Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Институт электронных и информационных систем

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой АГ

д. ф.-м. н., профессор

____________Т. Г. Сукачева

"____"____________2020г.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВЕКТОРНО–КООРДИНАТНЫМ МЕТОДОМ

Выпускная квалификационная работа по направлению подготовки

44.03.05 Педагогическое образование

(с двумя профилями подготовки)

Профиль Математика и информатика

Руководитель

к. пед. н., доцент

___________Е. М. Кондрушенко

"____"_____________2020 г.

Студент группы 5131

_____________А. А. Заверткина

"____"____________2020 г.

Содержание

Введение

Одним из важнейших средств и целью обучения геометрии являются задачи. Они способствуют достижению всех целей обучения, так как содействуют формированию различных приемов умственной деятельности. Одной из основных задач учителя является формирование умения у учащихся решать задачи различного уровня сложности. В геометрии практически каждая задача, кроме одношаговых и двухшаговых на применение конкретных теорем, является для учащихся общеобразовательных классов задачей повышенного уровня сложности, так как требуется нахождение плана решения. Поэтому одним из важнейших элементов работы учителя является обучение основным методам решения геометрических задач, в том числе, векторно-координатному методу.

Векторная алгебра и координатный метод являются базовыми методами решения геометрических задач, потому что сводят решение геометрической задачи к выполнению алгебраических операций над формулами. Данный метод является универсальным, так как он используется при решении различных математических, физических и технических задач.

Векторно-координатный метод в рамках школьной программы общеобразовательного уровня освещен в недостаточной мере. Необходимая теория изучается, но до понимания сути этого метода и умения распознать возможность его применения в конкретных геометрических задачах учащиеся общеобразовательных классов не доводятся. Поэтому они не овладевают этим методом и не могут использовать его при решении задач повышенного уровня сложности. Об этом свидетельствует анализ результатов ЕГЭ по профильной математике Новгородской области на 2019 год [15, стр.56]: с геометрическим заданием второй части, в котором требовалось найти расстояние между прямыми, которое легко решалось векторно-координатным методом, справились 5,86% учащихся. Знание и умение красиво и просто решать задачи векторно-координатным методом пригодится учащимся при дальнейшем обучении в вузах. В частности, при изучении аналитической геометрии. Все изложенное выше свидетельствует об **актуальности** темы исследования.

При обучении учащихся векторно-координатному методу решения задач важно раскрыть его суть на примере решения конкретных задач, дать ориентировочную основу для применения этого метода на практике, организовать самостоятельную работу учащихся по решению задач этим методом, выделив основные виды геометрических задач, которые имеют простое и красивое решение с помощью векторов и координат.

Целью данной работы является разработка методики обучения учащихся общеобразовательных классов векторно-координатному методу решения задач.

Объект исследования: процесс обучения учащихся темам, связанных с векторами и координатами на плоскости и в пространстве.

Предмет исследования: процесс обучения учащихся использованию векторно-координатного метода при решении планиметрических и стереометрических задач.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи:**

1) изучить и проанализировать литературу по проблеме исследования;
2) выделить основные этапы решения задач векторным, координатным, векторно-координатным методами;
3) выделить простейшие задачи для обучения векторно-координатному методу;
4) выделить основные виды задач, которые могут быть проще решены с применением векторов и координат;
5) на конкретных примерах раскрыть методику работы над задачей, решаемой векторно-координатным методом;
6) составить алгоритмы решения задач повышенного уровня сложности векторно-координатным методом;
7) показать применение программы «GeoGebra» при решении задач векторно-координатным методом.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, восьми параграфов, шести подпараграфов, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе проанализирована учебная, методическая и математическая литература. Описан векторно-координатный метод, а также представлены этапы его изучения в школе. Рассмотрена суть векторного, координатного и векторно-координатного методов решения задач, раскрыты этапы решения задач данными методами на конкретных примерах.

Во второй главе речь идет о методике работы с задачами. Выделены простейшие задачи в планиметрии и стереометрии, решающиеся векторным, координатным или векторно-координатым методом, а также раскрыта методика работы с задачами, которые вызывают трудность при решении. Представлены разнообразные примеры задач на доказательство. Выделены задачи повышенного уровня сложности, к которым приведены алгоритмы решения.

В третьей главе описана программа «GeoGebra», и приведены примеры ее использования при решении задач векторно-координатным методом.

Глава 1. Векторно-координатный метод в школьном курсе математики

1.1. Этапы изучения векторно-координатного метода в школе

Для успешного изучения геометрии необходимо знать не только теорию и формулы, но и владеть различными методами решения задач. Возможны различные классификации методов. Л.С. Сагателова [8, стр.4] утверждает, что при решении геометрических задач обычно выделяются три основных метода: геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем; алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений; комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим. Одним из комбинированных методов является векторно-координатный метод, т.к. при решении им задач мы пользуемся не только геометрическими теоремами, но и элементами алгебраических вычислений.

Если геометрическим исследованиям придавать алгебраический характер, то можно считать, что векторно-координатный метод переносит в геометрию очень важную особенность алгебры – единообразие способов решения задач. В геометрии для каждой нестандартной задачи нужно искать свой особый способ решения. Но чаще всего в алгебре решение задач алгоритмизировано. Поэтому перенесение в геометрию свойственной алгебре алгоритмичности решения задач составляется главную ценность векторно-координатного метода.

Именно перенесение в геометрию алгебраических способов решения задач сыграло большую роль в развитии геометрии в целом, так как большое количество теорем выводилось с помощью векторно-координатного метода. В конечном итоге, произошло образование нового раздела геометрии – аналитической геометрии, в основе которого лежит метод координат.

Другим же достоинством векторно-координатного метода является то, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных объектов.

Для того чтобы учащиеся овладели векторно-координатным методом в школьном курсе геометрии, необходимо:

1. осознанное владение теоретическим материалом тем «Векторы», «Метод координат»;
2. понимание сути этого метода и основных этапов решения задач векторно-координатным методом;
3. владение алгебраическим аппаратом;
4. владение общими подходами к решению задач повышенного уровня сложности.

В школьном курсе математики изучение векторно-координатного метода в учебниках происходит в несколько этапов. Будем работать с комплектом учебников: Н.Я. Виленкин «Математика 5»[5], «Математика 6»[6]; Ю.Н. Макарычев «Алгебра 7» [1], «Алгебра 8»[2], «Алгебра 9»[3]; Л.С. Атанасян «Геометрия 7-9»[4], «Геометрия 10-11»[7].

I. 5-6 класс. Производится пропедевтика понятий, необходимых для овладения векторами и координатами. В 5 классе вводится понятие координатного луча. Учащиеся должны научиться определять координату точки на луче и отмечать точку по ее координате. После изучения отрицательных чисел в 6 классе, координатный луч дополняется до координатной прямой. Ученики должны уметь изображать точками координатной прямой положительные и отрицательные рациональные числа. В конце 6 класса дается представление о координатной плоскости. Результатом овладения данной темы является умения строить на координатной плоскости точки и фигуры по заданным координатам, определять координаты точек.
II. Алгебра 7-9 класс. Учащиеся продолжают работать с прямоугольной системой координат. Вводятся понятие функции, области определения и

множества значений функции, способы задания функции, график функции. Ученики должны уметь вычислять значения функции, заданной формулой, составлять таблицы значений функции. Строить графики элементарных функций и знать их свойства: $y = kx + b$, $y = x^n$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

III. Геометрия 8-9 класс. Происходит обучение векторам и методу координат на плоскости. Для этого раскрываются основные понятия, теоремы и леммы. Применение векторов к решению задач показывается на двух задачах, а метод координат – на трех простейших задачах, к тому же в задачном материале предоставлено решение четырех задач. Вводится уравнение прямой и уравнения окружности.

IV. Геометрия 10-11 класс. Учащиеся изучают векторы и координаты в пространстве. Для этого сначала повторяется и систематизируется ранее изученный теоретический материал, а после он дополняется новыми понятиями, теоремами и формулами. Применение координат к решению задач показывается на пяти примерах. Сами по себе векторный и координатный метод в учебнике не раскрываются.

В рассмотренных учебниках изучаются вопросы, связанные с векторно-координатным методом – это координаты точки и координаты вектора; скалярное произведение векторов; простейшие задачи в координатах: координаты середины отрезка, вычисление длины вектора по его координатам, расстояние между двумя токами; вычисление углов между прямыми и плоскостями.

В учебниках [4], [7] представлен теоретический материал, с помощью которого можно овладеть данным методом. К тому же для его отработки предлагается большое количество задач. Учитель должен организовать работу над данным материалом таким образом, чтобы подвести учащихся к пониманию сути векторно-координатного метода, а также научить их использовать его для решения нестандартных задач. Эта работа должна носить систематический целенаправленный характер. Она осложняется тем, что зачастую изучение тем «Векторы», «Метод координат» происходит в конце 9 и 11 классов, когда основное внимание учащихся сосредоточено на подготовке к основному государственному экзамену и единому государственному экзамену.

1.2. Векторный метод решения геометрических задач

Векторно-координатный метод является объединением векторного и координатного методов. Рассмотрим суть двух данных методов, так как они взаимосвязаны и их совместное использование позволяет расширить круг решаемых задач различного уровня сложности.

Векторный метод – является сравнительно новой темой в школьном курсе геометрии, поэтому овладение им вызывает трудности не только у учащихся, но и у учителей. В настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия. Г.И. Саранцев [13, стр.143] утверждает, что он эффективен при:

а) доказательстве параллельности прямых и отрезков;

б) обосновании утверждения о делении отрезка данной точкой в указанном отношении;

в) выяснении принадлежности трех точек одной прямой;

г) доказательстве перпендикулярности прямых и отрезков;

д) доказательстве зависимостей между длинами отрезков;

е) нахождении величины угла.

В школе изучаются два типа величин: скалярные, которые характеризуются числовым значением, и векторные, которые характеризуются числовым значением и направлением. С понятием векторной величины учащиеся впервые встречаются в курсе физики (скорость, сила, ускорение и так далее). В 7 классе в учебнике А.В. Перышкина [10, стр.35] изучается пункт «Скорость», где сказано: «Величины, которые, кроме числового значения (модуля), имеют еще и направление, называют векторными. Скорость – это векторная физическая величина. …На чертеже скорость изображают в виде отрезка прямой со стрелкой на конце».

У учащихся обычно складывается неправильное представление о том, что вектор – понятие физическое. Важно акцентрировать внимание на том, что вектор – понятие математическое, которое находит применение в физике или других прикладных науках и которое позволяет упростить рассмотрение некоторых вопросов, а также решение задач этих наук.

Существуют различные трактовки понятия вектор в учебной литературе.

O_1. Вектором называется произвольная упорядоченная пара вещественных чисел.

O_2. Вектором (параллельным переносом), определяемым парой (A, B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка M отображается на такую точку M_1, что луч MM_1 сонаправлен с лучом AB и расстояние $|MM_1|$ равно расстоянию $|AB|$.

O_3. Вектором называется семейство всех параллельных между собой, одинаково направленных и имеющих одинаковую длину отрезков.

O_4. Вектором называется направленный отрезок, у которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом.

Между собой все рассмотренные определения эквиваленты, потому что описывают одно и то же множество объектов. В учебниках Л.С. Атанасяна, по которым рассматриваем векторно-координатный метод, определение вектора дается по последней приведенной трактовке. Именно она в большей степени соответствует межпредметной связи между математикой и физикой, потому что удовлетворяет физическому подходу к понятию вектор.

В изучении векторного метода можно выделить следующие направления:

- овладение теорией, необходимой для решения различных геометрических задач и доказательства теорем;
- раскрытие применения векторов в различных областях знаний;
- использование векторного метода при решении геометрических задач.

Чтобы данный метод стал аппаратом решения геометрических задач, необходимо, прежде всего, уметь переводить условие геометрической задачи на векторный язык. После такого перевода необходимо грамотно выполнять соответствующие операции с векторами, а затем результат, полученный в векторной форме, правильно переводить обратно на геометрический язык.

Раскроем суть данного метода на примере решения задачи.

Задача 1.1: Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основанию.

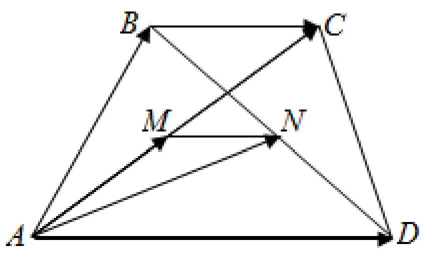


Рис. 1

Решение:

Пусть M и N – середины диагоналей трапеции $ABCD$. Нужно доказать, что $MN \| AD$. Для этого достаточно показать, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны, т.е. $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AD}$. На *первом этапе* решения задачи (перевод условия геометрической задачи на векторный язык) вводим в рассмотрение векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$, а также векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$, через которые можем выразить данные векторы (рис. 1).

На *втором этапе* необходимо выразить и выполнить соответствующие операции над векторами.

Так как M и N – середины отрезков AC и BD, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) =$ $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$. Но $\overrightarrow{BC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$, поэтому $\lambda\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Отсюда $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AD}$.

На *третьем этапе* производится обратный перевод результата, полученного в векторной форме, на геометрический язык. Получили, что $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$, но точки A, M, N, D не лежат на одной прямой. Поэтому $MN \| AD$.

Умение решать задачи с помощью векторов включает в себя следующие действия:

1) перевод с геометрического языка на язык векторов и обратно (осуществлять переход от соотношения между фигурами к соотношению между векторами и обратно);
2) представление векторов в виде суммы или разности векторов;
3) представление векторов в виде произведения вектора на число;
4) составление системы векторных равенств;
5) преобразование векторных равенств на основе операций над векторами.

1.3. Координатный метод решения геометрических задач

В изучении координатного метода можно выделить следующие направления:

- овладение теорией, необходимой для решения различных геометрических задач и доказательства теорем;
- выделение общих принципов использования данного метода, а также раскрытие его эффективности при решении им геометрических задач;
- раскрытие на основе этого метода связи алгебры и геометрии;
- развитие вычислительной и графической культуры учащихся.

Чтобы данный метод стал аппаратом решения геометрических задач, необходимо научиться вводить систему координат наиболее удачным способом. Нужно уметь переводить условие задачи на аналитический язык. После перевода грамотно оперировать формулами и уравнениями, а после получения результата, осуществлять обратный правильный перевод на геометрический язык.

Затруднения у учащихся часто возникают на первом этапе при введении системы координат, потому что ее нужно выбирать таким образом, чтобы дальнейшие вычисления были проще.

Раскроем суть данного метода на примере решения задачи.

Задача 1.2: Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы.

