

НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

---

Кафедра прикладной математики и информатики

**МАТЕМАТИКА**

Контрольные задания и методические указания  
для студентов заочного отделения  
экономических специальностей

Часть 2

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД

2018

**Р е ц е н з е н т**

канд. физ.-мат.наук, доцент кафедры  
прикладной математики и информатики

Математика: Контрольные задания и метод. указания для студентов заочного отделения экономических специальностей / Сост. В.А. Едемский, С.В. Неустроева, Ю.Ю. Петрова; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2017. – 15с.

Пособие является руководством по выполнению контрольных работ по курсу высшей математики для студентов-заочников экономических специальностей. Оно содержит вопросы и теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольных работ по данной теме, примеры решения задач, контрольные задания и список литературы.

## Введение

При изучении курса высшей математики студент-заочник должен выполнить ряд контрольных работ. Решения задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Все решения надо приводить полностью, чертежи и графики должны быть выполнены четко, с указанием масштаба и названий координатных осей. Обозначения к задачам должны соответствовать указаниям на чертежах и графиках. К выполнению контрольного задания следует приступать после изучения теоретического материала по учебникам и решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Настоящее пособие является руководством по выполнению контрольных работ по курсу высшей математики для студентов-заочников экономических специальностей НовГУ. Оно содержит вопросы и теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольных работ по данной теме, примеры решения задач, контрольные задания и список литературы.

Студент выполняет тот вариант контрольной работы, номер которого совпадает с последней цифрой его зачетной книжки.

| Номер варианта | Работа № 3     |
|----------------|----------------|
| 1              | 1,11,21,31,41  |
| 2              | 2,12,22,32,42  |
| 3              | 3,13,23,33,43  |
| 4              | 4,14,24,34,44  |
| 5              | 5,15,25,35,45  |
| 6              | 6,16,26,36,46  |
| 7              | 7,17,27,37,47  |
| 8              | 8,18,28,38,48  |
| 9              | 9,19,29,39,49  |
| 0              | 10,20,30,40,50 |

## Рабочая программа курса «МАТЕМАТИКА»

### для учебного модуля по экономическим направлениям подготовки бакалавров

Учебный модуль «Математика» относится к Математическому и естественнонаучному циклу ФГОС ВПО и ООП по экономическим направлениям подготовки бакалавров и базируется на знаниях по математике в объеме программы средней школы.

Учебный модуль обеспечивает математическую подготовку бакалавров и необходим для освоения учебной программы ряда учебных модулей естественнонаучного и профессионального циклов, в частности для изучения учебных элементов и разделов по теории вероятностей, статистики, информатики, а также многих разделов экономики, например, таких как бухгалтерский учет, менеджмент, экономика организации, разделов финансовой математики.

### Содержание и структура разделов учебного модуля

**Математический анализ (часть 2)** Неопределенный интеграл. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Простейшие правила интегрирования. Интегрирование подстановкой и по частям. Определенный интеграл. Понятие определенного интеграла, его свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Приложения определенного интеграла.

#### 4.1. Неопределенный интеграл

Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , если  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x$  из  $X$ .

Неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  называется множество всех первообразных функции  $f(x)$ .

Неопределенный интеграл обозначается  $\int f(x)dx$ , где  $\int$  - знак интеграла,  $f(x)$  - подынтегральная функция,  $f(x)dx$  - подынтегральное выражение.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1)$$

где  $F(x)$  - некоторая первообразная для  $f(x)$ ,  $C$  - произвольная постоянная.

Пример 1. По определению имеем:  $\int 1dx = x + C$ ,  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

### ***Свойства неопределенного интеграла***

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left( \int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int A f(x)dx = A \int f(x)dx,$$

где  $A$  - некоторое число.

5. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов, т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

### ***Таблица неопределенных интегралов***

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \text{ частный случай } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0), \text{ частный случай } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0), \text{ частный случай } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C \quad (k \neq 0).$$

**Пример 2.** Вычислим несколько интегралов, используя таблицу и свойства.

$$1) \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \quad (\text{формула № 1}).$$

$$2) \int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C \quad (\text{формула № 1}).$$

$$3) \int x^{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{5/4} dx = \frac{x^{9/4}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9} x^2 \sqrt[4]{x} + C.$$

4)

$$\int \frac{2\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 4 \int x^{-\frac{5}{3}} dx = 2 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C + 4 \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + C$$

(5 свойство и формула № 1).

$$5) \int \left( 4e^x + \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{9}{\sqrt{3^2 - x^2}} \right) dx = 4 \int e^x dx + 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 9 \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} =$$

$$= 4e^x + 5 \operatorname{tg} x + 3 \arcsin \frac{x}{3} + C \quad (5 \text{ свойство и формулы № 6 и 8}).$$

### **Метод замены переменной в неопределенном интеграле**

Если  $x = y(t)$  и  $y(t)$  - функция, дифференцируема на рассматриваемом промежутке, то

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (2)$$

В частности, если  $F(x)$  - первообразная для функции  $f(x)$ , то

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

где  $a$  и  $b$  - числа,  $a \neq 0$ .

Формула (2) позволяет упростить искомый интеграл, а в отдельных случаях свести его к табличному.

Пример 3.

1) Пусть  $I = \int \sin(3x+2)dx$ . Положим  $t = 3x+2$ . Тогда  $x = \frac{t-2}{3}$  и  $dx = \frac{1}{3}(t-2)'dt = \frac{1}{3}dt$ . В итоге получаем, что

$$I = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C.$$

2) Найдем интеграл  $\int \frac{dx}{4-8x}$ . Пусть  $t = 4-8x$ , тогда

$$x = -\frac{t-4}{8}, \quad dx = -\frac{1}{8}dt \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{4-8x} = \int \frac{-\frac{1}{8}dt}{t} = -\frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{8} \ln|t| + C \quad (\text{формула № 2}) = -\frac{1}{8} \ln|4-8x| + C.$$

3) Найдем интеграл  $\int \sqrt[7]{2x+3}dx$ . В этом случае воспользуемся дополне-

нием к формуле (2), так как  $\int \sqrt[7]{2x+3}dx = \int (2x+3)^{\frac{1}{7}}dx$ , а  $\int x^{\frac{1}{7}}dx = \frac{x^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + C$ , то

$$\int \sqrt[7]{2x+3}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + C \quad (a=2, \quad b=3).$$

*Замечание.* В примерах 4.1 и 4.2 также можно было воспользоваться дополнением к формуле (2).

4) Приведем еще несколько примеров использования дополнения к формуле (2). Несложно убедиться, что

$$\int \frac{dx}{(4x+3)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+3)^{-2}}{(-2)} + C = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(4x+3)^2} + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \arcsin 2x + C;$$

$$\int \cos(5x+2)dx = \frac{1}{5} \sin(5x+2) + C.$$

Проверим два последних результата дифференцированием. По теореме о производной сложной функции имеем:

$$\left( \frac{1}{2} \arcsin 2x \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}};$$

$$\left(\frac{1}{5}\sin(5x+2)\right)' = \frac{1}{5}\cos(5x+2) \cdot 5 = \cos(5x+2).$$

В обоих случаях после дифференцирования получили подынтегральную функцию.

5) Вычислим интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ . Пусть  $t = \sqrt{x}$ , тогда  $x = t^2$ ,  $dx = 2tdt$

$$\text{и } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Иногда удобнее сразу искать  $dt$ , а не  $dx$ , как это будет показано в следующих примерах.

