

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

**СБОРНИК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ**

Часть I

**Великий Новгород
2019**

СБОРНИК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ.
ЧАСТЬ 1 / Сост. – Великий Новгород: Издательство НовГУ, 2019. – 106 с.

В сборнике приведены описания лабораторных работ по курсу общей физики, включающие разделы «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика». В каждом описании рассматриваются основные понятия и закономерности, методика и порядок выполнения работы, контрольные вопросы.

©Новгородский государственный
университет, 2019

©
составление, 2019

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1(1.2). ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ	5
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2(1.5) ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА	27
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3(1.4). ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	45
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4(1.6). ИЗУЧЕНИЕ СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ	60
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МАЯТНИКА	73
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6(2.8). ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЁМКОСТЕЙ ГАЗОВ ПО МЕТОДУ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА.....	81
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7(2.9). ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ КАПИЛЛЯРНОГО ВИСКОЗИМЕТРА	94
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8(2.10). ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА	102
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	110

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник вошли лабораторные работы по курсу общей физики, включающие разделы «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика», «Электростатика» и «Постоянный ток».

В данный сборник включена лабораторная работа «Измерение физических величин и обработка результатов измерений», что поможет студентам в обработке результатов измерений при выполнении лабораторных работ и подготовке отчётов по ним.

Описание каждой лабораторной работы имеет краткое изложение теории физического явления, описание экспериментальной установки, методические указания по выполнению работы и контрольные вопросы.

Необходимость теоретического введения к каждой работе основана на том, что либо студент выполняет лабораторную работу раньше, чем соответствующий материал изложен в лекционном курсе, либо соответствующий материал не излагается в лекционном курсе.

Контрольные вопросы в каждой работе предназначены для того, чтобы облегчить студентам самоконтроль при изучении материала, обратить их внимание на главное в изучаемом явлении.

Все формулы, используемые в данном методическом пособии, выводятся и записываются в Международной системе единиц (СИ).

В конце сборника лабораторных работ приводится список рекомендуемой литературы.

Настоящий сборник предназначен для студентов университета, изучающих курс общей физики в течение одного семестра или двух семестров всех форм обучения.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1(1.2).

ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ***Цели работы:***

- 1) знакомство с основными методами измерений физических величин, принципом действия и конструкцией измерительных приборов,
- 2) изучение различных видов погрешностей, возникающих при прямых и косвенных измерениях физических величин,
- 3) определение плотности вещества твёрдых тел правильной геометрической формы (цилиндр, параллелепипед).

1.1 Прямые и косвенные измерения основных физических величин

Физика является экспериментальной наукой. Это означает, что устойчивые, повторяющиеся закономерности, связывающие некоторые физические величины, становятся физическим законом только после всесторонней экспериментальной проверки, которая осуществляется путём измерения рассматриваемых физических величин и математической обработкой результатов измерений. Факт измеряемости физической величины непременно присутствует в определении понятия физической величины и следует из того, что количественное значение той или иной физической величины устанавливается только путём её сравнения с единицей, принятой для величин данного рода. Физическую величину можно определить, например, так: «**Физическая величина**, это **ИЗМЕРЯЕМЫЙ количественный** параметр (характеристика, признак, свойство) рассматриваемого физического процесса (явления), происходящего с материальными объектами (телами) или самого материального объекта (тела)».

Измерением называют экспериментальное определение количественного значения физической величины с помощью специально для этого предназначенных измерительных приборов и устройств. Как отмечено выше, физическая величина характеризует определенную особенность физического объекта или явления, отображает их свойства, состояние или происходящие в них процессы. Измерение физической величины включает в себя наблюдение и выполнение необходимых математических операций по определению результата измерения. Все измерения делятся на две группы.

Прямое измерение – измерение, при котором физическая величина может быть получена непосредственно в процессе наблюдения. Примером прямых измерений являются: измерение температуры термометром, давления – барометром. длины – линейкой, времени – секундомером и т. д.

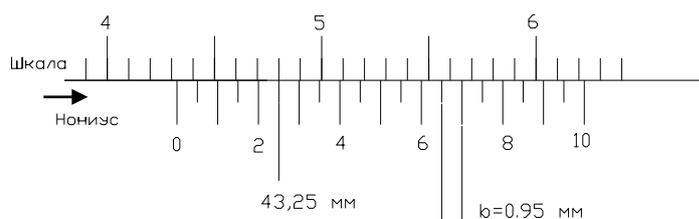
Косвенное измерение – измерение, при котором искомое значение физической величины получают по формуле, связывающей

рассматриваемую физическую величину с величинами, измеренными прямо.

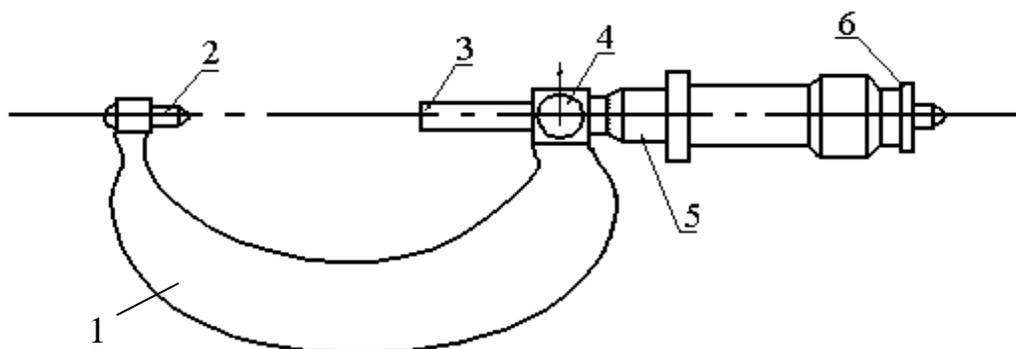
Имеется огромное количество физических величин, которые измеряются как прямыми, так и косвенными методами. Однако, можно выделить основные физические величины, измерения которых проводятся наиболее часто, либо по результатам измерения таких величин можно судить об остальных физических параметрах. К таким измерениям можно отнести измерение *линейных размеров, времени, температуры, массы*.

Простейшей мерой длины является линейка, отградуированная по эталону в единицах длины. Разновидностью линеек являются гибкие меры длины: рулетки, метры и т. д. Точность этих приборов не велика, сказывается тепловое расширение, изменение размеров при хранении и эксплуатации. Приборную погрешность указанных инструментов принято считать равной половине цены деления.

Большой точности достигают в приборах с нониусом, например, в штангенциркуле. При определении размеров тел штангенциркулем объект измерения помещается между измерительными губками, выполненными из твёрдого сплава. Размер объекта определяется по положению измерительной рамки, перемещающейся вдоль штанги со штриховой шкалой. На штанге нанесена основная шкала с ценой деления $\ell = 1$ мм, а на рамке – дополнительная штриховая шкала – нониус. Цена деления нониуса равна цене одного деления основной шкалы, делённой на число делений нониуса: $\ell_n = \ell/n$. При перемещении нулевого штриха нониуса между делениями основной шкалы штрихи нониуса поочерёдно совпадают со штрихами основной шкалы. Первоначально со штрихом основной шкалы совпадёт 1-й штрих нониуса, затем 2-й, 3-й и т. д. таким образом, указателем для нониуса служит штрих основной шкалы, совпадающий со штрихом нониуса. Результат измерения определяется целым числом делений основной шкалы, к которому добавляется дробная часть. Целое число делений основной шкалы (число миллиметров) указывает нулевой штрих нониусной шкалы. Число десятых делений миллиметра берётся при отсчёте по нониусу и равно номеру этого штриха нониуса, умноженному на ℓ_n . На рисунке 1.1 а, например, число полных делений равно 43, дробная часть (отсчёт по нониусу) – 2.5. Результат измерения 43,25.



а) Отсчёт по нониусу штангенциркуля;



б) Гладкий микрометр МК:

1 скоба, 2 – пятка, 3 – микрометрический винт, 4 – стопор,
5 – барабан, 6 – трещотка.

Рисунок 1.1

Другой способ определения доли деления основной шкалы прибора применяется в микрометрах. Здесь использовано сочетание винта и барабана (рисунок 1.1 б). Барабан жёстко соединён с винтом, ввинчивая который в основу прибора, зажимают измеряемую деталь. Один оборот барабана соответствует продвижению винта и барабана на один шаг резьбы, который равен одному делению основной шкалы. По краю барабана нанесены деления, разделяющие его окружность на доли оборота. Поворот барабана на одно деление соответствует смещению винта на расстояние, равное цене деления основной шкалы, делённой на число делений барабана. Например, если деление основной шкалы 0,5мм, а на барабане 50 делений, то поворот на одно деление соответствует перемещению на 0,01 мм. Микрометр точнее штангенциркуля, но, как правило, может измерять только небольшие детали.

Другой основной физической величиной является *время*. В зависимости от точности и диапазона измерений используют различные методы и средства измерения времени. Наиболее простым, но менее точным, являются механические часы и секундомеры (таймеры). Высокой точностью обладают электронные и атомные часы. Неточность суточного хода атомных часов 10^{-11} с.

Температура также относится к наиболее часто измеряемым физическим величинам. Температурой называется физическая величина, характеризующая степень нагретости тела. Важность измерения температуры заключается в том, что большинство физических параметров зависят от температуры. Приборы, измеряющие температуру, называются термометрами.

1.2 Погрешность измерений

1.2.1 Типы погрешностей

Измерение любой физической величины не может быть выполнено абсолютно точно, поскольку связано с неточностями, помехами и

ошибками, которые называют **погрешностями** измерений. При этом следует понимать, что указанные выше нежелательные обстоятельства (факторы), возникающие в процессе измерений физических величин, неизбежны и не могут быть полностью устранены. Различают следующие основные типы погрешностей:

1. Систематическая погрешность

При повторении одинаковых наблюдений эта погрешность остаётся постоянной или изменяется закономерным образом. Устранить систематические погрешности путём повторения опытов нельзя. К систематическим погрешностям можно отнести погрешность метода (методическая погрешность) измерений и погрешность измерительного прибора, которую рассмотрим более подробно.

В ряде случаев многократное проведение наблюдений даёт одно и то же значение измеряемой величины. Например, при измерении диаметра цилиндра миллиметровой линейкой получается одно и то же значение $d = 45,0$ мм. Это не означает, что отсутствует погрешность измерений. Любой измерительный прибор обладает собственной или приборной погрешностью, которая определяется точностью изготовления и градуировки прибора, условиями работы. Приборная погрешность заносится в паспорт прибора. Если специальных указаний нет, то, как правило, в качестве приборной погрешности берётся половина наименьшего деления шкалы. В нашем примере величину цилиндра можно записать:

$$d = (45,0 \pm 0,5) \text{ мм}$$

Если прибор имеет одну шкалу или один предел измерения, тогда наименьшее деление шкалы определяет цену деления прибора. В многопредельных, универсальных приборах шкала обычно не градуируется в значениях измеряемой величины. В таком случае цена деления прибора зависит от выбранного предела измерения. Предел измерения – это максимально возможная, в данном случае, измеряемая прибором физическая величина.

Рассмотрим пример. Предел измерения для вольтметра составляет $U_{max} = 50 \text{ В}$, шкала прибора имеет $n_{max} = 100$ делений. Цена деления шкалы:

$$c = \frac{U_{max}}{n_{max}} = 0,5 \frac{\text{В}}{\text{дел.}}$$

Стрелка прибора остановилась на $n_x = 30$ делений. Измеренное напряжение в этом случае равно:

$$U_x = c \cdot n_x = 0,5 \frac{\text{В}}{\text{дел.}} \cdot 30 \text{ дел} = 15 \text{ В.}$$

Таким образом, для определения значения измеряемой многопредельным прибором физической величины необходимо прежде всего, исходя из выбранного предела измерения X_{max} , который соответствует n_{max} – делений шкалы, рассчитать цену деления

$$c = \frac{X_{max}}{n_{max}}$$

Затем определить искомое значение, умножив показания прибора на цену деления:

$$X = cn_x.$$

Точность прибора определяется точностью его изготовления и градуировки. Согласно ГОСТ 8.401-80 все электроизмерительные приборы разделяют на 8 классов точности k :

$$4,0 - 2,5 - 1,5 - 1,0 - 0,5 - 0,2 - 0,1 - 0,05.$$

Наиболее часто встречаются два способа обозначений класса точности электроизмерительных приборов. Класс точности, указанный в виде числа, заключённого в кружок (γ), обозначает максимальную относительную погрешность результата измерения, выраженную в процентах. Приборная погрешность ΔX измеряемой величины X в этом случае есть: $\Delta X = x \cdot \gamma / 100$, где x – отсчёт физической величины по шкале прибора. Если класс точности γ указан просто числом, то он равен максимальной погрешности прибора, выраженной в процентах от максимального показания K шкалы прибора, по которой производится отсчёт. В этом случае приборная погрешность ΔX измеряемой величины X вычисляется по формуле $\Delta X = X_{max} \cdot \gamma / 100$, где X_{max} – величина выбранного предела измерения. Например, для амперметра с классом точности 0,5 при измерении силы тока на пределе 10А погрешность составляет $\Delta I = (10 \cdot 0,5 / 100) A = 5 \cdot 10^{-2} A$.

Если измерить этим прибором следующие силы токов $I_1 = 10A$, $I_2 = 5A$, $I_3 = 1A$, то погрешность во всех случаях одинакова $I = 5 \cdot 10^{-2} A$. Результаты измерений:

$$I_1 = (10,00 \pm 0,05) A;$$

$$I_2 = (5,00 \pm 0,05) A;$$

$$I_3 = (1,00 \pm 0,05) A.$$

Однако, относительные погрешности, характеризующие качество измерения, будут различны:

$$\delta_1 = \frac{\Delta I_1}{I_1} \cdot 100 \% = \frac{0,05}{10} \cdot 100 \% = 0,5 \%;$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta I_2}{I_2} \cdot 100 \% = \frac{0,05}{5} \cdot 100 \% = 1 \%;$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta I_3}{I_3} \cdot 100 \% = \frac{0,05}{1} \cdot 100 \% = 5 \%.$$

Относительная погрешность тем меньше, чем ближе измеряемая величина к пределу измерения. Поэтому рекомендуется выбирать предел таким образом, чтобы измеряемое значение находилось во второй половине шкалы прибора. При использовании стрелочных лабораторных приборов с зеркальной шкалой при считывании показаний необходимо совместить стрелку с ее зеркальным изображением. При таком положении глаза оказывается наименьшей ошибкой на параллакс.

В случае измерения физических величин сложными приборами и устройствами, приборная погрешность определяется по зависимостям, которые указаны в паспорте прибора. Например, при измерении тока, напряжения, сопротивления универсальными цифровыми приборами относительная погрешность измерения определяется формулами:

$$\delta = \pm \left(0,1 \pm 0,1 \frac{X_K}{X} \right) \% ; \quad (1.1)$$

$$\delta = \pm \left(0,05 \pm 0,05 \frac{X_K}{X} \right) \% . \quad (1.2)$$

Коэффициенты 0,1 и 0,05 определяются условиями измерения и конструктивными особенностями приборов. X_K – конечное значение установленного предела измерений (предел), X – показания прибора.

Выбор формулы (1.1) или (1.2) определяется измеряемой величиной и пределом измерения. Во всех случаях необходимо, для расчёта погрешности измерений такими приборами, обращаться к паспортным данным измерительного устройства.

Для цифрового измерительного прибора при неизвестном классе точности или паспортной формуле за оценку максимальной погрешности принимают единицу наименьшего разряда цифрового индикатора при однократном отсчёте или единицу последнего стабильно горящего (немигающего) разряда при непрерывно проводимых измерениях.

2. Случайная погрешность

Она проявляется в хаотическом (случайном) изменении результатов повторных наблюдений. Эти результаты отличаются один от другого и от истинного значения вследствие беспорядочных воздействий большого числа случайных неизбежных и неустраняемых факторов.

3. Промах

Эта погрешность возникает в результате неисправности измерительного прибора, небрежности или ослабления внимания экспериментатора. Промахи должны быть исключены из результатов наблюдений. Их легко выявить, поскольку соответствующие результаты заметно отличаются от остальных.

4. Погрешность единичного измерения

В случае, когда проводится только **одно измерение, в качестве его погрешности следует брать приборную погрешность**. Например, при измерении микрометром толщины проволоки $d = 0,15\text{мм}$ погрешность

составит половину цены деления прибора ($c=0,01$ мм), т. е., $\Delta d = \pm 0,005$ мм. При измерении температуры термометром с ценой деления шкалы 2°C погрешность составит $\Delta t = \pm 1^\circ\text{C}$. В случае измерения тока или напряжения определяется цена деления прибора согласно выбранному пределу, а затем погрешность измерения по классу точности прибора.

5. Погрешность табличных величин

Часто при определении результатов измерения необходимо привлекать табличные (справочные) величины. За погрешность табличной величины принимают **единицу в цифре последнего разряда** этой величины. Например, табличное значение удельного сопротивления алюминия при 0°C составляет $\rho_{\text{табл}} = 2,53 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. С учётом погрешности табличной величины можно записать:

$$\rho = (2,53 \pm 0,01) \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

Погрешность табличной величины определяется точностью, с которой производятся вычисления в рассматриваемой ситуации. Например, для числа π в различных случаях можно записать:

$$\pi = 3,14 \pm 0,01 \quad \text{или} \quad \pi = 3,14159 \pm 0,00001.$$

При записи погрешности, как правило, сохраняется одна значащая цифра, о чём подробнее говорится в п. 1.3.

1.2.2 Обработка результатов прямых измерений

При обработке результатов измерений, когда имеется N независимых повторных наблюдений (выборка объёмом N) физической величины X_i , где $i = 1, 2, 3 \dots, N$, используют метод расчёта средней абсолютной погрешности.

Для этого сначала вычисляют среднее арифметическое значение (среднее выборочное – СВ) физической величины. СВ физической величины используется для оценки истинного значения (математического ожидания) рассматриваемой величины. При условии, что все ошибки измерений можно считать случайными.

Пусть в результате наблюдений получено N различных значений измеряемой величины: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$. При обработке полученных результатов необходимо определить наиболее вероятное значение измеряемой величины, определить погрешность измерений. В данном случае, в качестве наиболее вероятного значения измеренной величины можно взять среднеарифметическое значение (среднее выборочное, СВ):

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (1.3)$$

Абсолютная погрешность отдельного измерения вычисляется, как абсолютная величина (модуль) отклонения данного результата наблюдений от ВС. Это делается по той причине, что отклонения результатов наблюдений от ВС с одинаковой вероятностью могут быть как отрицательными, так и положительными:

Напомним некоторые сведения из математики о позиционных системах счисления, к которым относится широко известная и наиболее часто используемая десятичная система счисления.

Позиционная система счисления – система счисления, в которой важную роль играет порядок следования числовых знаков – цифр. Во всех позиционных системах счисления имеется некоторое натуральное число $n \geq 2$, которое называют **основанием** системы счисления. Для записи чисел в системах счисления используют **знаки**, которые называют **цифрами**. **Количество цифр** в системе счисления определяется выбором основания. Основание n системы счисления определяет название данной системы, а именно: при $n = 2$ система называется двоичной, при $n = 3$ – троичной, ..., при $n = 10$ – десятичной и т. п. В частности, в **двоичной** системе счисления знаки основания (цифры), это натуральные числа 0 и 1; в **десятичной** (иногда говорят «десятеричной») системе счисления знаки основания, это натуральные числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; в шестнадцатеричной системе счисления знаки основания, это натуральные числа и заглавные буквы латинского алфавита 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. В каждой системе счисления цифры упорядочены в соответствии с их значениями: 1 больше 0, 2 больше 1 и т. д.

Далее мы будем обсуждать, в основном, десятичную систему счисления. Значение цифры в десятичной системе счисления зависит от её положения в числе и одна и та же цифра в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места, где она расположена.

Сначала на простых примерах поясним, как с помощью десяти цифр можно записать любое натуральное число. От количества цифр в числе зависит его название. Число, состоящее из одной цифры, называется однозначным. Наименьшее однозначное натуральное число – 1, наибольшее – 9. Для обозначения натурального числа, следующего за 9 используется комбинация из двух цифр 10, а само это число называется двузначным. Наименьшее двузначное число – 10. Добавляя далее по единице получим следующие двузначные числа вплоть до наибольшего двузначного – 99. Рассуждая аналогичным образом получим числа, записанные с помощью трёх, четырёх и более цифр, которые называются трёхзначными, четырёхзначными или многозначными. Наименьшее трёхзначное число – 100, наибольшее – 999.

Таким образом, значение конкретной цифры от разряда к разряду (от единиц к десяткам, от десятков к сотням) увеличивается в 10 раз.

Обобщая приведённые сведения сформулируем следующее правило. В десятичной системе счисления любое положительное число x представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа 10 которую принято записывать в порядке убывания степеней числа 10 слева направо (читаем слова слева направо), то есть в виде:

$$x = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\ + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \dots + a_{-(p-1)} \cdot 10^{-(p-1)} + a_{-p} \cdot 10^{-p}$$

где a_k – целые числа, называемые цифрами, удовлетворяющие условию $0 \leq a_k \leq 9$, r и p – натуральные числа.

Каждая цифра в записи многозначного числа занимает определённое место – позицию, которое называют **разрядом**. Каждые 10 единиц любого разряда образуют новую единицу более высокого разряда. Например, 10 единиц образуют 1 десяток, а 10 десятков образуют 1 сотню.

В позиционных системах счисления цифра 0 выполняет особую роль для обозначения **пропущенных** разрядов. Эта роль заключается в том, что при отсутствии 0 было бы нельзя понять, какой разряд означают любая ненулевая цифра левее первой справа. Например, в десятичном числе 8007 при отсутствии нулей получилась бы запись 87 и было бы непонятно, цифра 8 означает восемь десятков, сотен, тысяч и ещё чего-то, а с использованием нулей ясно, что в данном случае речь идёт о восьми тысячах.

Каждая степень 10^k в такой записи называется **весовым коэффициентом разряда**. **Старшинство разрядов и соответствующих им цифр определяется значением показателя k (номером разряда)**. Для ненулевого числа x начальные нули обычно опускаются («опущенные нули»), то есть записываю число, как правило таким образом, чтобы старшая цифра a_r была ненулевой (пишут 195, а не 000195, или не 00000000195). Наименьший разряд имеет самая правая цифра числа, а наибольший разряд – самая левая цифра числа.

Повсеместно используется упрощённая форма записи, называемая **разрядным составом числа**, в которой положительное число x записывают в виде последовательности его десятичных цифр, перечисляемых по убыванию старшинства разрядов слева направо:

$$\begin{aligned} x &= a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-(p-1)} a_{-p} \equiv \\ &\equiv a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + \\ &+ a_{-1} \cdot 10^{-1} + \dots + a_{-(p-1)} \cdot 10^{-(p-1)} + a_{-p} \cdot 10^{-p} \end{aligned}$$

Например, число две тысячи семьсот двадцать семь целых двадцать семь сотых представляется в десятичной системе счисления в виде:

$$2727,27 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$$

В этой форме записи запятая (в некоторых странах точка) отделяет целую часть числа от дробной. Видим, что одни и те же цифры в записи числа имеют разные значения в зависимости от того, в каком разряде они стоят.

Разряд единиц – это самый младший разряд в целой части числа, которым заканчивается любое целое положительное число. Разряд десятков – это разряд, который стоит перед разрядом единиц. Разряд сотен – это разряд, который стоит перед разрядом десятков. Цифра 5 означает 5 сотен, если она стоит на третьем месте от правого конца числа (в разряде сотен). И так далее. В приведённом выше числе содержится 2 тысячи, 7 сотен, 2 десятка, 7 единиц, 2 десятых, 7 сотых. Аналогично раскрывается

д) Число 0,0056 имеет две значащие цифры (здесь нули слева не являются значащими цифрами).

Правила записи результатов измерений.

Результат должен быть округлѐн таким образом, чтобы его **последняя значащая цифра заканчивалась в том же разряде, что и последняя значащая цифра погрешности. При записи погрешности, как правило, сохраняется одна значащая цифра.** Запись $\Delta X = \pm 0,7851 \text{ A}$ не имеет смысла, т. к. ошибаемся при измерении уже в десятых долях. Правильно – $\Delta X = 0,8 \text{ A}$. Иногда, если первая значащая цифра погрешности не более трёх, допускается запись погрешности с двумя значащими цифрам:

$$\Delta X = 0,13 \text{ мкм} \text{ или } \Delta X = 0,25 \text{ мкм}.$$

Погрешность при промежуточных вычислениях должна быть выражена не более, чем тремя значащими цифрами (ГОСТ Р 8.736-2011, Приложение Е).

Правила округления при записи числовых значений.

При округлении числовых значений следует пользоваться следующими правилами.

1. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5 либо равна 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на 1 (ГОСТ Р 8.736-2011, Приложение Е).
2. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых цифр остаѐтся без изменения. Например, если число 73,473 нужно округлить до сотых, то получится 73,47, так как $3 < 5$.
3. Считается, что любое округлѐнное число имеет предельную погрешность до половины последнего знака, если погрешность не указана специально. Например, если округлены табличные значения до чисел 1289, 1290, 1567, 1700, то все они имеют погрешность $\pm 0,5$. (Не путать с погрешностью чисто табличных величин). Поэтому запись числа должна всегда оканчиваться знаком, за которым шли отброшенные при округлении цифры. Например, число 6,209 при округлении до сотых записывают как 6,21, а не 6,210, что означает наличие погрешности только в десятитысячных, а не в тысячных.
4. При обработке результатов наблюдений промежуточные вычисления производят с числом значащих цифр на две больше, чем в окончательном результате (ГОСТ Р 8.736-2011, Приложение Е). Округления делают в конце всех вычислений.
5. Математические операции с округлѐнными числами следует производить с соблюдением следующих правил:

- а) при сложении, вычитании, умножении и делении результат не должен содержать значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из исходных чисел;
- б) при возведении в степень 2, 3 или $1/2$, $1/3$ результат должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании.

1.4 Построение графиков и таблиц

В большинстве случаев измерения физических величин проводятся неоднократно. Результаты измерений обычно заносятся в таблицы. Таблицы оформляются согласно требованиям ГОСТ. Таблица аккуратно чертится карандашом по линейке. **В заголовках таблиц дается символ измеряемой величины или ее полное название, единицы измерения в системе СИ.** Измеренные значения записываются в столбцах или строках таблицы только в системе СИ. В качестве примера дана таблица 1.2 для исследования вольтамперной характеристики.

Таблица 1.2

	№ п/п	U, В							
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
I, А	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
<I>, А									

В случае необходимости демонстрации зависимости одной физической величины от другой строят графики. При построении графиков необходимо выполнять следующие правила.

1. По оси X откладывают независимую переменную-аргумент, по оси Y – ту, которая определяется в результате опыта – функцию.
2. Масштаб по осям графика должен быть 1:1, 1:2, 1:5, либо отличающийся от указанного на десятичный множитель. Из цифр на осях откладывается только масштаб, здесь же указывается символ или название единицы измерения, рисунок 1.2.
3. Выбор начала координат проводится таким образом, чтобы полностью использовать всю площадь графика. Через экспериментальные точки проводят плавную кривую. Недопустимо (кроме специально оговорённых случаев) соединять экспериментальные точки ломаной кривой.

4. На графике по обеим осям отмечается погрешность измеренных значений (допустимый интервал). Если погрешность аргумента и функции в процессе опыта остаётся постоянной, то ее достаточно указать только для одной экспериментальной точки. Если в процессе измерения погрешность изменяется, то необходимо указать ее величину либо для каждой точки, либо для нескольких основных экспериментальных точек графика. В обоих случаях плавной линией соединяются экспериментальные точки вычисленные как средние значения аргумента и функции.