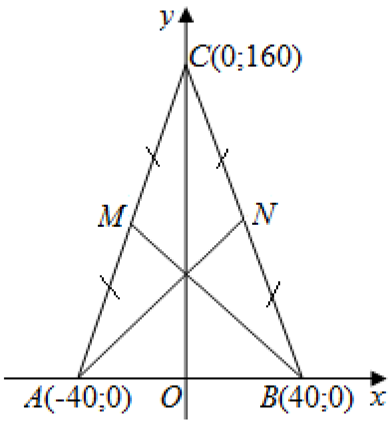


Рис. 2

Решение:

Пусть в ΔABC: $AC = BC$, $AB = 80$ см, $CO = 160$ см, $AO = OB$. На *первом этапе* введем прямоугольную систему координат наиболее удобным способом. В данном случае, с началом в точке $O(0;0)$ (рис. 2). Тогда соответственно вершины A, B, C будут иметь следующие координаты: $A(-40;0)$, $B(40;0)$, $C(0;160)$.

Обозначим середины сторон AC и BC через M и N. Нас просят найти две другие медианы: AN и BM. Другими словами, нужно найти расстояние между точками A и N, B и M. На этом заканчивается *второй этап* решения задачи (перевод условия задачи на аналитический язык).

На *третьем этапе* производятся необходимые вычисления и оперирование формулами. Для того чтобы найти расстояние между точками, необходимо знать координаты всех четырех точек. Найдем координаты точек M и N: $M = \left(\frac{0-40}{2}; \frac{160}{2}\right) = (-20;80)$, $N = \left(\frac{40-0}{2}; \frac{160}{2}\right) = (20;80)$. Далее находим $AN = \sqrt{(20+40)^2 + (80-0)^2} = 100$ (см), $BM = \sqrt{(20+40)^2 + (80-0)^2} =$ $= 100$ (см).

Таким образом, мы нашли длину двух других медиан: $AN = BM = 100$ см. На этом заканчивается *четвертый этап* решения задачи (перевод на геометрический язык с аналитической формы).

Умение решать задачи с помощью координатного метода включает в себя следующие действия:

1) перевод с геометрического языка на аналитический язык и обратно;
2) оптимальный выбор системы координат;
3) выбор необходимых формул для решения данной задачи;

4) выполнение преобразования алгебраических выражений.

1.4. Векторно-координатный метод решения геометрических задач

Векторно-координатный метод находит большее применение в пространственных задачах в 10-11 классах. Это связано с тем, что с помощью данного метода проще и удобнее находить различные расстояния между пространственными объектами, а также вычислять углы между ними.

Для того чтобы решать геометрические задачи векторно-координатным методом, по мнению Е.В. Потоскуева [11, стр.10], необходимо уметь выполнять следующие три этапа:

1) перевод условия задачи на векторно-координатную символику и терминологию;
2) выполнение соответствующих алгебраических операций над координатами и векторами;
3) обратный перевод полученного в векторно-координатной форме результата на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Приведем пример геометрической задачи и проиллюстрируем выполнение данных трех этапов при решении векторно-координатным методом.

Задача 1.3: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найдите величину угла между прямыми A_1B и B_1C.

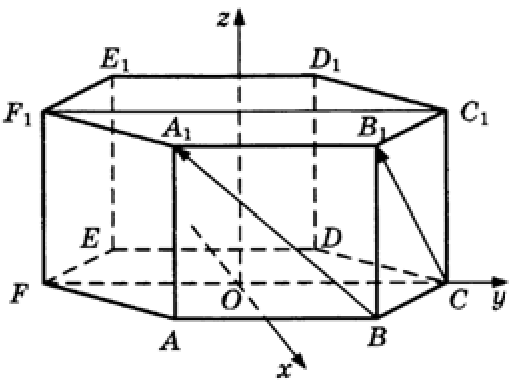


Рис. 3

Решение:

По условию задачи нас просят найти $\angle(A_1B, B_1C) = \varphi$. Для этого нужно найти косинус угла φ между векторами A_1B и B_1C. Найдем координаты этих векторов.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 3). Тогда точки A_1, B, B_1, C будут иметь следующие координаты: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, $C(0; 1; 0)$,

$B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}; 1)$. Отсюда $\overrightarrow{CB_1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right\}$ и $\overrightarrow{BA_1}\{0; -1; 1\}$. На этом заканчивается *первый этап* решения задачи.

На *втором этапе*, используя формулу, находим $\cos\varphi = \cos(\angle\overrightarrow{CB_1}; \overrightarrow{BA_1}) =$ $= \frac{|\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}|}{|\overrightarrow{CB_1}|\cdot|\overrightarrow{BA_1}|} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1}\cdot\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{4}$, где φ – угол между прямыми A_1B и B_1C.

Отсюда получили, что $\cos\varphi = \frac{3}{4}$, а это значит, что $\varphi = \arccos\frac{3}{4}$.

На этом заканчивается *третий этап* решения задачи (перевод полученного в векторно-координатной форме результата на язык, в терминах которого сформулирована задача).

Формирование векторно-координатного метода у учащихся производится в несколько этапов:

I. Подготовительный этап. Целью данного этапа является овладение учащимися теорией, на которую следует опираться при решении задач данным методом.

II. Мотивационный этап. Основная цель – показать необходимость овладения этим методом и добиться осознания того факта, что на следующих этапах целью деятельности учащихся будет именно усвоение этого метода решения задач. Необходимо привести примеры таких задач, чтобы раскрыть учащимся простоту решения данным методом или возможность решения задачи только им.

III. Ориентировочный этап. Цель состоит в том, чтобы разъяснить учащимся суть метода и выделить его основные компоненты на примере анализа решенной этим методом задачи.

IV. Этап овладения компонентами метода. Его цель – формирование у учащихся отдельных компонентов метода (сначала задача на формирование одного компонента, потом двух, трех и т.д.), используя специально подобранные задачи.

V. Этап формирования метода «в целом». Цель – решение учащимися задач, в которых работают все или большинство компонентов метода, в том числе и на материале других предметов.

Очевидно, что деление на этапы условно, так как они тесно взаимосвязаны.

Глава 2. Методика обучения векторно-координатному методу решения задач

2.1. Методика работы с задачами

При решении геометрических задач векторным, координатным или векторно-координатным методом, у учащихся вызывает затруднение выполнение этапа с анализом текста задачи, а именно, перевод условия на векторно-координатную символику и терминологию. Для разрешения данной проблемной ситуации, уместно будет на первое время предложить таблицу с переводом формулировок утверждений с геометрического языка на векторный язык.

Формулировка утверждений на геометрическом языке	**Формулировка утверждений на языке векторов**
$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}, k \neq 0$
$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
Точка C принадлежит прямой AB	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, либо $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$, либо $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, либо $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, либо $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$, где O – произвольная точка, $p + q = 1$
M – середина отрезка AB	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ либо $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, где O – произвольная точка
M_1 – середина отрезка A_1B_1, M_2 – середина отрезка A_2B_2	$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2})$
M – точка пересечения медиан (центроид) ΔABC	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где O – произвольная точка, либо $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
Точка C делит отрезок	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, где O –

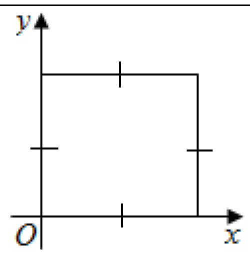
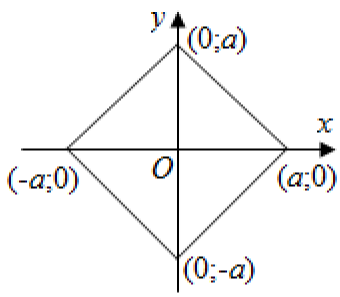
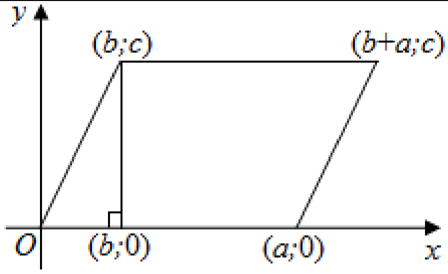
AB в отношении $AC : CB = m : n$	произвольная точка
A, B, C – точки одной прямой	$k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где O – произвольная точка и k, l, m – действительные числа, неравные нулю, и $k + l + m = 0$
O, A, B, C – точки одной плоскости	$x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где x, y, z – действительные числа и $x + y + z = 1$
$ABCD$ – параллелограмм	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + $ $+\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$, где M – произвольная точка, а O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$
$AB \perp \alpha$, CD *и* MK – пересекающиеся прямые плоскости α	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

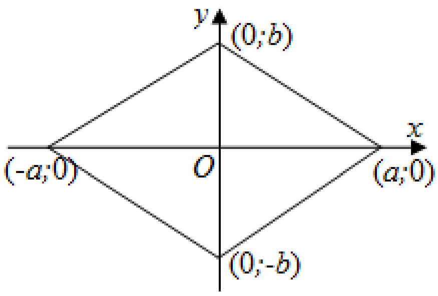
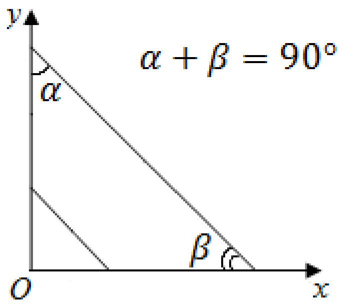
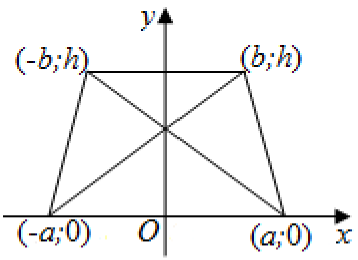
Для удобства, также можно предложить таблицу для перевода с геометрического языка на аналитический язык:

Формулировка утверждений на геометрическом языке	**Формулировка утверждений на аналитическом языке**
Длина отрезка AB	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$
Площадь треугольника ABC	$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$
Точка $M(x; y)$ делит отрезок AB в отношении $ʎ$, т.е. $\frac{AM}{MB} = ʎ$	$x = \frac{x_1 + ʎx_2}{1 + ʎ}$, $y = \frac{y_1 + ʎy_2}{1 + ʎ}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

Точка $M(x; y)$ - середина отрезка AB	$x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$
Прямая AB	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$
Прямая пересекает ось Ox под углом $\alpha \neq 90°$	$y = kx + b$, где k – угловой коэффициент, а b – ордината точки пересечения прямой оси Oy $(k \neq 0)$
Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны	$k_2 = k_1, b_2 \neq b_1$
Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны	$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ $(k_1 \neq 0)$
Прямая, параллельная оси Ox	$y = b$, где b – ордината точки пересечения прямой оси Oy $(b \neq 0)$
Прямая, параллельная оси Oy	$x = a$, где a – абсцисса точки пересечения прямой оси Ox $(a \neq 0)$
Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$	$d = \left\lvert \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rvert$
Окружность с центром в начале координат с радиусом R	$x^2 + y^2 = R^2$
Окружность с центром в точке M и радиусом R	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, где $M(a; b)$

Как уже говорилось ранее, сложности с использованием координатного и векторно-координатного метода могут возникнуть у учащихся при введении системы координат. Конечно, ее можно вводить любым способом, но от ее введения может зависеть объем дальнейших вычислений. Поэтому для того, чтобы облегчить дальнейшее решение, можно предложить следующую таблицу, где указано каким именно образом можно наиболее удачно ввести систему координат для часто встречающихся в задачах геометрических фигур.

Геометрическая фигура	**Оптимальный выбор прямоугольной системы координат для данной фигуры**
Отрезок	За начало координат принимаем либо конец отрезка, либо его середину; сам отрезок лежит на оси.
Прямоугольный треугольник	За начало координат принимаем вершину прямого угла, катеты прямоугольного треугольника будут лежать на осях Ox и Oy.
Равнобедренный треугольник	Середину основания равнобедренного треугольника принимаем за начало координат, а высота, опущенная на основание, лежит на оси Oy.
Квадрат	 *Рис. 4а* За начало координат принимаем вершину прямого угла, две его стороны будут лежать на осях Ox и Oy (рис. 4а).  *Рис. 4б* Если известны диагонали квадрата, то за начало координат принимает точку пересечения диагоналей (рис. 4б).
Параллелограмм	 *Рис. 5*

Ромб	Если известны стороны ромба, то его можно расположить в прямоугольной системе координат, как и параллелограмм.  Рис. 6 Если же известны диагонали ромба, то за начало координат принимаем точку пересечения диагоналей (рис. 6).
Равнобедренная трапеция	Если известно, что углы при большом основании равнобедренной трапеции в сумме составляют 90°, то за начало координат принимаем точку пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции, а сами прямые будут лежать на осях Ox и Oy (рис. 7а).  Рис. 7а  Рис. 7б Если в задаче идет речь о диагоналях, то равнобедренную трапецию стоит расположить, как представлено на рисунке 7б.
Куб	За начало координат принимаем одну из вершин куба. Оси координат направляем по трем взаимно перпендикулярным прямым, содержащих ребра куба, и выходящие из этой вершины.

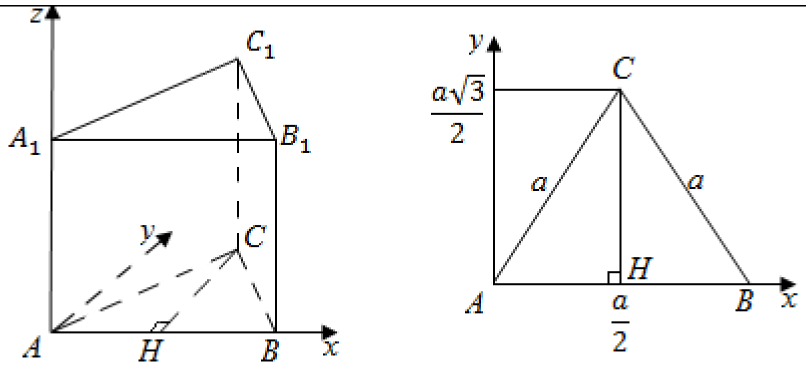
<table>
<tr>
<td>Правильная треугольная призма, сторона основания которой равна a, а высота h</td>
<td>


Рис. 8

Координаты вершин:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $A_1(0;0;b)$, $B_1(a;0;h)$, $C_1(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h)$.

Если в задаче идет речь о высоте основания, то ввести прямоугольную систему координат в правильной прямоугольной призме можно другим образом (рис.9).