6) Найти интеграл  $\int \sin^3 x \cos x dx$ . Положим  $t = \sin x$ , тогда  $dt = \cos x dx$ , полученное равенство позволяет выразить  $\cos x dx$ , последнее является множителем подынтегрального выражения. В итоге получаем, что

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

7) Рассмотрим интеграл  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ . Если  $t = \ln x$ , то  $dt = \frac{1}{x} dx$  и

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

8) Вычислим интеграл  $\int \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^4 x}$ . Пусть  $t = \arcsin x$ , тогда

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } \int \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^4 x} =$$

$$\int \frac{3dt}{t^4} = 3 \int t^{-4} dt = 3 \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{t^3} + C = -\frac{1}{\arcsin^3 x} + C.$$

*Замечание.* Новую переменную можно не выписывать явно. Например, интеграл  $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$  можно записать как  $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \cdot \frac{1}{4} d4x = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x + C$ , или

$$\text{интеграл } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \cdot 2d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

При таком подходе говорят о введении (внесении) функции под знак дифференциала.

### ***Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле***

Если  $u(x)$  и  $v(x)$  - дифференцируемые функции, то

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

или



$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

Формула (3) называется формулой интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

Можно выделить следующие типы интегралов, для нахождения которых используется формула интегрирования по частям:

$$\text{I. } \int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \sin mx dx, \quad \int x^n \cos mx dx.$$

$$\text{II. } \int x^k \ln^n x dx, \quad \int x^k \arcsin x dx, \quad \int x^k \arccos x dx, \quad \int x^k \arctg x dx, \\ \int x^k \operatorname{arcctg} x dx, \text{ где } k \neq -1 \text{ и } n - \text{целое положительное число.}$$

Для нахождения интегралов из первой группы полагаем  $u(x) = x^n$ , а остальные сомножители подынтегральной функции задают  $v'(x)$ .

Для интегралов из второй группы полагаем  $v'(x) = x^k$ , а остальные сомножители подынтегральной функции задают  $u(x)$ .

### Пример 5.

1) Вычислим интеграл  $\int x e^x dx$ . Пусть  $u = x$ ,  $v' = e^x$ , тогда  $u' = 1$ ,  $v = e^x$ . По формуле (3) получаем, что  $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$ .

Следующие интегралы вычисляются подобным же образом.

$$2) \int (2x + 3) \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x + 3 & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = (2x + 3) \sin x - \int 2 \sin x dx = \\ = (2x + 3) \sin x + 2 \cos x + C.$$

$$3) \int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^3 & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

$$4) \int x \arctg x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2} dx, \text{ так как}$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \text{ то } \int x \arctg x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + C.$$

5)

$$\int (3x+2)^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = (3x+2)^2 & u' = 6(3x+2) \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = -(3x+2)^2 \cos x + \int 6(3x+2) \cos x dx$$

. Для последнего интеграла снова используем метод интегрирования по частям

$$\int (3x+2) \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x+2 & u' = 3 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = (3x+2) \sin x - 3 \int \sin x dx = (3x+2) \sin x + 3 \cos x + C$$

. Окончательно получаем, что

$$\int (3x+2)^2 \sin x dx = -(3x+2) \cos x + 6(3x+2) \sin x + 18 \cos x + C.$$

б) Рассмотрим еще один пример, где комбинируются два метода.

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В последнем интеграле сделаем замену  $t = \sqrt{1-x^2}$  (можно и  $t = 1-x^2$ ), тогда

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x dx) = -\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int 1 dt = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \quad \text{Окончательно получаем, что}$$

$$\int \arcsin x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

#### 4.2 Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Если  $f(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  - некоторая первообразная для  $f(x)$ .

Пример 1. Применим формулу Ньютона-Лейбница для вычисления следующих интегралов.

$$1) \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2 - 0 = 2.$$

$$2) \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

Для определенного интеграла справедливо *свойства линейности*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

*и аддитивности*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется с применением тех же приемов, что описаны выше для неопределенного интеграла.

