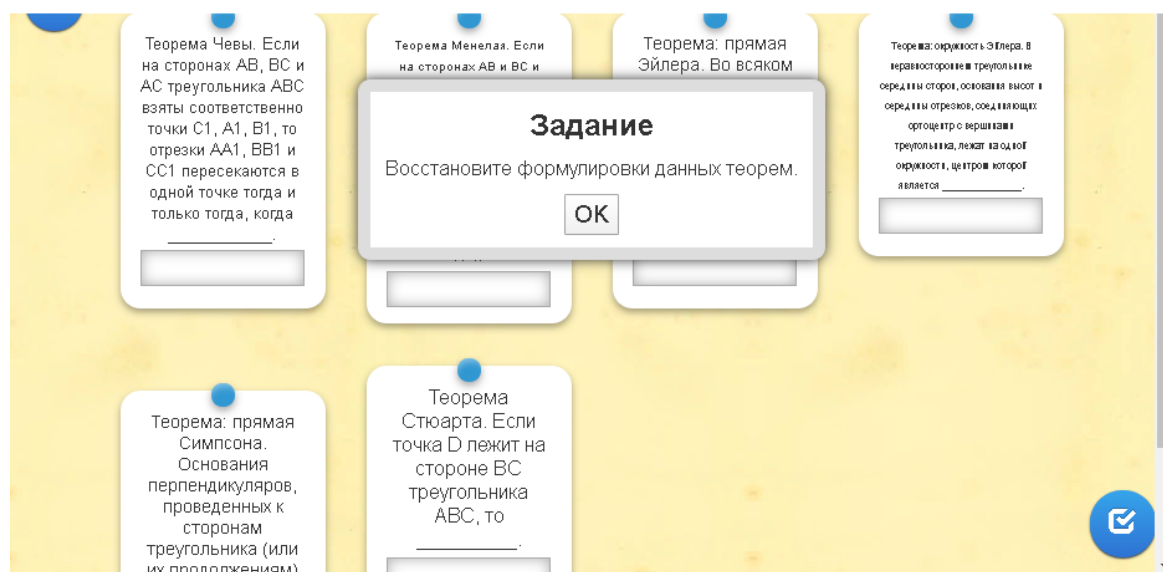


Рисунок 50

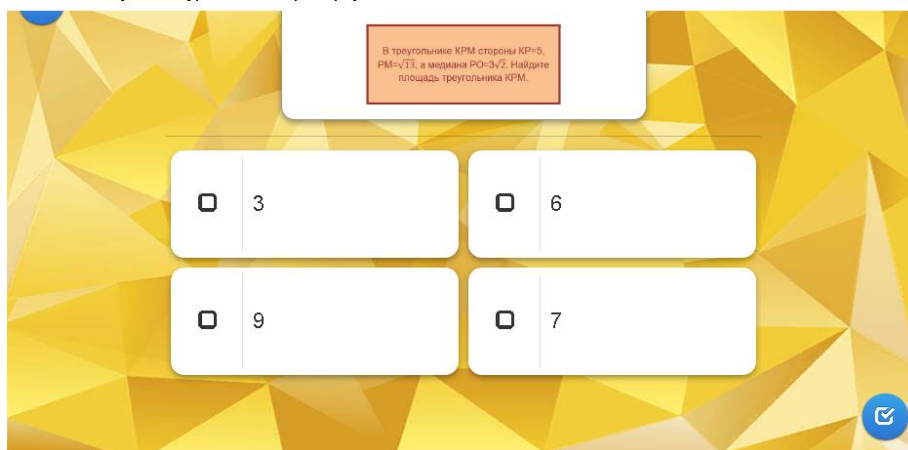


Рисунок 51

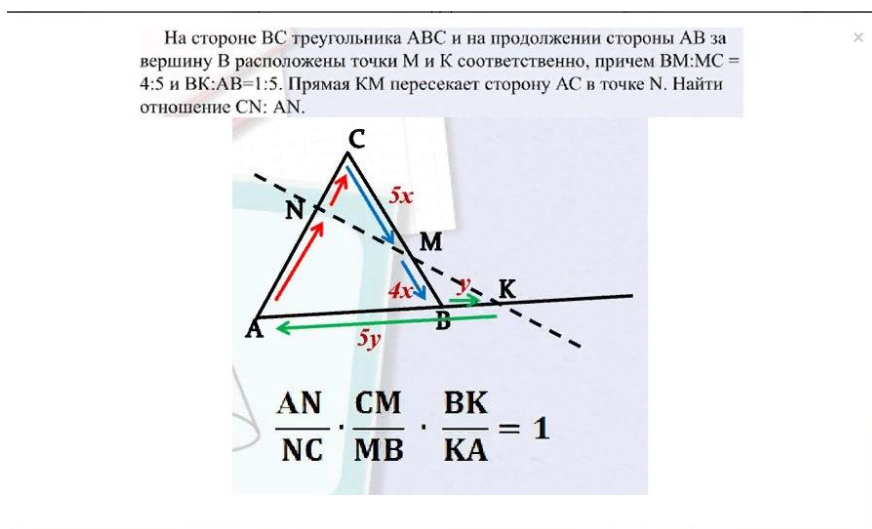


Рисунок 52

Дистанционный курс «Геометрия треугольника» завершается анкетированием:

1. Понравился ли вам мой курс?
2. Вы изучили все темы данного курса?
3. Какая из тем вас заинтересовала больше всех?
4. Какая из тем осталась непонятой?
5. На каком из сервисов вам больше всего понравилось выполнять задания?

Заключение

Процесс изучения геометрии включает самые разнообразные виды деятельности. И в первую очередь это решение задач. Решение геометрических задач как ничто другое заставляет мыслить, рассуждать, а значит, развивает приемы мыслительной деятельности, логическое и пространственное мышление, сообразительность.

Успех обучения геометрии в определенной мере зависит от того, какие задачи, в какой последовательности, и в каком количестве даются учащимся для работы на уроке и дома. Поэтому при организации процесса обучения учащихся решению геометрических задач учитель в первую очередь сталкивается с необходимостью отбора задач, их упорядочивания, анализа тех мыслительных операций, которые должны будут выполнить учащиеся в процессе решения задач.

В данной работе были рассмотрены дополнительные главы геометрии к школьному учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова «Геометрия 7- 9 класс для классов с углублённым изучением математики» и выделена теория, которую следует изучить на элективном курсе «Геометрия треугольника». Так же описана методика работы над теоремами и задачным материалом, составлено календарное планирование курса. Данный элективный курс разработан в виде дистанционного курса и представлен на сайте Новгу. Задачи, поставленные мной при написании данной работы, выполнены.