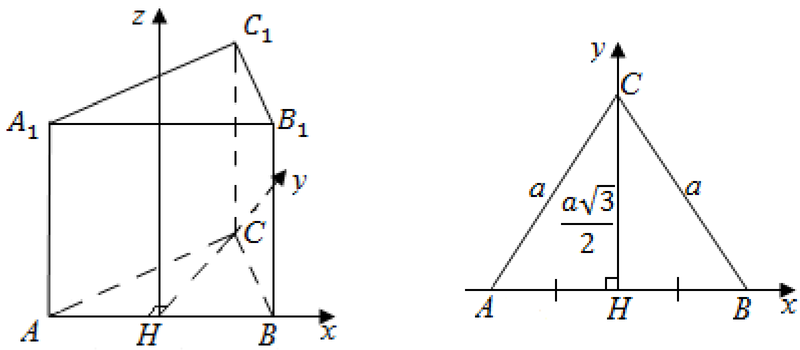


Рис. 9

Координаты вершин:

$H(0;0;0)$, $A(-\frac{a}{2};0;0)$, $B(\frac{a}{2};0;0)$, $C(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $A_1(-\frac{a}{2};0;h)$, $B_1(\frac{a}{2};0;h)$, $C_1(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};h)$.
</td>
</tr>
</table>

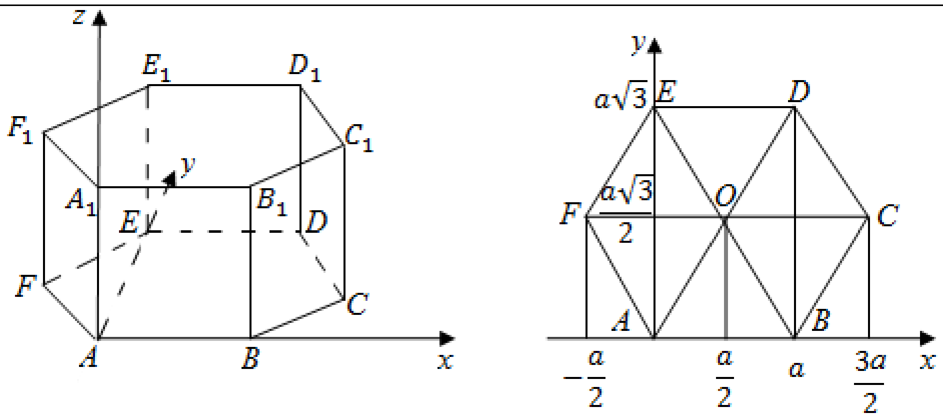
<table>
<tr>
<td>Правильная шестиугольная призма, сторона основания которой равна a, а высота h</td>
<td>


Рис. 10

Координаты вершин:

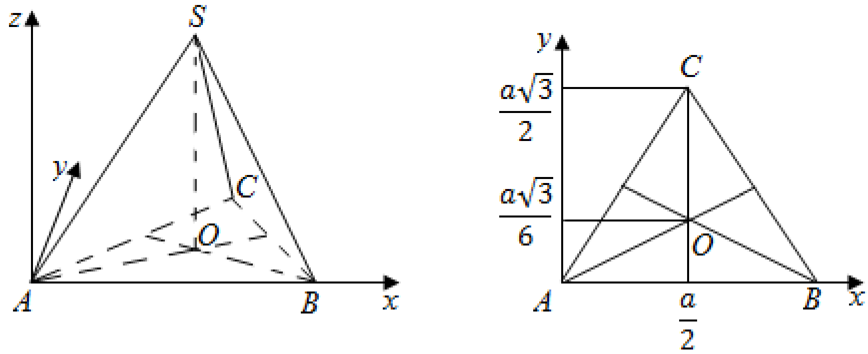
$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(1{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $D(a;a\sqrt{3};0)$, $E(0;a\sqrt{3};0)$, $F(-0{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $A_1(0;0;h)$, $B_1(a;0;h)$, $C_1(1{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};h)$, $D_1(a;a\sqrt{3};h)$, $E(0;a\sqrt{3};h)$, $F(-0{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};h)$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а высота h</td>
<td>


Рис. 11

Координаты вершин:

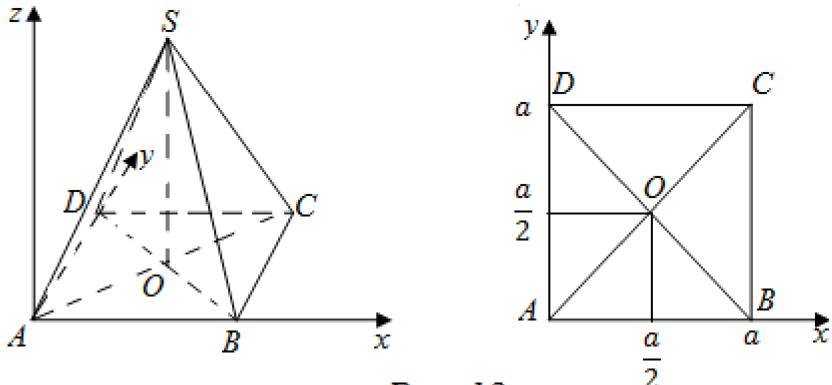
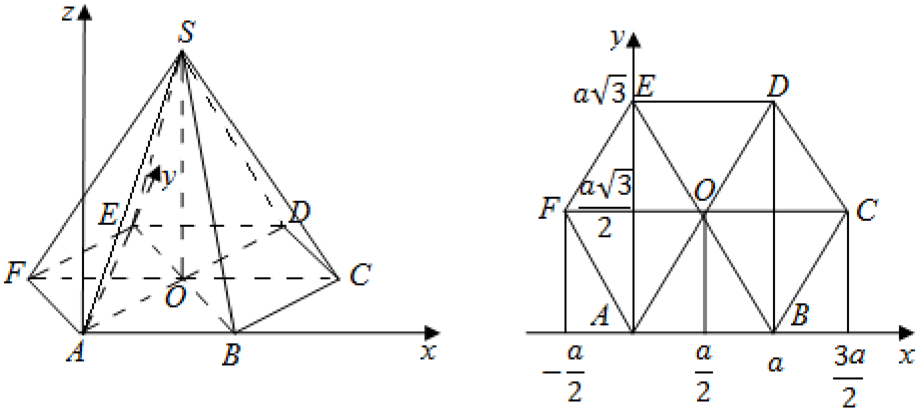
$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $S(0{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{6};h)$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а высота h</td>
<td>


Рис. 12
</td>
</tr>
</table>

	Координаты вершин: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0{,}5a;0{,}5a;h)$.
Правильная шестиугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а высота h	 *Рис. 13* Координаты вершин: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(1{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $D(a;a\sqrt{3};0)$, $E(0;a\sqrt{3};0)$, $F(-0{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $S(0{,}5a;\frac{a\sqrt{3}}{2};h)$.

Рассмотрим методику работы над конкретными задачами.

Задача 2.1.1: Точка D является серединой основания AB равнобедренного треугольника ABC, отрезок DM перпендикулярен стороне BC ($M \in BC$), точка N – середина отрезка DM. Докажите, что отрезки AM и CN перпендикулярны.

Проанализируем текст задачи. Известно, что ΔABC с основанием AB – равнобедренный, $DM \perp BC$, N – середина отрезка DM. Требуется доказать, что $AM \perp CN$. Так как нам неизвестны никакие углы в задаче, давайте попробуем переформулировать ее условие. Что достаточно доказать? Для того, чтобы доказать, что $AM \perp CN$, достаточно доказать, что скалярное произведение $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$. Что для этого нужно сделать? Нужно ввести в рассмотрение векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$, после выразить их через другие векторы. Можем ли мы выразить их через одни и те же векторы? Да, можем выразить через неколлинеарные векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, потому что и вектор $\overrightarrow{AM}$, и вектор $\overrightarrow{CN}$ легко выражаются через них. Запишем условие задачи.

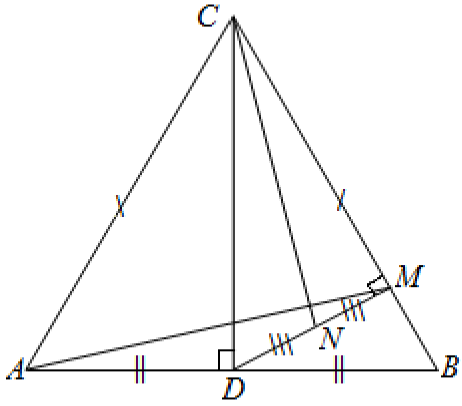


Рис. 14

Дано: ΔABC – равнобедренный, $AC = CB$, D – середина основания AB, $DM \perp BC$, N – середина отрезка DM

Доказать: $AM \perp CN$

Доказательство:

Введем векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, обозначим их за $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно, чтобы решение не выглядело громоздким. Так как ΔABC – равнобедренный (рис. 14), то боковые стороны имеют одинаковую длину: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$. Точка M лежит на стороне CB, тогда $\overrightarrow{CM} = k\vec{b}$. К тому же, точки D и N – середины отрезков AB и DM соответственно, значит $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \right.$ $\left. + k\vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} + (\frac{k}{2} + \frac{1}{4})\vec{b}$. Докажем, что $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$.

Так как $DM \perp BC$, то это значит, что $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. Найдем вектор $\overrightarrow{DM}$: $\overrightarrow{DM} =$ $= \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CD} = k\vec{b} - \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} + (k - \frac{1}{2})\vec{b}$. Отсюда $\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\vec{b}\right) \cdot$ $\cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\vec{b}^2 = -\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \left(k - \frac{1}{2}\right)a^2 = 0$. Получим, что $\vec{a}\vec{b} = (2k -$ $-1)a^2$.

Найдем вектор $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = k\vec{b} - \vec{a}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = \left(k\vec{b} - \vec{a}\right) \cdot$ $\cdot \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\vec{b}\right) = \frac{k}{4}\vec{b}\vec{a} + k\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\vec{b}^2 - \frac{1}{4}\vec{a}^2 - \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\vec{a}\vec{b}$. Учитывая, что $\vec{a} = \vec{b} = a^2$ и $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} = (2k - 1)a^2$, получим: $\frac{k}{4}(2k - 1)a^2 + k\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)a^2 -$ $-\frac{1}{4}a^2 - \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)(2k - 1)a^2 = 0$.

Таким образом, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$, а это значит, что отрезки AM и CN перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Задача 2.1.2: Углы при одном из оснований трапеции равны $39°$ и $51°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 3. Найдите основания трапеции.

Проанализируем условие задачи. Известно, что углы при основании трапеции равны $39°$ и $51°$. Чему равна сумма углов? В сумме они составляют $90°$. Как тогда будут располагаться прямые, на которых лежат боковые стороны трапеции? При пересечении прямые будут образовывать прямой угол, тогда точка их пересечения будет являться вершиной прямого угла. Так как нас просят найти длину оснований трапеции, то данную задачу можно красиво и просто решить координатным методом, приняв за начало координат точку пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции. Запишем условие задачи.

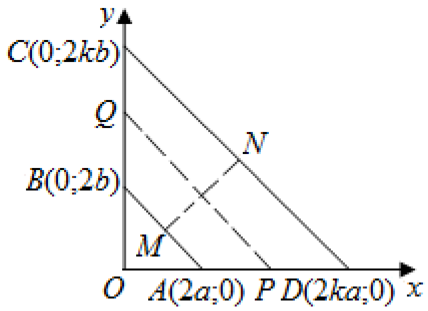


Рис. 15

Дано: $ABCD$ – трапеция, $\angle DAB = 39°$, $\angle ADC = 51°$, точки M, Q, N, P середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно, $MN = 3$, $PQ = 19$

Найти: AB, CD

Решение:

Продолжим прямые AD и BC до пересечения. Так как сумма углов при основаниях трапеции равна $90°$, то сами прямые будут пересекаться под прямым углом, и тогда мы можем ввести прямоугольную систему координат.

Введем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы боковые стороны AD и BC трапеции лежали на абсциссе и ординате соответственно (рис. 15). Тогда вершины трапеции будут иметь следующие координаты: $A(2a; 0)$, $B(0; 2b)$, $C(0; 2kb)$, $D(2ka; 0)$. Точки P и Q соответственно середины AD и BC и имеют координаты: $P((k+1)a; 0)$, $Q(0; (k+1)b)$. А точки M и N соответственно середины AB и CD имеют координаты: $M(a; b)$, $N(ka; kb)$. Отсюда $PQ = \sqrt{(k+1)^2(a^2+b^2)} = 19$, $MN = \sqrt{(k-1)^2(a^2+b^2)} = 3$. С другой стороны $\frac{k-1}{k+1} = \frac{3}{19}$, а значит, $k = \frac{11}{8}$. Поэтому $AB = 2\sqrt{a^2+b^2} = 16$ и $CD = 2k\sqrt{a^2+b^2} = 22$.

Ответ: 16; 22.

После решения данной задачи и анализа ее решения, правильно будет еще раз проанализировать ее условие и спросить у учащихся о том, можно ли решить ее другим способом. Так как установили, что при пересечении прямые, на которых лежат боковые стороны трапеции, образуют прямой угол, то получим прямоугольный треугольник. Таким образом, решение будет основываться на свойствах этой геометрической фигуры и выглядеть следующим образом.

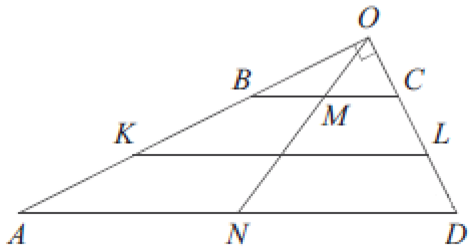


Рис. 16

Решение:

Так как $\measuredangle DAB + \measuredangle ADC = 39° + 51° = 90°$, то если мы продлим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке O, получим прямой угол $\measuredangle AOD$. Тем самым получим прямоугольный треугольник AOD (рис. 16).

Пусть N – середина гипотенузы AD. Значит ON – медиана прямоугольного треугольника AOD. Медиана ON также будет пересекать основание трапеции BC и делить его в точке M пополам. Тогда $MN = ON - OM$, а по свойству медианы в прямоугольном треугольнике, проведенной к гипотенузе, получаем, что $MN = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AD-BC}{2}$. Так как KL – средняя линия трапеции, то $KL = \frac{AD+BC}{2}$.

Имеем два уравнения $\frac{AD-BC}{2} = 3$ и $\frac{AD+BC}{2} = 19$ с двумя неизвестными. Выразим из первого уравнения AD и подставим во второе уравнение. Решая его, получим, что $BC = 16$, тогда $AD = 22$.

Ответ: 16; 22.

2.2. Простейшие задачи

В планиметрии можно выделить следующие типы простейших задач:

1) задачи на вычисление координат вектора по координатам его начала и конца;
2) задачи о делении отрезка пополам;

3) задачи на вычисление длины векторов;
4) задачи на вычисление угла между векторами;
5) задачи на вычисление расстояния между двумя точками;
6) задачи на составление уравнения окружности;
7) задачи на составление уравнения прямой.

Простейшие задачи первых пяти типов в достаточном объеме представлены в учебниках и, как правило, не вызывают трудности при решении. Но задачи на составление уравнения прямой и уравнения окружности являются проблемными для учащихся.

Для того чтобы составить уравнение окружности, нужно:

1. знать координаты центра;
2. знать длину радиуса;
3. подставить координаты центра $(a; b)$ и длину радиуса R в уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Рассмотрим решение задач на составление уравнения окружности.

Задача 2.2.1: Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3; 0)$ и $B(0; 9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

Решение:

Центр окружности лежит на оси ординат, тогда точка O будет иметь следующие координаты $O(0; y)$. Найдем координату y.

Так как точки A и B принадлежат окружности, то $OA = OB = R$.

$OA = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{9+y^2}$; $OB = \sqrt{(0-0)^2 + (9-y)^2} = $
$= \sqrt{(9-y)^2}$.