### Площадь плоской фигуры.

Если на отрезке  $[a, b]$  заданы непрерывные функции  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$ , и  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ , то площадь плоской фигуры, заключенной между кривыми  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  на отрезке  $[a, b]$  (см. рисунок 1), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx.$$

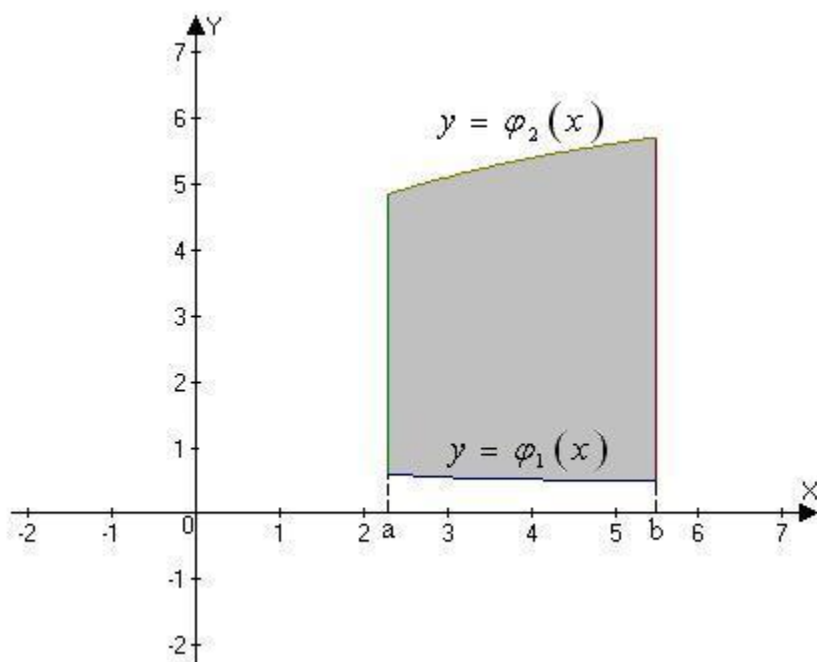


Рис. 1

Пример 1. Вычислить площадь области  $D$  ограничена линиями:  $x=1, x=4, y=x, y=2x$  (рис. 2).

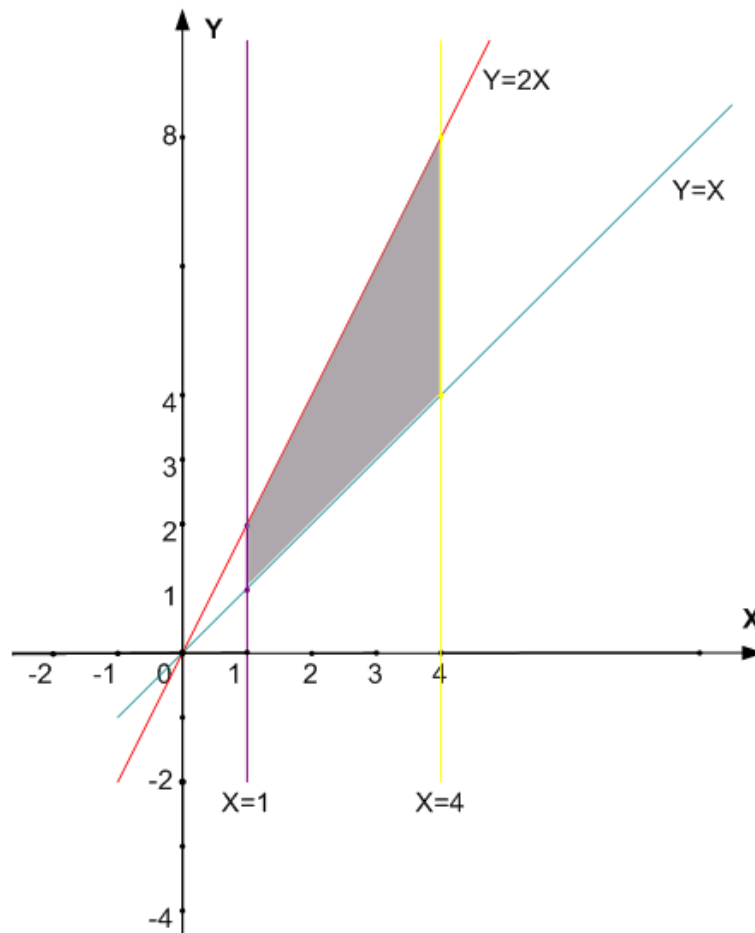


Рис. 2.