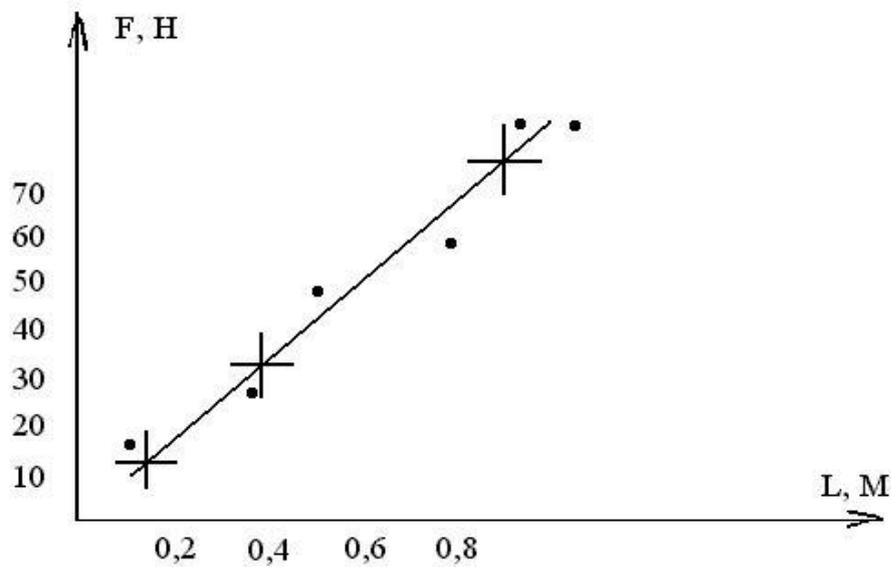


Рисунок 1.2- Примеры построения графиков

1.5 Погрешность косвенных измерений

1.5.1 Основные понятия и правила

Многие физические величины сложно или невозможно измерить прямыми методами. Например, сложно с помощью мер длины измерить размеры атома или расстояние от Земли до Марса. Поэтому прибегают к косвенным измерениям. Косвенное измерение – измерение, при котором искомое значение физической величины получают вычислением на основании зависимости ее от величин, измеряемых прямыми методами. Например, скорость равномерного прямолинейного движения материальной точки можно определить, если измерить S – расстояние, пройденное ею и t – время, за которое этот путь пройден: $v = s/t$. Ускорение свободного падения можно определить из соотношения для периода математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (1.9)$$

В данном случае необходимо прямым методом измерить длину маятника – l , T – период, длительность одного полного колебания, и воспользоваться табличной величиной – π . Все величины, измеренные прямо, обладают погрешностью, табличные величины тоже имеет погрешность. Следовательно, результат вычислений, основанный на математических операциях с величинами, обладающими погрешностью, также будет характеризоваться какой-то погрешностью. Физическая величина, найденная косвенным способом, характеризуется погрешностями, которые определяются различными способами.

Погрешность косвенно измеряемой величины зависит от погрешностей входящих в нее непосредственно (прямо) измеряемых величин и табличных значений, от вида расчётной формулы.

Сначала следует вывести формулу для вычисления погрешности, исходя из рабочей формулы.

Пусть рассматриваемая физическая величина Y является функцией нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Переменные $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ считаем значениями независимых СВ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Без доказательств приведём способ вывода формулы для вычисления погрешности и

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННО ИЗМЕРЯЕМОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ:

1. Находим среднее значение рассматриваемой физической величины Y , подставляя в рассматриваемое выражение средние выборочные СВ X_1, X_2, X_3, \dots , полученные прямыми измерениями, то есть:

$$\langle y \rangle = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle) \quad (1.10)$$

2. Записываем выражение для полного дифференциала рассматриваемой физической величины Y :

$$dy = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + f'_{x_3} dx_3 + \dots + f'_{x_n} dx_n \quad (1.11)$$

где $f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3}, \dots, f'_{x_n}$ – частные производные функции f по $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, соответственно. Если функция f является функцией одной переменной x , тогда имеем частный случай формулы (1.20): $dy = f'_x dx$.

3. В формуле (1.11) дифференциалы заменяем на приращения и учитывая, что погрешности **независимых** СВ складываются, получим формулу:

$$\Delta Y = |f'_{x_1} \Delta X_1| + |f'_{x_2} \Delta X_2| + |f'_{x_3} \Delta X_3| + \dots + |f'_{x_n} \Delta X_n| \quad (1.12)$$

4. Для относительной погрешности ε_y имеем:

$$\varepsilon_y = \Delta y / \langle y \rangle \quad (1.13)$$

В качестве примера применения сформулированного алгоритма вычислений погрешности рассмотрим косвенно измеряемую величина Y вычисляемую по формуле:

$$y = \frac{4\pi ab^3}{c^2 \sqrt{k}}, \quad (1.14)$$

где π, a, b, c, k – величины, измеряемые прямо, либо табличные величины. Их выборочные средние (или табличные значения) считаем найденными и подставляя их (1.14) находим среднее значение рассматриваемой физической величины Y .

Находим полный дифференциал функции $y = f(\pi, a, b, c, k)$, считая переменными все входящие в нее величины, включая π :

$$dy = \frac{4ab^3}{c^2 \sqrt{k}} d\pi + \frac{4\pi b^3}{c^2 \sqrt{k}} da + \frac{4a\pi(3b^2)}{c^2 \sqrt{k}} db + (-2) \frac{4a\pi b^3}{c^3 \sqrt{k}} dc + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{4a\pi b^3}{c^2 k \sqrt{k}} dk.$$

Заменяем символы “ d ” на “ Δ ” и, в соответствии с (1.12) получаем:

$$\Delta y = \frac{4ab^3}{c^2 \sqrt{k}} \Delta\pi + \frac{4\pi b^3}{c^2 \sqrt{k}} \Delta a + \frac{12a\pi b^2}{c^2 \sqrt{k}} \Delta b + \frac{8a\pi b^3}{c^3 \sqrt{k}} \Delta c + \frac{2a\pi b^3}{c^2 k \sqrt{k}} \Delta k \quad (1.15)$$

Разделив (1.15) на выражение (1.14), получим:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta b}{b} + 2 \frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{2} \frac{\Delta k}{k}$$

Имеется и более простой вариант получения этого результата. Правда, он годится только в том случае, если рабочая формула представляет только произведения и частные от деления входящих в неё величин.

Выражение (1.14) следует прологарифмировать.

$$\ln Y = \ln 4 + \ln \pi + \ln a + 3 \ln b - 2 \ln c - \frac{1}{2} \ln k$$

Затем полученное выражение продифференцируют, считая табличные величины и величины измеряемые прямо переменными.

$$\frac{dY}{Y} = 0 + \frac{d\pi}{\pi} + \frac{da}{a} + 3 \frac{db}{b} - 2 \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dk}{k}$$

Заменяют дифференциалы величин на их приращения.

Для того, чтобы получить выражение относительной погрешности $\varepsilon_y = \Delta Y / \langle Y \rangle$, необходимо взять все относительные погрешности со знаком плюс (заменить знак « $-$ » на « $+$ »).

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta b}{b} + 2 \frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{2} \frac{\Delta k}{k} \quad (1.16)$$

Для расчёта в полученную формулу необходимо подставить значения абсолютных погрешностей прямо измеренных и табличных величин ($\Delta\pi, \Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta k$). В случае многократных измерений для вычисления ε используют средние значения величин. Определив относительную

погрешность, можно вычислить абсолютную погрешность косвенно измеряемой величины:

$$\Delta Y = \varepsilon_y \cdot \langle Y \rangle \quad (1.17)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta b}{b} + 2 \frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{2} \frac{\Delta k}{k}$$

1.5.2 Обработка результатов косвенных измерений при невоспроизводимых условиях

Следует отметить, что иногда невозможно обеспечить проведение косвенных измерений при одних и тех же условиях. Такая ситуация возникает, в частности, если процесс измерений связан с полным или частичным разрушением или уничтожением объекта измерений, а также, если невозможно поддержание одних и тех же условий в процессе измерений. Такие условия процесса измерений называют *невоспроизводимыми*. Например, в опытах по определению скорости пули при её столкновении с массивным препятствием (мишенью), пуля застревает в мишени и сильно деформируется. Её повторное использование для процесса измерений поэтому невозможно.

Если косвенные измерения проводятся в невоспроизводимых условиях, то значения косвенно измеряемой величины (функции прямо измеряемых величин), вычисляются для каждого отдельного измерения, а средние значения и погрешности вычисляются так же как это делается для прямых измерений (см. [8] – Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. – М.: Наука, 1970. Стр. 58-70).

Поясним сказанное на примере вычисления погрешностей скорости пули при помощи баллистического маятника. Баллистический маятник – это массивное тело с массой M , (далее будем использовать термин мишень), подвешенное на длинных лёгких нитях. Размеры мишени существенно меньше длины нитей, поэтому маятник можно считать математическим. С одной стороны мишень покрыта слоем пластилина. В неподвижную и находящуюся в состоянии равновесия мишень стреляют из «пушки» со стороны, покрытой пластилином. Летящая горизонтально и перпендикулярно плоскости мишени пуля с массой m попадает в мишень и маятник отклоняется из положения равновесия на некоторый угол α , мишень поднимается при этом на некоторую высоту h . Из законов сохранения импульса и энергии легко установить, что скорость пули v может быть найдена по формуле:

$$v = ((M + m)/m) \sqrt{2gh} = ((M + m)/m) 2\sqrt{gl} \sin(\alpha/2),$$

где g – ускорение свободного падения, α – угол отклонения маятника от вертикали. Как уже отмечено выше, застрявшую в мишени пулю повторно использовать нельзя. При проведении серии опытов необходимо

использовать другие пули, массы m_i , $i=1,2,\dots,n$ которых и скорости v_i , $i=1,2,\dots,n$ при столкновении с мишенью отличаются друг от друга. В этой связи вычисления погрешностей выполняем по указанной выше процедуре.

А именно:

- вычисляем скорости $v_i = ((M + m_i)/m_i)2\sqrt{gl} \sin(\alpha_i/2)$ (чаще всего массой пули в числителе дроби $(M + m_i)/m_i$ можно пренебречь);
- находим среднее значение скорости в рассматриваемой серии $\langle v \rangle = \sum_i v_i / n$;
- по формулам: (1.4) – погрешности отдельных измерений; (1.5) – случайную погрешность;
- приборную (инструментальную) погрешность при невоспроизводимых условиях не учитывают, то есть $\Delta v = \Delta v_{cl}$.

Описанным выше методом осуществляется обработка результатов косвенных невоспроизводимых измерений в лабораторных работах настоящего сборника № 6 «Определение отношения теплоёмкостей газов по методу Клемана и Дезорма» и № 7 «Определение коэффициента вязкости жидкости с помощью капиллярного вискозиметра и методом Стокса» (в части, касающейся метода Стокса).

1.6. Порядок выполнения округления при обработке результатов.

В заключение в качестве обобщения приведём последовательность и порядок действий при округлении результатов измерений.

При прямых измерениях физических величин.

1. Выполнить **предварительную** запись результата **прямого измерения** в виде $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ и вынести за общую скобку одинаковые порядки среднего и погрешности, т. е. множитель вида 10^k , где k – целое число. Числа в скобках переписать в десятичном виде с использованием запятой, убрав тем самым оставшиеся порядковые множители. Общий порядок и единицы измерения величины приводят за скобками.

2. Округлить в скобках число, соответствующее погрешности в соответствии с ГОСТ Р 8.736-2011. При округлении используют правило п. Е.5 ГОСТ Р 8.736-2011.

3. Округлить в скобках число, соответствующее среднему значению: последними справа оставляют цифры тех разрядов, которые сохранились в погрешности после ее округления.

4. Окончательно записать $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ с учётом выполненных округлений. **Общий порядок и единицы измерения величины приводят за скобками – стандартная форма записи.**

При косвенных измерениях физических величин.

1. При выполнении обработки результатов **косвенно измеряемых величин** в расчётах **предварительной записи** их средних значений и погрешностей использовать результаты предварительной записи

результатов прямых измерений. При этом производить окончательную запись результатов прямых измерений не нужно. Окончательно **результат косвенных измерений записать в виде: $f(x, y, \dots) = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \dots) \pm \Delta f$** в соответствие с Приложением Е ГОСТ Р 8.736-2011. Общий порядок и единицы измерения величины приводят за скобками.

Примеры округления и записи окончательных результатов измерений в стандартной форме приведены в таблице.

Таблица Запись окончательного результата измерения.

Предварительная запись	Стандартная форма записи
$U = (528,112 \pm 152,4) \cdot 10^1 \text{ мВ}$	$U = (5,3 \pm 1,5) \cdot 10^3 \text{ мВ}$
$I = (0,418 \pm 0,042) \text{ А}$	$I = (0,42 \pm 0,04) \text{ А}$
$R = (0,03643 \pm 0,00021) \text{ Ом}$	$R = (36,43 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$
$f = (125,3 \pm 41) \text{ Гц}$	$f = (0,13 \pm 0,04) \cdot 10^3 \text{ Гц}$
$t = (8,72 \cdot 10^2 \pm 30) \cdot 10^{-1} \text{ мс}$	$t = (87 \pm 3) \text{ мс}$

1.7 Определение плотности твёрдых тел правильной геометрической формы

1.7.1 Основные понятия и закономерности

Плотностью ρ однородного тела называют отношение массы m этого тела к его объёму V . Если тело неоднородно, то отношение массы тела к его объёму является средней плотностью тела. Если тело имеет форму цилиндра с диаметром основания D и высотой h , то:

$$V = h \frac{\pi D^2}{4} \text{ м}^3, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{h\pi D^2} \text{ кг/м}^3.$$

где m – масса тела определяется взвешиванием на технических весах; V – объём тела, находится посредством измерения его линейных размеров штангенциркулем и микрометром.

1.7.2 Порядок выполнения работы

Измерения линейных размеров исследуемых тел произвести **двумя инструментами**: штангенциркулем и микрометром и записать результаты измерений в таблицы 1.3 и 1.4. (для измерений **каждым инструментом отдельно**). Измерений осуществлять в соответствии с приведёнными ниже указаниями.

Примечание. Прежде, чем пользоваться микрометром, необходимо, чтобы нули шкал (барабана и миллиметровой шкалы) совпадали.

Основным источником ошибок при пользовании микрометром является неравномерность нажатия винта на измеряемый предмет. Для устранения этого недостатка современные микрометры снабжаются специальным приспособлением (трещоткой), не допускающим слишком сильного нажатия (деформации тела).

1. Определить высоту цилиндра. Измерения повторить не менее 5-ти раз, каждый раз поворачивая цилиндр.

2. Записать данные измерений и погрешность прибора в таблицу 1.3

3. Вычислить выборочное среднее (ВС) значение высоты цилиндра по формуле (1.3), случайную погрешность по формуле (1.5), полную погрешность по формуле (1.7) и относительную погрешности по формуле (1.8).

Таблица 1.3

№ изм.	h_i , мм	$\langle h \rangle$, мм	Δh_i , мм	$\Delta h_{сл}$ мм	$\Delta h_{пр}$, мм	Δh , мм	ε_1 , %
1							
2							
3							
4							
5							

4. Запишите результат в виде: $h = \langle h \rangle \pm \Delta h$ мм.

5. Измерить диаметр цилиндра D . Повторить измерения не менее 5-ти раз.

6. Результаты измерений и погрешность прибора занести в таблицу 1.4.

7. Вычислить выборочное среднее (ВС) значение диаметра цилиндра по формуле (1.3), случайную погрешность по формуле (1.5), полную погрешность по формуле (1.7) и относительную погрешности по формуле (1.8).

Таблица 1.4

№ изм.	D_i , мм	$\langle D \rangle$, мм	ΔD_i , мм	$\Delta D_{сл}$, мм	$\Delta D_{пр}$, мм	ΔD , мм	ε_2 , %
1							
2							
3							
4							
5							

8. Запишите результат в виде: $D = \langle D \rangle \pm \Delta D$ мм.

В таблицах 1.3 и 1.4 использованы обозначения:

Δh_i и ΔD_i – погрешности отдельных измерений;

$\Delta h_{сл}$ и $\Delta D_{сл}$ – случайные погрешности;

$\Delta h_{пр}$ и $\Delta D_{пр}$ – погрешность приборная, инструментальная;

$\varepsilon_1 = (\Delta h / \langle h \rangle) \times 100\%$; $\varepsilon_2 = (\Delta D / \langle D \rangle) \times 100\%$.

9. Измерить массу цилиндра. Погрешность измерения массы Δm вычисляется по таблице 1.5.

10. По формуле $\rho = m/V = 4m/\pi D^2 h$ вычислить среднее значение плотности тела.

11. Выведите формулу и вычислите относительную погрешность плотности, и используя её вычислите полную погрешность плотности и запишите окончательный результат в виде:

$$\rho = \langle \rho \rangle \pm \Delta\rho \text{ (кг/м}^3\text{)}, \varepsilon_3 = \Delta\rho / \langle \rho \rangle \times 100\%.$$

Таблица 1.5

Погрешности гирь		Погрешности гирь	
Номинальное значение	Погрешность	Номинальное значение	Погрешность
10 мг; 20 мг, 50 мг, 100 мг	± 1 мг	5 г	± 8 мг
200 мг	± 2 мг	10 г	± 12 мг
500 мг	± 3 мг	20 г	± 20 мг
1 г	± 4 мг	50 г	± 30 мг
2 г	± 6 мг	100 г	± 40 мг

1.8 Содержание отчёта

Отчёт должен содержать цель работы, перечень используемых приборов с указанием приборной погрешности, таблицы с результатами наблюдений и расчётов. Графики зависимостей одних физических величин от других должны быть построены в строгом соответствии с требованиями пункта 1.5 на миллиметровой бумаге. На графиках необходимо указать погрешности измерений. В заключение отчёта необходимо провести краткий анализ результатов.

1.9 Контрольные вопросы

1. Что понимают под выборочным средним, под результатом измерения?
2. Как рассчитывают приборную погрешность? Что понимают под классом точности прибора?
3. Как определяются приборные погрешности, когда на приборе класс точности указан числом, обведённым в кружок? Как определяются приборные погрешности, когда на приборе класс точности указан просто числом?
4. Как складываются друг с другом случайные и приборные погрешности?
5. Чем отличается число от цифры? Что называется разрядом числа? Что означает запись числа в стандартном виде? Приведите примеры.
6. Какие цифры называются значащими? Считаются ли значащими нули, стоящие в середине числа? Какие нули считаются значащими, стоящие в конце числа или стоящие в начале числа? Сформулируйте правила подсчёта значащих цифр. Приведите примеры.
7. Каким образом определяется погрешность прямых измерений? В каком виде записывается окончательный результат измерения и каков смысл такой записи?

8. Что называется ценой деления, приборной погрешностью прибора, точностью прибора? Как можно определить эти величины? Чему равна приборная погрешность инструментов, которыми Вы пользовались при выполнении лабораторной работы 1?

9. Какие погрешности называют систематическими, случайными? Как они возникают?

10. Какие измерения называются прямыми, косвенными? Как определяется полная и относительная погрешности этих измерений? Как правильно записывается результат этих измерений? Приведите примеры.

11. Как проводятся измерения приборами, снабжёнными нониусом? Какова была приборная погрешность штангенциркуля и микрометра, которыми Вы пользовались при выполнении лабораторной работы 1?

12. Что такое класс точности прибора? Сколько и какие классы точности электроизмерительных приборов установлены ГОСТом? Как вычисляется приборная погрешность электроизмерительных приборов (амперметра, вольтметра)?

13. Каким образом определяется полная погрешность прямых измерений? В каком виде записывается окончательный результат измерения и каков смысл такой записи?

1.10 Техника безопасности

1. При работе с микрометром и штангенциркулем измеряемые предметы держать над столом.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2(1.5) ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

Цель работы: изучение законов динамики вращательного движения и их экспериментальная проверка.

2.1 Основные понятия и закономерности

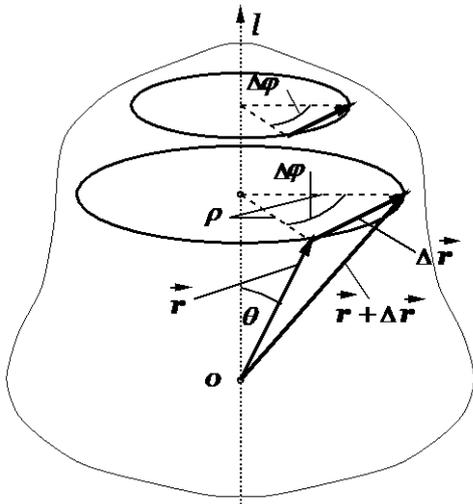


Рисунок 2.1

равную массе данного тела, расположенной в центре масс рассматриваемой системы (твёрдого тела).

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называют такое его движение, при котором все точки этого тела движутся по окружностям (различным), центры которых расположены на одной неподвижной прямой линии, называемой осью вращения l . Ось вращения перпендикулярна ко всем окружностям, по которым движутся указанные выше точки (см. рисунок 2.1).

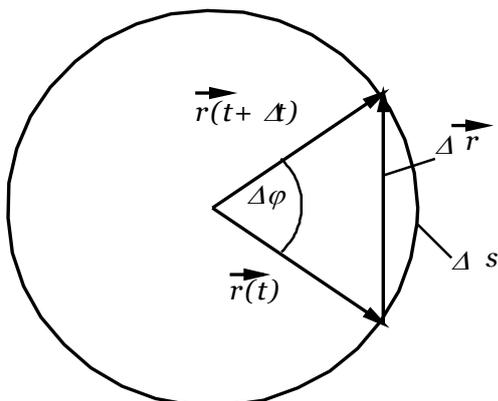


Рисунок 2.2

вращения и рассматриваемые материальные точки, за некоторый промежуток времени Δt . Этот угол поворота $\Delta\varphi$, однако, не позволяет найти основную характеристику движения материальной точки – её вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ за конечный промежуток времени Δt , который направлен вдоль хорды окружности, соединяющей начальную и конечную точки (см.

Можно показать, что произвольное движение твёрдого тела можно представить в виде наложения двух простейших его (твёрдого тела) движений: 1) поступательного движения твёрдого тела; 2) вращательного движения твёрдого тела вокруг мгновенной (изменяющей своё положение в пространстве) оси.

При поступательном движении все точки этого тела совершают движение по одинаковым траекториям и, поэтому такое движение можно свести к изучению движения одной точки, например материальной точки, имеющей массу

Можно ввести такие переменные для описания вращательного движения, которые были бы применимы ко всем точкам сразу и свели бы описание вращательного движения твёрдого тела к вращательному движению одной материальной точки. Легко заметить, что одинаковым для всех точек твёрдого тела является угол поворота $\Delta\varphi$ прямых, проходящих через центр окружностей

рисунок 2.2), поскольку, как известно из геометрии, произведение центрального угла $\Delta\varphi$ на длину радиуса окружности l равно длине дуги окружности Δs , опирающейся на начальную и конечную точки (см. рисунок 2.3), причём $\Delta s \neq \Delta r$ (более точно, $\Delta s > \Delta r$). Кроме того, $\Delta\varphi$ – скалярная величина, а нам нужно с её помощью получить вектор $\Delta\vec{r}$. Выйти из положения можно, если ввести вектор элементарного угла поворота $d\vec{\varphi}$ (коротко элементарного поворота).

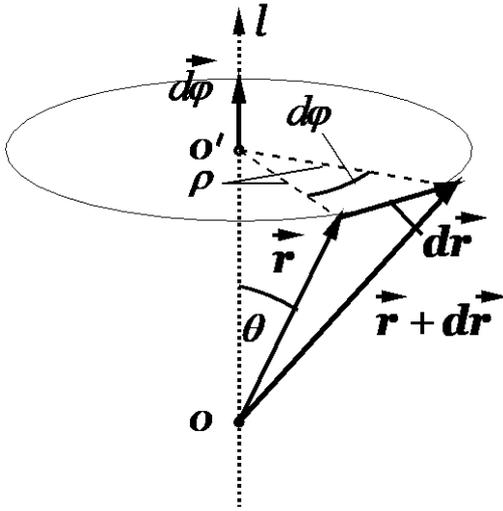


Рисунок 2.3

Вектор $d\vec{\varphi}$ имеет длину $d\varphi$ и направлен вдоль оси вращения l так, чтобы с конца этого вектора вращение рассматриваемой точки наблюдалось в заданном направлении (против часовой стрелки), как это показано на рисунке 2.3. Вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$

при таком определении связан с векторами $d\vec{\varphi}$ и \vec{r} соотношением:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (2.1)$$

где знаком « \times » обозначено векторное произведение векторов $d\vec{\varphi}$ и \vec{r} .

Действительно, по определению, для модуля векторного произведения двух векторов $|d\vec{\varphi} \times \vec{r}|$ имеем:

$$|d\vec{\varphi} \times \vec{r}| = d\varphi \cdot r \sin\theta = \rho d\varphi = ds = dr, \quad (2.2)$$

где $\rho = r \sin\theta$ и учтена эквивалентность величин ds и dr при $\Delta t \rightarrow 0$.

Видим также (рисунок 2.3), что направление вектора $d\vec{r}$ на рисунке совпадает с направлением вектора, определяемого выражением (2.1).

Введённый таким образом элементарный угол поворота $d\vec{\varphi}$ позволяет найти линейные характеристики движения материальных точек. Через вектор $d\vec{\varphi}$ далее мы также введём и другие векторные характеристики вращательного движения, а именно векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$. Отметим, что вектор $d\vec{\varphi}$ обладает свойством линейности (по отношению к операции сложения векторов). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим элементарный поворот, который является линейной комбинацией двух элементарных поворотов $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, совершённых твёрдым телом (возможно, вокруг разных осей, проходящих через неподвижную точку O). В этом случае произвольная точка твёрдого тела имеет результирующий элементарный вектор перемещения $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2$, где $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ элементарные перемещения при указанных выше поворотах:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} = (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (2.3)$$

откуда следует, что и результирующий вектор угла поворота $d\vec{\varphi}$ равен сумме элементарных углов поворота $d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$.

Это означает, что для каждой точки рассматриваемого твёрдого тела, результирующий элементарный поворот вокруг оси, направленной вдоль вектора $d\vec{\varphi}$ (и проходящий через точку O), будет эквивалентен двум последовательным элементарным поворотам $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, совершённых твёрдым телом вокруг осей, направленных вдоль эти векторов (и проходящих через точку O).

Если воспользоваться определением дифференциалов вектор-функций $d\vec{r} = (d\vec{r}/dt) \cdot dt$ и $d\vec{\varphi} = (d\vec{\varphi}/dt) \cdot dt$ и подставить эти дифференциалы в формулу (3.1), то получим:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (d\vec{r}/dt) \cdot dt = \underbrace{\{(d\vec{\varphi}/dt) \cdot dt\}}_{d\vec{\varphi}} \times \vec{r} = [(d\vec{\varphi}/dt) \times \vec{r}] \cdot dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow (d\vec{r}/dt) = \underbrace{(d\vec{\varphi}/dt)}_{\vec{\omega}} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (2.4)$$

и, с учётом определения вектора скорости материальной точки $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, имеем:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) введена новая величина – **вектор угловой скорости** $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d(\varphi \vec{e}_1)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_1 = \omega \cdot \vec{e}_1. \quad (2.6)$$

Из последней формулы следует, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен также вдоль оси вращения и совпадает по направлению с этой осью и вектором элементарного поворота $d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{e}_1$. Измеряется угловая скорость в rad/c .

В общем случае вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ зависит от времени и изменение этого вектора во времени описывает производная по времени $(d\vec{\omega}/dt)$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \vec{e}_1)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_1 = \pm \varepsilon \vec{e}_1, \quad (2.7)$$

где использовано обозначение модуля вектора $|\vec{\varepsilon}| = |d\vec{\omega}/dt| = \varepsilon$.

Видим, что **вектор углового ускорения** $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения и, либо совпадает с нею по направлению ($d\omega/dt > 0$), либо имеет противоположное с нею по направлению ($d\omega/dt < 0$). Измеряется угловое ускорение в rad/c^2 .

Установим связи между угловыми и линейными кинематическими характеристиками.

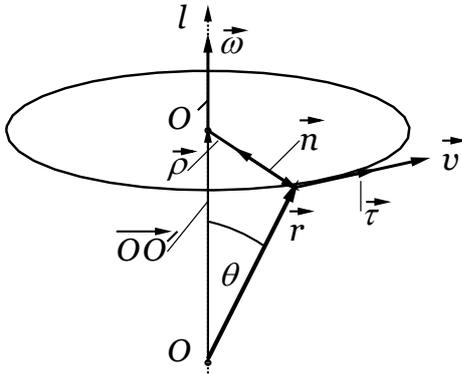


Рисунок 2.4

Одна из формул, связывающих эти величины, уже имеется – это формула (2.5). Из неё следует, что вектор скорости (линейной) любой материальной точки определяется вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ вращательного движения твёрдого тела и радиус вектором рассматриваемой материальной точки \vec{r} . Из определения векторного произведения векторов следует, что векторы $\vec{\omega}$, \vec{r} и \vec{v} образуют *правую тройку* векторов (в указанном порядке), а их взаимное расположение показано на рисунке

2.4.

В формуле (2.5) можно сделать замену радиус-вектора \vec{r} рассматриваемой материальной точки на вспомогательный вектор $\vec{\rho}$, начало которого совпадает с центром окружности, по которой совершает своё движение рассматриваемая материальная точка, а конец совпадает с положением этой материальной точки. Этот вектор $\vec{\rho}$ имеет, таким образом, длину, равную радиусу окружности (то есть расстоянию от данной материальной точки до оси вращения).

Для любой материальной точки (см. рисунок 2.4) имеет место равенство:

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{\rho}. \quad (2.8)$$

причём всегда справедливы соотношения $\overline{OO'} \parallel \vec{\omega}$ и $\vec{\rho} \perp \vec{\omega}$.