Так как $OA = OB = R$, составим уравнение: $\sqrt{9+y^2} = \sqrt{(9-y)^2}$. Возведем обе части в квадрат, получим: $9 + y^2 = (9-y)^2$. Окончательно получаем, что $y = 4$. Центр окружности будет иметь следующие координаты $O(0; 4)$.

Радиус окружности тогда будет $OA = \sqrt{9+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Подставим координаты центра и длину радиуса в формулу: $(x-0)^2 +$
$+(y-4)^2 = 5^2$. Отсюда уравнение окружности примет вид $x^2 + (y-4)^2 = 25$.

Задача 2.2.2: Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2;1)$.

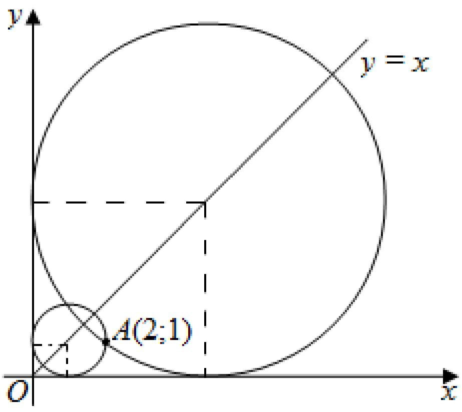


Рис. 17

Решение:

В условии сказано, что окружность касается осей координат и проходит через точку A, которая лежит в первой координатной четверти. Отсюда можем сделать вывод, что центр окружности лежит на прямой $y = x$, а это значит, что абсцисса и ордината центра окружности равны ее радиусу (рис. 17). Тогда уравнение окружности будет иметь следующий вид: $(x-R)^2+(y-R)^2 = R^2$.

Так как нам известно, что окружность проходит через точку $A(2;1)$, то можно подставить ее координаты в полученное уравнение и найти радиус окружности. Решая квадратное уравнение $(2-R)^2+(1-R)^2 = R^2$, получили, что $R = 1$ или $R = 5$. Следовательно, искомое уравнение окружности имеет вид $(x-$ $-1)^2+(y-1)^2 = 1$ или $(x-5)^2+(y-5)^2 = 25$.

В школе учащиеся знакомятся с двумя уравнениями прямой:

- в курсе алгебры рассматривается линейная функция, которая задается формулой $y = kx + b$, графиком которой является прямая; уравнение вида $y = kx + b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, где k – угловой коэффициент, причем $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, а b – длина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy, считая от начала координат;
- в курсе геометрии дается уравнением прямой в общем виде $ax+$ $+by+c = 0$.

Отличие между ними состоит в том, что уравнение вида $y = kx + b$ задает линейную функцию, которая не может быть параллельна оси Oy или совпадать с ней. То есть не рассматриваются прямые, уравнения которых во втором случае имеют вид $x + b = 0$.

Учащиеся не всегда понимают, что эти два уравнения задают одну и ту же фигуру на плоскости. Путем преобразований можно получить одно уравнение из другого. Если из уравнения прямой в общем виде выразим неизвестную y, то получим $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, где $k = -\frac{a}{b}$, $b = -\frac{c}{b}$, где $b \neq 0$. Поэтому важно уделить этому моменту особое внимание.

В зависимости от углового коэффициента k, прямая будет различным образом располагаться на координатной плоскости:

- если $k > 0$, то угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox будет острым;
- если $k < 0$, то угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox будет тупым;
- если $k = 0$, то прямая будет располагаться параллельно оси Ox или совпадать с ней, если $b = 0$.

Общее уравнение прямой $ax + by + c = 0$ также может иметь различный частный вид в зависимости от коэффициентов a, b, c:

- если $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$, то уравнение примет вид $ax + by = 0$, и прямая будет проходить через начало координат;
- если $a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, то уравнение примет вид $by + c = 0$, и прямая будет располагаться параллельно оси Ox;
- если $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$, то уравнение примет вид $ax + c = 0$, и прямая будет располагаться параллельно оси Oy;
- если $a \neq 0,\ b = c = 0$, то уравнение имеет вид $ax = 0$, и прямая будет совпадать с осью Oy;
- если $a = c = 0,\ b \neq 0$, то уравнение имеет вид $by = 0$, и прямая будет совпадать с осью Ox.

В геометрии основной школы изучается составление уравнения прямой по двум точкам. Существуют различные способы составления уравнения. Рассмотрим их на конкретном примере.

Задача 2.2.3: Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $A(1; -1)$ и $B(-3; 2)$.

Решение:

Так как искомая прямая проходит через точки $A(1; -1)$ и $B(-3; 2)$, абсциссы и ординаты которых не пропорциональны $\frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3}$, то прямая не проходит через начало координат.

а) *Первый способ:*

Отсюда в общем виде уравнения прямой AB коэффициент $c \neq 0$. Пусть искомое уравнение будет иметь вид $ax + by + c = 0$. Так как точки A и B лежат на прямой, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ a \cdot (-3) + b \cdot (2) + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Выразим коэффициенты a и b через c.

$$\begin{cases} a = b - c \\ -3(b - c) + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - c \\ b = 4c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3c \\ b = 4c \end{cases}$$

Подставив эти значения в общее уравнение прямой, получим $3cx + 4cy +$ $+c = 0$. При любом $c \neq 0$, это уравнение является искомым. Окончательно получим уравнение $3x + 4y + 1 = 0$.

б) *Второй способ:*

Поскольку абсциссы точек A и B не совпадают, то прямая не параллельна оси Oy. Тогда рассматриваем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Составим уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Так как точки A и B лежат на прямой, то их координаты удовлетворяют этому уравнению, получаем систему:

$$\begin{cases} -1 = k \cdot 1 + b \\ 2 = k \cdot (-3) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = k + b \\ 2 = -3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -b - 1 \\ 2 = -3(-b-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Тогда получаем, что уравнение прямой с угловым коэффициентом будет иметь вид $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Окончательно получим, что уравнение прямой в общем виде имеет вид $3x + 4y + 1 = 0$.

В стереометрии можно выделить следующие типы простейших задач:

1) задачи на разложение вектора по трем некомпланарным векторам;
2) задачи на вычисление координат середины отрезка;
3) задачи на вычисление длины вектора по его координатам;
4) задачи на вычисления расстояния между двумя точками;
5) задачи на вычисление угла между векторами;
6) задачи на вычисление угла между двумя прямыми, если известны координаты направляющих векторов;
7) задачи на составление уравнения плоскости;
8) задачи на вычисления угла между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты вектора нормали;
9) задачи на вычисление расстояние от точки до плоскости, если известны координаты точки и уравнение плоскости.

У учащихся возникают сложности, связанные с решением задач последних четырех типов. Это связано с тем, что они не знают алгоритм решения данных задач. Для того чтобы избежать данной проблемной ситуации, можно предложить готовые алгоритмы решения.

Алгоритм решения задач на вычисление угла между двумя прямыми:

1) Находим координаты направляющих векторов прямых $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$.

2) Подставляем в формулу $\cos\varphi = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ найденные координаты, где φ – угол между двумя прямыми.
3) Исходя из тригонометрической записи, находим величину угла φ.

Задача 2.2.4: В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

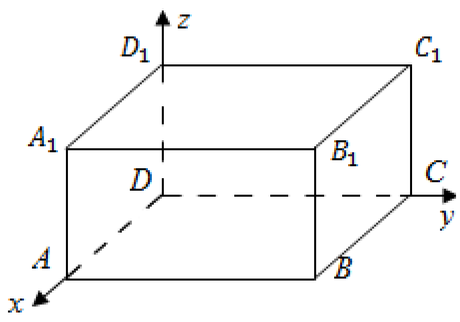


Рис. 18

Решение:

Обозначим длину ребер в основаниях прямоугольного параллелепипеда за a. Тогда $AB = BC = CD = AD = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = A_1D_1 = a$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \frac{1}{2}a$.

Так как нужно найти угол между прямыми AC_1 и CB_1, то найдем координаты направляющих векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке 18. Тогда точки A, C, B_1, C_1 будут иметь следующие координаты: $A(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $B_1\left(a;a;\frac{1}{2}a\right)$, $C_1(0;a;\frac{1}{2}a)$. Отсюда $\overrightarrow{AC_1}\left\{-a;a;\frac{1}{2}a\right\}$ и $\overrightarrow{CB_1}\left\{a;0;\frac{1}{2}a\right\}$.

Находим $\cos\varphi = \frac{\left|(-a)\cdot a + a\cdot 0 + \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\right|}{\sqrt{(-a)^2+a^2+(\frac{1}{2}a)^2}\cdot\sqrt{a^2+0+(\frac{1}{2}a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, где φ – угол между прямыми AC_1 и CB_1. Отсюда получили, что $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, а это значит, что $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Уравнение плоскости в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в общем виде имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$. В зависимости от коэффициентов, расположение плоскости относительно координатных осей и координатных плоскостей может иметь различный вид:

- если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, то уравнение имеет вид $Ax + By + Cz = 0$, и плоскость будет проходить через начало координат;
- если $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то уравнение имеет вид $By + Cz + D = 0$, и плоскость будет параллельна оси Ox;
- если $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то уравнение имеет вид $Ax + Cz + D = 0$, и плоскость будет параллельна оси Oy;
- если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $D \neq 0$, то уравнение имеет вид $Ax + By + D = 0$, и плоскость будет параллельна оси Oz;
- если $A = D = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то уравнение имеет вид $By + Cz = 0$, и плоскость будет проходить через ось Ox и начало координат;
- если $A \neq 0$, $B = D = 0$, $C \neq 0$, то уравнение имеет вид $Ax + Cz = 0$, и плоскость будет проходить через ось Oy и начало координат;
- если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = D = 0$, то уравнение имеет вид $Ax + By = 0$, и плоскость будет проходить через ось Oz и начало координат;
- если $A = B = D = 0$, $C \neq 0$, то уравнение имеет вид $z = 0$, и плоскость будет совпадать с координатной плоскостью Oxy;
- если $A = C = D = 0$, $B \neq 0$, то уравнение имеет вид $y = 0$, и плоскость будет совпадать с координатной плоскостью Oxz;
- если $B = C = D = 0$, $A \neq 0$, то уравнение имеет вид $x = 0$, и плоскость будет совпадать с координатной плоскостью Oyz;
- если $A = B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то уравнение имеет вид $z = -\frac{D}{C}$, и плоскость будет параллельна координатной плоскости Oxy;
- если $A = C = 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$, то уравнение имеет вид $y = -\frac{D}{B}$, и плоскость будет параллельна координатной плоскости Oxz;
- если $B = C = 0$, $A \neq 0$, $D \neq 0$, то уравнение имеет вид $x = -\frac{D}{A}$, и плоскость будет параллельна координатной плоскости Oyz.

В геометрии школьного курса изучается составление уравнения плоскости через точку и вектор нормали, а также через три точки. Рассмотрим алгоритмы составления уравнения плоскости по данным элементам и раскроем их суть на конкретных примерах.

Алгоритм составления уравнения плоскости по точке и вектору нормали:

1) Находим координаты точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей плоскости, и координаты перпендикулярного к плоскости вектора $\vec{n}\{A; B; C\}$.
2) Записываем условие равенства нулю скалярного произведения вектора плоскости $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, где $M(x; y; z)$ произвольная точка плоскости, и вектора нормали $\vec{n}\{A; B; C\}$, то есть $A(x - x_0) +$ $+B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Задача 2.2.5: Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $K(-2; 7; 1)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1; 2; 8)$ и $B(1; -1; 3)$.

Решение:

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1; 2; 8)$ и $B(1; -1; 3)$. Получаем, что $\overrightarrow{AB}\{2; -3; -5\}$. Возьмем произвольную точку плоскости $M(x; y; z)$. Так как $\overrightarrow{AB}$ – вектор нормали данной плоскости, то данный вектор будет взаимно перпендикулярен направляющему вектору прямой, лежащей в данной плоскости и проходящей через точки K и M. Поэтому скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{KM}$ равно 0. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{KM}\{x + 2; y - 7; z -$ $-1\}$. Тогда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KM}$ $2 \cdot (x + 2) + (-3) \cdot (y - 7) + (-5) \cdot (z - 1) = 0$.

Окончательно получаем, что уравнение искомой плоскости имеет вид $2x -$ $-3y - 5z + 30 = 0$.

Алгоритм составления уравнения плоскости по трем точкам:

1) Так как известно, что точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ принадлежат искомой плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставим координаты этих трех точек в данное уравнение и получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases}$$

Если же плоскость будет проходить через начало координат, то коэффициент $D = 0$, а значит, система будет состоять из трех уравнений с тремя неизвестными, которая легко решается.

2) Решая данную систему уравнений, выражаем коэффициенты A, B, C через $D \neq 0$.
3) Подставляем найденные значения коэффициентов в уравнение $Ax +$ $+By + Cz + D = 0$. После делим на $D \neq 0$ и окончательно получаем искомое уравнение.

Задача 2.2.6: Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $P(2; -1; 2)$, $K(1; -2; 3)$, $H(-1; 2; 0)$.

Решение:

Пусть плоскость PKH имеет уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Чтобы найти коэффициенты уравнения, подставим координаты данных точек в уравнение и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 2 + B \cdot (-1) + C \cdot 2 + D = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot (-2) + C \cdot 3 + D = 0, \\ A \cdot (-1) + B \cdot 2 + C \cdot 0 + D = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, выразим коэффициенты A, B, C через D. Получим $A = -\frac{D}{9}$, $B = -\frac{5D}{9}$, $C = -\frac{2D}{3}$. Тогда получаем, что уравнение плоскости имеет вид $-\frac{D}{9}x - \frac{5D}{9}y - \frac{2D}{3} + D = 0$. Умножим на $\frac{-9}{D}$, где $D \neq 0$. Окончательно, искомое уравнение плоскости PKH имеет вид $x + 5y + 6z - 9 =$ $= 0$.

Алгоритм решения задач на вычисление угла между прямой и плоскостью:

1) Находим координаты направляющего вектора прямой $\vec{p}\{a_1; a_2; a_3\}$ и ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости, $\vec{n}\{A; B; C\}$.

2) Подставляем в формулу $\sin\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{p};\vec{n}})\right| = \frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$ найденные координаты, где φ – угол между прямой и плоскостью.

3) Исходя из тригонометрической записи, находим величину угла φ.

Задача 2.2.7: В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре BB_1, причем $BM : MB_1 = 3 : 2$, а точка N лежит на ребре AD, причем $AN : ND = 2 : 3$. Вычислите угол между прямой MN и плоскостью ABC.