Решение.

$$S = \int_0^1 (2x - x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

### Литература.

1. Высшая математика для экономистов : учеб. для студентов вузов / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ЮНИТИ, 2001. - 471 с.

# Задания для контрольных работ

## Контрольная работа №3

1-10. Вычислить данные интегралы.

1.  $\int \frac{3\sqrt{x^3} - 4\sqrt[6]{x}}{x^2} dx$ ,  $\int \frac{5}{(4x+3)^2} dx$ ,  $\int \frac{4}{x \cdot \ln^4 x} dx$ ,  $\int (2x+5) \cdot e^x dx$ ,  $\int \frac{2x+4}{(x-1)(x+9)} dx$ .
2.  $\int \frac{4\sqrt{x^3} + 3\sqrt[3]{x}}{x^3} dx$ ,  $\int 2^{4x+5} dx$ ,  $\int \frac{\cos x}{4-2\sin x} dx$ ,  $\int (2x+5) \cdot \cos x dx$ ,  $\int \frac{6x+4}{(x+1)(x+2)} dx$ .
3.  $\int \frac{2\sqrt{x^3} + 5\sqrt[4]{x}}{x^2} dx$ ,  $\int \frac{3}{\sqrt{1-(4x+5)^2}} dx$ ,  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$ ,  $\int (x+4) \cdot \ln x dx$ ,  $\int \frac{2x-4}{(x+5)(x+1)} dx$ .
4.  $\int \frac{3\sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x^3}} dx$ ,  $\int \frac{3}{\cos^2(3x-2)} dx$ ,  $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$ ,  $\int (3x+4) \cdot \sin x dx$ ,  $\int \frac{6x+4}{(x+3)(x-2)} dx$ .
5.  $\int \frac{3\sqrt{x^3} - 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}} dx$ ,  $\int \cos(5x-6) dx$ ,  $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^6}} dx$ ,  $\int (3x+5) \cdot 3^x dx$ ,  $\int \frac{3x-2}{(x-2)(x+5)} dx$ .
6.  $\int \frac{2\sqrt[4]{x} - 4\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx$ ,  $\int \sqrt[6]{3x+5} dx$ ,  $\int \frac{e^x}{(1-e^x)^3} dx$ ,  $\int (2x+1) \cdot \ln x dx$ ,  $\int \frac{8x+2}{(x-1)(x+5)} dx$ .
7.  $\int \frac{2\sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}}{x^2} dx$ ,  $\int \frac{3}{\sin^2(2x+4)} dx$ ,  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$ ,  $\int (2x+1) \cdot \sin 3x dx$ ,  $\int \frac{2x+10}{(x-1)(x-5)} dx$ .
8.  $\int \frac{4\sqrt{x^5} - 3\sqrt[5]{x}}{x^4} dx$ ,  $\int \frac{2}{(4x+5)^2 + 9} dx$ ,  $\int \sqrt[6]{2-\cos x} \cdot \sin x dx$ ,  $\int (x^2+4) \cdot \ln x dx$ ,  $\int \frac{6x+4}{(x-1)(x-3)} dx$ .
9.  $\int \frac{4\sqrt{x^5} + 6\sqrt[4]{x}}{x^3} dx$ ,  $\int \sin(5x-6) dx$ ,  $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$ ,  $\int (x+2) \cdot 4^x dx$ ,  $\int \frac{3x+5}{(x-3)(x-4)} dx$ .
10.  $\int \frac{4\sqrt{x^3} - 4\sqrt[3]{x}}{x^5} dx$ ,  $\int \frac{5}{(2x+4)^2} dx$ ,  $\int \frac{5}{x \cdot \ln^2 x} dx$ ,  $\int (3x+6) \cdot e^x dx$ ,  $\int \frac{x+4}{(x-1)(x+8)} dx$ .