Следовательно, можем преобразовать формулу (2.5):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\overline{OO'} + \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \overline{OO'} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (2.9)$$

откуда следует, что длины перемножаемых векторов связаны простым и хорошо известным из школьного курса физики соотношением для вращательного движения материальной точки:

$$v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega} \times \vec{\rho}| = \omega \cdot \rho \cdot \sin(\pi/2) = \omega \cdot \rho. \quad (2.10)$$

Установим, как связано ускорение (линейное) произвольной материальной точки с другими кинематическими характеристиками. Будем исходить из определения вектора ускорения и учтём формулы (2.5) и (2.8):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + [\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})] = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + (-\vec{\rho})\omega^2 = \varepsilon\rho\vec{\tau} + \rho\omega^2\vec{n}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В процессе преобразований учтено, что $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \varepsilon \rho \vec{\tau}$ (см. пояснения к (2.9) и рисунок 2.4), векторное тождество $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ и равенство $\vec{\rho} = -\rho \vec{n}$ (см. рисунок 2.4).

Видим, что вектор линейного ускорения \vec{a} можно представить в виде:

$$\vec{a} = \varepsilon \rho \vec{\tau} + \rho \omega^2 \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (2.12)$$

где введены обозначения $\vec{a}_\tau = \varepsilon \rho \vec{\tau}$, $\vec{a}_n = \rho \omega^2 \vec{n}$.

Полученное выражение (2.12) можно немного преобразовать:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \varepsilon \rho \vec{\tau} + \rho \omega^2 \vec{n} = \rho \frac{d\omega}{dt} \vec{\tau} + \rho \frac{v^2}{\rho^2} \vec{n} = \\ &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\rho} \right) \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из полученных выражений следует, что, вектор ускорения можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов \vec{a}_τ и \vec{a}_n , которые направлены, соответственно, по касательной и нормали к траектории в рассматриваемой точке, что находится в полном соответствии с результатами, получаемыми при рассмотрении кинематики произвольного движения материальной точки. В данном случае траектория окружность и, поэтому, радиус кривизны постоянен и равен ρ .

Из формулы (2.12) с учётом взаимной перпендикулярности векторов нормального и тангенциального ускорений находим:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.14)$$

Эта формула полезна тем, что позволяет вычислить модуль вектора ускорения (линейного) через угловые кинематические характеристики.

Для описания динамики вращательного движения необходимо ввести понятия момента импульса и момента сил.

Во избежание тавтологий начало координат O в приводимых ниже определениях называется центром O .

Моментом импульса материальной точки, имеющей массу m , импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ и радиус-вектор \vec{r} , относительно центра O называют вектор \vec{L}_O , определяемый выражением:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.15)$$

Как следует из определения векторного произведения векторов, вектор \vec{L}_O перпендикулярен к векторам \vec{r} и \vec{p} , и данные векторы образуют правую тройку векторов в порядке \vec{r} , \vec{p} , \vec{L}_O . Измеряется момент импульса в $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$.

Моментом импульса системы N материальных точек, имеющих массы m_i , $i=1,2,\dots,N$, импульсы $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, $i=1,2,\dots,N$ и радиус векторы \vec{r}_i , $i=1,2,\dots,N$, относительно центра O называют вектор \vec{L}_O , равный сумме моментов импульсов \vec{L}_{O_i} , $i=1,2,\dots,N$ всех материальных точек этой системы относительно указанного центра O , то есть вектор, определяемый выражением:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O_i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (2.16)$$

Для выяснения причины изменения момента импульса системы необходимо ввести понятие **момента силы \vec{F}** .

Моментом силы \vec{F} , действующей на материальную точку с радиус-вектором \vec{r} , относительно центра O , называют вектор \vec{M}_O , определяемый выражением:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.17)$$

Вектор \vec{M}_O перпендикулярен к векторам \vec{r} и \vec{F} , и данные векторы образуют правую тройку векторов в порядке \vec{r} , \vec{F} , \vec{M}_O . Измеряется момент силы в $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$.

Дифференцирование (2.16) по времени даёт:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i [(\overbrace{d\vec{r}_i/dt}^{\vec{v}_i}) \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times (\overbrace{d\vec{p}_i/dt}^{\vec{F}_i})] = \\ &= \sum_i [\vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В (2.18) учтена параллельность векторов \vec{v}_i и \vec{p}_i .

Как и ранее, представим силу, действующую на i -ую частицу в виде суммы внутренней и внешней сил, то есть $\vec{F}_i = \vec{f}_i + \vec{F}'_i = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}'_i$, где $\vec{f}_i = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik}$ равнодействующая всех внутренних сил, действующих на рассматриваемую материальную точку со стороны других точек, входящих в эту систему, а \vec{F}'_i - равнодействующая всех внешних сил, действующих на рассматриваемую материальную точку. Тогда из (2.18) следует:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times (\sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}'_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}) + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}'_i = \\ &= \sum_i \sum_{k \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}) + \vec{M}'_O. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В (2.19) введено обозначение $\vec{M}'_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}'_i$ для суммарного момента всех внешних сил, действующих на систему.

Легко убедиться, что первое слагаемое в последнем равенстве выражения (2.19) равно нуль-вектору. Действительно, с учётом определения момента сил, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{k \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}) &= \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{M}_{O ik} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{M}_{O ik} + \sum_k \sum_{i \neq k} \vec{M}_{O ik} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} (\vec{M}_{O ik} + \vec{M}_{O ki}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

С учётом 3-го закона Ньютона ($\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$) парные суммы дают:

$$\vec{M}_{O ik} + \vec{M}_{O ki} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{f}_{ki} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{f}_{ik} = \vec{0}. \quad (2.21)$$

А поскольку силы взаимодействия частиц направлены вдоль линии, на которой расположены сами частицы, то есть $(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \parallel \vec{f}_{ik}$, то все пары слагаемых в (2.20) дают нулевые векторы.

В итоге получаем **закон изменения момента импульса системы:**

скорость изменения момента импульса системы относительно некоторого центра O , равна суммарному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно указанного центра O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}'_O = \vec{M}_O. \quad (2.22)$$

В последнем равенстве выражения (2.22) штрих у момента внешних сил опущен, ввиду отсутствия необходимости различать в этом выражении моменты внутренних и внешних сил.

Из полученного выражения (2.22) для замкнутой системы (внешние силы отсутствуют) суммарный момент внешних сил относительно любого центра O равен нулю. Отсюда приходим к **закону сохранения момента импульса:**

момент импульса замкнутой системы сохраняется.

Наряду с понятием момента импульса и момента сил относительно центра O используются понятия **момента импульса относительно оси** и **момента сил относительно оси**.

Рассмотрим произвольную ось l , проходящую через центр O , относительно которого определены момент импульса рассматриваемой системы \vec{L}_O и момент действующих на неё сил \vec{M}_O . Проекции векторов \vec{L}_O и \vec{M}_O на указанную ось l и называют **моментом импульса относительно оси l** и **моментом сил относительно оси l** , соответственно, то есть:

$$L_l = \text{Pr}_l \vec{L}_O = L_O \cos(\vec{L}_O, \hat{l}) = L_O \cos \varphi; \quad \varphi = (\vec{L}_O, \hat{l}) \quad (2.23)$$

$$M_l = \text{Pr}_l \vec{M}_O = M_O \cos(\vec{M}_O, \hat{l}) = M_O \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = (\vec{M}_O, \hat{l}).$$

Проекция момента импульса на ось l и момента сил на ось l , как это следует из определения, являются величинами скалярными

Использование введённых выше моментов относительно оси основано на том факте, что равные векторы имеют равные проекции на любую ось, в том числе и на указанную ось l . В частности, закон изменения импульса для момента импульса относительно оси l имеет вид:

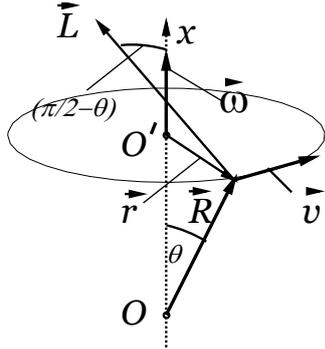


Рисунок 2.5

$$\frac{dL_l}{dt} = M_l.$$

Выражение (2.24) аналогично 2-му закону Ньютона, при условии, что роль импульса выполняет момент импульса, а роль силы – момент силы. При вращательном движении вокруг некоторой оси аналогом массы является другая величина – момент инерции рассматриваемого объекта относительно оси, определение которого приведено ниже.

Описание произвольного движения твёрдого тела по сравнению с произвольным движением материальной точки значительно усложняется и приводит к необходимости введения новых математических объектов – тензоров. Поэтому мы рассмотрим простейший для анализа случай – вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Под осью здесь всегда будет пониматься неподвижная ось x . В данном случае все материальные точки, из которых состоит рассматриваемое твёрдое тело, движутся по окружностям с центрами, расположенными на оси вращения. При этом векторы скоростей всех указанных точек направлены по касательным к упомянутым окружностям (рисунок 2.5). Если выбрать начало отсчёта на оси вращения, для момента импульса i -ой материальной точки относительно оси вращения имеем:

$$L_{i,x} = \text{Pr}_x (\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i) = |\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i| \cos(\pi/2 - \theta_i) =$$

$$= m_i (R_i v_i \sin(\pi/2)) \sin \theta_i = m_i \overbrace{(R_i \sin \theta_i)}^{r_i} v_i = m_i r_i^2 \omega, \quad (2.25)$$

а для всего тела:

$$L_x = \sum_i L_{i,x} = \omega \sum_i m_i r_i^2. \quad (2.26)$$

С учётом полученных выражений введём определения.

Моментом инерции материальной точки относительно оси l называют произведение массы этой точки m на квадрат её расстояния l до оси, то есть $I_l = m r^2$. Измеряется момент инерции в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Моментом инерции твёрдого тела относительно оси l называют сумму моментов инерции всех материальных точек, из которых состоит это тело, относительно указанной оси, то есть $I_l = \sum_i m_i r_i^2$.

При вычислении момента инерции конкретных тел знаки сумм заменяются интегралами (совершается стандартная процедура предельного перехода к мелкости разбиения, стремящейся к нулю). При этом масса элементарного объёма dm , например, в декартовой прямоугольной системе координат, есть произведение плотности вещества $\rho(x, y, z)$ на элемент объёма dV . В результате момент инерции тела I_l относительно некоторой оси вычисляется по формуле:

$$I_l = \int_V \rho(x, y, z) r^2(x, y, z) dV. \quad (2.27)$$

Таким образом, для случая вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси X закон изменения момента импульса (4.1.10) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(I_x \omega_x) = M_x \Rightarrow I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x \Rightarrow I_x \varepsilon_x = M_x$$

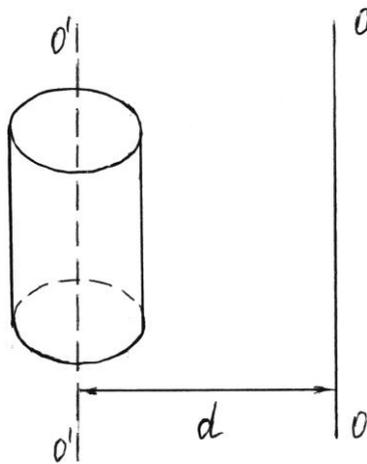


Рисунок 2.6

Нижние индексы, указывающие на ось, относительно которой вычисляются входящие в выражение (2.28) величины, часто опускают, если отсутствует опасность перепутать эту ось с какой-либо другой осью. При этом, однако, нужно помнить, что ε_x и M_x являются **проекциями** соответствующих векторов и могут быть и **положительными**, и **отрицательными**! Полученная формула в виде $I_x \varepsilon_x = M_x$ называется основным

законом динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Данное уравнение аналогично 2-му закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ (проекция на ось x : $ma_x = F_x$) для поступательного движения твёрдого тела. А именно, при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси имеют место следующие аналогии по отношению к поступательному движению твёрдого тела (разумеется, с учётом формы записи):

- момент инерции играет роль массы тела;
- угловое ускорение выступает в роли линейного ускорения;
- момент силы выступает в роли силы;
- момент импульса выступает в роли импульса.

Момент инерции тела зависит от формы тела, его размеров и расположения тела относительно оси вращения.

Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения, параллельной некоторой оси, относительно которой момент инерции известен, определяется по теореме Штейнера. Например, если известен момент инерции тела I_0 относительно оси $O'O'$, проходящей через центр масс тела, то момент инерции тела I относительно произвольной оси OO , параллельной оси $O'O'$, равен сумме момента инерции относительно оси $O'O'$, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между параллельными осями (рисунок 2.6).

$$I = I_0 + md^2. \quad (2.29)$$

Роль момента инерции тела относительно некоторой оси, как аналога массы тела при его поступательном движении, обнаруживается также при решении другой конкретной задачи – вычисления кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, например, оси X .

По определению кинетической энергии тела имеем:

$$T_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.30)$$

Сравнение полученного выражения с формулой $T = \frac{1}{2} m v^2$ для кинетической энергии материальной точки (или движущегося поступательно твёрдого тела) подтверждает справедливость отмеченной выше роли момента инерции тела относительно оси.

Найдём работу внешних сил при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Для элементарной работы внешних сил и элементарного изменения кинетической энергии рассматриваемого тела имеем $dA = dT$. С учётом этого для работы внешних сил при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси можем записать:

$$dA = dT = \frac{1}{2} d(I\omega^2) = I\omega d\omega = I\omega (d\omega / dt) dt = \underset{M}{I\epsilon} \underset{d\varphi}{\omega dt} = Md\varphi. \quad (2.31)$$

Для конечных перемещений при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси из выражения (4.2.6) следует:

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi. \quad (2.32)$$

Из последней формулы видим, в частности, что если момент внешних сил постоянен, то работа при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси равна произведению проекции момента внешних сил на ось вращения и угла поворота, то есть $A_{12} = M\Delta\varphi$.

2.2 Теория метода и описание установки

Опытные исследования закона вращательного движения в данной работе проводятся при помощи прибора, (маятник Обербека) изображённого на рисунке 2.7.

Он состоит из четырёх стержней и двух шкивов, укрепленных на одной горизонтальной оси. Стержни укреплены на одном из шкивов под углом 90° друг к другу. На второй шкив диаметром D намотана нить, к концу которой привязан груз массой m .

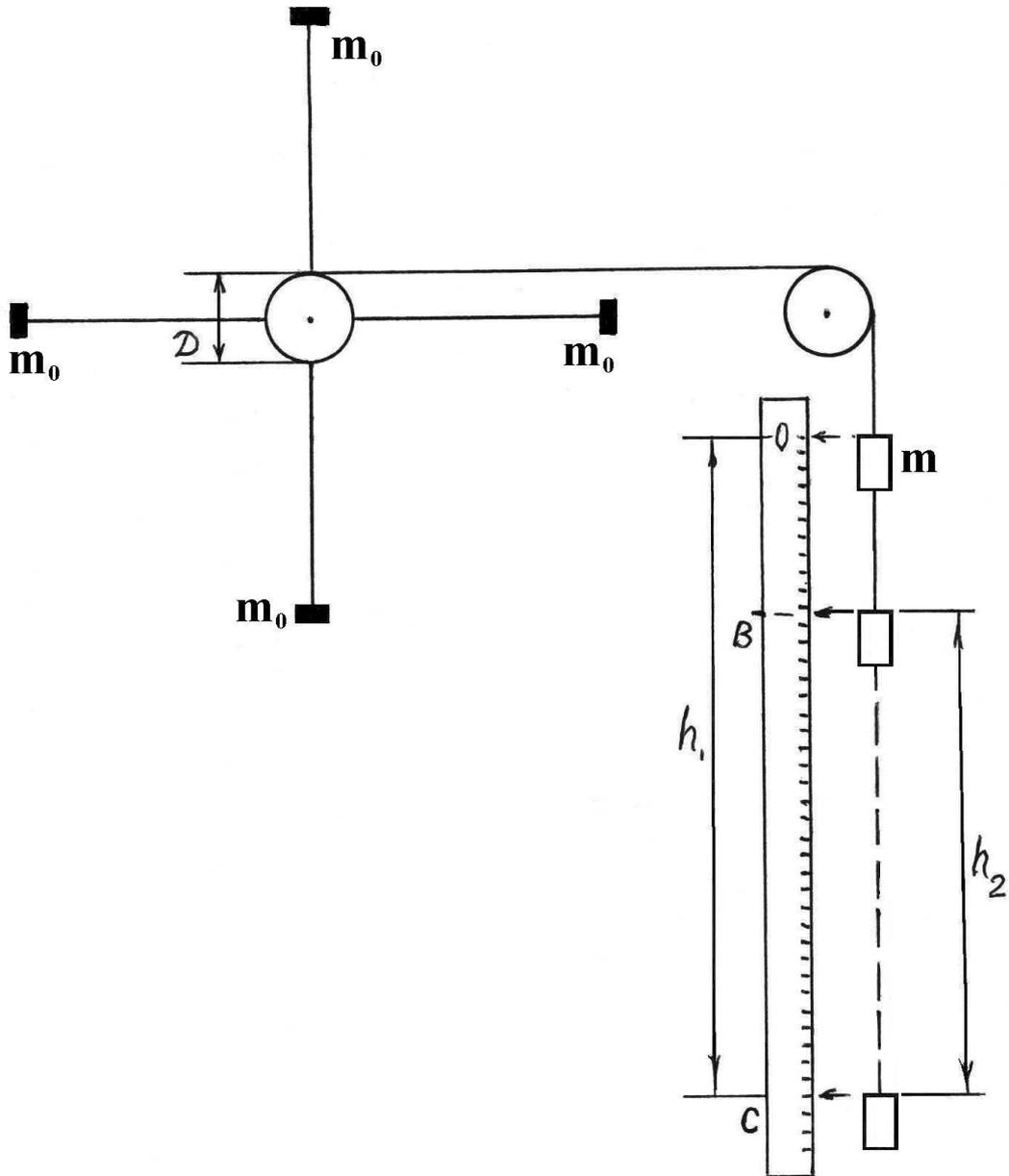


Рисунок 2.7 Схема опытной установки

По стержням могут перемещаться и закрепляться в нужном положении четыре груза одинаковой массы m_0 (по одному на каждом стержне). Грузы закрепляются симметрично так, чтобы центр тяжести совпадал с осью вращения.

Маятник приводится во вращательное движение грузом m . Если дать возможность грузу падать, то вращающий момент, приводящий маятник в движение, создаётся действием силы натяжения \vec{F}_n разматывающейся нити (рисунок 2.8).

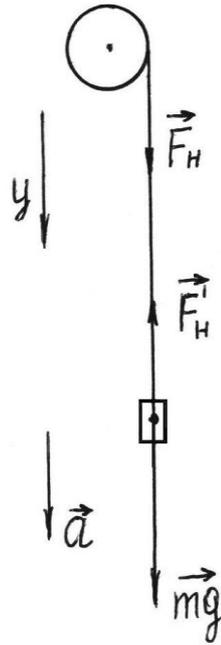


Рисунок 2.8.

Если учесть силы трения в подшипниках, за счёт которых создаётся тормозящий момент этих сил, то уравнение движения маятника будет иметь вид (как упоминалось выше, опущены нижние индексы, указывающие на то, что в выражении между собой связаны проекции векторов):

$$I \cdot \varepsilon = M. \quad (2.33)$$

где:

$$M = r \cdot F_H - M_{тр}. \quad (2.34)$$

В соотношении (2.34) $r = D/2$ – плечо силы натяжения, D – диаметр шкива, I – момент инерции маятника и деталей, вращающихся с ним (вал, шкив, грузы на нем), ε – угловое ускорение, $M_{тр}$ – момент сил трения.

На груз действуют противоположно направленные силы $m\vec{g}$ и \vec{F}'_H .

Уравнение поступательного движения груза на нити имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}'_H, \quad (2.35)$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести груза, \vec{F}'_H – сила натяжения, действующая на груз со стороны нити.

В проекциях на ось y , уравнение движения груза можно записать в форме:

$$ma = mg - F'_H. \quad (2.36)$$

Из этого уравнения определяется модуль силы натяжения:

$$F'_H = mg - ma = m(g - a). \quad (2.37)$$

К шкиву приложена сила \vec{F}_H , модуль которой равен модулю силы натяжения нити $F_H = F'_H$ (в силу невесомости и нерастяжимости нити). Подставляя найденную величину F_H в уравнение (2.34), получим:

$$M = m(g - a) \cdot r - M_{mp} \quad (2.38)$$

Модуль линейного ускорения падающего груза a определяется из выражения для пути $h_1 = at^2 / 2$, пройденном телом при равноускоренном движении:

$$a = 2h_1 / t^2, \quad (2.39)$$

где h_1 – расстояние, проходимое грузом при падении до нижней точки ($h_1 = OC$, рисунок 2.7), t – время падения груза.

Модуль тангенциального ускорения любой точки на боковой поверхности шкива равен ускорению падающего груза. Поэтому модуль углового ускорения ε определяется соотношением:

$$\varepsilon = a/r = 2a/D. \quad (2.40)$$

Из уравнения (2.20) находим величину момента инерции системы:

$$I = \frac{m(g - a) \cdot r - M_{mp}}{\varepsilon}. \quad (2.41)$$

Момент инерции вала и шкива ничтожно малы по сравнению с моментом инерции маятника, поэтому полученное уравнение можно считать, как расчётную формулу в предлагаемом методе измерения момента инерции I .

Для определения момента инерции по формуле (2.41) необходимо определить модуль момента силы трения в подшипниках. Модуль момента сил трения можно вычислить исходя из следующих соображений. Груз в начальном состоянии (до опускания груза) находится на высоте h_1 относительно нижнего положения и имеет потенциальную энергию

$$W_{p1} = mgh_1. \quad (2.42)$$

Опустившись на полную длину шнура, груз начинает подниматься, а нить будет наматываться на шкив в противоположную сторону (маятник по инерции будет вращаться в прежнем направлении). При этом груз поднимется на высоту h_2 меньшую h_1 ($h_2 = BC$, рисунок 2.7). Потенциальная энергия груза примет значение $W_{p2} = mgh_2$ (рисунок 2.7).

Уменьшение потенциальной энергии обусловлено тем, что часть ее расходуется на совершение работы A_{12} силами трения:

$$\Delta W_p = W_{p2} - W_{p1} = -A_{mp} = mg(h_2 - h_1). \quad (2.43)$$

Следовательно, имеем:

$$A_{mp} = -\Delta W_p = mg(h_1 - h_2) = M_{mp} \cdot \varphi, \quad (2.44)$$

где $M_{mp} \cdot \varphi$ – работа сил трения, M_{mp} – модуль момента сил трения, φ – общий угол поворота маятника за время его движения (от начала движения с высоты h_1 от точки O до подъема на высоту h_2 до точки B).

Угловое перемещение определяется формулой:

$$\varphi = S/r = (h_1 + h_2)/r. \quad (2.45)$$

Из уравнений (2.44) и (2.45) получим выражение для модуля момента сил трения

$$M_{mp} = \frac{mg(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} \cdot r. \quad (2.46)$$

По результатам измерений вычислить модуль линейного ускорения a (2.39), угловое ускорение (2.40), модуль момента сил трения (2.46), модуль вращающего момента (2.38), момент инерции (2.47)

$$I = M / \varepsilon \quad (2.47)$$

и проверить соотношение:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (2.48)$$

где: I_1 – момент инерции и ε_1 – угловое ускорение движения маятника без грузов; I_2 – момент инерции и ε_2 – угловое ускорение маятника при движении с грузами.

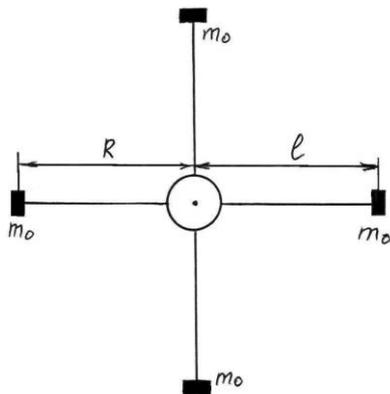


Рисунок 2.9

Момент инерции крестовины маятника без грузов находится по формуле (рисунок 2.9)

$$I_{кр} = 4 \cdot \frac{1}{3} m_{cm} \cdot l^2, \quad (2.49)$$

где m_{cm} – масса стержня, $(m_{cm} \cdot l^2)/3$ – момент инерции стержня относительно оси вращения перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, l – длина стержня.

Момент инерции маятника с грузами определяется как сумма момента инерции крестовины $I_{кр}$ и четырёх грузов массой m_0 . Так как размеры грузов малы по сравнению с расстоянием от оси вращения до их центров масс, то момент инерции грузов можно рассматривать как момент инерции материальных точек. Поэтому момент инерции маятника с грузами определяется формулой:

$$I = I_{кр} + 4m_0 R^2, \quad (2.50)$$

где R – расстояние от оси вращения до центра масс грузов.

2.3 Порядок выполнения работы

2.3.1 Определение момента инерции ненагруженного маятника

1. Освободить крестовину от грузов.

2. Записать все данные установки: диаметр шкива D , длину стержней l , массу движущегося груза m массу грузов, закрепляемых на стержнях m_0 .
3. Намотать на шкив нить и подвесить к ней груз массой m . Опустить груз в нижнее положение (положение C , рисунок 2.7). Измерить по шкале расстояние h_1 от **нулевого** деления шкалы до плоскости **верхнего** основания груза в его **нижнем** положении.
4. Поднять груз в **верхнее** положение и установить плоскость его **верхнего** основания **напротив нулевого** деления шкалы. После этого предоставить грузу возможность падать, **включить** секундомер в момент **начала** движения груза от нулевого деления и **выключить** его в момент спуска груза **на всю длину нити**. После **выключения** секундомера следить за подъёмом груза и отметить **до какого деления шкалы** поднимется плоскость верхней грани груза – это будет **высота** h_2 максимального подъема груза. Записать значения t , h_1 и h_2 в таблицу 2.1. Повторить измерения не менее пяти раз.

Таблица 2.1

Параметр	№ измерения				
	1	2	3	4	5
Опыт I: крестовина без грузов					
h_1					
t_i					
$\langle t \rangle$					
Δt_i					
$(\Delta t)_{сл}$					
$(\Delta t)_{np}$					
Δt					
$\varepsilon_t, \%$					
Опыт II: крестовина с грузом					
h_{2i}					
$\langle h_2 \rangle$					
Δh_{2i}					
$(\Delta h_2)_{сл}$					
$(\Delta h_2)_{np}$					
Δh_2					
$\varepsilon_{h_2}, \%$					

Параметр	№ измерения				
	1	2	3	4	5
Опыт II: крестовина с грузами					
h_1					
t_i					
$\langle t \rangle$					
Δt_i					
$(\Delta t)_{сл}$					
$(\Delta t)_{пр}$					
Δt					
$\varepsilon_t, \%$					
Опыт I: крестовина без грузов					
h_{2i}					
$\langle h_2 \rangle$					
Δh_{2i}					
$(\Delta h_2)_{сл}$					
$(\Delta h_2)_{пр}$					
Δh_2					
$\varepsilon_{h_2}, \%$					

Вычислить для t , h_1 и h_2 средние выборочные значения, случайные погрешности, полные погрешности и относительные погрешности. Вычислить, используя найденные выборочные средние (и табличные величины): модуль линейного ускорения a (формула 2.39), модуль углового ускорения ε (формула 2.40), модуль момента сил трения $M_{тр}$ (формула 2.46), модуль вращающего момента M (формула 2.38) и момент инерции I (формула 2.47), используя средние значения измеренных величин.

5. Результаты всех вычислений записать в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

a	ε	$M_{тр}$	M	I	ΔI
Опыт I: крестовина без грузов					
Опыт II: крестовина с грузами					

--	--	--	--	--	--

6. Сравнить значение момента инерции ненагруженного маятника, вычисленного по формуле (2.47), с теоретическим значением $I_{кр}$ (формула (2.49)).

7. Вычислить полную и относительную погрешности измерений момента инерции маятника.

2.3.2 Измерение момента инерции маятника с грузами

1. На концах стержней маятника укрепить грузы m_0 на расстоянии R от оси вращения. Записать значение R .

2. Грузы необходимо тщательно сбалансировать, чтобы маятник не мог поворачиваться за счёт их неточного крепления.

3. Оставляя неизменным падающий груз, можно считать, что момент силы не изменяется, так как в формуле (2.41) модуль ускорения a мал по сравнению с g .

4. Прodelать опыт в прежнем порядке, записать результаты измерений в таблицу 2.1 и вычислить для t , h_1 и h_2 средние выборочные значения, случайные погрешности, полные погрешности и относительные погрешности. Результаты измерений и вычислений записать в таблицу 2.1.

5. Вычислить a , ε , I При этом момент сил трения считать постоянным и использовать значение его модуля, вычисленное при первом измерении. Результаты всех вычислений записать в таблицу 2.2.

6. Проверить соотношение:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

7. Сравнить значение момента инерции нагруженной крестовины с значением, вычисленным по формуле (2.50).

2.4 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Какова связь между линейными и угловыми скоростями и ускорениями?

2. Сформулируйте определение момента импульса. Как этот вектор расположен в пространстве?

3. Сформулируйте определение момента силы. Как этот вектор расположен в пространстве? Что называется плечом силы?

4. Сформулируйте и выведите закон изменения момента импульса системы.

5. Сформулируйте и выведите закон динамики вращательного движения.

6. Сформулируйте определение момента инерции и от чего он зависит?