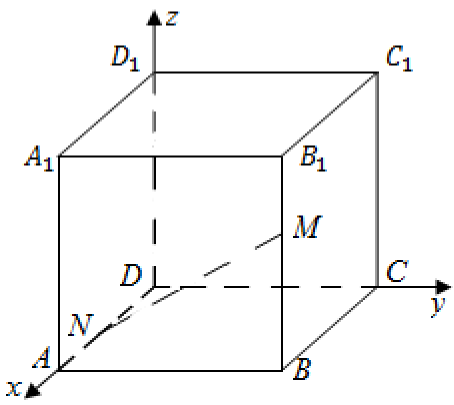


Рис. 19

Решение:

Обозначим длину ребер в кубе за a. Построим прямую MN как показано на рисунке. Так как нужно найти угол между прямой MN и плоскостью ABC, то достаточно найти угол между направляющим вектором прямой MN и ненулевым вектором, перпендикулярным к плоскости ABC.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке 19. Ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости ABC, будет иметь координаты $\vec{n}\{0; 0; a\}$. Найдем координаты направляющего вектора прямой MN.

Точки M и N будут иметь следующие координаты: $M(a; a; \frac{3}{5}a)$, $N(\frac{3}{5}a; 0; 0)$. Отсюда направляющий вектор будет иметь следующие координаты: $\overrightarrow{NM}\left\{\frac{2}{5}a; a; \frac{3}{5}a\right\}$.

Подставляем в формулу $\sin\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{NM}})\right| = \frac{\left|0+0+\frac{3}{5}a^2\right|}{\sqrt{\frac{4}{25}a^2+a^2+\frac{9}{25}a^2}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{\frac{3}{5}a^2}{a^2\cdot\frac{\sqrt{38}}{5}} = \frac{3\sqrt{38}}{38}$,

где φ – угол между прямой MN и плоскостью ABC. Отсюда получили, что $\sin\varphi = \frac{3\sqrt{38}}{38}$, а это значит, что $\varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{38}}{38}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{38}}{38}$.

Алгоритм решения задач на вычисление расстояния от точки до плоскости:

1) Из уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находим координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости, $\vec{n}\{A; B; C\}$.
2) Подставляем в формулу $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ координаты найденного вектора и точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Задача 2.2.8: Найдите расстояние от точки $K(1; -2; 3)$ до плоскости $3x + 2y - 6z + 5 = 0$.

Решение: Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ плоскости: $\vec{n}\{3; 2; -6\}$. Тогда $d = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{|-14|}{7} = 2$.

Ответ: 2.

2.3. Задачи на доказательство

Как говорилось ранее, векторным, координатным и векторно-координатным методом можно решать значительное число геометрических задач, как на вычисление, так и на доказательство. Использование данных методов при решении задач позволяет выводить новые математические факты, которые были неизвестны учащимся. К тому же, доказательство ранее изученных теорем и свойств с помощью этих методов позволяет актуализировать теоретические знания учащихся по геометрии.

Рассмотрим решение некоторых задач на доказательство.

Задача 2.3.1: Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

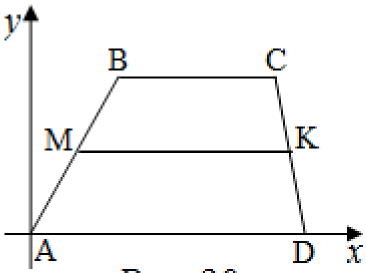


Рис. 20

Доказательство: Пусть $ABCD$ – трапеция, причем $AD||BC$, MK – средняя линия. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0; 0)$ как показано на рисунке 20. Луч AD примем за положительную полуось абсцисс. Координаты вершин трапеции будут следующими: $B(x_3; y_3)$, $C(x_2; y_3)$, $D(x_1; 0)$. Тогда координаты точек M и K будут $\left(\frac{x_3}{2}; \frac{y_3}{2}\right)$ и $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_3}{2}\right)$ соотвественно. Получаем, что ординаты концов средней линии равны. Тогда средняя линия параллельна оси абсцисс. Поскольку основание трапеции лежит на оси абсцисс, то средняя линия параллельна основаниям. Вычислим длины оснований и средней линии трапеции: $AD = x_1$, $BC = x_2 - x_3$, $MK = \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_3}{2} = \frac{1}{2}\big(x_1 + (x_2 - x_2)\big) =$ $= \frac{1}{2}(AD + BC)$. Что и требовалось доказать.

Задача 2.3.2: Докажите, что средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

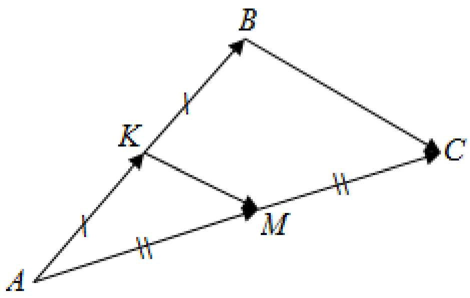


Рис. 21

Доказательство: Пусть точка K – середина стороны AB треугольника ABC, а точка M – середина стороны AC и KM – средняя линия ΔABC (рис. 21).

Тогда $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} -$ $-\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Окончательно получили равенство $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Из этого равенства следует, что векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны. Но так как точки K, M, B, C не лежат на одной прямой, это значит $KM \| BC$, и KM равна половине стороны BC. Что и требовалось доказать.

Задача 2.3.3: Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.

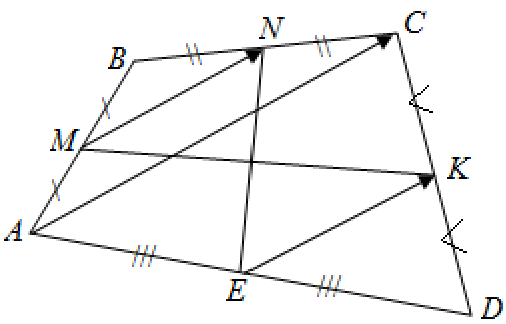


Рис. 22

Доказательство: Пусть $ABCD$ – произвольный четырехугольник. Так как нас просят доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, точкой пересечения делятся пополам, достаточно будет доказать, что $MNKE$ – параллелограмм (рис. 22). Для этого нужно доказать, что $MN \| EK$ и $MN = EK$.

Введем векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{EK}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Получили, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Отсюда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EK}$, то есть векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{EK}$ коллинеарны. Но так как точки M, N, E, K не лежат на одной прямой, это значит, что $MN \| EK$ и $MN = EK$. Тогда $MNKE$ – параллелограмм по признаку и по свойству параллелограмма, а значит MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Что и требовалось доказать.

Задача 2.3.4: Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

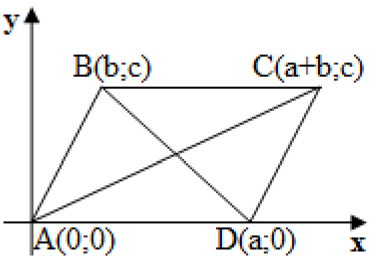


Рис. 23

Доказательство: Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0;0)$ как показано на рисунке 23. Если $AD = BC = a$, а точка B имеет координаты $(b;c)$, то точка D имеет координаты $(a;0)$, а точка C – координаты $(a+b;c)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, находим: $AB^2 = b^2 + c^2$, $AD^2 = a^2$, $AC^2 = (a+b)^2 + c^2$, $BD^2 = (a-b)^2 + c^2$. Получаем: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$, $AC^2 + BD^2 = (a+b)^2 + c^2 + (a-b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Таким образом, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$. Что и требовалось доказать.

Задача №2.3.5: Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Доказательство: Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, где $AD = 2a$, $BC = 2b$. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы основание AD лежало на оси абсцисс, точка O – середина AD (рис. 24). Тогда ось Oy делит BC

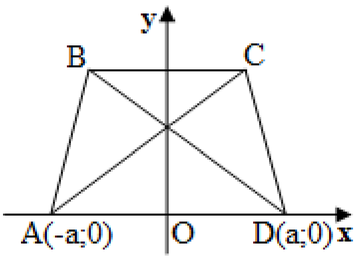


Рис. 24

пополам. Вершины трапеции имеют следующие координаты: $A(-a;0)$, $B(-b;h)$, $C(b;h)$, $D(a;0)$. Найдем AC и BD по формуле нахождения расстояния между двумя точками: $AC = = \sqrt{(b+a)^2+h^2}$, $BD = \sqrt{(a+b)^2+(-h)^2}$, а значит, $AC = BD$, что и требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение: если диагонали трапеции равны, то трапеция – равнобедренная.

Доказательство: Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали равны $AC = BD$ и $AD = 2a$. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы основание AD лежало на оси абсцисс, точка O – середина AD. Тогда вершины A и D имеют координаты: $A(-a;0)$, $D(a;0)$, а вершины B и C: $B(-b;h)$, $C(b;h)$, причем $b < c$, h – высота трапеции. По условию $AC = BD$ ($AC^2 = BD^2$), т.е. $(c+a)^2+h^2 = (b-a)^2+h^2$, $(c+a)^2-(b-a)^2 = 0$. Разложим на множители: $(c-b+2a)(c+b) = 0$. Т.к. $b < c$, $a > 0$, то первый сомножитель положительный, тогда $c + b = 0$, а значит $b = -c$. Найдем AB и CD по формуле нахождения расстояния между двумя точками, заданными координатами, используя координаты $A(-a;0)$, $B(-b;h)$, $C(b;h)$, $D(a;0)$. $AB = \sqrt{(a-c)^2+h^2}$, $BD = \sqrt{(a-c)^2+h^2}$, то $AB = CD$, а значит трапеция $ABCD$ – равнобедренная, что и требовалось доказать.

Задача 2.3.6: Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником.

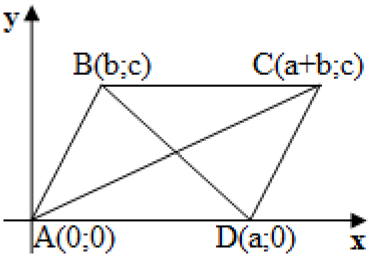


Рис. 25

Доказательство: Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали равны: $AC = BD$ и пусть $AD = BC = a$. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0;0)$ как показано на рисунке 25. Тогда вершины параллелограмма имеют следующие координаты: $A(0;0)$, $B(b;c)$, $C(b+a;c)$, $D(a;0)$, где b, c – некоторые числа. Найдем AC и BD по формуле нахождения расстояния между двумя точками:

$AB^2 = (a+b)^2 + c^2$, $BD^2 = (a-b)^2 + c^2$. Т.к. по условию $AC = BD$, то $AC^2 = BD^2$. Запишем данное условие в координатах: $(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2$. Раскрывая скобки, получаем $ab = 0$, а т.к. $a \neq 0$, то $b = 0$. Итак, вершина B имеет координаты $(0; c)$, т.е. вершина B лежит на оси ординат, а значит, $\angle BAD = 90°$, тогда параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник, что и требовалось доказать.

Интересными являются задачи на выбор произвольной точки плоскости или пространства. Рассмотрим их на конкретных примерах.

Задача 2.3.7: Докажите, что середины диагоналей выпуклого четырехугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

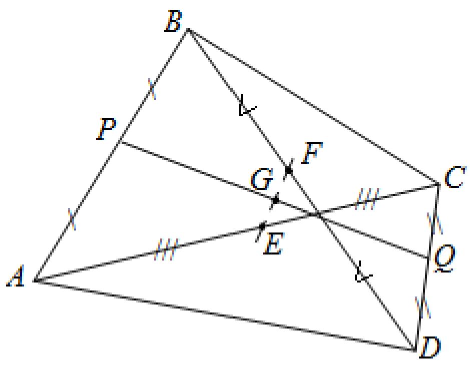


Рис. 26

Доказательство: Пусть $ABCD$ – произвольный четырехугольник, E и F – середины диагоналей AC и BD, а G – точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон (рис. 26). К тому же, точка G делит отрезок PQ пополам, где точки P и Q середины сторон AB и CD соответственно. Поэтому $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC})$, где O – произвольная точка плоскости. Отсюда получаем, что $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \right.$ $\left. + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$. Получили, что $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$; $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$; $2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. Значит точки E, F и G лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Задача 2.3.8: Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, называется медианой тетраэдра. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

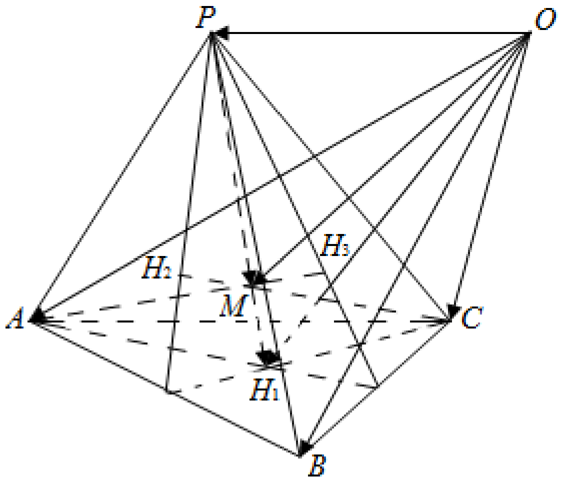


Рис. 27

Доказательство: Пусть M – точка, делящая медиану PH_1 тетраэдра $PABC$ в отношении $PM : MH_1 = 3 : 1$, где H_1 – центроид грани ABC (рис. 27).

Для любой произвольной точки O пространства выполняется $\overrightarrow{OH_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PH_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OH_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$.

Аналогично доказывается, что для точек M_1, M_2 и M_3, делящих медианы соответственно CH_2, AH_3 и BH_4 тетраэдра в отношении $3 : 1$, считая от соответственно вершин C, A и B, выполняется $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$. Это означает, что точки M, M_1, M_2 и M_3, совпадают, то есть все четыре медианы PH_1, CH_2, AH_3 и BH_4 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3 : 1$, считая от соответствующей вершины, что и требовалось доказать. Данная точка будет называться *центроидом тетраэдра*.

Возможен вариант, что в некоторых задачах прямоугольную систему координат можно и не вводить. Мы просто представляем, что она где-то есть, и решаем задачу в общем виде.

Задача 2.3.9: Доказать, что средняя линия выпуклого четырехугольника и отрезок с концами в серединах диагоналей пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

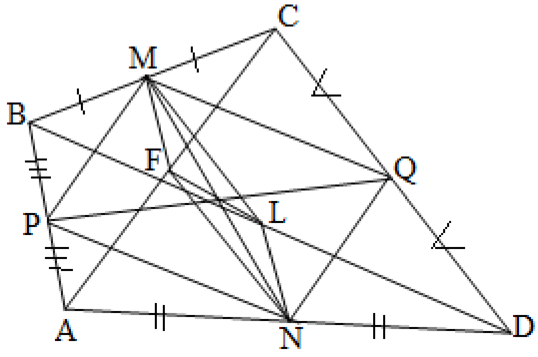


Рис. 28

Доказательство: Пусть вершины выпуклого четырехугольника, представленного на рисунке 28, будут иметь следующие вершины: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Тогда середины отрезков BC и AD будут иметь соответственно следующие координаты: $M\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right)$, $N\left(\frac{x_1+x_4}{2};\frac{y_1+y_4}{2}\right)$. Найдем координаты середин следующих отрезков:

- $MN: O\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$;
- $PQ:\ O_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$;
- $FL: O_2\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$.