11-20 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

11.  $y = x^3, y = \sqrt{x}$  Сделать чертёж.
12.  $y = x^2 - 4x + 4, y = x/$  . Сделать чертёж.
13.  $y = \frac{6}{x}, y = 7 - x$  . Сделать чертёж.
14.  $y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7$  . Сделать чертёж.
15.  $y = x^2, y = \sqrt{x}$  . Сделать чертёж.
16.  $y = \frac{3}{x}, y = 5 - x$  . Сделать чертёж.
17.  $y = \frac{16}{x}, y = x^3$  . Сделать чертёж.
18.  $y = x^2 + 1, y = -x^2 + 3$  . Сделать чертёж.
19.  $y = x^2 - 3x + 4, y = x + 1$  . Сделать чертёж.
20.  $y = \frac{4}{x}, y = 5 - x$  . Сделать чертёж.

21-30. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

21. 1)  $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ , 2)  $y^2 + x^2y^2 = xy y'$ , 3)  $y' - 2xy = x$ ,

4)  $y'' + 2y' - 3y = x + 5$ .

22. 1)  $\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} + xdx = 0$ , 2)  $(xy' - y)\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ , 3)  $y' + 3y = 2x$ , 4)  $y'' + 2y' = e^{-x}$ .

23. 1)  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ , 2)  $y'x = x - y$ , 3)  $y' + 3y = e^{5x}$ , 4)  $y'' + y' = 2e^3$ .

24. 1)  $(xy - y)dx + (x^2y - x^2)dy = 0$ , 2)  $y' = \frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 4$ , 3)  $y'tgx - y = 2$ , 4)  $y'' - y' = 4e^x$ .

25. 1)  $yy' = \frac{1-2x}{y}$ , 2)  $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ , 3)  $y' + xy = xy^3$ , 4)  $y'' + 2y' = e^{-2x}$ .

26. 1)  $(x^2 + x^2y)dx - xy^2dy = 0$ , 2)  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ , 3)  $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ , 4)  $y'' + y' = 2x + 3$ .

27. 1)  $xyy' = (y+1)(x^2-1)$ , 2)  $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ , 3)  $y' + \frac{2}{x}y = x^3$ , 4)  $y'' - y' = x^2$ .

28. 1)  $y' = 10^{x+y}$ , 2)  $y' = e^{\frac{3y}{x}} + \frac{y}{x}$ , 3)  $y' + y = x$ , 4)  $y'' + 2y' - 3y = x + 5$ .

29. 1)  $(y^2x - x)dx + (y-1)dy = 0$ , 2)  $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ , 3)  $y' + 2xy = 5x$ , 4)  $y'' + 2y' = x + 1$ .

30. 1)  $(xy - y)dx + (y^2x^2 - y^2)dy = 0$ , 2)  $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ , 4)  $y'' + 4y' + 4y = 4e^x$ .

В задачах № 31 – 40 написать три первых члена степенного ряда и найти область его сходимости.

31.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{(1+n)^n}}{n!} \cdot x^n$

32.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} \cdot x^n$

33.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \cdot x^n$

34.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} \cdot x^n$

35.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot x^n$

36.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}} \cdot x^n$

37.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$

38.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n(n+2)} \cdot x^n$

39.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n+1)}} \cdot x^n$

40.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \cdot x^n$

В задачах № 41 – 50 вычислить определённый интеграл с точностью 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно.

41.  $\int_0^1 e^{\frac{x^2}{3}} \cdot dx$

42.  $\int_0^1 \cos \sqrt{x} \cdot dx$

$$43. \int_0^{0,5} x \cdot \arctg x \cdot dx$$

$$45. \int_0^{0,5} x \cdot \ln(1 - x^2) \cdot dx$$

$$47. \int_0^{0,5} \arctg x^2 \cdot dx$$

$$49. \int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot dx$$

$$44. \int_0^{0,5} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \cdot dx$$

$$46. \int_0^{0,5} x e^{-x} \cdot dx$$

$$48. \int_0^1 \sin x^2 \cdot dx$$

$$50. \int_0^{0,5} \sqrt{1 + x^2} \cdot dx$$