7. Какие законы положены в основу вывода рабочей формулы? Выведите рабочую формулу.

8. Как в данной работе определяется момент сил трения?

9. На основании какой закономерности вычисляется ускорение падающего груза?

10. Почему нельзя допускать раскачивания груза, подвешенного на нити, при его движении вниз? На что и как это будет влиять?

2.5 Техника безопасности

1. Перед выполнением работы проверить прочность закрепления стержней и грузов на установке.

2. В процессе выполнения работы следите за тем, чтобы грузы не соскальзывали со стержней.

3. После окончания работы снимите грузы с крестовины.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3(1.4).
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ
 МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Цель работы: определение момента инерции тел правильной геометрической формы методом крутильных колебаний.

3.1 Основные понятия и закономерности

Можно показать, что произвольное движение твёрдого тела можно

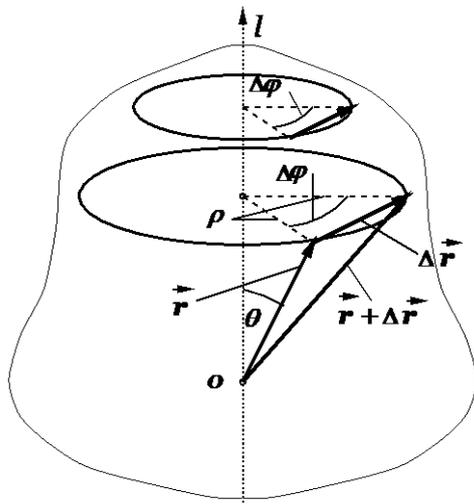


Рисунок 3.1

представить в виде наложения двух простейших его (твёрдого тела) движений: 1) поступательного движения твёрдого тела; 2) вращательного движения твёрдого тела вокруг мгновенной (изменяющей своё положение в пространстве) оси.

При поступательном движении все точки этого тела совершают движение по одинаковым траекториям и, поэтому такое движение можно свести к изучению движения одной точки, например материальной точки, имеющей массу равную массе данного тела, расположенной в центре масс

рассматриваемой системы (твёрдого тела).

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называют такое его движение, при котором все точки этого тела движутся по окружностям (различным), центры которых расположены на одной неподвижной прямой линии, называемой осью вращения l . Ось вращения перпендикулярна ко всем окружностям, по которым движутся указанные выше точки (см. рисунок 3.1).

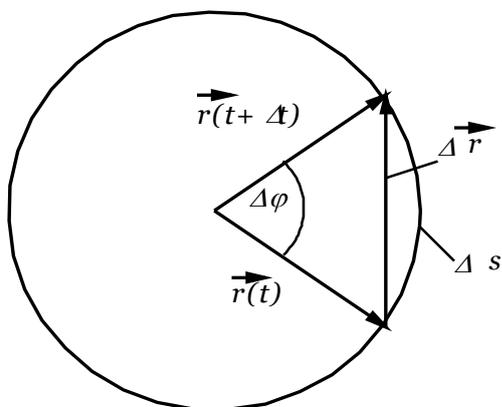


Рисунок 3.2

Можно ввести такие переменные для описания вращательного движения, которые были бы применимы ко всем точкам сразу и свели бы описание вращательного движения твёрдого тела к вращательному движению одной материальной точки. Легко заметить, что одинаковым для всех точек твёрдого тела является угол поворота $\Delta\varphi$ прямых, проходящих через центр окружностей

вращения и рассматриваемые материальные точки, за некоторый промежуток времени Δt . Этот угол поворота $\Delta\varphi$, однако, не позволяет найти основную характеристику движения материальной точки – её вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ за конечный промежуток времени Δt , который направлен

вдоль хорды окружности, соединяющей начальную и конечную точки (см. рисунок 3.2), поскольку, как известно из геометрии, произведение центрального угла $\Delta\varphi$ на длину радиуса окружности l равно длине дуги окружности Δs , опирающейся на начальную и конечную точки (см. рисунок 3.3), причём $\Delta s \neq \Delta r$ (более точно, $\Delta s > \Delta r$). Кроме того, $\Delta\varphi$ – скалярная величина, а нам нужно с её помощью получить вектор $\Delta\vec{r}$. Выйти из положения можно, если ввести вектор элементарного угла поворота $d\vec{\varphi}$ (коротко элементарного поворота).

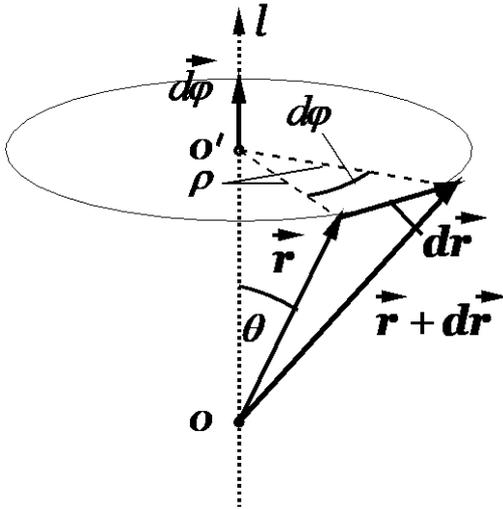


Рисунок 3.3

Вектор $d\vec{\varphi}$ имеет длину $d\varphi$ и направлен вдоль оси вращения l так, чтобы с конца этого вектора вращение рассматриваемой точки наблюдалось в заданном направлении (против часовой стрелки), как это показано на рисунке 3.3. Вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ при таком определении связан с векторами $d\vec{\varphi}$ и \vec{r} соотношением:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (3.1)$$

где знаком « \times » обозначено векторное произведение векторов $d\vec{\varphi}$ и \vec{r} .

Действительно, по определению, для модуля векторного произведения двух векторов $|d\vec{\varphi} \times \vec{r}|$ имеем:

$$|d\vec{\varphi} \times \vec{r}| = d\varphi \cdot r \sin\theta = \rho d\varphi = ds = dr, \quad (3.2)$$

где $\rho = r \sin\theta$ и учтена эквивалентность величин ds и dr при $\Delta t \rightarrow 0$.

Видим также (рисунок 3.3), что направление вектора $d\vec{r}$ на рисунке совпадает с направлением вектора, определяемого выражением (3.1).

Введённый таким образом элементарный угол поворота $d\vec{\varphi}$ позволяет найти линейные характеристики движения материальных точек. Через вектор $d\vec{\varphi}$ далее мы также введём и другие векторные характеристики вращательного движения, а именно векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$. Отметим, что вектор $d\vec{\varphi}$ обладает свойством линейности (по отношению к операции сложения векторов). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим элементарный поворот, который является линейной комбинацией двух элементарных поворотов $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, совершённых твёрдым телом (возможно, вокруг разных осей, проходящих через неподвижную точку O). В этом случае произвольная точка твёрдого тела имеет результирующий элементарный вектор перемещения $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2$, где $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ элементарные перемещения при указанных выше поворотах:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} = (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (3.3)$$

откуда следует, что и результирующий вектор угла поворота $d\vec{\varphi}$ равен сумме элементарных углов поворота $d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$.

Это означает, что для каждой точки рассматриваемого твёрдого тела, результирующий элементарный поворот вокруг оси, направленной вдоль вектора $d\vec{\varphi}$ (и проходящий через точку O), будет эквивалентен двум последовательным элементарным поворотам $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, совершённых твёрдым телом вокруг осей, направленных вдоль эти векторов (и проходящих через точку O).

Если воспользоваться определением дифференциалов вектор-функций $d\vec{r} = (d\vec{r}/dt) \cdot dt$ и $d\vec{\varphi} = (d\vec{\varphi}/dt) \cdot dt$ и подставить эти дифференциалы в формулу (3.1), то получим:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (d\vec{r}/dt) \cdot dt = \underbrace{\{(d\vec{\varphi}/dt) \cdot dt\}}_{d\vec{\varphi}} \times \vec{r} = [(d\vec{\varphi}/dt) \times \vec{r}] \cdot dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow (d\vec{r}/dt) = \underbrace{(d\vec{\varphi}/dt)}_{\vec{\omega}} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (3.4)$$

и, с учётом определения вектора скорости материальной точки $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, имеем:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.5)$$

В формуле (3.5) введена новая величина – **вектор угловой скорости** $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d(\varphi \vec{e}_1)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_1 = \omega \cdot \vec{e}_1. \quad (3.6)$$

Из последней формулы следует, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен также вдоль оси вращения и совпадает по направлению с этой осью и вектором элементарного поворота $d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{e}_1$. Измеряется угловая скорость в rad/c .

В общем случае вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ зависит от времени и изменение этого вектора во времени описывает производная по времени $(d\vec{\omega}/dt)$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \vec{e}_1)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_1 = \pm \varepsilon \vec{e}_1, \quad (3.7)$$

где использовано обозначение модуля вектора $|\vec{\varepsilon}| = |d\vec{\omega}/dt| = \varepsilon$.

Видим, что **вектор углового ускорения** $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения и, либо совпадает с нею по направлению ($d\omega/dt > 0$), либо имеет противоположное с нею по направлению ($d\omega/dt < 0$). Измеряется угловое ускорение в rad/c^2 .

Установим связи между угловыми и линейными кинематическими характеристиками.

Одна из формул, связывающих эти величины, уже имеется – это формула (3.5). Из неё следует, что вектор скорости (линейной) любой материальной точки определяется вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ вращательного движения твёрдого тела и радиус вектором рассматриваемой материальной точки \vec{r} . Из определения векторного произведения векторов следует, что векторы $\vec{\omega}$, \vec{r} и \vec{v} образуют *правую тройку* векторов (в указанном порядке), а их взаимное расположение показано на рисунке 3.4.

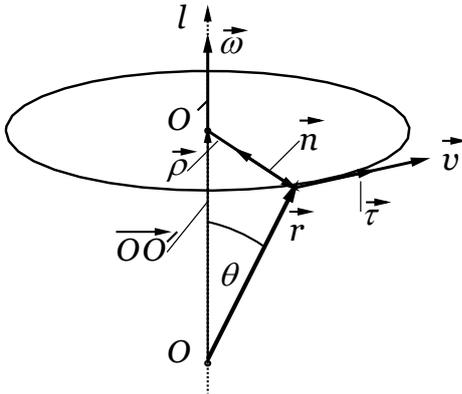


Рисунок 3.4

В формуле (3.5) можно сделать замену радиус-вектора \vec{r} рассматриваемой материальной точки на вспомогательный вектор $\vec{\rho}$, начало которого совпадает с центром окружности, по которой совершает своё движение рассматриваемая материальная точка, а конец совпадает с положением этой материальной точки. Этот вектор $\vec{\rho}$ имеет, таким образом, длину, равную радиусу окружности (то есть расстоянию от данной материальной точки до оси вращения).

Для любой материальной точки (см. рисунок 3.4) имеет место равенство:

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{\rho}. \quad (3.8)$$

причём всегда справедливы соотношения $\overline{OO'} \parallel \vec{\omega}$ и $\vec{\rho} \perp \vec{\omega}$.

Следовательно, можем преобразовать формулу (3.5):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\overline{OO'} + \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \overline{OO'} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (3.9)$$

откуда следует, что длины перемножаемых векторов связаны простым и хорошо известным из школьного курса физики соотношением для вращательного движения материальной точки:

$$v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega} \times \vec{\rho}| = \omega \cdot \rho \cdot \sin(\pi/2) = \omega \cdot \rho. \quad (3.10)$$

Установим, как связано ускорение (линейное) произвольной материальной точки с другими кинематическими характеристиками. Будем исходить из определения вектора ускорения и учтём формулы (3.5) и (3.8):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + [\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})] = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + (-\vec{r})\omega^2 = \varepsilon \rho \vec{\tau} + \rho \omega^2 \vec{n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В процессе преобразований учтено, что $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \varepsilon \rho \vec{\tau}$ (см. пояснения к (3.9) и рисунок 3.4), векторное тождество $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ и равенство $\vec{\rho} = -\rho \vec{n}$ (см. рисунок 3.4).

Видим, что вектор линейного ускорения \vec{a} можно представить в виде:

$$\vec{a} = \varepsilon \rho \vec{\tau} + \rho \omega^2 \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (3.12)$$

где введены обозначения $\vec{a}_\tau = \varepsilon \rho \vec{\tau}$, $\vec{a}_n = \rho \omega^2 \vec{n}$.

Полученное выражение (3.12) можно немного преобразовать:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \varepsilon \rho \vec{\tau} + \rho \omega^2 \vec{n} = \rho \frac{d\omega}{dt} \vec{\tau} + \rho \frac{v^2}{\rho^2} \vec{n} = \\ &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\rho} \right) \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из полученных выражений следует, что, вектор ускорения можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов \vec{a}_τ и \vec{a}_n , которые направлены, соответственно, по касательной и нормали к траектории в рассматриваемой точке, что находится в полном соответствии с результатами, получаемыми при рассмотрении кинематики произвольного движения материальной точки. В данном случае траектория окружность и, поэтому, радиус кривизны постоянен и равен ρ .

Из формулы (3.12) с учётом взаимной перпендикулярности векторов нормального и тангенциального ускорений находим:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.14)$$

Эта формула полезна тем, что позволяет вычислить модуль вектора ускорения (линейного) через угловые кинематические характеристики.

При вращении твёрдого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные части с массами Δm_i можно считать материальными точками, описывающими окружности разных радиусов r_i и имеют различные линейные скорости v_i . Но угловая скорость вращения ω всех этих точек одинакова (если тело при вращении не деформируется), т. е. $\omega = v_i / r_i$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots$

Кинетическая энергия вращающегося тела W_k определяется как сумма кинетических энергий его составных элементарных масс:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} + \dots + \frac{\Delta m_n v_n^2}{2} = \\ &= \frac{\omega^2}{2} (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_i r_i^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Величину, равную произведению элементарной массы Δm_i на квадрат расстояния от нее до оси вращения r_i , называют **моментом инерции** материальной точки

$$\Delta I_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \quad (3.16)$$

Момент инерции всего твёрдого тела относительно данной оси вращения **определяют, как сумму моментов инерции элементарных масс, составляющих данное тело:**

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta I_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \quad (3.17)$$

Измеряется момент инерции в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

При непрерывном распределении массы в некоторой части пространства объёмом V момент инерции можно определить, если учесть, что $\Delta m_i = \gamma_i \Delta V_i$, где γ_i плотность вещества в i -ой точке, ΔV_i – объём i -ого участка разбиения, и перейти к пределу при мелкости разбиения $\lambda \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int_V dm r^2 = \int_V \gamma r^2 dV, \quad (3.18)$$

где интегрирование производится по всему объёму тела.

Из формул (3.15) и (3.17) следует выражение кинетической энергии вращающегося твёрдого тела:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2} \quad (3.19)$$

Момент инерции характеризует инертность твёрдого тела при вращательном движении.

Момент инерции тела зависит от распределения массы рассматриваемого тела относительно заданной оси вращения (от формы и размеров тела и от расположения оси, относительно которой определяется момент инерции). Для однородных тел правильной геометрической (симметричной) формы момент инерции относительно осей симметрии легко вычисляется.

Рассмотрим момент инерции некоторых тел правильной формы относительно оси симметрии OO' :

1) **Момент инерции материальной точки** массой m вращающейся вокруг оси вращения OO' на расстоянии d по определению равен:

$$I_r = md^2 \quad (3.20)$$

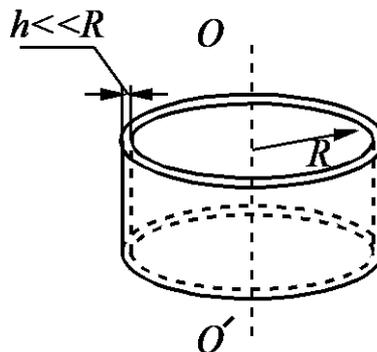


Рисунок 3.5

2) Момент инерции **тонкостенных** колец (толщина боковых стенок этих тел много меньше радиуса основания $h \ll R$), цилиндра и обруча относительно оси OO' ($r_i = R$) (рисунок 3.5):

$$I_{\kappa} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^n \Delta m_i = mR^2, \quad (3.21)$$

где $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$ – масса тела; R – его радиус.

3) Момент инерции **однородного сплошного цилиндра, диска** (рисунок 3.6) относительно оси OO' :

$$I_{\partial} = \int_V dm r^2 = \int_V \rho dV r^2 = \frac{1}{2} mR^2, \quad (3.22)$$

где m – масса диска; R – его радиус.

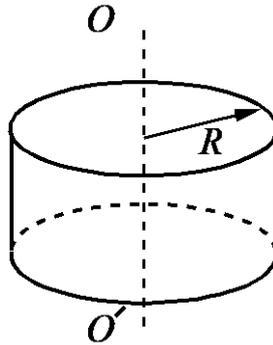


Рисунок 3.6

4) Момент инерции толстостенного кольца относительно оси кольца (рисунок 3.7):

$$I_{\kappa} = m \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}, \quad (3.23)$$

где m – масса кольца; R_1 – внутренний радиус; R_2 – внешний радиус.

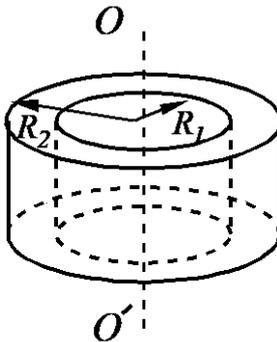


Рисунок 3.7

5) Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр шара (рисунок 3.8):

$$I_{ш} = \frac{2}{5} mR^2, \quad (3.24)$$

где m – масса шара; R – радиус шара.

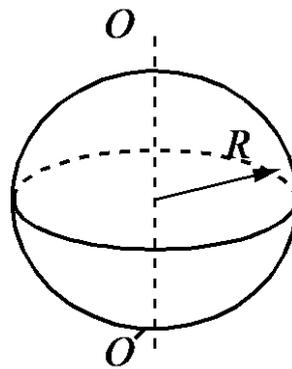


Рисунок 3.8

б) Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню (рисунок 3.9):

$$I = \frac{1}{12}ml^2, \quad (3.25)$$

где m – масса стержня; l – длина стержня.

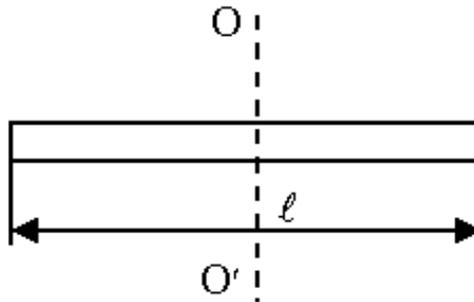


Рисунок 3.9

Из приведённых выше выражений вытекает, что значения моментов инерции тел относительно оси симметрии, проходящей через центр масс, можно представить в виде:

$$I = \alpha ml^2, \quad (3.26)$$

где m – масса рассматриваемого тела, l – его характерный размер, $0 < \alpha \leq 1$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от формы тела. В частности, для сплошного однородного цилиндра $l = R$ – радиус основания цилиндра, $\alpha = 1/2$; для сплошного однородного шара $l = R$ – радиус шара, $\alpha = 2/5$; для тонкостенной сферы $l = R$ – радиус сферы, $\alpha = 2/3$; для однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню $l = l$ – длина стержня, $\alpha = 1/12$ и т. д.

Если известен момент инерции I_0 данного тела относительно оси, проходящей через центр масс этого тела OO' , то момент инерции I этого тела относительно любой другой оси XX' , параллельной первой и отстоящей от нее на расстоянии a , вычисляется по теореме Штейнера (теорема о влиянии на момент инерции переноса оси вращения)

$$I = I_0 + ma^2, \quad (3.27)$$

где m – масса тела.

Эта теорема может быть выведена непосредственно из определения момента инерции тела относительно произвольной оси (рисунок 3.10).

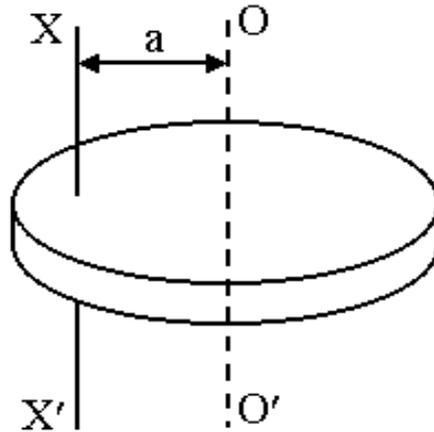


Рисунок 3.10

3.2 Теория метода и описание установки

Момент инерции тел сложной формы определяется опытным путём. В данной работе для определения момента инерции тел используется метод крутильных колебаний маятника на трифилярном подвесе, период которого зависит от момента инерции колеблющегося тела.

Маятник на трифилярном подвесе состоит из платформы массой m_n и радиусом R (рисунок 3.11), подвешенной на трех металлических нитях, прикрепленных к диску радиусом $r < R$ и расположенных симметрично относительно оси системы OO' (ось OO' перпендикулярна диску и платформе).

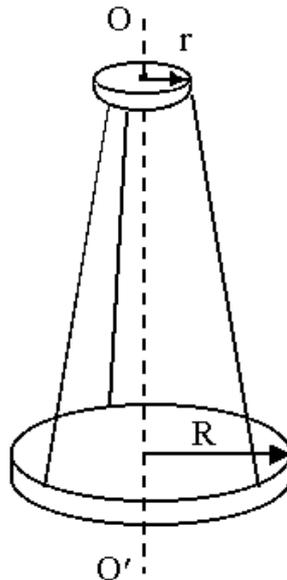


Рисунок 3.11

При повороте диска на небольшой угол φ_0 вокруг оси центр массы системы несколько приподнимается вдоль оси вращения и нижняя

платформа начинает совершать крутильные колебания, период которых зависит от момента инерции системы. Резкий поворот верхнего диска на малый угол $\varphi_0 < 5^\circ$ почти полностью исключает не крутильные колебания платформы (при колебании платформы верхний диск должен быть неподвижным).

За четверть периода колебаний платформа поднимется на высоту $\Delta h = h_1 - h_2$, и ее потенциальная энергия изменится на величину (рисунок 3.12)

$$\Delta W_p = mg\Delta h \quad (3.28)$$

В следующие четверть периода потенциальная энергия платформы переходит в кинетическую энергию, которая при начальной угловой скорости, равной нулю, запишется так:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3.29)$$

где ω – угловая скорость гармонического колебательного движения. Затем кинетическая энергия переходит в потенциальную и т. д. По закону сохранения и превращения энергии (без учёта сил трения) имеем:

$$mg\Delta h = \frac{I\omega_{\max}^2}{2}, \quad (3.30)$$

где ω_{\max} – максимальная угловая скорость в момент прохождения положения равновесия.

Из этого выражения можно найти момент инерции системы

$$I = \frac{2mg\Delta h}{\omega^2} \quad (3.31)$$

Платформа совершает гармонические крутильные колебания, поэтому угловое смещение φ платформы имеет следующую зависимость от времени:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (3.32)$$

где φ_0 – угловая амплитуда крутильных колебаний; T – период полного колебания.

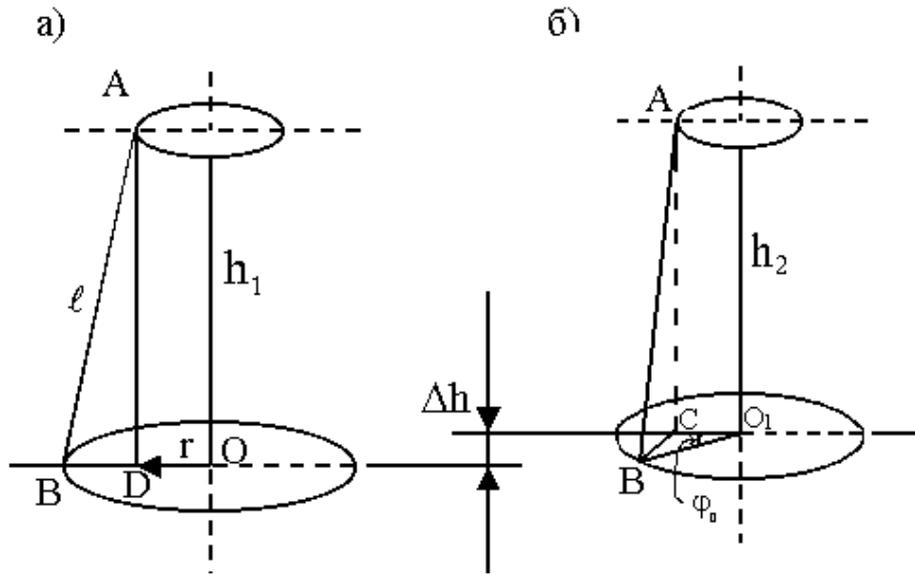
Угловую скорость платформы можно найти, взяв производную по времени от φ :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (3.33)$$

Она максимальна при $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1$ и равна

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \quad (3.34)$$

Вычислим величину Δh при повороте платформы на угол φ_0 .



а – положение равновесия маятника;
б – положение максимального смещения маятника.

Рисунок 3.12

Из геометрии опыта (рисунок 3.12) видно, что поскольку $\Delta h \ll h_1$, $\Delta h \ll h_2$, то $h_1 + h_2 \approx 2h_1$ (или $h_1 + h_2 \approx 2h_2$).

Кроме того, из геометрии опыта следует, что $(R-r)^2 \ll h_1^2 \Rightarrow l^2 = h_1^2 + (R-r)^2 \approx h_1^2$ или $h_1 \approx l$ (l – длина нити).

Следовательно, для Δh имеем:

$$\Delta h = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2} \approx \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l}, \quad (3.35)$$

h_1 и h_2 находим из треугольников ABD и ABC:

$$h_1^2 = (AD)^2 = l^2 - (R-r)^2 \text{ из } \triangle ABD$$

$$h_2^2 = (AC)^2 = l^2 - (BC)^2 \text{ из } \triangle ABC.$$

(BC) определяем из треугольника BCO как сторону, лежащую против угла φ_0 :

$$(BC)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi_0.$$

$$\text{Тогда } h_2^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi_0).$$

Подставляем значения h_1^2 и h_2^2 в формулу (3.25), получаем:

$$\Delta h = \frac{2Rr(1 - \cos \varphi_0)}{2l} = \frac{2Rr \sin^2(\varphi_0/2)}{l}.$$

Так как угол φ_0 мал, то $\sin(\varphi_0/2)$ можно заменить аргументом $(\varphi_0/2)$ – в радианах:

$$\Delta h = \frac{Rr\varphi_0^2}{2l}. \quad (3.36)$$

Подставляя $\Delta h, \omega_{\max}$ в формулу (3.30), окончательно получаем выражение для расчёта момента инерции ненагруженной платформы:

$$I_n = \frac{m_n R r g}{4\pi^2 l} \cdot T^2 = m_n K T^2, \quad (3.37)$$

где m_n – масса платформы;

$$K = \frac{R r g}{4\pi^2 l},$$

R – радиус платформы; r – радиус диска; l – длина нити. (R, r, l, m_n – величины постоянные, их значения указаны на установке).

Момент инерции платформы, нагруженной исследуемым телом, вычисляется аналогично:

$$I = \frac{(m_n + m_T) R r g}{4\pi^2 l} \cdot T^2 = (m_n + m_T) K \cdot T^2, \quad (3.38)$$

где $(m_n + m_T)$ – масса платформы с телом; m_T – масса исследуемого тела.

Как видно из выражений (3.37) и (3.38), для определения момента инерции платформы I_n без тела и момента инерции платформы с исследуемым телом I , необходимо измерить период колебаний крутильного маятника.

Момент инерции исследуемого тела равен разности моментов инерции платформы с исследуемым телом I и без тела I_n

$$I_T = I - I_n. \quad (3.39)$$

В данной лабораторной работе предлагается определить при помощи маятника на трифилярном подвесе момент инерции некоторых тел относительно оси вращения, проходящей через их центр масс, и относительно произвольной оси и проверить теорему Штейнера.

3.3 Порядок выполнения работы

В настоящей лабораторной работе осуществляется опытное определение момента инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через их центр масс.

Во всех опытах секундомером измеряется время t полных N колебаний ($N=(20 \div 30)$). Во всех опытах использовать одно и тоже выбранное (неизменное) число полных колебаний. Измерения в каждом опыте проводятся не менее пяти раз. Результаты всех измерений занести в таблицу 3.1 и вычислить среднее выборочное значения $\langle t \rangle$, случайные погрешности, полные погрешности и относительные погрешности.

Используя средние значения $\langle t \rangle$, найденные в результате прямых измерений, вычислить средний период одного полного колебания:

$$\langle T \rangle = \frac{\langle t \rangle}{N} \quad (3.40)$$

и погрешности этой косвенно измеряемой величины.

Во всех опытах вычислить, используя средние значения величин, найденные в результате прямых измерений, косвенно измеряемые моменты инерции и их погрешности исследуемых тел.

3.3.1 Определение момента инерции ненагруженной платформы маятника I_n .

Сообщить платформе вращающий импульс (верхний диск резко повернуть на малый угол $\varphi < 5^\circ$).