Точки O, O_1, O_2 имеют одинаковые координаты, а значит, отрезки пересекаются в одной точке.

К тому же, данную задачу можно решить векторным методом.

Доказательство: Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Точки P, M, Q, N середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно, а точки F и L середины диагоналей AC и BD соответственно. Нужно доказать, что отрезки MN, PQ и FL пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

Для любой произвольной точки плоскости O выполняются равенства $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$. Заметим, что $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. Это значит, что середины отрезков MN, PQ, FL, определяемые векторами $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OL})$, совпадают, то есть пересекаются в одной точке и делятся ею пополам, что и требовалось доказать.

2.4. Задачи повышенного уровня сложности

Векторно-координатный метод позволяет значительно проще решать большое количество геометрических задач повышенного уровня сложности, в частности, задачи второй части единого государственного экзамена.

Знание условия коллинеарности двух векторов и компланарности трех векторов позволяет в координатном виде решать вопросы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей. Выражение через координаты расстояний между точками, прямыми, плоскостями и углов между ними, условия их коллинеарности и перпендикулярности позволяет переводить в координатную форму отношения параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, находить углы и расстояния между ними. Это позволяет изучать пространственные тела и находить интересные обобщения, которые могут возникнуть при анализе полученных решений.

Проанализировав условия задач, представленных во второй части в сборниках последних лет типовых экзаменационных вариантов для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня под редакцией И. В. Ященко, можно выделить следующие виды задач, которые легко решаются векторно-координатным методом:

1) задачи на вычисление угла между скрещивающимися прямыми;
2) задачи на вычисление угла между прямой и плоскостью;
3) задачи на вычисление угла между плоскостями;
4) задачи на нахождение расстояния от точки до прямой;
5) задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости;
6) задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Для некоторых задач необходимо знание дополнительного материала. Его можно предложить более сильным учащимся. В задачах, где речь идет о плоскостях, удобно составлять уравнение плоскости через три точки с помощью определителя, так объем вычислений будет значительно меньше.

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, которые принадлежат плоскости α. Возьмем произвольную точку плоскости $K(x; y; z)$. Тогда получим, что векторы $\overrightarrow{M_1K}\{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - -y_1; z_2 - z_1\}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}\{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ лежат в плоскости α, а значит они компланарны. Условие компланарности векторов равносильно равенству нулю определителя третьего порядка, строками которого являются координаты данных векторов, то есть:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

После того, как найдем определитель третьего порядка, получим окончательный вид уравнения плоскости.

Найти определитель можно двумя способами:

1. *По правилу треугольников:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 -$$

$$- a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 = 0. \ (*)$$

Для запоминания можно представить правило в виде следующей схематической записи.

«+»

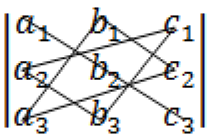


Схема 1

«−»

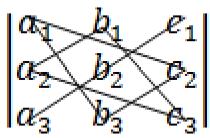


Схема 2

Первые три слагаемых, стоящие в уравнении $(*)$ со знаком «+», представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как показано линиями на схеме 1; следующие три слагаемые, стоящие в уравнении $(*)$ со знаком «−», представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как показано линиями на схеме 2.

2. *С помощью разложения определителя по элементам первой строки:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0.$$

Замечание: аналогично можно разложить данный определитель по элементам любой строки и любого столбца.

Рассмотрим решение представленных видов задач на конкретных примерах.

2.4.1. Угол между скрещивающимися прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку. Данный угол находится в промежутке от 0° до 90°.

Искомый угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами или дополняет его до 180°. То есть если мы найдем направляющие векторы $\vec{p}\{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{q}\{b_1; b_2; b_3\}$ прямых a и b, а затем подставим их координаты в формулу $\cos\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{p}; \vec{q}})\right| = \frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, где φ – угол между прямыми a и b, то получим косинус искомого угла φ. Стоит отметить тот факт, прямые $a\|b$, если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, и $a \perp b$, если $a_1b_1 + {}$ $+a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Алгоритм решения раскрыт на задаче 2.2.4 со стр.32-33.

2.4.2. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Его можно найти, используя угол между направляющим вектором $\vec{p}\{a; b; c\}$ прямой l и вектором нормали $\vec{n}\{A; B; C\}$ плоскости α. Синус угла между прямой l и плоскостью α равен модулю косинуса между направляющим вектором $\vec{p}$ и вектором нормали $\vec{n}$, так как углом между двумя прямыми называют меньший из углов:

$$\sin(\widehat{l; \alpha}) = \left|\cos(\widehat{\vec{p}; \vec{n}})\right| = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим прямоугольную систему координат.

2) Находим координаты интересующих нас точек геометрической фигуры.
3) Определяем координаты направляющего вектора $\vec{p}\{a; b; c\}$ прямой по соответствующим координатам его начала и конца.
4) Возможны несколько вариантов дальнейших действий:
   а) Составляем уравнение плоскости по трем точкам, принадлежащим данной плоскости. После из уравнения плоскости в общем виде $Ax + By + Cz + D = 0$ выписываем координаты вектора нормали $\vec{n}\{A; B; C\}$.
   б) Находим координаты двух неколлинеарных векторов плоскости $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$.
   В качестве вектора нормали рассматриваем вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$. Так как вектор нормали перпендикулярен любому вектору плоскости, то данный вектор будет перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда его координаты можно найти из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}$ с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из следующей системы уравнений:
$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1A + a_2B + a_3C = 0 \\ b_1A + b_2B + b_3C = 0 \end{cases}.$$
   Решая данную систему уравнений, выражаем коэффициенты A, B через C. Затем в качестве C принимаем такое число, чтобы не было дробей. Получаем координаты вектора нормали $\vec{n}$.
5) Подставляем координаты направляющего вектора прямой и вектора нормали плоскости в формулу $\sin(\widehat{l;\alpha}) = \left|\cos(\widehat{\vec{p};\vec{n}})\right| = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
6) Исходя из тригонометрической записи, находим величину угла.

Задача 2.4.1: В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Точка E – середина ребра C_1D_1, а точка F лежит на ребре DD_1 так, что $D_1F = 2DF$. Найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью α, проходящей через точки A_1, E и F.

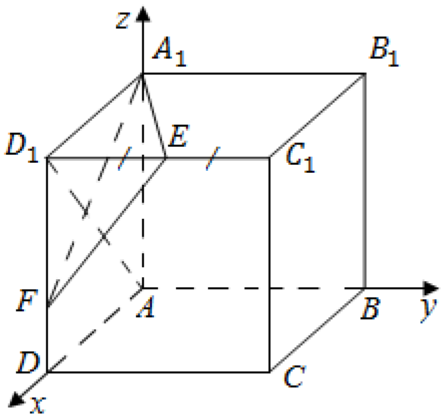


Рис. 29

Решение:

Построим плоскость α, проходящую через точки A_1, E и F. Найдем угол между прямой AD_1 и плоскостью A_1EF.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке 29. Найдем координаты интересующих нас точек A, D_1, A_1, E и F: $A(0;0;0)$, $D_1(1;0;1)$, $A_1(0;0;1)$, $E(1;\frac{1}{2};1)$, $F(1;0;\frac{1}{3})$. Отсюда направляющий вектор прямой AD_1 будет иметь следующие координаты: $\overrightarrow{AD_1}\{1;0;1\}$.

Далее рассмотрим разные варианты дальнейших действий.

а) Составим уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, E и F, и не проходящей через начало координат.

- *Первый способ (с помощью систем уравнений):*

  Пусть искомая плоскость имеет уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Чтобы найти коэффициенты уравнения, подставим координаты данных точек в уравнение и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot \dfrac{1}{2} + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot \dfrac{1}{3} + D = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, выразим коэффициенты A, B, C через D. Получим $A = -\frac{2D}{3}$, $B = \frac{4D}{3}$, $C = -D$. Отсюда уравнение плоскости имеет вид $-\frac{2D}{3}x + \frac{4D}{3}y - Dz + D = 0$. Умножим на $\frac{-3}{D}$, где $D \neq 0$. Окончательно, искомое уравнение плоскости A_1EF имеет вид $2x - 4y + 3z + 3 = 0$.

- *Второй способ (с помощью смешанного произведения):*

  Возьмем произвольную точку плоскости $M(x;y;z)$. Точка M принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда векторы

$\overrightarrow{A_1E}\left\{1;\frac{1}{2};0\right\}$, $\overrightarrow{A_1F}\left\{1;0;-\frac{2}{3}\right\}$, $\overrightarrow{A_1M}\{x;y;z-1\}$ компланарны. Условие компланарности векторов $\overrightarrow{A_1E}$, $\overrightarrow{A_1F}$, $\overrightarrow{A_1M}$ равносильно равенству нулю определителя, элементами которого являются координаты этих векторов, то есть $\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$, $x\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} + y\left(-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}\right) +$ $+(z-1)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}(z-1) = 0$. Умножив на -6, окончательно получим $2x - 4y + 3z + 3 = 0$.

Таким образом, вектор нормали будет иметь координаты $\vec{n}\{2;-4;3\}$.

б) Найдем координаты двух векторов плоскости A_1EF: $\overrightarrow{A_1E}\left\{1;\frac{1}{2};0\right\}$, $\overrightarrow{A_1F}\left\{1;0;-\frac{2}{3}\right\}$. Пусть $\vec{n}\{A;B;C\}$ – вектор нормали плоскости. Найдем его координаты из условий перпендикулярности этого вектора векторам $\overrightarrow{A_1E}$ и $\overrightarrow{A_1F}$, то есть: $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{A_1E} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{A_1F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + \frac{1}{2}B = 0 \\ A - \frac{2}{3}C = 0 \end{cases}$. Решая данную систему уравнений, выразим B, C через A. Получим $B = -2A$, $C = 1{,}5A$. Пусть $A = 2$, тогда $B = -4$, $C = 3$. Отсюда вектор нормали будет иметь координаты $\vec{n}\{2;-4;3\}$.

Подставляем координаты направляющего вектора прямой $\overrightarrow{AD_1}\{1;0;1\}$ и вектора нормали плоскости $\vec{n}\{2;-4;3\}$ в формулу:

$\sin\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{AD_1}})\right| = \frac{|1\cdot 2+0\cdot(-4)+1\cdot 3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{58}}{58}$, где φ – угол между прямой AD_1 и плоскостью A_1EF. Отсюда искомый угол $\varphi = \arcsin\frac{5\sqrt{58}}{58}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{58}}{58}$.

2.4.3. Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями равен линейному углу наименьшего двугранного угла, которые образуют плоскости при пересечении. Другими словами, это угол между прямыми, перпендикулярными ребру двугранного угла. Значит, угол между двумя плоскостями α и β, заданными уравнениями соответственно $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можно связать с углом их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overrightarrow{n_2}\{A_2; B_2; C_2\}$, а именно $\cos\measuredangle(\alpha;\beta) = |\cos\measuredangle(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})| = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Стоит отметить, что плоскости $\alpha \perp \beta$, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, и $\alpha \| \beta$, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим прямоугольную систему координат.
2) Находим координаты интересующих нас точек геометрической фигуры.
3) Рассматриваем расположение построенных плоскостей α и β. Если некоторая их них лежит на координатной плоскости, то за вектор нормали можно принять координаты направляющего вектора прямой, перпендикулярной данной плоскости.

   Если же это сделать не удается, то вектор нормали можно найти, зная три точки искомой плоскости.
4) Найдя у плоскостей векторы нормали $\overrightarrow{n_1}\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overrightarrow{n_2}\{A_2; B_2; C_2\}$, подставляем их координаты в формулу $\cos\measuredangle(\alpha;\beta) = |\cos\measuredangle(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})| = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.
5) Исходя из тригонометрической записи, находим величину угла.

Задача 2.4.2: В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые ребра равны 2, точка D – середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A как представлено на рисунке 30. Очевидно, что ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости ABC будет иметь координаты $\overrightarrow{n_1}\{0; 0; 1\}$.

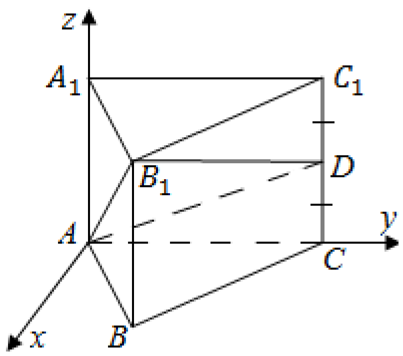


Рис. 30

Найдем координаты вектора нормали $\overrightarrow{n_2}\{A;B;C\}$ плоскости ADB_1. На предыдущей задаче показали, что его можно найти разными способами. Воспользуемся условием перпендикулярности векторов плоскости к вектору нормали. Найдем координаты неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB_1}$. Для этого найдем координаты вершин A, D, B_1: $A(0;0;0)$, $D(0;5;1)$, $B_1(\frac{5\sqrt{3}}{2};2{,}5;2)$. Отсюда $\overrightarrow{AD}\{0;5;1\}$ и $\overrightarrow{AB_1}\left\{\frac{5\sqrt{3}}{2};2{,}5;2\right\}$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{n_2}$: $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AB_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5B+C=0\\ \frac{5\sqrt{3}}{2}A+2{,}5B+2C=0\end{cases}$.

Решая данную систему уравнений, выразим A, C через B. Получим $A=\sqrt{3}B$, $C=-5B$. Пусть $B=1$, тогда $A=\sqrt{3}$, $C=-5$. Отсюда вектор нормали будет иметь координаты $\overrightarrow{n_2}\{\sqrt{3};1;-5\}$.

Подставим найденные координаты векторов нормали в формулу $\cos\varphi=$ $=|\cos\angle(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})|=\frac{|0\cdot\sqrt{3}+0\cdot1+1\cdot(-5)|}{1\cdot\sqrt{3+1+25}}=\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$, где φ – угол между плоскостями ABC и ADB_1. Таким образом, искомый угол $\varphi=\arccos\frac{5\sqrt{29}}{29}$.

Ответ: $\arccos\frac{5\sqrt{29}}{29}$.

2.4.4. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой. Это расстояние удобно находить векторно-координатным методом, так как можно получить две прямые, у которых скалярное произведение направляющих векторов равно нулю.

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим прямоугольную систему координат.
2) Находим координаты точки M и точек A, B, через которые проходит прямая.

3) Определяем координаты направляющего вектора прямой $\overrightarrow{AB}\{x_2 - -x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

4) Проводим из точки M перпендикуляр к прямой AB, получаем точку M_0.

5) Точка M_0 делит отрезок AB в отношении λ. Пользуясь этим фактом, находим координаты точки M_0 в зависимости от λ, так как они будут вычисляться по формулам $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$, где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

6) Получили, что $MM_0 \perp AB$. Отсюда скалярное произведение их направляющих векторов равно 0. Подставляем их координаты и находим, в каком отношении λ делит точка M_0 отрезок AB. Окончательно получаем координаты точки M_0.

7) Находим расстояние между точками M и M_0, зная их координаты, тем самым получаем искомое расстояние от точки M до прямой AB.