Таким образом, цель выпускной квалификационной работы достигнута.

Список литературы:

1. Атанасян, Л.С. Геометрия 7 – 9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2012
2. Атанасян Л.С. Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класс. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Шестаков С.А., Юдина И.И. 1997
3. Атанасян Л.С.Геометрия: Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класс / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина.— М., 1997
4. Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 7-9 классы/ Э.Н. Балаян. – Изд. 5-е, исправл. и дополн. – Ростов н/Д: Феникс, 2013.
5. Библиографическое описание: Крымская Ю. А. Роль упражнений на готовых чертежах в процессе обучения решению геометрических задач [Текст] / Ю. А. Крымская, С. Н. Ячинова // Молодой ученый. — 2014. — №17. — С. 498-501.
6. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач. Кн. Для учащихся – М.: Просвещение: АО «Учеб.лит.»,1996 .
7. Зильберберг Н.И. Ключевые задачи в обучении математике/ Н.И.Зильберберг, Р.Г. Хазанкин. – М: Мир, 1984.
8. Калягин Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи. М.: Просвещение, 1984.
9. Кондрушенко Е. М. Методика обучения геометрии в средней школе [Текст] / Е. М. Кондрушенко. – Великий Новгород: МАОУ ПКС «ИОМКР», 2017. – 176 с.
10. Лепехина Т.А. 7-9 классы: опорные конспекты. Ключевые задачи/ авт. – сост. Т.А. Лепехина. – Изд.2-е.- Волгоград: Учитель, 2011.

11. Подборка задач по теме: «Прямая Симпсона» [Электронные ресурсы] <https://infourok.ru/podborka-zadach-dlya-raboti-na-uroke-po-teme-pryamaya-simsona-889538.html>

12. Теорема Стюарта и применение ее в решении задач [Электронные ресурсы] <http://yun.moluch.ru/archive/5/266/>

13. Элективный курс «Геометрия треугольника» [Электронные ресурсы] <http://do.novsu.ru/course/view.php?id=725>