Зная величины R, r, l, m_n и, используя среднее значение $\langle t \rangle$, найденное в результате прямых измерений, вычислить по формуле (3.40) средний период одного полного колебания, по формуле (3.37) момент инерции платформы и сравнить с теоретическим значением (выражение 3.22).

3.3.2 Проверка теоремы Штейнера

1) Определение момента инерции двух цилиндров $I_{2ц}$ относительно оси OO' проходящей через их центр масс.

Установить цилиндры друг на друга так, чтобы ось вращения проходила через их центр масс (рисунок 3.13а). Измерить время колебаний системы, вычислить по формуле (3.40) средний период одного полного колебания, а затем по формуле (3.38) рассчитать момент инерции системы $I_{2ц}$. Вычислить момент инерции двух цилиндров по формуле (3.29), а одного – по формуле:

$$I_{1ц} = \frac{I_1 - I_n}{2} \quad (3.41)$$

Сравнить его с теоретическим значением (3.22).

2) Установить цилиндры симметрично относительно оси OO' на расстоянии d (рисунок 3.13).

Измерить время колебаний системы, вычислить по формуле (3.40) средний период одного полного колебания, а затем по формуле (3.38) момент инерции двух цилиндров $I'_{2ц}$:

$$I'_{2ц} = I_2 - I_n.$$

Определить момент инерции одного цилиндра по формуле:

$$I'_{1ц} = (I_2 - I_n) / 2.$$

Опыт II: цилиндры в центре диска							
Опыт III: цилиндры на расстоянии d от оси вращения							

3.4 Контрольные вопросы

- 1) Что называется моментом инерции? В каких единицах он измеряется?
- 2) Какой закон положен в основу рабочей формулы? Выведите рабочую формулу.
- 3) В чем отличие крутильных колебаний от колебаний физического маятника?
- 4) Почему натяжение нитей трифилярного подвеса должно быть одинаковым?
- 5) Сформулируйте теорему Штейнера.
- 6) Под действием какой силы трифилярный подвес совершает крутильные колебания?
- 7) Выведите формулу погрешностей для момента инерции платформы.

3.5 Техника безопасности

1. Перед работой проверить натяжение нитей трифилярного подвеса и положение нижнего и верхнего дисков.
2. После выполнения работы снять грузы с нижней платформы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4(1.6). ИЗУЧЕНИЕ СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ

Цели работы:

- 1) изучение законов упругого и неупругого соударения шаров,
- 2) определение отношения скоростей и масс шаров.

4.1 Основные понятия и закономерности

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является *удар абсолютно упругих и неупругих тел*.

Удар (или соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. При ударе тела испытывают деформацию. Явление удара протекает обычно в сотые, тысячные и миллионные доли секунды. Время соударения тем меньше, чем меньше деформации тел. Так как при этом количество движения тел изменяется на конечную величину, то при соударении развиваются огромные силы.

Процесс удара разделяют на *две фазы*.

Первая фаза – с момента соприкосновения тел до момента, когда их относительная скорость становится равной нулю.

С момента возникновения деформаций в местах соприкосновения тел начинают действовать силы, направленные противоположно относительным скоростям тел. При этом происходит переход энергии механического движения тел в энергию упругой деформации (первая фаза удара).

Вторая фаза – от момента, когда относительная скорость тел становится равной нулю, до момента, когда соприкосновение тел прекращается.

Во второй фазе удара начинается частичное или полное восстановление формы тел, затем тела расходятся и удар заканчивается. В этой фазе кинетическая энергия системы растёт за счёт положительной работы упругих сил.

У реальных тел относительная скорость после удара не достигает той величины, которую она имела до удара, так как часть механической энергии необратимо переходит во внутреннюю и другие формы энергии.

Различают два предельных типа удара:

- а) удар *абсолютно неупругий*;
- б) удар *абсолютно упругий*.

Абсолютно неупругий удар (близкий к нему) возникает при столкновении тел из пластических материалов (глина, пластилин, свинец и др.), форма которых не восстанавливается после прекращения действия внешней силы.

Абсолютно неупругим ударом называется удар, после которого возникшие в телах деформации полностью сохраняются. После абсолютно неупругого удара тела движутся с общей скоростью.

Абсолютно упругий удар (близкий к нему) возникает при столкновении тел из упругих материалов (сталь, слоновая кость и др.), форма которых после прекращения действия внешней силы полностью (или почти полностью) восстанавливается. При упругом ударе восстанавливается форма тел и величина их кинетической энергии. После удара тела движутся с разными скоростями, но сумма кинетических энергий тел до удара равна сумме кинетических энергий после удара. Прямая, совпадающая с нормалью к поверхности тел в точке их соприкосновения, называется **линией удара**. Удар называется **центральный**, если линия удара проходит через центры масс тел. Таким образом, при центральном ударе двух тел их линии удара и центров совпадают. Если векторы скоростей тел до удара лежали на линии удара, то удар называется **прямым**. В общем случае соударения двух тел их линии удара и центра не совпадают.

При соударении тел выполняются *два закона сохранения*.

Сначала необходимо сформулировать понятия, используемые в формулировке закона сохранения импульса. **Замкнутой** называется система, которая не взаимодействует с телами в неё не входящими, или для которой результирующая всех внешних сил равна нулю.

Импульсом материальной точки (частицы) имеющей массу m и скорость \vec{v} называется вектор $\vec{P} = m \vec{v}$.

Импульсом системы материальных точек, имеющих импульсы $\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, называется вектор \vec{P} , равный сумме импульсов всех частиц, входящих в рассматриваемую систему, то есть $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$.

Любое тело можно представить, как совокупность материальных точек. Следовательно, импульс тела равен сумме импульсов всех частиц, из которых состоит это тело.

1. Закон сохранения импульса.

Импульс \vec{P} замкнутой системы не изменяется, т. е. имеет место равенство:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \overline{const} \quad (4.1)$$

где \vec{P} – полный импульс системы, $\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i$ – импульс i материальной точки.

2. Закон сохранения энергии

В замкнутой системе тел сумма кинетической, потенциальной и внутренней энергии остаётся величиной постоянной:

$$W_k + W_n + Q = const \quad (4.2)$$

где W_k – кинетическая энергия системы, W_n – потенциальная энергия системы, Q – энергия теплового движения молекул (тепловая энергия) тел, входящих в рассматриваемую систему.

Простейшим случаем соударения тел является прямой центральный удар двух однородных шаров. Рассмотрим удар шаров массами m_1 и m_2 (рисунок 4.1).

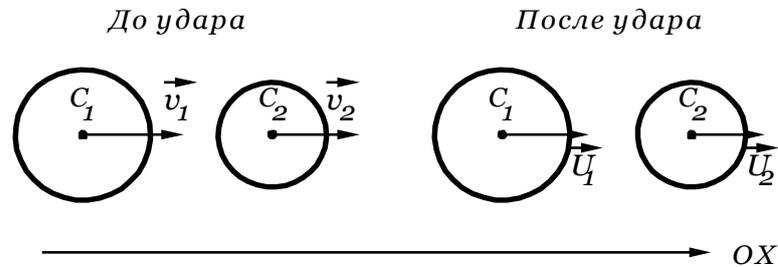


Рисунок 4.1

Будем считать, что однородные шары движутся поступательно. Скорости шаров до удара \vec{V}_1 и \vec{V}_2 после удара \vec{U}_1 и \vec{U}_2 . Законы сохранения импульса и энергии в данном случае запишутся так:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2, \quad (4.3)$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1U_1^2}{2} + \frac{m_2U_2^2}{2} + Q. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.3) и (4.4) определяют условия, необходимые для осуществления удара.

Обозначим центры масс шаров C_1 и C_2 . Проведём через центры масс шаров координатную ось Ox , направленную всегда от C_1 к C_2 (например, слева направо). Тогда, для осуществления удара в (4.3) должно выполняться условие $V_{1x} > V_{2x}$ (иначе первый шар не догонит второй). Кроме того, ударивший шар не может опередить ударяемый. Отсюда следует, что после удара $U_{1x} \leq U_{2x}$.

Удар шаров характеризуется коэффициентом восстановления K , который определяется отношением относительной скорости шаров после удара $\vec{V}_{2 \text{ отн.}}$ к относительной скорости шаров до удара $\vec{V}_{1 \text{ отн.}}$, взятое по абсолютной величине т. е.

$$K = \left| \frac{\vec{V}_{2 \text{ отн.}}}{\vec{V}_{1 \text{ отн.}}} \right|. \quad (4.5)$$

Скорости первого шара относительно второго до и после удара определяются выражениями:

$$\vec{V}_{1 \text{ отн.}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2; \quad \vec{V}_{2 \text{ отн.}} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2. \quad (4.6)$$

Тогда коэффициент восстановления шаров равен:

$$K = \left| \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\vec{V}_1 - \vec{V}_2} \right|. \quad (4.7)$$

При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения механической энергии, $Q=0$, относительные скорости шаров до и после взаимодействия равны и коэффициент восстановления равен 1.

При абсолютно неупругом ударе механическая энергия системы не сохраняется, часть ее переходит во внутреннюю. Тела деформируются. После взаимодействия тела движутся с одинаковой скоростью, т. е. их относительная скорость равна 0, поэтому коэффициент восстановления тоже равен нулю, $K=0$. Закон сохранения импульса запишется в виде

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{U}, \quad (4.8)$$

где \vec{U} – скорость тел после взаимодействия.

Закон сохранения энергии примет вид:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2} + Q. \quad (4.9)$$

Из уравнения (4.9) можно найти Q – часть механической энергии, перешедшую во внутреннюю энергию.

На практике предельные случаи взаимодействия осуществляются редко. Чаще взаимодействие носит промежуточный характер, и коэффициент восстановления K имеет значение $0 \leq K \leq 1$.

Чем ближе значение K к единице, тем меньше доля механической энергии, которая переходит во внутреннюю, тем с меньшей погрешностью удар можно отнести к разряду упругих. К упругим телам относятся, например, сталь, дерево, пластмасса. Коэффициент восстановления стальных шаров (0,8÷0,9). К пластическим телам относятся глина, пластилин, воск и т. д., коэффициент восстановления для них близок к нулю.

Рассмотрим частный случай, когда массы шаров равны, т. е. $m_1 = m_2 = m$.

Если до взаимодействия первый шар имел скорость \vec{V}_1 , а второй был неподвижен ($\vec{V}_2 = \vec{0}$), то по закону сохранения импульса имеем:

$$m \vec{V}_1 = m \vec{U}_1 + m \vec{U}_2 \quad (4.10)$$

или

$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2. \quad (4.11)$$

Поскольку ось ОХ направлена от C_1 к C_2 , то из необходимых условий осуществления удара следует $V_{1x} = V_1 \cos 0 = V_1 > 0$ или $V_1 = U_{1x} + U_{2x} > 0$. Кроме того, из этих же условий следует условие $U_{2x} \geq U_{1x}$, или $U_{2x} - U_{1x} \geq 0$. Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} U_{1x} + U_{2x} > 0 \\ U_{2x} - U_{1x} \geq 0 \end{cases} \text{ или а) } \begin{cases} U_{1x} + U_{2x} > 0 \\ U_{2x} - U_{1x} > 0 \end{cases} \Rightarrow 2U_{2x} > 0 \Rightarrow U_{2x} > 0;$$

$$б) \begin{cases} U_{1x} + U_{2x} > 0 \\ U_{2x} - U_{1x} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2U_{2x} > 0 \Rightarrow U_{2x} > 0.$$

Следовательно $U_{2x} = U_2 \cos(\vec{U}_2, \hat{OX}) > 0$, или $\cos(\vec{U}_2, \hat{OX}) > 0$.

Так как удар прямой центральный, то возможны варианты $\vec{U}_2 \uparrow\uparrow OX$, $\alpha=0$, $\cos 0=1$ или $\vec{U}_2 \uparrow\downarrow OX$, $\alpha=\pi$, $\cos \pi=-1$. Видим, что последний вариант осуществиться не может, поскольку это противоречит требованию $U_{2x} > 0$, вытекающему из условий осуществления удара.

Из (4.11) следует, что $V_1^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \alpha$, $\alpha = (\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2)$. Уже установлено, что $\vec{U}_2 \uparrow\uparrow \vec{V}_1 \uparrow\uparrow OX$. Если $\vec{U}_1 \uparrow\uparrow \vec{U}_2$, $\alpha=0$ и $V_1^2 = (U_1 + U_2)^2 \Rightarrow V_1 = U_1 + U_2$. При $\vec{U}_2 \uparrow\downarrow \vec{U}_1$, $\alpha=\pi$ имеем $V_1 = U_{1x} + U_{2x} = -U_1 + U_2 > 0 \Rightarrow V_1 + U_1 = U_2$, или $U_2^2 = V_1^2 + U_1^2 + 2U_1V_1$. Из закона сохранения энергии имеем. Следовательно, $V_1^2 = U_1^2 + V_1^2 + U_1^2 + 2U_1V_1 + Q/2m$, или $2U_1^2 + 2U_1V_1 + Q/2m = 0$. Следовательно, имеем для этого случая $2U_1(U_1 + V_1) + Q/2m = 0$. Последнее равенство в случае не абсолютно упругого удара не может иметь место, поскольку сумма двух неотрицательных слагаемых не может быть равна нулю. В случае абсолютно упругого удара условие $2U_1(U_1 + V_1) = 0$ выполняется при $U_1 = 0$. При этом, из равенства $V_1 = -U_1 + U_2$ имеем $V_1 = U_2$. В итоге нашли, что в рассматриваемой ситуации может реализоваться только ситуация, когда векторы скоростей шаров до удара и после удара направлены одинаково с осью OX и при этом их модули связаны соотношением $V_1 = U_1 + U_2$, которое в случае абсолютно упругого удара принимает вид $V_1 = U_2$, $U_1 = 0$.

Для вектора относительной скорости шаров после удара $\vec{U}_2 - \vec{U}_1$ ($-\vec{U}_1 \uparrow\downarrow \vec{V}_1$) с учётом того, что $U_{2x} \geq U_{1x}$ или $U_{2x} - U_{1x} \geq 0$ имеем: $(\vec{U}_2 - \vec{U}_1)_x = U_{2x} - U_{1x} = U_2 - U_1$, а также $|\vec{U}_2 - \vec{U}_1| = U_2 - U_1$.

Таким образом, для коэффициента восстановления K из (4.7) находим:

$$K = \frac{U_2 - U_1}{V_1} \quad (4.12)$$

Из равенства $V_1 = U_1 + U_2$ и (4.12), получим:

$$U_1 = \frac{(1-K)V_1}{2}, \quad (4.13)$$

$$U_2 = \frac{(1+K)V_1}{2}. \quad (4.14)$$

В случае абсолютно упругого удара $K=1$, тогда $V_1 = U_2$, $U_1 = 0$. Шары при ударе обмениваются импульсами. При абсолютно неупругом ударе $K=0$ и:

$$U_1 = U_2 = \frac{V_1}{2}. \quad (4.15)$$

4.2 Методика работы и описание установки

Установка состоит из двух шаров А и В на бифилярных подвесах, укрепленных на кронштейне F (рисунок 4.2)

Длину нитей можно изменять с помощью винтов и тем самым осуществлять центровку шаров. Установка снабжена шкалой S для измерения углов отклонения шаров и магнитами M_1 и M_2 , при помощи которых шары удерживаются в отклонённом положении.

Если шар отклонить от положения равновесия, он приобретёт скорость V . Ее можно найти, используя закон сохранения энергии.

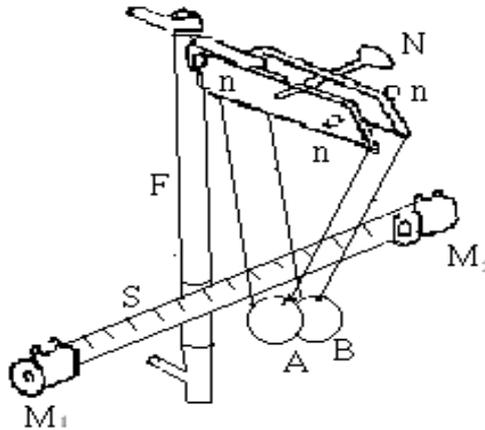


Рисунок 4.2

В отклонённом положении (рисунок 4.3) неподвижный шар А имеет потенциальную энергии $W_n = mgh$.

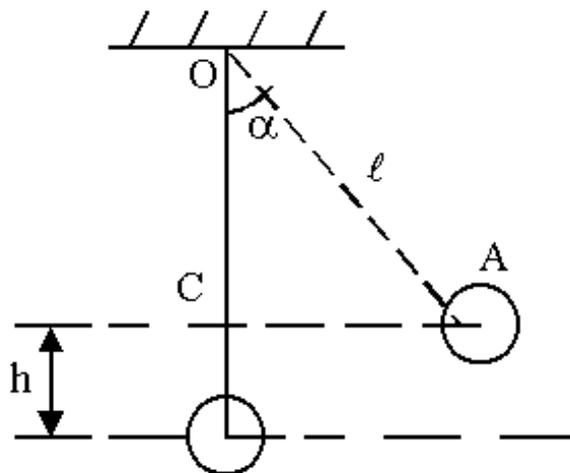


Рисунок 4.3

Высоту h можно определить из треугольника OAC:

$$OC = l - h = l \cos \alpha,$$

откуда

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2(\alpha/2). \quad (4.16)$$

При прохождении положения равновесия шар обладает кинетической энергией

$$W_{\kappa} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (4.17)$$

где I – момент инерции шара, ω – его угловая скорость в момент прохождения положения равновесия.

Если радиус шара R значительно меньше длины нити l , то шар можно считать материальной точкой, момент инерции которой равен, а угловая скорость $\omega = V/l$.

Подставив I и ω в формулу кинетической энергии, получим:

$$W_{\kappa} = \frac{mV^2}{2}. \quad (4.19)$$

По закону сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mV^2}{2}, \quad (4.20)$$

откуда

$$V = \sqrt{2gh}. \quad (4.21)$$

Подставив в (4.21) h (4.16), получим:

$$V = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4.22)$$

Для определения отношения масс шаров воспользуемся законом сохранения импульса, если один из шаров неподвижен (например, второй шар): $m_1 \vec{V}_1 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2$. Проектируя это векторное равенство с учётом замечаний к выражению (4.3) о соотношениях проекций векторов скоростей шаров до и после удара имеем:

$$m_1 V_1 = m_1 U_{1x} + m_2 U_2 \quad (4.23)$$

где $m_1 V_1$ – проекция на ось ОХ импульса первого шара до удара, $m_1 U_{1x}$ – проекция на ось ОХ импульса первого шара после удара, $m_2 U_2$ – проекция на ось ОХ импульса второго шара после удара.

Проекция U_{1x} может быть и положительной и отрицательной, в зависимости от соотношения масс участвующих в ударе шаров.

Рассмотрим возможные варианты со знаками у этой проекции скорости. Из (4.23) следует:

$$m_2 U_2 = m_1 (V_1 - U_{1x}) \quad (4.23a)$$

Из закона сохранения энергии при не абсолютно упругом ударе имеем:

$$m_1 (V_1^2 - U_1^2) = m_2 U_2^2 + 2Q. \quad \vec{U}_1 \parallel OX \Rightarrow U_1^2 = U_{1x}^2, \text{ или}$$

$$\overbrace{m_1(V_1 - U_{1x})}^{m_2 U_2 \text{ (из (4.23a))}}(V_1 + U_{1x}) = m_2 U_2^2 \overbrace{(1 + 2Q/m_2 U_2^2)}^{b^2}; \quad b^2 > 1; \quad (4.23б)$$

$$\Rightarrow m_2 U_2 (V_1 + U_{1x}) = m_2 U_2^2 b^2 \Rightarrow U_2 = (V_1 + U_{1x})/b^2$$

Подставляя в последнее равенство из (4.23а) $U_2 = (m_1/m_2)(V_1 - U_{1x})$ находим $(V_1 + U_{1x}) = (m_1/m_2)b^2(V_1 - U_{1x})$, или:

$$V_1(1 - (m_1/m_2)b^2) = -U_{1x}(1 + (m_1/m_2)b^2) \quad (4.23в)$$

В (4.23в) возможны три варианта.

1. $(m_1/m_2)b^2 = 1 \Rightarrow U_{1x} = 0$, то есть первый шар после удара неподвижен;
2. $(m_1/m_2)b^2 > 1 \Rightarrow (1 - (m_1/m_2)b^2) < 0 \quad U_{1x} > 0 \quad \vec{U}_1 \uparrow \uparrow OX$, то есть первый шар после удара движется в направлении оси OX;
3. $(m_1/m_2)b^2 < 1 \Rightarrow (1 - (m_1/m_2)b^2) > 0 \quad U_{1x} < 0 \quad \vec{U}_1 \uparrow \downarrow OX$, то есть первый шар после удара движется в направлении, противоположном оси OX.

Для абсолютно упругого удара $b = 1$ и в указанных выше условиях величина $(m_1/m_2)b^2$ заменяется на отношение масс (m_1/m_2) .

Таким образом, для отношения масс участвующих в ударе шаров нужно пользоваться выражением:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{U_2}{V_1 - U_{1x}} \quad (4.24)$$

где знак U_{1x} определяется направлением вектора скорости \vec{U}_1 первого шара после удара.

Учитывая соотношения (4.22) и (4.24), получим:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2} \mp \sin \frac{\alpha_1}{2}}, \quad (4.25)$$

где α_0 – угол отклонения первого шара до удара, α_1 – угол отклонения первого шара после удара, φ – угол отклонения второго шара после удара. Знаки в знаменателе (4.25) выбираются следующим образом: знак "–", если первый шар после удара движется в направлении оси OX ($\vec{U}_1 \uparrow \uparrow OX$); знак "+", если первый шар после удара движется в направлении, противоположном оси OX ($\vec{U}_1 \uparrow \downarrow OX$)

При определении коэффициента восстановления шаров их перед ударом отклоняют в разные стороны на одинаковые углы α_0 . Если шары имеют равные массы, то шары до удара и после него будут иметь скорости противоположного направления $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$ и $\vec{U}_1 = -\vec{U}_2$, а модули скоростей до и после удара будут равными, т. е. $V_1 = V_2 = V$ и $U_1 = U_2 = U$.

Поэтому для коэффициента восстановления шаров будет иметь:

$$K = \frac{|\vec{U}_1 - \vec{U}_2|}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} = \frac{2U}{2V} = \frac{U}{V}. \quad (4.26)$$

Следовательно, $U = KV$.

Для последовательности из нескольких ударом можно записать: после первого удара: $U_1 = KV$, после второго удара: $U_2 = KU_1$ и. т. д. После n -го удара: $U_n = KU_{n-1}$.

Перемножив все левые стороны равенств и все правые стороны равенств и произведя сокращения, получим:

$$K = \sqrt[n]{\frac{U_n}{V}}, \quad (4.27)$$

где V – скорость любого из шаров до удара, U_n – скорость этого же шара после n -го удара.

Подставив в (4.27) V и U_n с учётом (4.22), получим:

$$K = \sqrt[n]{\frac{\sin(\alpha_n/2)}{\sin(\alpha_0/2)}}, \quad (4.28)$$

где α_0 – угол отклонения шара до удара, α_n – угол отклонения шара после n -го удара.

4.3 Порядок выполнения работы

4.3.1 Определение отношения масс соударяющихся шаров

При проведении измерений и расчётов следует придерживаться следующих требований: а) результаты всех измерений необходимо записать в таблицу 4.1; б) для величин, найденных в результате прямых измерений, вычислить средние выборочные значения, случайные погрешности, полные погрешности и относительные погрешности; в) расчёты отношений масс исследуемых тел выполнять используя средние значения величин, найденных в результате прямых измерений.

1. Проверить центровку шаров. Установить шары в положение равновесия и заметить положение нитей обоих шаров на шкале, т. е. те точки, в которых плоскости нитей пересекают шкалу.

2. Шар А вывести из положения равновесия, закрепив с помощью магнита или рукой, и отметить по шкале угол отклонения α_0 (в градусах) – рисунок 4.2.

3. Выключить магнит (или отпустить шар) и заметить углы отклонения шара В – φ и шара А – α_1 после удара. Повторить измерения не менее пяти раз. При проведении повторных измерений необходимо обеспечить одинаковые значения (в пределах приборной погрешности) величины α_0 .

4. Произвести такие же измерения, вначале отклоняя шар В на угол α_0 . Измерения повторить не менее пяти раз. При проведении повторных измерений необходимо обеспечить одинаковые значения (в пределах приборной погрешности) величины α_0 .

5. По формуле (4.25) найти отношение масс шаров.

6. Вывести формулы для погрешностей отношения масс и вычислить их.

7. Результаты опытов занести в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

Параметр	№ изм.				
	1	2	3	4	5
$\alpha_{0,i}$					
$\langle \alpha_0 \rangle$					
$\Delta \alpha_{0,i}$					
$(\Delta \alpha_0)_{сл}$					
$(\Delta \alpha_0)_{пр}$					
$\Delta \alpha_0$					
$\delta_{\alpha_0}, \%$					
φ_i					
$\langle \varphi \rangle$					
$\Delta \varphi_i$					
$\Delta \varphi_{сл}$					
$\Delta \varphi_{пр}$					
$\Delta \varphi$					
$\delta_{\varphi}, \%$					
$\alpha_{1,i}$					
$\langle \alpha_1 \rangle$					
$\Delta \alpha_{1,i}$					
$(\Delta \alpha_1)_{сл}$					
$(\Delta \alpha_1)_{пр}$					
$\Delta \alpha_1$					
$\delta_{\alpha_1}, \%$					

Рассчитать отношение масс исследуемых тел и погрешности, используя средние значения величин, найденных в результате прямых измерений и записать в таблицу 4.2.

Таблица 4.2

$\langle m_1/m_2 \rangle$	$\langle \Delta(m_1/m_2) \rangle$	$\delta_{(m_1/m_2)}$

4.3.2 Определение коэффициента восстановления шаров

1. Установить шары в положение равновесия и заметить положение нитей по шкале.

2. Отклонить оба шара на одинаковые углы α_0 (например, 5^0).

3. Отпустив (отключив магниты) шары, привести их в соударение.

Измерить угол отклонения α_n одного из шаров после n -ГО удара.

4. Опыт повторить не менее пяти раз (с одним и тем же числом ударов n , равным, например 3). При проведении повторных измерений необходимо обеспечить одинаковые значения (в пределах приборной погрешности) величины α_0 .

5. Результаты занести в таблицу 4.3.

Таблица 4.3

№ изм.	α_0	n	$\alpha_{n,i}$	$\langle \alpha_n \rangle$	$\Delta\alpha_{n,i}$	$(\Delta\alpha_n)_{сл}$	$(\Delta\alpha_n)_{пр}$	$\Delta\alpha_n$	δ_{α_n}
1	5^0	3							
2									
3									
4									
5									
1	7^0	4							
2									
3									
4									
5									

6. По формуле (4.28) рассчитать коэффициент восстановления $\langle K \rangle$.

7. Определить полную и относительную погрешности: ΔK , $\delta_K = \Delta K / \langle K \rangle \cdot 100\%$.

8. Результаты расчётов занести в таблицу 4.4.

Таблица 4.4

α_0	n	$\langle K \rangle$	ΔK	δ_K
5^0	3			
7^0	4			

9. Повторить опыт, выбрав другие угол начального отклонения шаров α_0 (например, 7^0) и число ударов шаров n .

4.3.3 Определение скорости шаров после неупругого удара

1. Установить шары в положение равновесия и заметить положение нитей по шкале.
2. На один из шаров укрепить небольшой кусочек пластилина такой массы, чтобы масса шара почти не изменилась.
3. Отвести один из шаров от положения равновесия на угол α_0 .
4. Отпустить шар и заметить угол отклонения шаров α_1 после удара.
5. Повторить опыт не менее пяти раз. При проведении повторных измерений необходимо обеспечить одинаковые значения (в пределах приборной погрешности) величины α_0 . Результаты занести в таблицу 4.5.

Таблица 4.5

Параметр	№ изм.				
	1	2	3	4	5
$\alpha_{0,i}$					
$\langle \alpha_0 \rangle$					
$\Delta \alpha_{0,i}$					
$(\Delta \alpha_0)_{сл}$					
$(\Delta \alpha_0)_{np}$					
$\Delta \alpha_0$					
$\delta_{\alpha_0}, \%$					
$\alpha_{1,i}$					
$\langle \alpha_1 \rangle$					
$\Delta \alpha_{1,i}$					
$(\Delta \alpha_1)_{сл}$					
$(\Delta \alpha_1)_{np}$					
$\Delta \alpha_1$					
$\delta_{\alpha_1}, \%$					

6. По формуле $U = V_1 / (1 + m_1 / m_2)$ вычислить скорость шаров после неупругого удара, учитывая, что $m_1 / m_2 \approx 1$ и $V_1 = 2 \sin \frac{\alpha_0}{2} \sqrt{gl}$, где l – длина нитей.

7. Определить среднее значение $\langle U \rangle$ и вычислить полную и относительную погрешности $\langle \Delta U \rangle$ и \mathcal{E}_U и записать полученные результаты в таблицу 4.6.