Задача 2.4.3: В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра 2, найдите расстояние от точки F, до прямой BG, где G – середина ребра SC.

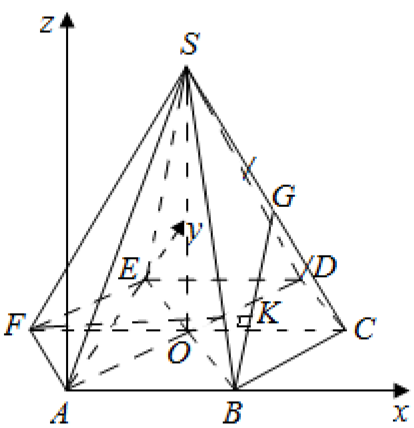


Рис. 31

Решение:

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в точке A (рис. 31). Нужно найти расстояние от точки F до прямой BG. Известно, что G – середина ребра SC. Для того, чтобы найти ее координаты, необходимо найти координаты точек S и C.

Интересующие нас точки имеют следующие координаты: $F(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $S(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3})$. Найдем координаты точки G: $x = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2} = 1$, $y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $G(1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Найдем координаты направляющего вектора прямой BG: $\overrightarrow{BG}\left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Опустим из точки F перпендикуляр к прямой BG. Получим точку K, где $FK \perp BG$. Это значит, что скалярное произведение направляющих векторов данных прямых равно 0.

Найдем направляющий вектор прямой FK. Точка K делит отрезок BG в отношении λ. Найдем ее координаты относительно данного отношения: $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{1+\lambda}{1+\lambda} = 1$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}$. Тогда точка будет иметь координаты $K(1; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda})$. Отсюда направляющий вектор прямой FK будет иметь координаты $\overrightarrow{FK}\left\{1{,}5; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Так как $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$, то $1{,}5 \cdot 0 + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Отсюда, решая уравнение, получим, что $\lambda = 1$. Окончательно точка K будет иметь координаты $K(1; \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Найдем расстояние между точками F и K:

$FK = \sqrt{(1+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4} - 0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{42}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

2.4.5. Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки до плоскости, причем точка не принадлежит данной плоскости, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Это расстояние удобно искать по вектору нормали данной плоскости и координатам самой точки.

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим прямоугольную систему координат.
2) Находим координаты интересующих нас точек геометрической фигуры.
3) Составляем уравнение плоскости α по трем точкам.
4) Зная координаты данной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, находим расстояние по формуле $\rho(M;\alpha) =$

$= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Задача 2.4.4: В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все стороны которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEF_1.

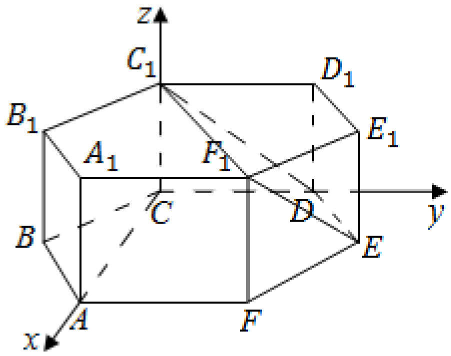


Рис. 32

Решение:

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в точке C (рис. 32). Необходимо найти расстояние от точки A до плоскости DEF_1. Для этого нужно найти координаты точки A и вектор нормали плоскости DEF_1.

Точка A будет иметь координаты $A(\sqrt{3}; 0; 0)$. Найдем вектор нормали данной плоскости, составив уравнение плоскости по трем точкам.

Вершины D, E, F_1 будут иметь следующие координаты: $D(0; 1; 0)$, $E(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1{,}5; 0)$, $F_1(\sqrt{3}; 1; 1)$. Возьмем произвольную точку плоскости $M(x; y; z)$. Точка M принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{DE}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}; 0{,}5; 0\right\}$, $\overrightarrow{DF_1}\{\sqrt{3}; 0; 1\}$, $\overrightarrow{DM}\{x; y-1; z\}$ компланарны. Условие компланарности векторов $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF_1}$, $\overrightarrow{DM}$ равносильно равенству нулю определителя, элементами которого являются координаты этих векторов, то есть $\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $x\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (y-1)\left(-\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}\right) + z\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 0$, $0{,}5x - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$. Отсюда уравнение плоскости примет вид $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$.

Вычислим расстояние от точки $A(\sqrt{3}; 0; 0)$ до плоскости DEF_1, заданной уравнением $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$: $\rho(A; DEF_1) = \frac{|1\cdot\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\cdot 0+(-\sqrt{3})\cdot 0+\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+3}} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

2.4.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстоянием между скрещивающимися прямыми является длина их общего перпендикуляра. При решении многих задач построение этого перпендикуляра затруднительно, поэтому данную задачу проще решить именно векторно-координатным методом, так как не требуются сложные построения.

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим прямоугольную систему координат.
2) Находим координаты вершин геометрической фигуры.
3) Проводим отрезок MN и принимаем его за искомое расстояние между скрещивающимися прямыми l и m.
4) Расписываем вектор $\overrightarrow{MN}$ через сумму векторов.
5) Находим координаты векторов суммы, используя признак коллинеарности векторов.
6) Получаем координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ через сумму выраженных векторов с неизвестными.
7) Учитывая, что MN – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых l и m, получаем систему уравнений: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{l} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{l} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$, откуда находим неизвестные. Окончательно получаем координаты вектора $\overrightarrow{MN}$.
8) Находим длину вектора $\overrightarrow{MN}$, которая и будет искомым расстоянием.

Задача 2.4.5: В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B (рис. 33). Найдем координаты интересующих нас точек в этой системе: $B(0;0;0)$,

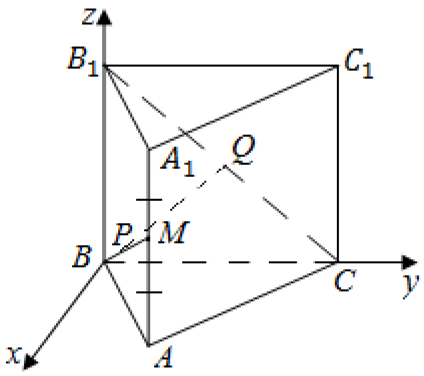


Рис. 33

$B_1(0;0;2)$, $C(0;2;0)$, $M(\sqrt{3};1;1)$. Тогда направляющие векторы прямых MB и B_1C будут иметь координаты: $\overrightarrow{MB}\{-\sqrt{3};-1;-1\}$, $\overrightarrow{CB_1}\{0;-2;2\}$. Пусть PQ – общий перпендикуляр прямых MB и B_1C. Таким образом, длина вектора $\overrightarrow{PQ}$ будет искомым расстоянием между прямыми MB и B_1C. Выразим вектор $\overrightarrow{PQ}$ через другие по правилу сложения: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}$.

Так как точка P лежит на отрезке MB, то $\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{MB}$, отсюда координаты вектора $\overrightarrow{PB}$ будут $\overrightarrow{PB}\{-\sqrt{3}k;-k;-k\}$. К тому же, точка Q лежит на отрезке CB_1, $\overrightarrow{CQ}=m\overrightarrow{CB_1}$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{CQ}$ будут $\overrightarrow{CQ}\{0;-2m;2m\}$. Координаты вектора $\overrightarrow{BC}\{0;2;0\}$.

Получаем, координаты вектора $\overrightarrow{PQ}\{-\sqrt{3}k;-k-2m+2;-k+2m\}$.

Так как PQ – общий перпендикуляр прямых MB и B_1C, то по свойству общего перпендикуляра получаем: $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{CB_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}k)-(-k-2m+2)-(-k+2m)=0\\ -2(-k-2m+2)+2(-k+2m)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5k-2=0\\ 8m-4=0\end{cases}.$$

Решая систему, получаем, что $k=0{,}4$, $m=0{,}5$. Отсюда координаты вектора будут $\overrightarrow{PQ}\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{5};\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right\}$. Тогда $PQ=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\frac{12}{25}+\frac{9}{25}+\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Глава 3. Применение программы «GeoGebra» при решении задач векторно-координатным методом

GeoGebra – это бесплатная математическая программа, которая объединяет в себе алгебру, геометрию и математические исчисления [14]. Данная программа представляет собой динамическую геометрическую среду, где можно создавать анимированные чертежи в планиметрии и стереометрии. Причем чертежи можно создавать на плоскости (полотно 2D) и в пространстве (полотно 3D), которые представляют собой прямоугольные системы координат Oxy и $Oxyz$ соответственно.

Программа имеет широкие возможности для работы с функциями: с помощью нее можно строить их графики, находить корни и экстремумы. К тому же, в самой программе можно находить расстояния между объектами, площади и объемы геометрических фигур, производные, а также вычислять углы и интегралы.

Главное преимуществом GeoGebra перед другими математическими программами состоит в том, что она поддерживает русский язык и может быть легко освоена студентами и преподавателями, которые имеют элементарные навыки работы с компьютером, так как имеет достаточно простой интерфейс при использовании. Кроме того, все созданные чертежи через буфер обмена можно переносить в другие программы и приложения, поддерживающие работу с изображениями, для дальнейшей работы.

При изучении тем, связанных с векторно-координатным методом, удобно использовать данную программу, так как с помощью нее можно красочно строить и демонстрировать пространственные фигуры, находить координаты точек, а также проводить геометрические измерения. Использование программы «GeoGebra» позволяет повысить интерес учащихся к геометрии и помогает развивать пространственное воображение.

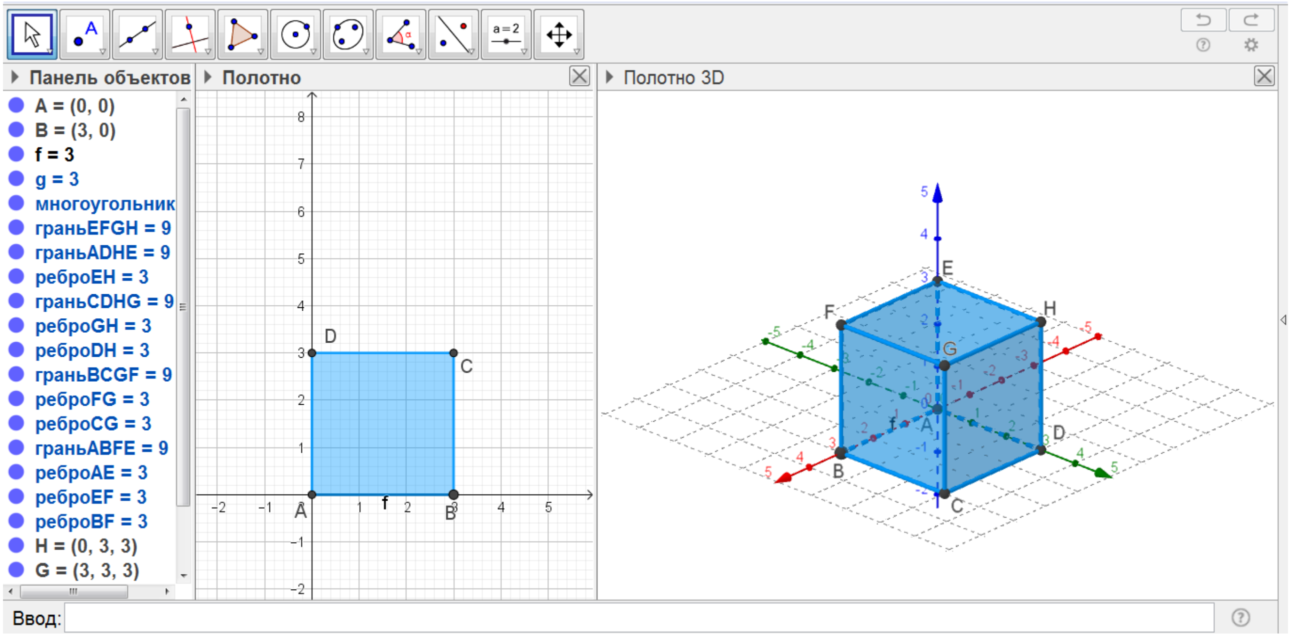


Рис. 34

В панели объектов, которая служит для записи построенных объектов, отражаются все шаги построения чертежа.

В программе можно строить сечения различных геометрических фигур, используя метод следов, метод вспомогательных сечений или комбинированный метод.

Пример 1: Пусть дана пирамида $SABC$, у которой D – середина ребра SB, E – середина ребра BC, а F делит ребро SA так, что $SF:FA = 2:1$. Постройте сечение DEF.

С применением возможностей программы сечение будет выглядеть следующим образом (рис. 35).

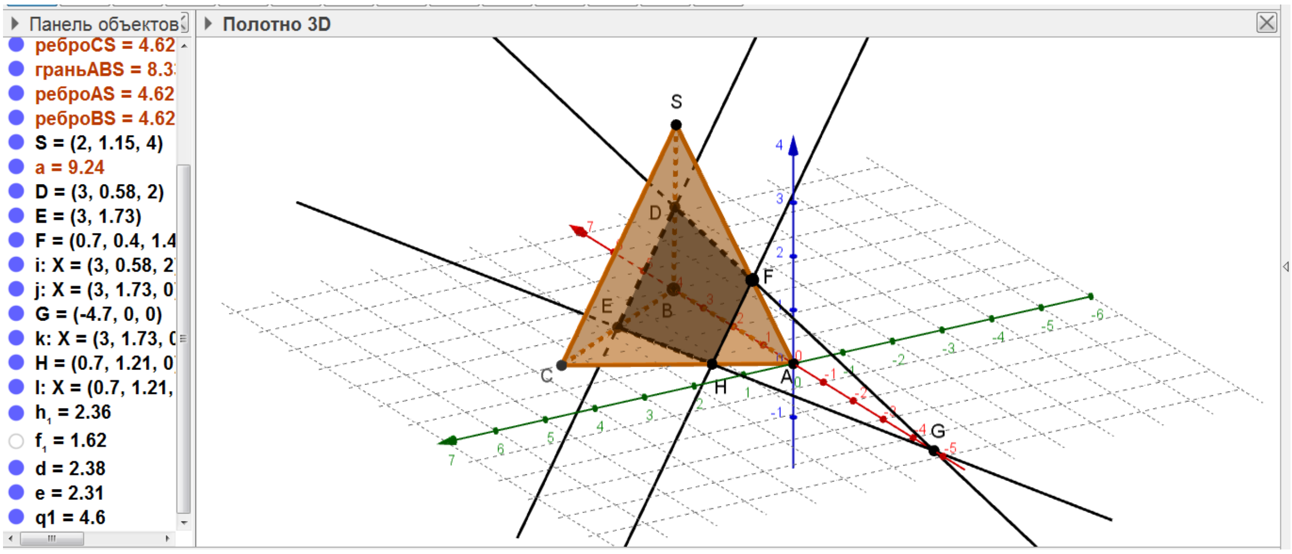


Рис. 35

В GeoGebra существует функция построения плоскости через три точки. Это может быть полезным для проверки построенного сечения, а также для проверки составленного уравнения плоскости, проходящей через три точки, так как в панели объектов будет записано искомое уравнение плоскости. Таким образом, в панели объектов можно узнать не только координаты точек, но и уравнение плоскости.