Таблица 4.6

$\langle U \rangle$, м/с	ΔU , м/с	δ_U , %

4.4 Контрольные вопросы

1. Сформулировать и записать закон сохранения импульса.
2. Сформулировать и записать закон сохранения энергии в механике.
3. Вывести формулу скоростей шаров после упругого и неупругого ударов.
4. Вывести рабочие формулы для отношения масс шаров, скорости шаров перед и после удара, коэффициент восстановления шаров.
5. Каков физический смысл коэффициента восстановления шаров K ?
6. Вывести формулу для вычисления погрешностей.

4.5 Техника безопасности

1. Перед выполнением работы проверить прочность закрепления всех частей установки.
2. Не включать электрическую схему без проверки преподавателем или лаборантом.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5.
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ
 ПОМОЩИ МАЯТНИКА**

Цель работы: определить ускорение свободного падения при помощи математического маятника.

5.1 Основные понятия и закономерности

Гармоническими колебаниями физической величины α называется процесс, в котором она изменяется с течением времени t по синусоидальному (или косинусоидальному) закону:

$$\alpha = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin \varphi(t) \quad (5.1)$$

где A – амплитуда колебаний – максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего значения за период, ω – циклическая частота колебания, величина $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ носит название фазы колебания, φ_0 – начальная фаза колебаний ($\varphi_0 = const$). Размерности α и A совпадают. График такого колебания представлен на рисунке 5.1.

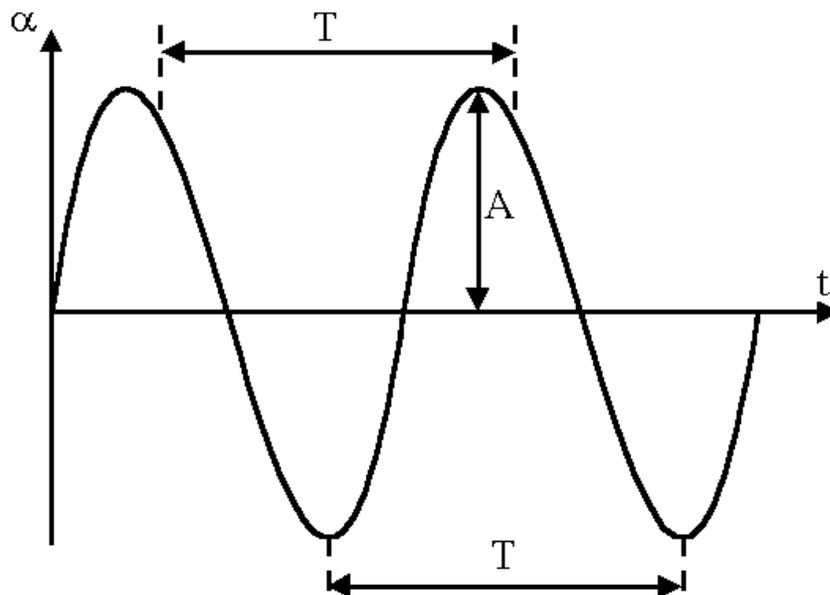


Рисунок 5.1

Периодом колебания называется наименьший промежуток времени $T > 0$, удовлетворяющий условию $\alpha(t+T) = \alpha(t)$, $\forall t$. Известно, что функция $\sin \varphi(t)$ имеет период 2π . Поэтому из определения периода имеем: $\sin[\varphi(t) + 2\pi] = \sin \varphi(t)$, то есть $\sin[\omega(t + 2\pi / \omega) + \varphi_0] = \sin(\omega t + \varphi_0)$. Следовательно, период и циклическая частота связаны соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.2)$$

Если начальная фаза φ_0 равна $\pi/2$, то уравнение гармонического колебания записывается в виде:

$$\alpha = A \cos \omega t \quad (5.3)$$

Важнейшими механическими системами, способными при определённых условиях совершать гармонические колебания, являются физический и математический маятники.

Физическим маятником называется тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси (*ось вращения*), не проходящей через его центр тяжести (точка C на рисунке 5.2). Ось вращения, которую обозначим, например, символом x , перпендикулярна к плоскости действия сил. На рисунке 5.2 ось вращения проходит через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка. Выбор направления оси не влияет на результаты.

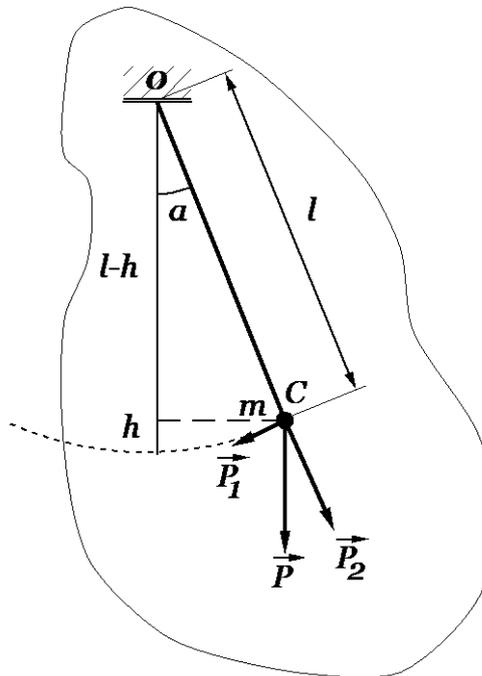


Рисунок 5.2

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити и колеблющейся под действием силы тяжести в плоскости, перпендикулярной горизонтальной оси вращения. Эту плоскость будем называть плоскостью колебаний. Хорошим приближением математического маятника является тяжёлый шар, подвешенный на тонкой длинной нити (диаметр шара во много раз меньше длины нити, масса которой во много раз меньше массы шара), второй конец которой закреплён неподвижно.

Качественно понять механизм движения рассматриваемых систем проще на примере математического маятника. Если груз маятника неподвижен и находится в положении равновесия (рисунок 5.3, точка C), на него действуют уравновешивающие друг друга сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и сила натяжения \vec{F}_n . При отклонении маятника на некоторый угол α от положения

равновесия силу тяжести $\vec{P}=m\vec{g}$ можно разложить на две составляющие (рисунок 5.4).

$$P_1 = P \sin \alpha \quad \text{и} \quad P_2 = P \cos \alpha \quad (5.4)$$

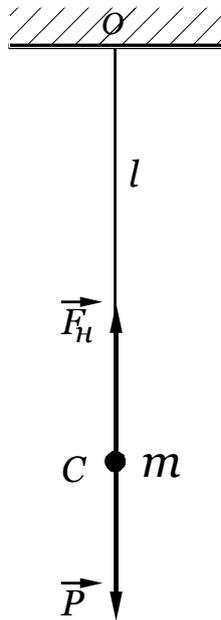


Рисунок 5.3

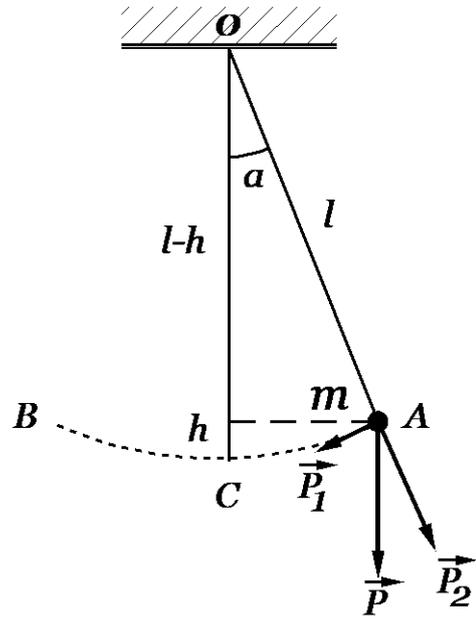


Рисунок 5.4

Сила \vec{P}_1 направлена вдоль касательной к траектории движения маятника и обеспечивает движение по дуге окружности к положению равновесия. При достижении положения равновесия (рисунок 5.4, точка C) $\vec{P}_1 = \vec{0}$, шар по инерции проходит это положение, а затем его движение замедляется и он останавливается, достигнув точки B. После максимального отклонения от положения равновесия на угол α шар будет двигаться обратно и такие движения будут повторяться многократно – шар будет колебаться.

Для получения закона (уравнения), описывающего движение рассматриваемых систем вначале рассмотрим математическую модель движения физического маятника вокруг неподвижной оси. При математическом описании рассматриваемой системы неподвижность оси вращения математического маятника существенно упрощает расчёты. Обозначения всех используемых величин приведены на рисунке 5.5. Уравнение, описывающее движение математического маятника можно будет получить, как частный случай из уравнения движения физического маятника.

Все материальные точки, из которых состоит вращающееся вокруг неподвижной оси твёрдое тело, движутся по окружностям с центрами, расположенными на оси вращения (рисунок 5.5). При этом векторы скоростей всех указанных точек направлены по касательным к упомянутым окружностям. Для проекции момента импульса i -ой материальной точки относительно неподвижной оси вращения x имеем $L_{i,x} = (\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i)_x =$

$$= \overbrace{|\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i| \sin(\pi/2)}^{\sin \theta_i} = m_i \overbrace{(R_i \sin \theta_i)}^{r_i} v_i = m_i r_i^2 \omega, \quad \text{а для всего тела}$$

$$L_x = \sum_i L_{i,x} = \omega \sum_i m_i r_i^2. \quad \text{Здесь для расстояния } i\text{-ой материальной точки от оси}$$

вращения введено обозначение $r_i = R_i \sin \theta_i$. Моментом инерции материальной точки относительно оси x называют произведение массы этой точки m на квадрат её расстояния r до оси, то есть $I_x = m \cdot r^2$. Моментом инерции твёрдого тела относительно оси x называют сумму моментов инерции всех материальных точек, из которых состоит это тело, относительно указанной оси, то есть $I_x = \sum_i m_i r_i^2$.

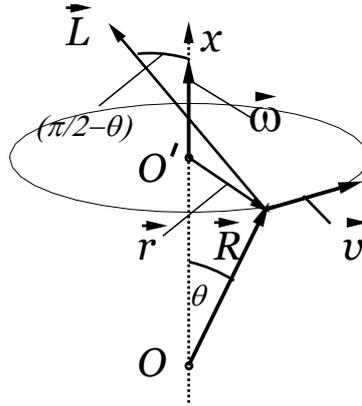


Рисунок 5.5

Из закона изменения момента импульса $d\vec{L}_O/dt = \vec{M}_O$ находим, что для случая вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси x закон изменения момента импульса принимает вид $d(I_x \omega)/dt = M_x$, или $I_x \varepsilon = M_x$, где $\varepsilon = d\omega/dt$ проекция вектора углового ускорения на ось вращения. Формула $I_x \varepsilon = M_x$ называется основным законом динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. При этом вектор углового ускорения определяется, как $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt = d^2\vec{\alpha}/dt^2$, а вектор малого угла $\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{e}_\alpha$, где \vec{e}_α – орт вектора $\vec{\alpha}$. Направление вектора $\vec{\alpha}$ определяется правилом правого винта.

Необходимость малости угла отклонения вытекает из следующих рассуждений. По определению момент вращающей силы $\vec{M} = (m\vec{g}) \times \vec{r}$, а его длина определяется выражением $M = mgl \sin \alpha$ (для длины радиус-вектора точки приложения силы использовано обозначение $|\vec{r}| = l$). И только при малых углах отклонения маятника имеем: $M = mgl \sin \alpha \approx mgl \alpha$, т. к. $\sin \alpha \approx \alpha$. С учётом введённого ранее вектора малого угла $\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{e}_\alpha$ для вектора момента силы имеем $\vec{M} = -mgl \vec{\alpha}$, а для его проекции на ось x $M_x = -mgl \alpha$. Знак минус здесь означает, что векторы \vec{M} и $\vec{\alpha}$ для рассматриваемой механической системы всегда противоположно направлены. Таким образом имеем уравнение движения математического маятника при малых углах отклонения $I_x \varepsilon = -mgl \alpha$, или с учётом того, что $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$:

$$I d^2\alpha/dt^2 = -mgl \alpha, \quad (5.5)$$

После несложных преобразований находим:

$$I(d^2\alpha/dt^2) = -mgl\alpha \Rightarrow d^2\alpha/dt^2 + (mgl/I)\alpha = 0. \quad (5.6)$$

Обозначив

$$mgl/I = \omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{mgl/I}, \quad (5.7)$$

получим уравнение:

$$d^2\alpha/dt^2 + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (5.8)$$

где величину ω_0 назовём циклической частотой колебаний маятника. Причина такого названия выяснится далее.

Для математического маятника можно повторить все рассуждения с учётом того, что момент инерции в этом случае есть момент инерции материальной точки $I = ml^2$, $mgl/I = g/l = \omega_0^2$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Полезно рассмотреть вариант вывода уравнения (5.8) из закона сохранения энергии, поскольку в этом случае методика получения результата носит более универсальный и общий с точки зрения физики и применима к другим системам, например к колебаниям пружинного маятника, колебаниям вблизи поверхности жидкости тела, частично погружённого в эту жидкость и т. п.

Полная механическая E энергия маятника определяется выражением:

$$E = T + U,$$

где $T = I\omega^2/2$ – кинетическая энергия, $U = mgh + U_0$ – потенциальная энергия, h – высота подъёма центра тяжести по отношению к состоянию равновесия, U_0 – произвольная постоянная (чаще всего выбирают $U_0 = 0$). Для потенциальной энергии, исходя из рисунка 5.2 имеем, $mgh = mgl(1 - \cos\alpha) + U_0$, где l – расстояние от центра тяжести до оси вращения. Таким образом, для полной механической энергии имеем:

$$E = I\omega^2/2 + mgl(1 - \cos\alpha) + U_0.$$

Используя тригонометрическое тождество $1 - \cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$ при малых углах отклонения маятника $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ и можем записать:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} + U_0 = \text{const}$$

В последнем равенстве используется тот факт, что в случае пренебрежения силами трения рассматриваемая система является консервативной.

После дифференцирования по времени имеем уравнение:

$$I\omega \frac{d\omega}{dt} + mgl\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$$

Которое полностью совпадает с (5.8).

Точно также можно получить уравнение движения математического маятника. Только здесь выражение для полной механической энергии имеет вид:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} + U_0 = \text{const}$$

где все величины определены ранее. С учётом связи величин $v = \omega l$, $T = mv^2/2 = ml^2\omega^2/2 = I\omega^2/2$ и после дифференцирования получим уравнение:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – циклическая частота колебаний физического маятника. Таким образом, вновь получили уравнение, совпадающее с (5.8).

Аналогичным путём можно получить уравнения движения и других колебательных систем.

Уравнение (5.8) – уравнение гармонического осциллятора. Решение этого уравнения имеет вид уравнения гармонического колебания

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.9)$$

где, как и ранее, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ для математического маятника и $\omega_0 = \sqrt{mgl/I}$ для физического маятника.

Из соотношения (5.9) следует, что при малых углах отклонения математический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом колебания T .

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.10)$$

Формулу (5.10) периода колебаний математического маятника можно использовать для определения ускорения свободного падения. Из этой формулы также следует, что период колебаний математического маятника не зависит от его массы.

5.2 Описание установки и теория метода

Математический маятник представляет собой массивный шар небольшого размера, подвешенный на длинной двойной нити, чтобы колебания происходили строго в одной плоскости (рисунок 5.6).

На перекладине ВС подвешен на двойной нити шар А. Длину математического маятника можно изменять, натягивая нить на барабан. Периоды колебаний математического маятника T и длины l маятника связаны соотношением (5.10), из которого находим для ускорения свободного падения g следующее соотношение:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (5.11)$$

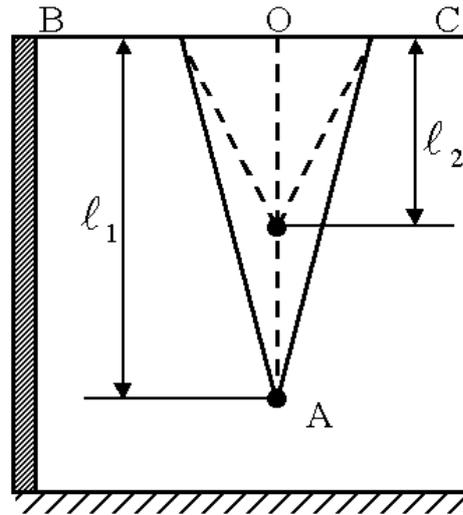


Рисунок 5.6

Длина маятников в формуле (5.11) определяется как расстояние от точки O до центра шара A (рисунок 5.6).

5.3 Порядок выполнения работы

1. Установить максимальную длину математического маятника l , измерить её и записать в таблицу 5.2.
2. Определить с помощью секундомера время t полных $N = (20 \div 30)$ колебаний. Выполнить измерения времени не менее пяти раз. Во всех опытах использовать одно и тоже выбранное (неизменное) число полных колебаний. Углы отклонения маятника должны быть по возможности одинаковыми и небольшими ($4^\circ \div 6^\circ$). Результаты всех измерений занести в таблицу 5.1 и вычислить среднее выборочное значения $\langle t \rangle$, случайные погрешности, полные погрешности и относительные погрешности.

Таблица 5.1.

N изм.	$t_i, \text{с}$	$\langle t \rangle, \text{с}$	$\Delta t_i, \text{с}$	$\Delta t_{cl}, \text{с}$	$\Delta t_{np}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$\varepsilon_t, \%$
1							
2							
3							
4							
5							

4. Используя средние значения $\langle t \rangle$, найденные в результате прямых измерений, вычислить средний период колебаний:

$$\langle T \rangle = \frac{\langle t \rangle}{N}. \quad (5.12)$$

5. По формуле (5.11) вычислить ускорение свободного падения g , рассчитать погрешности периода колебаний и ускорения свободного

падения и записать результаты в таблицу 5.2. Сравнить найденное экспериментально значение ускорения свободного падения с табличным значением $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Таблица 5.2.

$l, \text{ м}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\Delta T, \text{ с}$	$\langle g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\Delta g, \text{ м/с}^2$	$g_0, \text{ м/с}^2$
					$g_0 = 9,81$

6. Изменить длину математического маятника l и выполнить действия, указанные в п. п. 2, 3.

5.4 Контрольные вопросы

1. Какой процесс называется гармоническим колебанием?
2. Что называется физическим маятником?
3. Вывести формулу периода математического маятника.
4. Зависит ли период колебаний математического маятника от его массы.
5. Вывести формулы погрешностей для всех определяемых величин.
6. Почему формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ можно пользоваться только в том случае, когда амплитуда колебаний маятника мала?

5.5 Техника безопасности

1. При работе с математическим маятником следить за тем, чтобы нити не закручивались и не соскальзывали с барабана.
2. Углы отклонения маятников от положения равновесия не должны превышать 6° .

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6(2.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЁМКОСТЕЙ ГАЗОВ ПО МЕТОДУ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Цель работы: определение отношения теплоёмкости воздуха при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме ($C_p / C_v = \gamma$).

6.1 Основные понятия и закономерности

Количественной характеристикой процесса теплопередачи, осуществляемого некоторой термодинамической системой с окружающими телами, является теплоёмкость C . При описании процесса теплопередачи массу рассматриваемой системы считаем неизменной.

Если в процессе теплопередачи рассматриваемая система получила количество тепла ΔQ , а её температура при этом изменилась на величину ΔT , то **теплоёмкостью** $\langle C \rangle$ этой системы в диапазоне температур от T до $T + \Delta T$ называют отношение:

$$\langle C \rangle = \Delta Q / \Delta T, \quad (6.1)$$

которая, как это следует из определения, по смыслу является средней величиной в рассматриваемом температурном диапазоне.

Для теплоёмкости системы при конкретной температуре T нужно перейти к дифференциальной форме, то есть:

$$C = dQ / dT \quad (6.1a)$$

Из определения следует, что в СИ теплоёмкость измеряется в *Джс / К*.

Если температурной диапазон выбран не слишком широким, то теплоёмкость системы, вычисленная по формуле (6.1a), будет в нём практически постоянной и будет совпадать со средней теплоёмкостью по данному диапазону температур, вычисленной по формуле (6.1). Если не оговаривается противное, данное условие считается выполненным и скобки усреднения опускаются.

Следует отметить не очевидные из определения факты зависимости теплоёмкости системы от её массы, химического состава, вида и условий процесса теплопередачи.

В зависимости от массы или от количества вещества различают теплоёмкости удельную и молярную.

Удельной теплоёмкостью однородной системы массой m называют отношение теплоёмкости данной системы к её массе, то есть:

$$c = C / m = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (6.2)$$

Видим, что в СИ удельная теплоёмкость измеряется в *Джс / (кг · К)*.

Молярной теплоёмкостью однородной системы, содержащей количество вещества, равное $\nu = m / \mu = N / N_A$ (μ – молярная масса вещества рассматриваемой системы; N_A – число Авогадро (Авогадро Амедео, итал.,

1776 – 1856)), называют отношение теплоёмкости данной системы к количеству вещества этой системы, то есть:

$$C_{\mu} = C / \nu = \frac{1}{\nu} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\mu}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (6.3)$$

В СИ молярная теплоёмкость измеряется в Дж/(моль·К).

Из соотношений (6.2) и (6.3) можно определить количество теплоты, получаемое телом:

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T = C_{\mu} \frac{m}{\mu} \Delta T. \quad (6.4)$$

Отметим, что термин «количество теплоты, получаемое телом» не означает, что эта величина положительна. Её знак зависит от знака приращения температуры и от знака теплоёмкости. Существуют системы, теплоёмкость которых отрицательна!

Связь удельной и молярной теплоёмкостей c и C_{μ} :

$$C_{\mu} = \mu c \quad (6.5)$$

Теплоёмкость газов сильно зависит от условий передачи тепла. Это связано с тем, что подводимое к газу тепло расходуется не только на повышение внутренней энергии газа, которое обуславливает повышение его температуры, но и на совершение работы против внешних сил.

Теплоёмкость рассматриваемой системы при постоянном объёме обозначается C_V и определяется выражением $C_V = dQ/dT|_{V=const}$, а при постоянном давлении обозначается C_P и определяется выражением $C_P = dQ/dT|_{P=const}$. Если количество вещества в системе равно 1 молю, то в обозначении теплоёмкости добавляется индекс μ , например: $C_{\mu V}$

Чтобы установить различие между теплоёмкостями C_P и C_V , воспользуемся первым началом (законом) термодинамики который в дифференциальной форме формулируется так:

изменение внутренней энергии dU рассматриваемой системы равно количеству теплоты dQ , сообщаемого системе за вычетом работы dA , совершаемой системой над внешними телами (против внешних сил):

$$dU = dQ - dA, \quad (6.6)$$

где U – внутренняя энергия системы, т. е. сумма всех видов кинетической и потенциальной энергии всех составных частей системы: молекул, атомов, электронов и т. д., за исключением кинетической энергии системы как целого и потенциальной энергии системы во внешних полях. Работа dA и теплота dQ – две формы передачи энергии от одного тела к другому.

Далее нам потребуется понятие числа степеней свободы рассматриваемых объектов. Числом степеней свободы i механической системы называется наименьшее число независимых величин (координат), задание которых однозначно определяет положение системы. Поскольку в

любой системе координат положение материальной точки в пространстве однозначно определяется тремя координатами (декартовыми прямоугольными x, y, z , сферическими ρ, θ, φ , цилиндрическими ρ, θ, z , или какими-либо другими), число степеней свободы материальной точки равно 3, то есть $i=3$. Каждой из степеней свободы материальной точки (например, одноатомной молекулы) можно сопоставить способность перемещаться относительно одной из трёх координатных осей и, следовательно, способность запасать кинетическую энергию хаотического поступательного движения. Многоатомные молекулы нельзя считать материальной точкой, поскольку они могут кроме энергии, связанной с поступательным движением, иметь энергию за счёт вращательного движения вокруг некоторых осей (в общем случае независимых осей три). Вращательному движению вокруг этих осей также сопоставляют степени свободы.

Для молекул идеального газа, вследствие равноправия всех направлений и осей вращения (здесь оси вращения упомянуты в связи с тем, что далее результаты для идеальных газов будут применяться с некоторыми оговорками к газам, состоящим из многоатомных невзаимодействующих молекул) при хаотическом движении, кинетические энергии хаотического поступательного движения и хаотического вращательного движения, соответствующие каждой степени свободы, равны между собой.

Для идеального газа внутренняя энергия представляет собой только кинетическую энергию хаотического (теплого) движения молекул и равна:

$$U = \frac{i}{2} \cdot R \cdot \frac{m}{\mu} \cdot T, \quad (6.7)$$

где i – число степеней свободы.

Для идеального газа «идеальных многоатомных газов» (кавычки поставлены в связи упомянутой выше оговоркой о применении результатов для идеальных газов к газам, состоящим из многоатомных невзаимодействующих молекул) справедливы следующие утверждения:

$i=3$ для одноатомного газа (поступательные степени свободы);

$i=5$ для двухатомного газа (три поступательные и две вращательные степени свободы);

$i=6$ для трех и многоатомных газов (три поступательные и три вращательные степени свободы).

Работа газа определяется выражениями:

$dA = PdV$ – в элементарном процессе,

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV \text{ – в конечном процессе,} \quad (6.8)$$

где P – давление, dV – приращение объёма газа.

Рассмотрим применение первого начала термодинамики к изопротессам для данной массы газа. Изопротессами называются

термодинамические процессы, происходящие при постоянном значении одного из параметров состояния P, V, T .

Изохорный (изохорический) процесс. Здесь $V = const \Rightarrow dV = 0$; $dA = PdV = 0$ и первое начало термодинамики принимает вид:

$$dU = dQ_V - dA_V = dQ_V, \quad (6.9)$$

Тепло, подводимое к системе, идёт на увеличение ее внутренней энергии (нагревание газа) и из соотношения (6.2) находим:

$$dU = dQ_V = c \cdot m \cdot dT, \quad (6.10)$$

или:

$$dU = \frac{m}{\mu} \cdot C_{\mu V} \cdot dT, \quad (6.11)$$

В идеальном газе выражения (6.10) и (6.11) годятся для любого равновесного процесса, так как внутренняя энергия рассматриваемого количества идеального газа от его объёма не зависит, поскольку молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой и расстояния между ними не влияют на внутреннюю энергию. В реальных газах, внутренняя энергия которых зависит от взаимодействия молекул между собой, выражения (6.10) и (6.11) справедливы только для равновесных изохорных процессов.

Приращение внутренней энергии идеального газа, как это следует из (6.7) равно:

$$dU = \frac{i}{2} \cdot R \cdot \frac{m}{\mu} \cdot dT, \quad (6.12)$$

Сравнивая (6.11) и (6.12), находим:

$$C_{\mu V} = \frac{i}{2} R. \quad (6.13)$$

Изобарный (изобарический) процесс. Здесь $P = const \Rightarrow dA_p = PdV = d(PV)$. Для идеального газа из уравнения Менделеева – Клапейрона имеем:

$$d(PV) = PdV = dA = d\left(\frac{m}{\mu} \cdot RT\right) \Rightarrow dA = \frac{m}{\mu} \cdot R dT, \quad (6.14)$$

Из первого начала термодинамики для изобарного процесса находим:

$$dU = dQ_p - dA_p \Rightarrow \frac{m}{\mu} C_{\mu V} dT = \frac{m}{\mu} C_{\mu P} dT - \frac{m}{\mu} R dT, \quad (6.15)$$

С учётом того, что $C = \nu C_{\mu} = (m/\mu) C_{\mu}$, выражение (6.15) можно записать в виде:

$$C_V dT = C_p dT - (m/\mu) R dT \Rightarrow C_V dT = (C_p - (m/\mu) R) dT, \quad (6.16)$$

откуда следует выражение, называемое уравнением Майера (Майер Юлиус Роберт, нем., врач, естествоиспытатель, 1814-1878):

$$C_p = C_v + \frac{m}{\mu} R, \text{ (для системы с произвольным количеством вещества)} \quad (6.17)$$

$$C_{\mu p} = C_{\mu v} + R, \text{ (для системы содержащей 1 моль вещества)} \quad (6.17a)$$

Теплоёмкость идеального газа в изобарном процессе превышает его теплоёмкость в изохорном процессе, поскольку в первом случае сообщаемое системе тепло расходуется как на увеличение внутренней энергии системы, так и на совершение работы, в отличие от изохорного процесса, где работа не совершается.

С учётом (6.13) и (6.17) можем записать для теплоёмкости идеального газа:

$$C_{\mu p} = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R, \quad (6.18)$$

Изотермический процесс. Здесь $T = const$, $dT = 0$, откуда следует, что $dU = \nu C_{\mu v} dT = 0$. Внутренняя энергия идеального газа, как упоминалось выше, зависит только от его температуры и, при фиксированной температуре, не изменяется.

Таким образом, для элементарного процесса в данном случае имеем:

$$dQ_T = dA = PdV, \quad (6.19)$$

а для конечного процесса, с учётом связи давления, объёма и температуры для идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона), находим:

$$\Delta Q_T = A_{T,12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (6.20)$$

Из полученного выражения следует, что в случае изотермического расширения ($V_2 > V_1$) идеального газа совершается положительная работа $A_{T,12} > 0$ за счёт положительного количества тепла. И, наоборот, при изотермическом сжатии ($V_2 < V_1$) идеального газа совершается отрицательная работа $A_{T,12} < 0$ за счёт отрицательного количества тепла (отдаваемого системой).

Адиабатический процесс. Процесс, который совершается в системе без теплообмена с окружающей средой, называют **адиабатическим**. На практике для реализации адиабатического процесса в рассматриваемой системе создаются адиабатические оболочки, такие, например, как в термосах и сосудах Дьюара (Дьюар Джеймс, англ., 1842 – 1923).

Из определения адиабатического процесса следует, что в этом случае $dQ = 0$. Несмотря на то, что полностью исключить теплообмен системы с окружающей средой невозможно, адиабатическим можно считать, например, достаточно быстрый процесс сжатия или расширения газа, в течение которого теплообмен практически отсутствует.

Определим уравнение, связывающее параметры идеального газа в адиабатическом процессе. Из факта $dQ = 0$ следует:

$$dU = -dA = -PdV, \quad (6.21)$$

В адиабатическом процессе параметры идеального газа связаны уравнением Пуассона:

$$V^\gamma P = \text{const}, \quad (6.22)$$

где

$$\gamma = C_p / C_v \text{ показатель адиабаты.} \quad (6.23)$$

Покажем, как получается уравнение Пуассона (6.22). С учётом того, что $dU = C_v dT = \nu C_{\mu V} dT = (m/\mu) C_{\mu V} dT$, из (6.21) находим:

$$PdV = -\frac{m}{\mu} C_{\mu V} dT, \quad (6.24)$$

В данном случае изменяются и давление, и объём, так что из уравнения Менделеева – Клапейрона следует:

$$PdV + VdP = \frac{m}{\mu} R dT, \quad (6.25)$$

Из (6.24) находим $(m/\mu) dT = -PdV/C_{\mu V}$ и, подставляя в (6.25), получим:

$$PdV + VdP = -RPdV/C_{\mu V}, \quad (6.25)$$

или:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{C_{\mu V}} + 1 \right) PdV + VdP = 0 &\Rightarrow \frac{C_{\mu V} + R}{C_{\mu V}} PdV + VdP = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{C_{\mu P}}{C_{\mu V}} PdV + VdP = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Если обозначить $C_{\mu P}/C_{\mu V} = \gamma$ (эту величину, как отмечено ранее, называют *показателем адиабаты* или *коэффициентом Пуассона*), то можно записать:

$$\gamma PdV + VdP = 0. \quad (6.27)$$

Несложные преобразования выражения (6.27) дают:

$$\begin{aligned} \gamma PdV + VdP = 0 &\Rightarrow \gamma(dV/V) + dP/P = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma d \ln V + d \ln P = 0 \Rightarrow d(\ln V^\gamma P) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, произведение $V^\gamma P$ должно быть постоянным:

$$V^\gamma P = \text{const}, \quad (6.28)$$

Полученное выражение называют уравнением Пуассона. С помощью уравнению Менделеева – Клапейрона легко получить два других варианта этого уравнения:

$$VT^{1/(\gamma-1)} = \text{const}, \quad (6.28a)$$

и

$$PT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const}. \quad (6.28b)$$

Для вычисления работы, совершаемой идеальным газом в адиабатическом процессе, воспользуемся выражением для работы $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV$ и выражением (6.28), причём в последнем примем $const = V_1^\gamma P_1$:

$$A_{12} = V_1^\gamma P_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{V_1^\gamma P_1}{-\gamma+1} V^{-\gamma+1} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{V_1 P_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right], \quad (6.29)$$

Используя соотношения (6.13) и (6.18), можно записать значение показателя адиабаты через степени свободы:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{(i+2) \cdot 2R}{i \cdot 2R} = \frac{i+2}{i}, \quad (6.30)$$

В частности, для идеального газа, имеющего двухатомные молекулы (например, воздух при условиях, близких к нормальным), $i=5$ и из последнего выражения находим $\gamma = 7/5 = 1,4$.

6.2 Теория метода и описание установки

6.2.1 Приборы и материалы: баллон с кранами, манометр, насос.

Для определения отношения теплоёмкостей в данной работе используется метод, предложенный Клеманом и Дезормом.

Установка для выполнения работы этим методом состоит из стеклянного баллона А (рисунок 6.1) ёмкостью V_c ($15 \div 20$) литров,

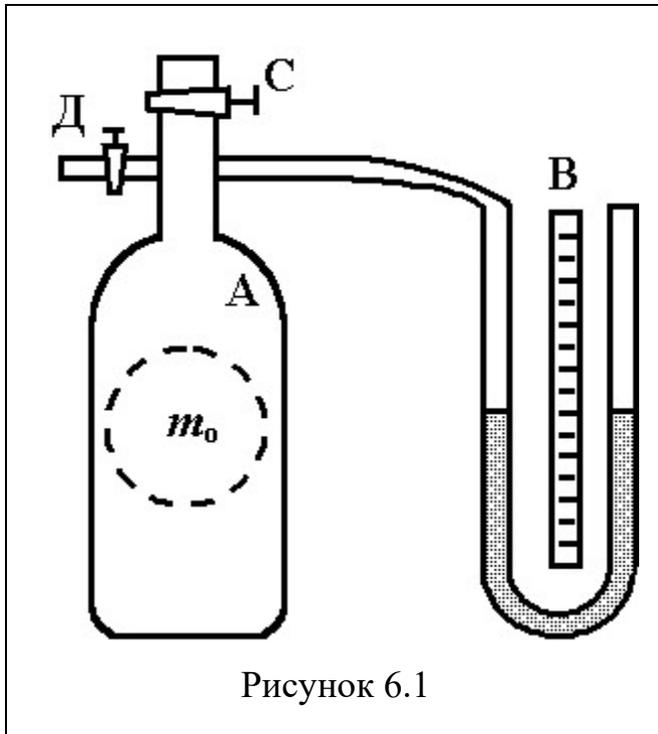


Рисунок 6.1

соединённого с манометром В и с насосом (на рисунке не показан). Через кран С баллон А соединяется с атмосферой. С помощью крана Д баллон сообщается с насосом.

В процессе эксперимента воздух в стеклянный сосуд необходимо накачивать и выпускать его из сосуда. Объём сосуда V_c , естественно, постоянен, а количество воздуха в нём, т. е. число молей газа, будет изменяться. Это означает, что уравнение Клапейрона–Менделеева применять к всему газу внутри сосуда нельзя,

поскольку оно справедливо для фиксированного количества вещества. Решить возникшую проблему можно, если мысленно выделить внутри баллона произвольную массу воздуха m_0 , ограниченную замкнутой поверхностью, которая играет роль «оболочки».

На рисунке 6.1 «оболочка» изображена пунктирной линией. Все уравнения термодинамических процессов будут относиться к газу в этой оболочке с неизменным количеством вещества.

Естественно, воображаемую границу объёма V непрерывно пересекают молекулы. Однако в условиях теплового равновесия среднее

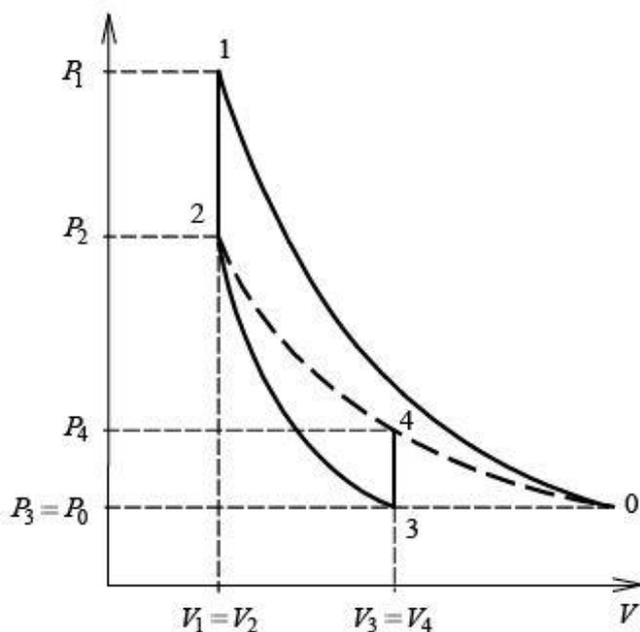


Рисунок 6.2

число молекул внутри объёма не меняется. Можно рассматривать объём, занимаемый и другим количеством газа, лишь бы во всех процессах этот объём не превышал V_c . В различных процессах газ, заключённый в эту «оболочку», будет расширяться и сжиматься, совершая работу против давления окружающего газа и обмениваясь с ним теплом. Поскольку кинетическая энергия возникающего макроскопического движения невелика, эти процессы могут рассматриваться как квазистатические.

При открытом кране С «оболочка» в баллоне заполнена воздухом массой m_0 при атмосферном давлении P_0 и комнатной температуре T_0 (точка 0). На диаграмме ($P-V$) (рисунок 6.2) представлена последовательность процессов при выполнении работы. Кран С закрывают и насосом накачивают дополнительную порцию воздуха.

Давление в баллоне повышается до P_1 (рисунок 6.2, точка 1 (P_1, V_1, T)).

Температура воздуха увеличивается до T , потому что внешние силы совершают работу по сжатию газа при накачивании воздуха $T > T_0$ (в том числе и в «оболочке» массы газа m_0).

Вследствие теплообмена воздуха с окружающей средой на участке 1–2 через некоторое время (2 ÷ 3 мин.) температура воздуха, находящегося в баллоне, сравняется с температурой внешней среды T_0 . При этом по манометру можно отметить уменьшение давления воздуха. Когда температура воздуха в баллоне будет равна комнатной (показания манометра перестанут меняться), давление в баллоне станет равным

число молекул внутри объёма не меняется. Можно рассматривать объём, занимаемый и другим количеством газа, лишь бы во всех процессах этот объём не превышал V_c . В различных процессах газ, заключённый в эту «оболочку», будет расширяться и сжиматься, совершая работу против давления окружающего газа и обмениваясь с ним теплом. Поскольку кинетическая энергия возникающего

$$P_2 = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_1, \quad (6.31)$$

где $\rho \cdot g \cdot h_1$ – избыточное давление воздуха в баллоне, ρ – плотность жидкости в манометре, h_1 – разность уровней жидкости в манометре. Это **точка 2** с параметрами (P_2, V_2, T_0) на рисунке 6.2, где V_2 – объем массы газа m_0 .

Затем кран **С** открывается на короткое время, при этом в **процессе 2–3** часть воздуха выходит из баллона, и давление сравнивается с атмосферным $P_3 = P_0$. В результате адиабатического расширения от объёма $V_2 = V_1$ до от объёма $V_3 = V_4$ внутренняя энергия газа уменьшается, и температура понижается до $T_3 < T_0$ (рисунок 6.2, **точка 3** (P_0, V_3, T_3)).

Затем кран **С** быстро закрывают и в **процессе 3–4** воздух в баллоне начинает медленно нагреваться до температуры окружающей среды T_0 , давление при этом увеличивается до P_4 (рисунок 6.2, **точка 4** (P_4, V_4, T_0)).

Отметим, что в точках 0, 4, 2 газ имеет одинаковую температуру – комнатную, т. е. эти точки лежат на одной «виртуальной» изотерме 0 – 4 – 2 (поскольку реально изотермического процесса 0 – 4 – 2 не происходило). Это позволяет обойтись без измерения начального и конечного объёмов газа.

Понятие адиабатического процесса является идеализацией, так как невозможно полностью исключить обмен теплом между газом и окружающей средой. Но процесс теплообмена идёт довольно медленно, поэтому быстрое расширение газа можно рассматривать приближённо адиабатическим.

Давление в баллоне станет равным P_4 :

$$P_4 = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_2, \quad (6.32)$$

где $\rho \cdot g \cdot h_2$ – избыточное давление после расширения и установления температуры T_0 , h_2 – разность уровней жидкости в манометре после нагревания до температуры T_0 .

По величине измеренных на опыте давлений P_0, P_2 и P_4 можно определить соотношение теплоёмкостей $\gamma = C_p / C_v$.

Выделим необходимые для дальнейших расчётов состояния воздуха внутри «оболочки».

Первое состояние – после накачки воздуха и выравнивания температур; на диаграмме $P-V$ (рисунок 6.2) **точка 2**, параметры – (P_2, V_2, T_0) или (P_2, V_1, T_0) , поскольку $V_2 = V_1$.

Второе состояние – после адиабатического расширения состояние; на диаграмме $P-V$ (рисунок 6.2) **точка 3**, параметры – (P_3, V_3, T_3) или (P_0, V_3, T_3) , поскольку $P_3 = P_0$.

Третье состояние – после закрытия крана и выравнивания температуры до T_0 ; ; на диаграмме $P-V$ (рисунок 6.2) **точка 4**, параметры – (P_4, V_4, T_0) .

Процесс 2–3 (в точке 2 параметры – (P_2, V_1, T_0)) (в точке 3 параметры – (P_0, V_3, T_3)) происходит адиабатически, следовательно из уравнения Пуассона имеем:

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma, \quad P_3 = P_0 \Rightarrow P_2 V_2^\gamma = P_0 V_3^\gamma, \quad (6.33)$$

В точке 2 и точке 4 на диаграмме $P-V$ воздух имеет одинаковую температуру T_0 («виртуальная» изотерма), поэтому применяем закон Бойля-Мариотта ($PV = const$):

$$P_2 V_2 = P_4 V_4, \quad V_4 = V_3 \Rightarrow P_2 V_2 = P_4 V_3, \quad (6.34)$$

Процесс 3–4 изохорический, в котором объём равен $V_4 = V_3$

Из (6.34) имеем:

$$V_2 = \frac{P_4 V_3}{P_2}, \quad (6.35)$$

Подставляя (6.35) в (6.33) получаем:

$$\left(\frac{P_4}{P_2} \right)^\gamma = \frac{P_0}{P_2}, \quad (6.36)$$

После логарифмирования для γ находим:

$$\gamma = \frac{\ln P_0 - \ln P_2}{\ln P_4 - \ln P_2} = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_2 - \ln P_4}, \quad (6.37)$$

Для давления P_2 в точке 2 из измерений имеем (см. (6.31)):

$$P_2 = P_0 + \rho g h_1$$

Аналогично, для давления в точке 4 после адиабатического расширения воздуха из точки 2 в точку 3 и нагревания до комнатной температуры (процесс перехода из точки 3 в точку 4, (см. (6.32)):

$$P_4 = P_0 + \rho g h_2$$

Подставляя выражения (6.31) и (6.32): в (6.37) получаем выражение для определения γ :

$$\gamma = \frac{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \ln P_0}{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \ln P_0 \left(1 + \frac{\rho g h_2}{P_0}\right)} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right)}{\ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \left(1 + \frac{\rho g h_2}{P_0}\right)}, \quad (6.38)$$

Учитывая, что $\frac{\rho g h_1}{P_0} \ll 1$ и $\frac{\rho g h_2}{P_0} \ll 1$ а также то, что для $0 < x \ll 1$ $\ln(1+x) \approx 1+x$, находим рабочую формулу:

$$\gamma = \frac{\frac{\rho g h_1}{P_0}}{\frac{\rho g h_1}{P_0} - \frac{\rho g h_2}{P_0}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \quad (6.39)$$

Так как в рабочей формуле (6.39) γ выражена через отношение избыточных давлений, то измерять его можно в любых единицах. Удобнее всего выразить его в миллиметрах водяного столба по манометру.

Для определения отношения C_p/C_v опытным путём необходимо измерить разности уровней h_1 и h_2 и, пользуясь формулой (6.39), произвести вычисления.

6.2 Порядок выполнения работы

Как отмечено в описании лабораторной установки (п. 6.2.1), через кран С баллон А соединяется с атмосферой. С помощью крана Д баллон сообщается с насосом.

1. Открыть кран С для соединения баллона А с атмосферой и проверить разность уровней в манометре – она должна быть равна нулю.
2. Закрыть кран С и открыть кран Д так, чтобы баллон был соединён с насосом.
3. Накачать некоторое количество воздуха в баллон, чтобы разность уровней в манометре составила $15 \div 20$ см ($150 \div 200$ мм).
4. Повернуть кран Д так, чтобы отсоединить насос от баллона, при этом разность уровней в манометре сначала несколько убывает, а затем устанавливается неизменной. Подождав несколько минут ($2 \div 3$ минуты), записать эту разность уровней h_1 .
5. Открыть снова кран С, сообщающий баллон с наружным воздухом, на очень короткое время ($1 \div 2$ секунды), необходимое для того, чтобы уровни в манометре выровнялись, и сразу же его закрыть.
6. После закрытия крана разность уровней жидкости в манометре начинает медленно расти и через несколько минут ($2 \div 3$ минуты) устанавливается неизменная разность уровней h_2 – записать это значение в таблицу 6.1.

7. Повторить измерения 5 – 7 раз. При выполнении п. 3 во всех измерениях необходимо стараться обеспечить близкие (по возможности одинаковые, в пределах приборной погрешности) значения величины h_1 .
8. Для величин h_1 и h_2 , найденных в результате прямых измерений, вычислить средние выборочные значения, случайные погрешности, полные погрешности и относительные погрешности. Вычисления случайных погрешностей сделать с доверительной вероятностью $\gamma = 0,7$.
Результаты вычислений записать в таблицу 6.1.

Таблица 6.1.

Параметр	№ изм.						
	1	2	3	4	5		
h_{1i}							
$\langle h_1 \rangle$							
Δh_{1i}							
$(\Delta h_1)_{сл}$							
$(\Delta h_1)_{пр}$							
Δh_1							
$\varepsilon_{h_1}, \%$							
<hr/>							
h_{2i}							
$\langle h_2 \rangle$							
Δh_{2i}							
$(\Delta h_2)_{сл}$							
$(\Delta h_2)_{пр}$							
Δh_2							
$\varepsilon_{h_2}, \%$							

9. Используя полученные результаты для величин $\langle h_1 \rangle$ и $\langle h_2 \rangle$, вычислить отношение теплоёмкостей по формуле (6.39), рассчитать полную и относительную погрешности этой величины. Результат записать в виде:
 $\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta \gamma$
10. Сравнить опытное значение $\langle \gamma \rangle$ с теоретическим по формуле (6.30).

6.3 Контрольные вопросы

1. Определение теплоёмкости. Виды теплоёмкостей, их связь.
2. Первое начало термодинамики и его применение к изохорному и изобарному процессам.
3. Как связаны теплоёмкости C_p и C_v для газов?
4. Изотермический процесс. Работа в изотермическом процессе.
5. Адиабатический процесс. Уравнения адиабаты (уравнение Пуассона).
6. Вывод рабочей формулы для определения отношения C_p/C_v .

6.4 Техника безопасности

1. Не применять больших усилий при повороте крана на баллоне.
2. При накачивании избыточного газа в баллон следить, чтобы не вылилась жидкость из манометра.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7(2.9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ КАПИЛЛЯРНОГО ВИСКОЗИМЕТРА

Цели работы: Ознакомление с работой вискозиметра Оствальда и определение с его помощью коэффициента вязкости жидкости.

7.1.1 Теоретические сведения

Течение реальной жидкости по трубе постоянного сечения сопровождается падением статического давления. Это явление объясняется наличием у жидкости внутреннего трения (*вязкости*) и сопровождается

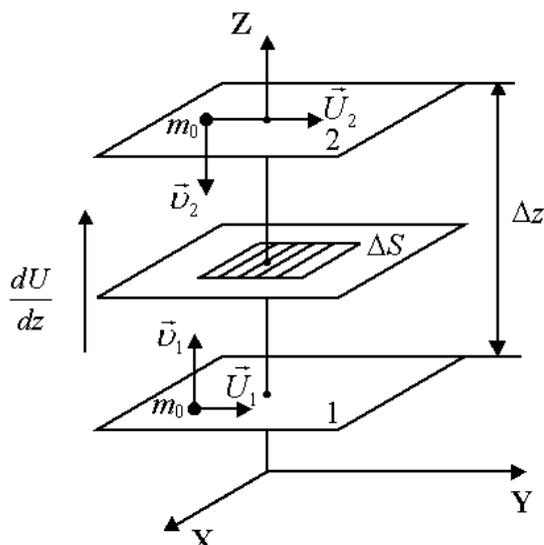


Рисунок 7.1

переходом части ее механической энергии во внутреннюю. Вязкость в газах и жидкостях проявляется в наличии сил внутреннего трения – касательных напряжений, возникающих между слоями жидкостей и газов, движущихся относительно друг друга или относительно поверхности твёрдых тел. Эти силы стремятся уравнять скорости соприкасающихся слоёв среды, при этом часть кинетической энергии слоёв переходит в тепло. Возникновение этих сил связано с тем, что из-за теплового движения молекул они переходят из одного слоя в другой, перенося с собой средний импульс своего слоя в соседний слой а также из-за межмолекулярных сил сцепления между молекулами соседних слоёв (в жидкостях). Направление переноса импульса, перпендикулярно скоростям слоёв (рисунок 7.1) и противоположно направлению, в котором увеличивается скорость направленного движения слоёв.

Между соприкасающимися слоями жидкости действуют касательные силы *внутреннего трения*. Модуль этих сил зависит от площади ΔS слоёв и быстроты изменения скорости dU/dz в направлении, перпендикулярном скорости движения слоёв, и определяется законом Ньютона:

$$F_{mp} = \eta \cdot \left| \frac{dU}{dz} \right| \cdot \Delta S, \quad (7.1)$$

где коэффициент пропорциональности η называется *динамическим коэффициентом вязкости*.

В системе СИ за единицу вязкости принимается вязкость жидкости, у которой, при единичной быстроте изменения скорости dU/dz в направлении, перпендикулярном скорости движения слоёв $dU/dz = [1 \text{ м/с}/1 \text{ м}] = 1 \text{ с}^{-1}$, сила трения между двумя соприкасающимися

слоями с площадями 1 м^2 , равна 1 Н и называется эта единица Паскаль-секунда ($\text{Па} \cdot \text{с}$):

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Для единицы вязкости в системе СГС установлено название “пуаз” (Пз).

$$1 \text{ Пз} = 1 \frac{\text{дин}}{\text{сек}^{-1} \cdot \text{см}^2} = 1 \frac{\text{дин} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}.$$

Вязкостью в один пуаз обладает жидкость, у которой, при единичной быстроте изменения скорости dU/dz в направлении, перпендикулярном скорости движения слоёв $dU/dz = [1 \text{ см/с} / 1 \text{ см}] = 1 \text{ с}^{-1}$, сила трения между двумя соприкасающимися слоями с площадями 1 см^2 , равна 1 дин .

Легко видеть, что $\text{Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ пуаз} = 10 \text{ Пз}$, $1 \text{ Пз} = 1 \text{ пуаз} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

На практике часто употребляется в сто раз меньшая единица вязкости – сантипуаз. Примерно такую вязкость имеет вода при 20°С .

$$1 \text{ сантипуаз} = 10^{-2} \text{ пуаз} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Вязкость других жидкостей имеет разнообразные значения. Вязкость этилового спирта при 20°С равна 1,2 сантипуаза, этилового эфира – около 0,2 сантипуаза. Глицерин имеет вязкость 850 сантипуазов при температуре 20°С и 350 сантипуазов при 30°С .

Вязкость некоторых жидкостей (эмульсии, суспензии, растворы полимеров) зависит от режима их течения – давления, градиента скорости. Это объясняется тем, что структурные элементы жидкости (белковые молекулы, дисперсные частицы) располагаются в потоке по-разному при разных скоростях. Такие жидкости называют *неньютоновскими*. Кровь (суспензия клеток крови в белковом растворе – плазме) также относится к неньютоновским жидкостям.

При течении жидкости по трубке, стенки которой смачиваются ею, можно считать, что слой жидкости, непосредственно прилегающий к внутренней поверхности трубки, прилипает к ней и остаётся неподвижным. Более удалённые от стенок слои скользят вдоль соседних слоёв, и скорость движения жидкости возрастает по мере удаления от стенок. С наибольшей скоростью движутся частицы жидкости, находящиеся на оси трубки.

Рассмотрим стационарный поток жидкости, *ламинарно* текущей слева направо через трубку круглого сечения, радиус которой R (рисунок 7.2).

Мысленно выделим в жидкости цилиндр радиуса r и длины l , ось которого совпадает с осью трубки. Обозначим давление на его торцах через p_1 и $p_2 < p_1$. В стационарных условиях результирующая сил давления на основания цилиндра $(p_1 - p_2)\pi r^2$ уравнивается силой вязкого трения, действующей на боковую поверхность цилиндра со стороны наружных слоёв жидкости. По закону вязкого трения эта сила равна:

$$F_{\text{тр}} = \eta \cdot \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot S, \quad (7.2)$$

где S – площадь боковой поверхности цилиндра, η – динамическая вязкость жидкости, dv/dr – быстрота изменения скорости.

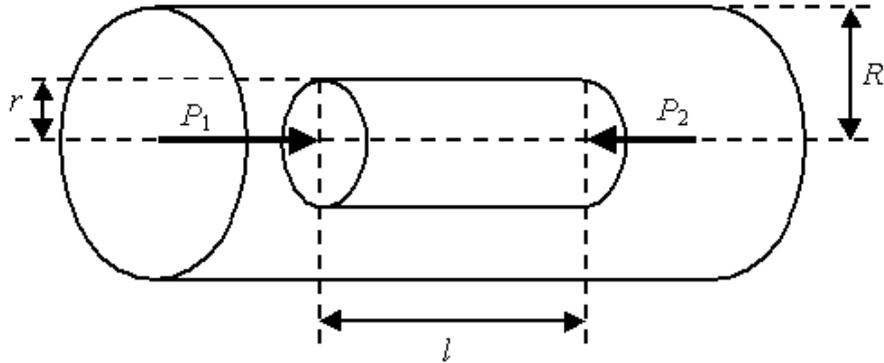


Рисунок 7.2

Заменяя S через площадь боковой поверхности $2\pi rl$ и приравнивая нулю сумму сил, действующих на цилиндр, можно записать:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi rl\eta \frac{dv}{dr} = 0. \quad (7.3)$$

Откуда выразим dv :

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \quad (7.4)$$

Знак “–” в формуле (7.4) свидетельствует о том, что с увеличением расстояния от оси трубки скорости частиц жидкости уменьшаются ($dv/dr < 0$).

Интегрируя (7.4), получим функцию $v(r)$:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C, \quad (7.5)$$

где C – константа интегрирования, которая может быть найдена из граничных условий. Чтобы найти её заметим, что скорость жидкости обращается в нуль на внутренней поверхности трубки, где жидкость “прилипает” к стенкам, т. е. $v = 0$ при $r = R$:

$$0 = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 + C, \quad (7.6)$$

откуда

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (7.7)$$

Таким образом, зависимость скорости частиц жидкости от расстояния до оси трубки $v(r)$ имеет вид:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (7.8)$$

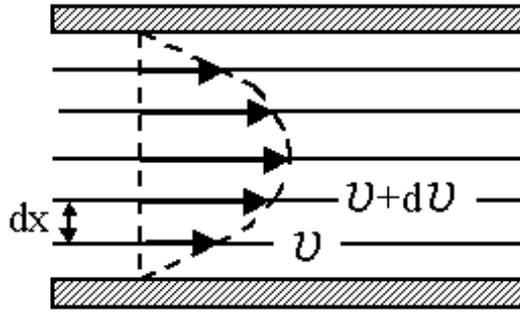


Рисунок 7.3

Как следует из полученной функции (7.8), скорость жидкости квадратично меняется с радиусом r и максимальна на оси трубки при $r = 0$ (рисунок 7.3). Максимальная скорость частиц жидкости равна:

$$v_{\max} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \quad (7.9)$$

Объем жидкости, протекающей через кольцевое поперечное сечение трубки с внутренним радиусом r и внешним радиусом $r + dr$ (рисунок 7.4) за промежуток времени t равен:

$$dV = v \cdot 2\pi r dr \cdot t, \quad (7.10)$$

а объёмная скорость истечения жидкости через указанное выше кольцевое сечение $dQ = (1/t)dV$:

$$dQ(r) = (1/t)dV = v \cdot 2\pi r dr. \quad (7.11)$$

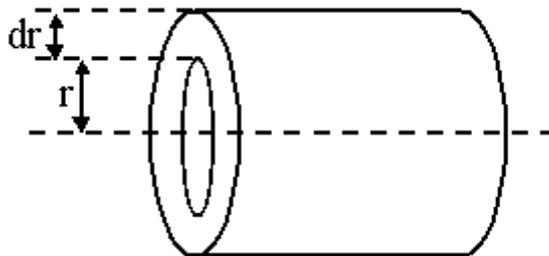


Рисунок 7.4

Объёмная скорость истечения жидкости через все поперечное сечение трубки, можно получить, проинтегрировав последнее выражение от нуля до радиуса трубки R :

$$Q = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr. \quad (7.12)$$

Подставив функцию $v(r)$ (7.8) в (7.12), получим:

$$Q = \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2)r dr, \quad (7.13)$$

откуда

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l}, \quad (7.14)$$

где Q – объёмная скорость истечения жидкости или газа.