Пример 2: Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной 2, где M делит ребро BB_1 в отношении $BM{:}MB_1 = 3{:}1$, а точка N делит ребро AA_1 в отношении $AN{:}NA_1 = 1{:}3$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки C, M, N.

Решив задачу, получим, что уравнение плоскости, проходящей через точки C, M, P будет иметь вид $\sqrt{3}x - 4y - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Если мы проведем плоскость в GeoGebra через эти три точки (рис. 36), то получим плоскость $-1{,}73x + 4y + 3{,}46z = 1{,}75$. Отсюда можно сделать вывод, что уравнение составлено правильно, так как $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

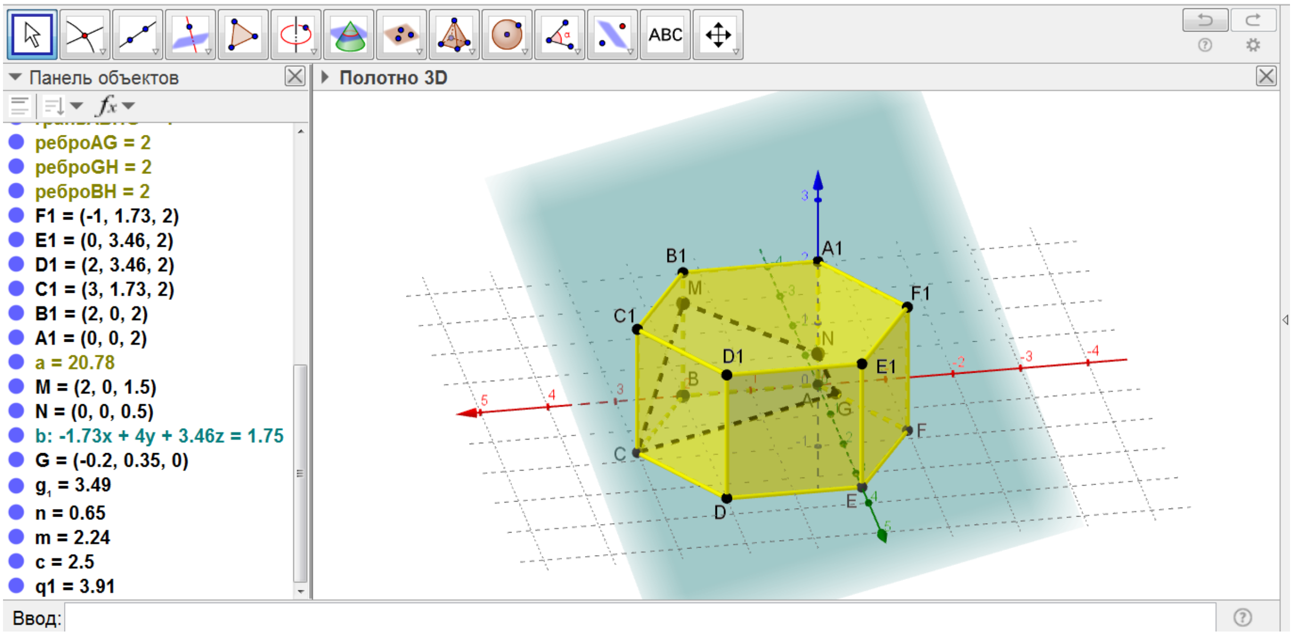


Рис. 36

Также в программе присутствует строка ввода, где можно ввести уравнение плоскости, и посмотреть, как изображается фигура в пространстве. Отсюда можно осуществлять проверку найденного уравнения плоскости.

Причем с помощью функции нахождения пересечения объектов, можно найти координаты точек пересечения плоскости с осями координат. Например, построим плоскость, заданную уравнением $2x + y - z + 3 = 0$. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ она будет располагаться, как представлено на рисунке 37, причем точки A, B, C – это будут точки пересечения плоскости с осями координат.

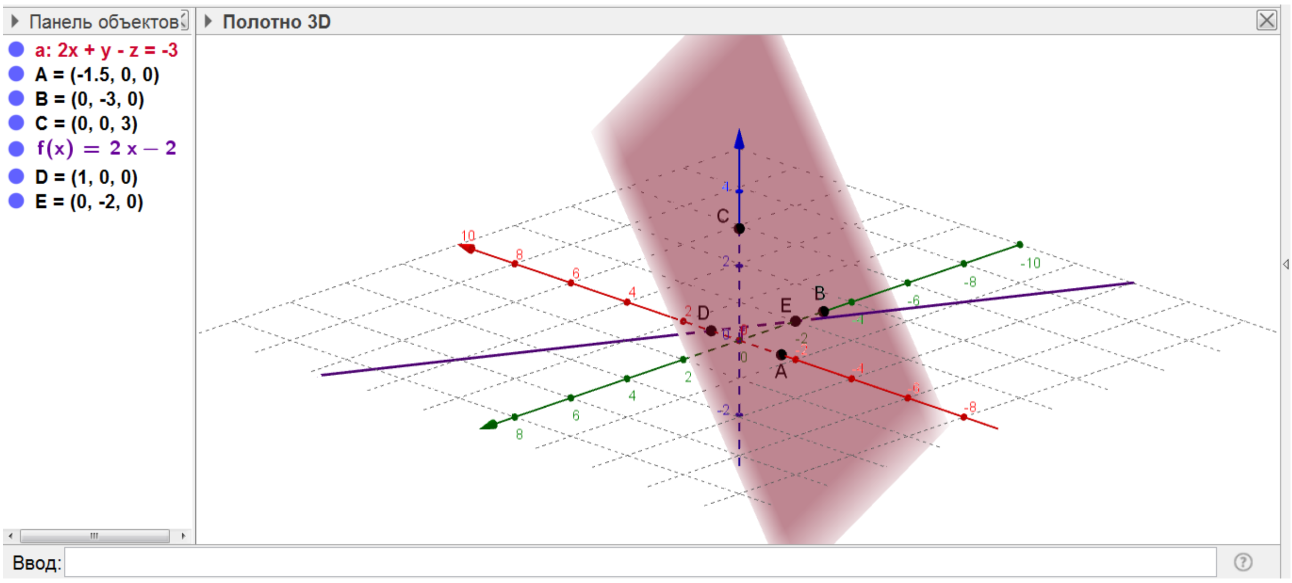


Рис. 37

Существует возможность построения выносных чертежей на плоскости, например, изображение сечения многогранника или его грани отдельно от рисунка.

К *примеру 1* выносной чертеж сечения $EDFH$ и грани SAB могут быть продемонстрированы следующим образом (рис. 38).

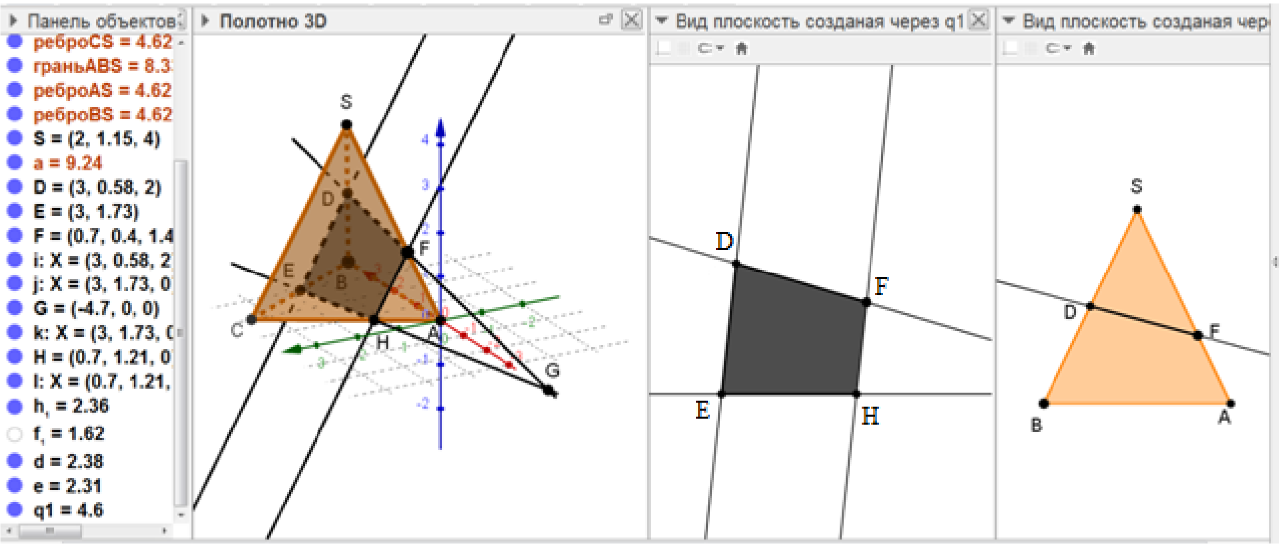


Рис. 38

К тому же, с помощью данной программы удобно иллюстрировать линейные операции над векторами и разложение вектора по базису. Причем при построении векторов, мы получаем сразу их координаты в панели объектов.

Пример 3: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; O – центр основания $ABCD$. Обозначим $\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1D} = \vec{c}$. Разложите в базисе $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1D}$ вектор $\overrightarrow{OA_1}$.

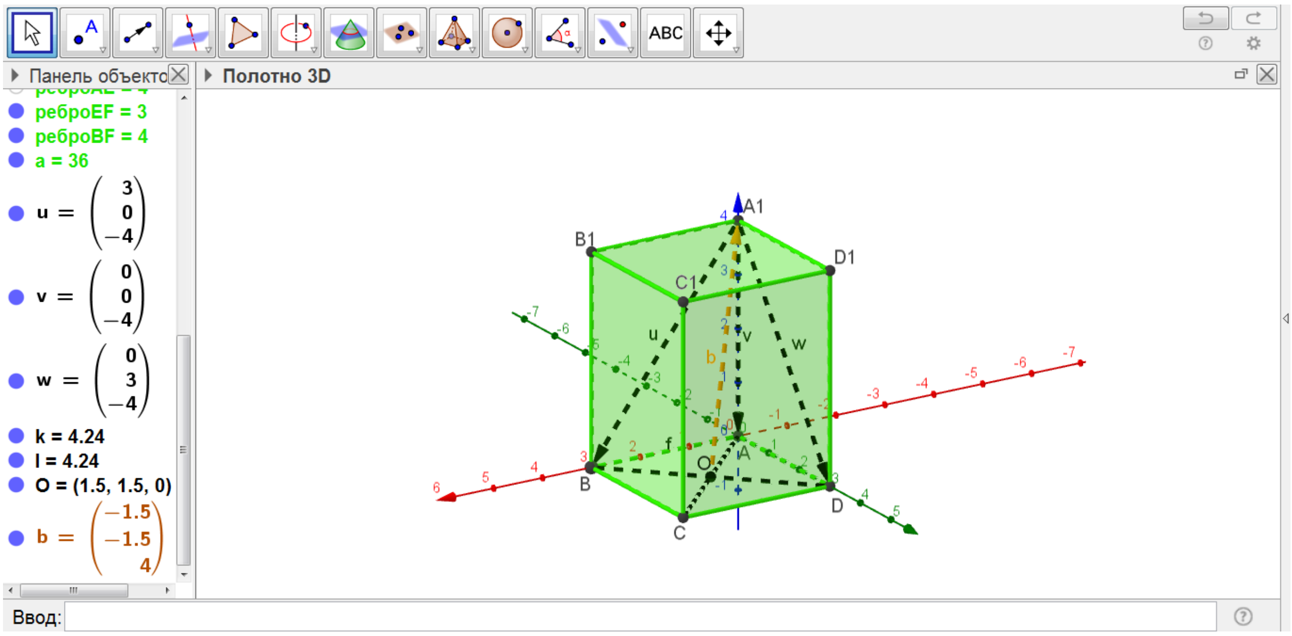


Рис. 39

Заключение

Векторно-координатный метод является неотъемлемой частью школьного курса математики. Это подтверждается тем, что задания, решаемые данным методом, присутствуют в вариантах Основного Государственного Экзамена и Единого Государственного Экзамена по математике. Его алгоритмичность и простота применения помогают решать не только геометрические задачи, но и задачи прикладного характера. Использование метода позволяет учащимся значительно упростить и сократить решение задач в ряде случаев. Овладение универсальным векторно-координатным методом позволит учащимся легче овладевать материалом различных дисциплин, как в школе, так и в высших учебных заведениях.

В данной выпускной квалификационной работе:

1) выявлено, что именно необходимо знать, для успешного овладения данным методом;
2) описаны этапы изучения векторно-координатного метода по действующим учебникам;
3) выделены направления в изучении векторного и координатного метода;
4) описаны этапы формирования векторно-координатного метода у учащихся;
5) выделены основные этапы решения задач векторным, координатным и векторно-координатным методами, а также раскрыта их суть на конкретных примерах;
6) приведены дополнительные материалы для успешного овладения учащимися векторным, координатным и векторно-координатным методами, а также раскрыта методика работы с задачами, решающимися данными методами, на конкретных примерах;

7) выделены простейшие задачи и задачи повышенного уровня сложности, которые можно решить векторным, координатным и векторно-координатным методами;
8) составлены алгоритмы решения задач векторно-координатным методом;
9) показаны примеры применение программы «GeoGebra» при решении задач векторно-координатным методом.

Отсюда можно сделать вывод, что цель работы достигнута, и поставленные задачи выполнены.

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 256 с.

2. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 287 с.

3. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 271 с.

4. Атанасян Л. С. Геометрия. 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев и др.]. – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.

5. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс : учеб. для учащихся обшеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 280 с.

6. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс : учеб. для учащихся обшеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 288 с.

7. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев и др.]. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

8. Геометрия. Решаем задачи по планиметрии. Практикум: элективный курс / авт. сост. Л.С. Сагателова. – Волгоград: Учитель, 2009. – 150 с.

9. Клековкин Г. А. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10-11 классов / Г.А. Клековкин. – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. – 180 с.

10. Перышкин, А. В. Физика. 7 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. В. Перышкин. – 14-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2010. – 192 с.

11. Потоскуев Е. В. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. ФГОС / Е. В. Потоскуев, – М. : Издательство «Экзамен», 2019. – 223 с.

12. Потоскуев, Е. В. Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач: учеб. пособие. / Е. В. Потоскуев, – М. : Дрофа, 2008. – 173 с.

13. Саранцев Г. И. Обучение математическим доказательствам в школе: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 2000. – 173 с.

Электронные ресурсы

14. Официальный сайт программы GeoGebra [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.geogebra.org/ (дата обращения 01.06.2020).

15. Статистико-аналитический отчет о результатах государственной итоговой аттестации по образовательным программам общего образования в Новгородской области в 2019 году [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://rsoko.dpo53.ru/wp-content/uploads/2019/10/GIA-11_2019.pdf (дата обращения 12.02.2020).