Полученное выражение (7.14) носит название *формулы Пуазейля*. Единица измерения объёмной скорости истечения в СИ – метр кубический на секунду (m^3/c).

Прежде чем применять формулу Пуазейля к конкретным расчётам, всегда следует убедиться в том, что течение жидкости является ламинарным.

В реальной жизни мы редко встречаемся с ламинарным течением. Движение воды в водопроводе и в реке, движение воздуха в атмосфере практически всегда оказывается *турбулентным*. Разделить эти два режима можно, исследуя зависимость объёмной скорости истечения от давления. При ламинарном течении объёмная скорость пропорциональна разности давлений ($p_1 - p_2$) на концах трубки:

$$Q_{\text{ламин}} \sim (p_1 - p_2), \quad (7.15)$$

а при турбулентном – корню квадратному из нее:

$$Q_{\text{турб}} \sim \sqrt{(p_1 - p_2)}. \quad (7.16)$$

Характер течения жидкости зависит от числа *Рейнольдса* Re , которое определяется с помощью формулы:

$$Re = v \cdot R \frac{\rho}{\eta}, \quad (7.17)$$

где v – скорость потока, R – радиус трубки, ρ – плотность жидкости, η – динамический коэффициент вязкости жидкости.

В гладких трубках круглого сечения течение имеет ламинарный характер, если $Re < 1000$.

Ламинарное движение жидкости при переходе ее из широкого сосуда в капилляр устанавливается не сразу, а после того, как она пройдёт расстояние a , зависящее от радиуса трубки и числа Рейнольдса:

$$a = 0,2R \cdot Re. \quad (7.18)$$

Приборы, служащие для определения вязкости, называются вискозиметрами. В данной работе вязкость жидкости определяется при помощи *капиллярного вискозиметра*.

Вязкость жидкостей может быть определена *абсолютным методом*, т. е. путём непосредственного измерения линейных размеров капилляра, объёма жидкости и времени ее истечения. Чтобы, пользуясь формулой Пуазейля, определить коэффициент вязкости жидкости η , надо иметь возможность с большой точностью измерить все величины, входящие в формулу (7.14), что сделать довольно трудно.

Значительно проще *относительный метод*. В этом случае вязкость исследуемой жидкости может быть определена путём ее сравнения с известным коэффициентом вязкости другой жидкости. Относительный метод измерения вязкости является более распространённым. В этом случае нужно лишь измерить промежутки времени τ_0 и τ протекания через одну и

ту же капиллярную трубку строго одинакового объёма двух жидкостей с коэффициентами вязкости η_0 (известным) и η (подлежащим определению).

7.2 Вискозиметр Оствальда

Вискозиметр Оствальда – капиллярный вискозиметр (рисунок 7.5) представляет собой U-образную стеклянную трубку, в одно колено которой впаян капилляр 1 с шариком 2 в верхней части. Выше шарика поставлена метка “a”, ниже шарика – метка “b”. Внутренний объём шарика между метками равен V_0 .

Другое колено вискозиметра представляет собой широкую трубку 3. Внизу находится резервуар 4, в который через широкую трубку заливают из бюретки определенный объем дистиллированной воды, вязкость которой известна.

С помощью резиновой груши подсоединённой к широкой трубке вискозиметра, воду из резервуара поднимают по капилляру так, чтобы ее мениск установился несколько выше метки “a” (либо жидкость всасывается через капиллярную трубку). Сняв грушу с трубки и удерживая вискозиметр в вертикальном положении, дают возможность воде свободно протекать через капилляр, наблюдая за понижением уровня жидкости. Когда мениск проходит мимо верхней метки “a”, включают секундомер, и выключают его, когда мениск проходит мимо нижней метки “b”. Таким образом измеряют время τ_0 , за которое объем V_0 эталонной жидкости протекает через капилляр.

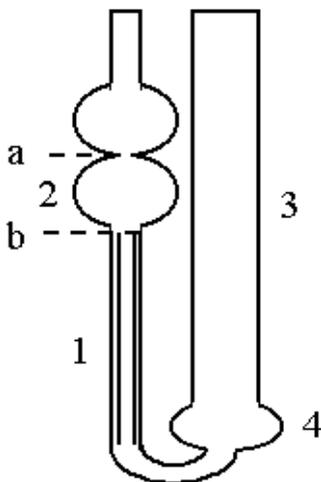


Рисунок 7.5.

В капиллярном вискозиметре диаметр капилляра и перепад давления на нем подобраны так, что течение жидкости в капилляре всегда является ламинарным.

Для расчёта процесса течения эталонной жидкости через капилляр воспользуемся формулой Пуазейля. Разность давлений $p_1 - p_2$ на концах капилляра в вискозиметре Оствальда

$$p_1 - p_2 = \rho gh,$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

С учётом сказанного формула Пуазейля в применении к жидкости, протекающей по капилляру вискозиметра, принимает вид:

$$V = Q \cdot \tau = \pi R^4 \cdot \rho gh \frac{\tau}{8\eta l}, \quad (7.20)$$

где τ – промежуток времени протекания через капилляр вискозиметра исследуемой жидкости, плотность которой ρ , а вязкость η .

Для эталонной жидкости:

$$V = Q \cdot \tau_0 = \pi R^4 \cdot \rho_0 g h \frac{\tau_0}{8\eta_0 l}. \quad (7.21)$$

Приравнивая друг к другу правые части выражений (7.21) и (7.21), получаем после сокращения:

$$\frac{\rho_0 \tau_0}{\eta_0} = \frac{\rho \tau}{\eta}. \quad (7.22)$$

Зная коэффициент внутреннего трения η_0 одной жидкости, легко найти коэффициент внутреннего трения η другой жидкости, если известны ρ_0, ρ , а также τ_0, τ .

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho \tau}{\rho_0 \tau_0}. \quad (7.23)$$

Эта формула является окончательной. Плотность воды при различных температурах приведена в таблице А.1 Приложения А. Значение вязкости дистиллированной воды при комнатной температуре следует взять из таблицы А.2 Приложения А.

Коэффициент вязкости жидкости сильно зависит от температуры, и поэтому необходимо указывать температуру, при которой он был получен.

7.3 Порядок выполнения работы

1. При комнатной температуре определите продолжительность протекания через капилляр вискозиметра объёма дистиллированной воды, заключённого между метками “а” и “b”. Повторите измерения не менее пяти раз. Результаты измерений запишите в таблицу 7.1. Произвести вычисления выборочного среднего $\langle \tau_0 \rangle$ и погрешностей и записать все вычисленные величины в таблицу 7.1.

Таблица 7.1

N изм.	$\tau_{0i}, \text{с}$	$\langle \tau_0 \rangle, \text{с}$	$\Delta \tau_{0i}, \text{с}$	$\Delta \tau_{0\text{ср}}, \text{с}$	$\Delta \tau_{0\text{пр}}, \text{с}$	$\Delta \tau_0, \text{с}$	$\delta_{\tau_0}, \%$
1							
2							
3							
4							
5							

2. Определите продолжительность протекания через капилляр вискозиметра объёма исследуемой жидкости, заключённого между метками “а” и “b”. Повторите измерения не менее пяти раз. Результаты измерений запишите в таблицу 7.2. Произвести вычисления выборочного среднего $\langle \tau \rangle$, и погрешностей и записать все вычисленные величины в таблицу 7.2.

Таблица 7.2

N изм.	$\tau_i, \text{с}$	$\langle \tau \rangle, \text{с}$	$\Delta \tau_i, \text{с}$	$\Delta \tau_{\text{сл}}, \text{с}$	$\Delta \tau_{\text{пр}}, \text{с}$	$\Delta \tau, \text{с}$	$\delta_\tau, \%$
1							
2							
3							
4							
5							

3. Определите по таблицам плотность воды ρ_0 и коэффициент вязкости воды η_0 при комнатной температуре, а также плотность ρ исследуемой жидкости и запишите их в таблицу 7.3.
4. Вычислите коэффициент вязкости исследуемой жидкости по формуле 7.23 и рассчитайте погрешности коэффициента динамической вязкости.

Таблица 7.3

$\rho_0, \text{кг/м}^3$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\eta_0, \text{Па с}$	$\eta, \text{Па с}$	$\Delta \eta, \text{Па с}$	$\delta_\eta, \%$

5. Запишите результат вычислений в виде $\eta = \langle \eta \rangle \pm \Delta \eta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

Цели работы: Изучение движения тел в жидкостях и определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса.

8.1 Основные понятия и закономерности

Молекулы любого вещества представляют собой устойчивые и трудно деформируемые электрические системы. Эта устойчивость обусловлена тем, что состояние молекул не может меняться непрерывно. Переход молекулы (атома) из одного возможного состояния в другое связан со значительным изменением ее энергии, что и приводит к большей устойчивости.

В молекулах суммы положительных и отрицательных зарядов равны, поэтому молекула электрически нейтральна, и электрическое поле за пределами молекул очень быстро убывает с расстоянием.

При сближении двух молекул, пока расстояние между их центрами r велико по сравнению с диаметрами молекул d (диаметрами электронной оболочки), силы взаимодействия между молекулами пренебрежительно малы. (рисунок 8.1а).

При дальнейшем сближении двух молекул на расстояниях порядка двух-трех диаметров начинает постепенно проявляться взаимодействие электрических зарядов ядер и электронных оболочек молекул. Благодаря притяжению разноимённых и отталкиванию одноименных зарядов произойдёт небольшая деформация обеих взаимодействующих молекул, так что распределение зарядов в молекуле станет примерно таким, как показано на рисунке 8.1б. В результате между молекулами возникнут силы притяжения $F_{\text{прит}}$.

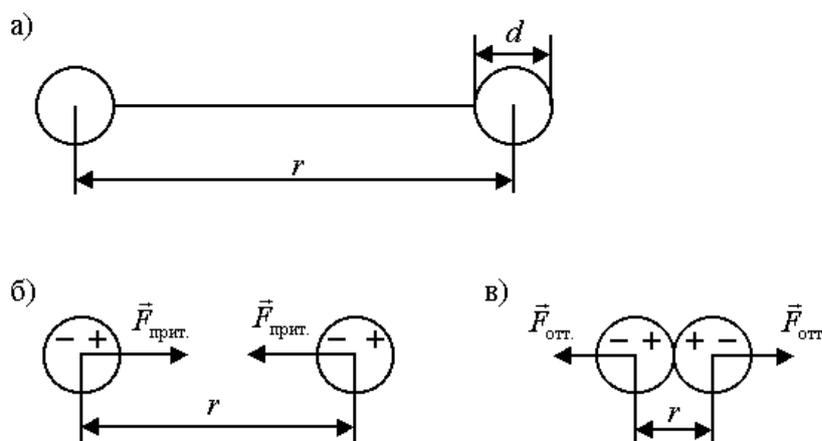


Рисунок 8.1

По мере дальнейшего сближения молекул деформация молекул и величина сил притяжения $F_{\text{прит}}$ будут возрастать. Но когда молекулы подойдут «вплотную» друг к другу и «соприкоснутся» своими электронными оболочками, то дальнейшая деформация молекул будет

затруднена. Так как возникнут огромные силы отталкивания $F_{отт}$, резко возрастающие при сближении и взаимной деформации молекул (рисунок 8.1в).

Абсолютная величина сил взаимодействия зависит от конкретного строения рассматриваемых взаимодействующих молекул.

На рисунке 8.2 (а, б) изображены примерные зависимости потенциальной энергии взаимодействия $U(r)$ и радиальной проекции молекулярных сил взаимодействия $F_r(r)$ от расстояния между молекулами. Значения $F_r < 0$ соответствуют силам притяжения, значения $F_r > 0$ – силам отталкивания.

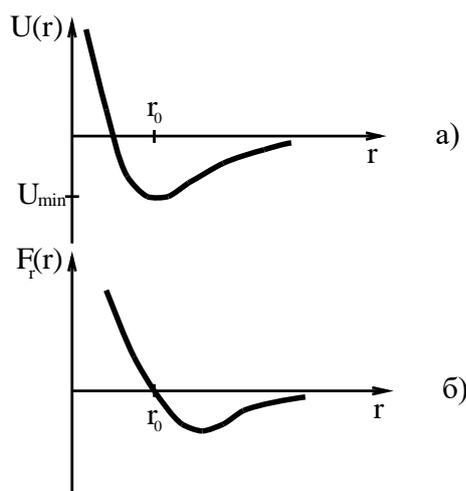


Рисунок 8.2

На некотором расстоянии r_0 , характерном для данной пары молекул, притяжение и отталкивание уравниваются друг друга и результирующая сила взаимодействия и её радиальная проекция становятся равными нулю $F_r(r_0) = 0$. Это расстояние r_0 соответствует положению равновесия, в котором могут находиться взаимодействующие молекулы при отсутствии теплового движения. Потенциальная энергия взаимодействия молекул в этом состоянии минимальна (рисунок 8.2а).

Так как *средняя кинетическая энергия теплового движения молекул пропорциональна kT* , то структура любой совокупности молекул и агрегатное состояние вещества будут существенно зависеть от соотношения величин $|U_{мин}|$ и kT .

1) В предельном случае *низких температур*, когда $kT \ll |U_{мин}|$, молекулы притянутся друг к другу и расположатся вплотную в определенном порядке – вещество будет находиться в твёрдом состоянии. Тепловое движение молекул в твёрдом теле будет в виде малых колебаний около определенных положений равновесия в пространстве.

2) При *высоких температурах* $kT \gg |U_{мин}|$ интенсивное тепловое движение молекул будет препятствовать соединению молекул. Вещество при этом будет находиться в газообразном агрегатном состоянии.

3) При *промежуточных состояниях*, когда $kT \approx |U_{\text{мин}}|$, благодаря тепловому движению, молекулы будут непрерывно перемещаться в пространстве, обмениваясь местами, но не отходя от соседей на расстояние, заметно превышая r_0 . Вещество при этом будет находиться в жидком агрегатном состоянии.

Любое вещество в зависимости от своей температуры может находиться в твёрдом, жидком или газообразном состоянии.

Характер теплового движения молекул жидкости отличается от теплового движения молекул газа. Так как среднее расстояние r между молекулами в жидкости близко r_0 , то молекулы большую часть времени колеблются около своих положений равновесия. Из-за хаотичности теплового движения скорости и амплитуды колебаний соседних молекул различны, и время от времени соседние молекулы расходятся друг от друга настолько, что отдельные молекулы перескакивают на расстояние порядка d (диаметра молекулы), «застревают» в новых положениях равновесия и начинают колебаться около них. С ростом температуры растёт средняя энергия теплового движения, амплитуда колебаний и частота перехода молекул из одного положения равновесия в соседнее. Поэтому в отличие от газа «длина свободного пробега» молекул жидкости имеет порядок диаметра молекул и практически не зависит от внешнего давления и температуры.

Ламинарное течение реальной жидкости сопровождается изменением скорости движения слоёв этой жидкости друг относительно друга. Это

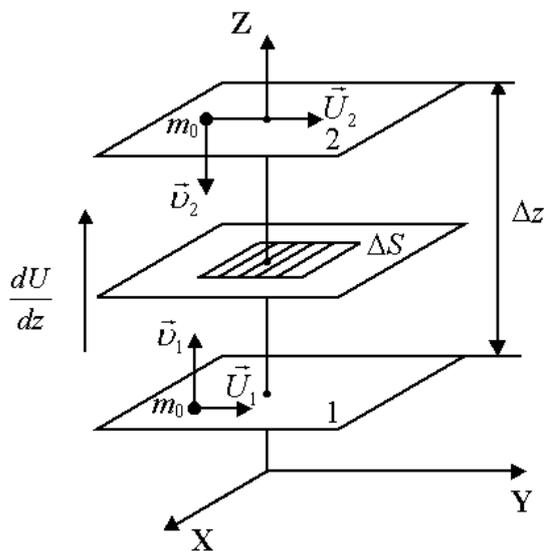


Рисунок 8.3

явление объясняется наличием у жидкости внутреннего трения (*вязкости*) и сопровождается переходом части ее механической энергии во внутреннюю. Вязкость в газах и жидкостях проявляется в наличии сил внутреннего трения – касательных напряжений, возникающих между слоями жидкостей и газов, движущихся относительно друг друга или относительно поверхности твёрдых тел. Эти силы стремятся уравнять скорости соприкасающихся слоёв среды, при этом часть кинетической

энергии слоёв переходит в тепло. Возникновение этих сил связано с тем, что из-за теплового движения молекул они переходят из одного слоя в другой, перенося с собой средний импульс своего слоя в соседний слой а также из-за межмолекулярных сил сцепления между молекулами соседних слоёв (в жидкостях). Направление переноса импульса, перпендикулярно скоростям слоёв (рисунок 8.3) и противоположно направлению, в котором

увеличивается скорость направленного движения слоёв. На этом рисунке использованы следующие обозначения: ΔS – площадь соприкасающихся слоёв; dU/dz – быстроте изменения скорости направленного движения жидкости; \vec{U}_1 и \vec{U}_2 – скорости направленного движения слоёв 1 и 2 жидкости, \vec{v}_1 и \vec{v}_2 скорости теплового движения молекул, m_0 – масса одной молекулы.

Между соприкасающимися слоями жидкости действуют касательные силы *внутреннего трения*. Модуль этих сил зависит от площади ΔS слоёв и быстроты изменения скорости dU/dz в направлении, перпендикулярном скорости движения слоёв, и определяется законом Ньютона:

$$F_{mp} = \eta \cdot \left| \frac{dU}{dz} \right| \cdot \Delta S, \quad (8.1)$$

где коэффициент пропорциональности η называется *динамическим коэффициентом вязкости* (внутреннего трения).

В системе СИ за единицу вязкости принимается вязкость жидкости, у которой, при единичной быстроте изменения скорости dU/dz в направлении, перпендикулярном скорости движения слоёв $dU/dz = [1 \text{ м/с}/1 \text{ м}] = 1 \text{ с}^{-1}$, сила трения между двумя соприкасающимися слоями с площадями 1 м^2 , равна 1 Н и называется эта единица Паскаль-секунда ($\text{Па} \cdot \text{с}$):

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Для единицы вязкости в системе СГС установлено название “пуаз” (Пз).

$$1 \text{ Пз} = 1 \frac{\text{дин}}{\text{сек}^{-1} \cdot \text{см}^2} = 1 \frac{\text{дин} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}.$$

Вязкостью в один пуаз обладает жидкость, у которой, при единичной быстроте изменения скорости dU/dz в направлении, перпендикулярном скорости движения слоёв $dU/dz = [1 \text{ см/с}/1 \text{ см}] = 1 \text{ с}^{-1}$, сила трения между двумя соприкасающимися слоями с площадями 1 см^2 , равна 1 дин .

Легко видеть, что $\text{Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ пуаз} = 10 \text{ Пз}$, $1 \text{ Пз} = 1 \text{ пуаз} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

На практике часто употребляется в сто раз меньшая единица вязкости – сантипуаз. Примерно такую вязкость имеет вода при 20°С .

$$1 \text{ сантипуаз} = 10^{-2} \text{ пуаз} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Вязкость других жидкостей имеет разнообразные значения. Вязкость этилового спирта при 20°С равна 1,2 сантипуаза, этилового эфира – около 0,2 сантипуаза. Глицерин имеет вязкость 850 сантипуазов при температуре 20°С и 350 сантипуазов при 30°С .

Вязкость некоторых жидкостей (эмульсии, суспензии, растворы полимеров) зависит от режима их течения – давления, градиента скорости. Это объясняется тем, что структурные элементы жидкости (белковые молекулы, дисперсные частицы) располагаются в потоке по-разному при

разных скоростях. Такие жидкости называют *неньютоновскими*. Кровь (суспензия клеток крови в белковом растворе – плазме) также относится к неньютоновским жидкостям.

При практических и теоретических расчётах часто используют кинематический коэффициент вязкости γ – отношение динамического коэффициента вязкости к плотности вещества при той же температуре:

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \frac{M^2}{c}, \quad (8.2)$$

Механизм вязкости жидкости отличен от механизма вязкости газов. Торможение слоёв жидкости обусловлено двумя причинами:

- 1) переносом молекулами импульса при их переходе из слоя в слой в результате теплового движения молекул;
- 2) наличием сил притяжения между молекулами мономолекулярных слоёв (рисунок 8.4).

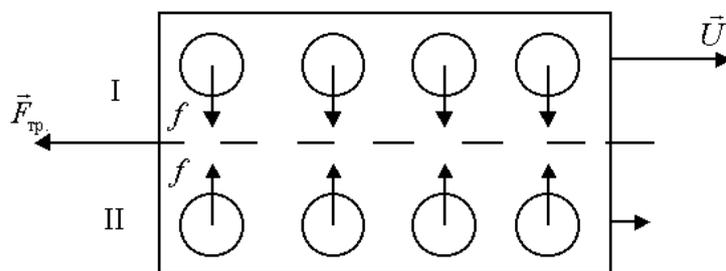


Рисунок 8.4

Для того, чтобы сместить первый слой 1 относительно второго 2, необходимо преодолеть силы притяжения между молекулами f (рисунок 8.4). Силы, препятствующие этому смещению слоёв, являются силами трения. В жидкостях расстояние между молекулами сравнимо с размерами самих молекул, поэтому силы притяжения между ними велики. И вследствие этого вторая причина, обуславливающая вязкость жидкости, превалирует над первой.

При нагревании жидкости возрастает ее свободный объем $(V - b)$, где b – постоянная в уравнении Ван-дер-Ваальса. Учитывая это, А. И. Бачинский (1877 – 1944) предложил простую формулу, описывающую зависимость жидкости от температуры:

$$\eta_{жс} = \frac{B}{V_m - b}, \quad V_m = \mu / \rho(T), \quad \mu - \text{молярная масса.} \quad (8.3)$$

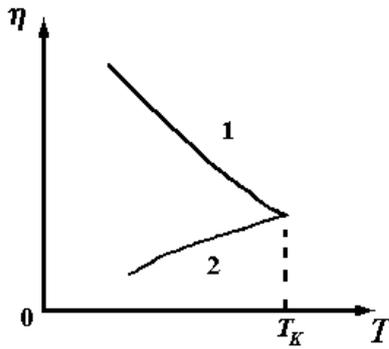
где B – константа, различная для разных жидкостей.

Формула Бачинского хорошо оправдывается на опыте для простых жидкостей (жидкостей, в которых нет ассоциации молекул), но не показывает явной зависимости коэффициента вязкости от температуры.

Я. И. Френкель вывел формулу, связывающую коэффициент вязкости жидкости с температурой:

$$\eta_{жс} = \text{const} \cdot e^{\frac{w}{kT}} \quad (8.4)$$

где w – энергия, которую необходимо сообщить молекуле, чтобы она перешла из одного положения равновесия в другое.



(кривая 1 – для жидкости, кривая 2 – для пара)

Рисунок 8.5

Величина w обычно имеет порядок $(2-3) \cdot 10^{-20}$ Дж. Поэтому при нагревании жидкости на 10^0C вязкость ее падает на $20 \div 30\%$. Вязкость жидкости во много раз больше вязкости газа. С ростом температуры вязкость жидкости быстро падает, а вязкость пара медленно возрастает, и при критической температуре T_k они сравниваются друг с другом, как показано на рисунке 7.9.

8.2 Краткая теория метода

Динамический коэффициент вязкости жидкости может быть определен методом падающего шарика в вязкой среде, предложенным Стоксом

Рассмотрим падение шарика в вязкой покоящейся жидкости (рисунок 8.6).

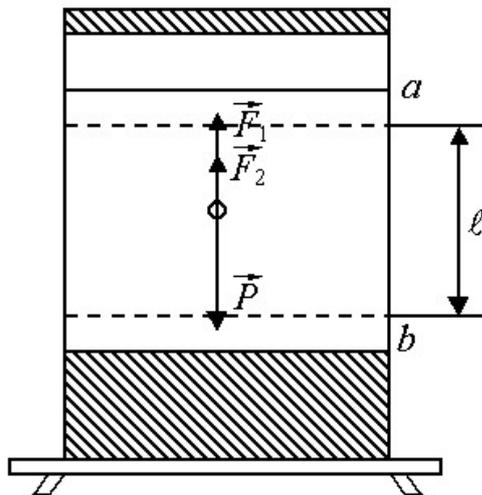


Рисунок 8.6

На шарик, падающий в этой жидкости, действуют силы:

1. Сила тяжести:

$$P = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \quad (8.5)$$

где r – радиус шарика; $V = (4/3)\pi r^3 \rho g$ – объем шарика, ρ – плотность вещества, из которого изготовлен шарик, g – ускорение свободного падения.

2. *Выталкивающая сила (по закону Архимеда):*

$$F_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{ж} g, \quad (8.5)$$

где $\rho_{ж}$ – плотность жидкости.

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной данным телом, направленная вертикально вверх.

3. *Сила сопротивления движению, обусловленная силами внутреннего трения между слоями жидкости (формула Стокса):*

$$F_2 = 6\pi\eta r v, \quad (8.6)$$

где v – скорость относительного движения слоёв жидкости, она равна скорости шарика. В данном случае играет роль не трение шарика о жидкость, а трение слоёв жидкости друг о друга, т. к. при соприкосновении твёрдого тела с жидкостью к поверхности тела тотчас же прилипают молекулы жидкости.

Слой жидкости, непосредственно прилегающий к телу, движется вместе с телом со скоростью движения тела. Этот слой увлекает в своём движении соседние слои жидкости.

Для описания движения шарика воспользуемся *вторым законом Ньютона*:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (8.7)$$

или в проекциях на направление движения:

$$ma = P - F_1 - F_2 \quad (8.8)$$

Сначала шарик движется неравномерно, но, начиная с некоторого момента времени, его движение становится равномерным, т.е. $a = 0$, и уравнение движения примет вид:

$$P - F_1 - F_2 = 0 \quad (8.9)$$

Подставив значение сил, получим:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{ж} g - 6\pi\eta r v = 0. \quad (8.10)$$

Из уравнения (8.10) получим рабочую формулу для опытного определения динамического коэффициента вязкости жидкости:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho_{ж}}{v} r^2 g = \frac{1}{18} \frac{\rho - \rho_{ж}}{v} d^2 g, \quad (8.11)$$

где $v = l/t$ скорость равномерного движения шарика в жидкости.

8.3 Порядок выполнения работы

Для нахождения динамического коэффициента вязкости опытным путём необходимо:

- 1) измерить с помощью микрометра диаметр шарика d ;

- 2) определить плотность вещества шарика или взять ее из таблицы;
- 3) вычислить скорость падения шарика, для чего следует измерить расстояние между двумя метками на цилиндре l (в этой области шарик движется равномерно) и с помощью секундомера определить время t прохождения шарика между ними: $v = l/t$
- 4) значение плотности жидкости указано на приборе;
- 5) вычислить по формуле (8.11) значение динамического коэффициента вязкости.

Проделать опыт не менее, чем с тремя шариками. Результаты измерения занести в таблицу 8.1 и вычислить коэффициенты вязкости и погрешности измерений для каждого шарика отдельно.

Таблица 8.1

№ изм.	d	l	t	ρ	$\rho_{ж}$	η	$\Delta\eta$	$\Delta\eta/\eta$
1								
2								
3								

Запишите результат вычислений в виде $\eta = \langle \eta \rangle \pm \Delta\eta$.

8.4 Контрольные вопросы

1. Что такое сила внутреннего трения?
2. Напишите формулу Ньютона для течения вязкой жидкости.
3. Как зависит вязкость жидкости от температуры?
4. Как проверить, является ли движение шарика в жидкости равномерным?
5. Влияет ли на результат опыта диаметр сосуда, в котором производятся измерения?
6. За счёт чего возникают систематические и случайные погрешности в данной работе?
7. Объясните молекулярно-кинетический механизм вязкости жидкости.
8. В каких единицах измеряются динамический и кинематический коэффициенты вязкости?
9. Выведите рабочую формулу и формулу погрешности.

8.5 Техника безопасности

1. Выполнение работы производится только после разрешения преподавателя.
2. Перед выполнением работы и в процессе выполнения необходимо осторожно обращаться с установками из стекла, чтобы не разбить их.
3. По окончании работы установки поставить в исходное положение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Детлаф А. А. Курс физики: В 3 т. / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989.
2. Механика: Лаб. работы / Сост.: З. С. Бондарева, Р. П. Воронцова, Ф. А. Груздев, Г. Е. Коровина, Н. А. Петрова; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2001. – 52 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Наука, 1989.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики: В 5 т. – М.: Наука, 1979.
5. Дмитриева В. Ф., Прокофьев В. Л. Основы физики. – М.: Высш. шк., 2001.
6. Агекян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1972, 172 стр.
7. Первичные представления об измерениях, измерительных приборах и методах определения погрешностей измерений: Учебно-методическое пособие по физическому практикуму для студентов физико-математических и инженерных специальностей/ сост. Н. П. Самолук, НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2010. - 80 стр.