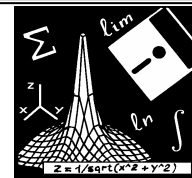


ИНФОРМАТИКА И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА



УДК 517.2

В.М.Богданова

О МОДЕЛИРОВАНИИ СЕПАРАТРИСНЫХ ЦИКЛОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ ТИПА ДВУХСЕПАТРИСНОЕ СЕДЛО

Псковский государственный политехнический институт

The article considers problems connected with the practical task of trajectories imaging. Inflections of trajectories are fully investigated: parametric equations of the curve that entirely consists of inflections have been discovered; its behavior in infinity has been analyzed. Examples of imaging of two-separatrix cycles formed by the separatrix coming from the saddle to the same saddle are given.

Динамические системы служат математическими моделями многих задач естествознания. Область их применения расширяется с получением новых экспериментальных данных в технических и других областях науки.

Цель настоящей работы — экспериментальная проверка достижимости полученной в [2] верхней границы оценки существования сепаратрисного цикла у динамических систем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax^2 + bxy + cy^2 = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - m^2 y^2 = Q(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $a, b, c, m \in \mathbb{R}$. Любая система этого семейства имеет в начале координат двухсепаратрисное седло.

Предполагаем, что $am \neq 0$. Не уменьшая общности, считаем, что $a > 0, m > 0$. Введем обозначения:

$p_1 = am^2 + bm + c$, $p_2 = am^2 - bm + c$. Если $p_1 p_2 \neq 0$, то система (1) имеет в конечной части плоскости особые точки $M_1\left(\frac{-m}{p_1}, \frac{-1}{p_1}\right)$ и $M_2\left(\frac{m}{p_2}, \frac{-1}{p_2}\right)$. Характери-

стические числа в точках M_1 и M_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(1)} &= \frac{2m^2 - 2am - b \pm \sqrt{(2m^2 - 2am - b)^2 + 8mp_1}}{2p_1}, \\ \lambda_{1,2}^{(2)} &= \frac{2m^2 + 2am - b \pm \sqrt{(2m^2 + 2am - b)^2 - 8mp_2}}{2p_2}. \end{aligned}$$

Если $p_1 > 0, p_2 > 0$, то точка M_1 — седло, точка M_2 — антиседло.

Особые точки на бесконечности удовлетворяют уравнению [2]:

$$f(v) = v^3 - av^2 - (b + m^2)v - c = 0.$$

При любых значениях a, b, m параметр c может быть выбран так, что точка M_1 — седло, точка M_2 — фокус, а на бесконечности лишь одно состояние равновесия (узел). В этом случае система (1) может иметь пре-

дельный цикл, рождающийся из сложного фокуса и исчезающий через петлю сепаратрисы седла. В работе [2] доказано, что предельный цикл исчезает при изменении параметра b в интервале $(2m^2 - 2am, 2m^2 - am]$. Доказательство основано на сравнении системы (1) с консервативными системами [1]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2m^2 xy + (p_2 + 2m^3)y^2, \\ \dot{y} &= x^2 - m^2 y^2 \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2m^2 xy + (p_1 - 2m^3)y^2, \\ \dot{y} &= x^2 - m^2 y^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (2) имеет с системой (1) общее седло, а система (3) — центр, совпадающий с фокусом.

В настоящей работе решена практическая задача: получено графическое изображение сепаратрисного цикла системы (1). Вместе с тем ряд результатов представляет и теоретический интерес.

Рассмотрим вопрос о точках перегиба траекторий системы (1). Продифференцируем почленно уравнение фазовых траекторий системы (1)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (1')$$

по y . Получим

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(P'_x x'_y + P'_y)Q - P(Q'_x x'_y + Q'_y)}{Q^2},$$

т.е.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{Q^2 P'_y + PQ(P'_x - Q'_y) - P^2 Q'_x}{Q^3}.$$

В точках перегиба решений уравнения (1') выполняется равенство

$$P^2 Q'_x - PQ(P'_x - Q'_y) - Q^2 P'_y = 0. \quad (4)$$

Пусть $h = ak^2 + bk + c$, $g = k^2 - m^2$. Полагая $x = ky$ в уравнении (4), получим

$$(y(1 + hy))^2 2ky - (y(1 + hy))gy^2 (2ak + (b + 2m^2))y - g^2 y^4 (1 + (bk + 2c)y) = 0,$$

что после сокращения на y^3 дает

$$\begin{aligned}
(1+hy)^2 2k - (1+hy)g(2ak+b+2m^2)y - \\
- g^2 y(1+(bk+2c)y) = 0, \\
(1+2hy+h^2 y^2)2k - (y+hy^2)g(2ak+b+2m^2) - \\
- g^2 y - (bk+2c)g^2 y^2 = 0, \\
\text{т.е. } y^2(2kh^2 - (2ak+b+2m^2)hg - (bk+2c)g^2) + \\
+ y(4kh - (2ak+b+2m^2)g - g^2) + 2k = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Обозначим } \alpha(k) = 2kh^2 - (2ak+b+2m^2)hg - (bk+2c)g^2, \\
\beta(k) = 4kh - (2ak+b+2m^2)g - g^2.
\end{aligned}$$

Итак, получены параметрические уравнения кривой γ , состоящей из точек перегиба решений уравнения (1'):

$$\begin{aligned}
\alpha(k)y^2 + \beta(k)y + 2k = 0, \\
x = ky.
\end{aligned} \quad (5)$$

В общем случае $\alpha(k)$ — многочлен пятой степени. Число корней $\alpha(k)$ определяет число идущих в бесконечность ветвей кривой γ .

Лемма 1. Если $V^*(v^*, 0)$ — особая точка системы (1) на экваторе сферы Пуанкаре, то $\alpha(v^*) = 0$.

Доказательство. Особые точки на бесконечности удовлетворяют уравнению

$$\alpha(k) = -(bk^2 + 2(am^2 + c)k + bm^2)f(k). \quad (6)$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если система (1) имеет в конечной части плоскости два седла или два антиседла, то $\alpha(k)$ имеет не более трех корней.

Доказательство. Из равенства (6) следует, что

$$\alpha(k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} bk^2 + 2(am^2 + c)k + bm^2 = 0, \\ f(k) = 0. \end{cases}$$

Кубический многочлен $f(v)$ имеет не более трех корней. Найдем дискриминант $D = (am^2 + c)^2 - b^2 m^2 = (am^2 + bm + c)(am^2 - bm + c) = p_1 p_2$. Если $D \geq 0$, то одна из точек $M_{1,2}$ — седло, а другая — антиседло; если $D < 0$, то точки $M_{1,2}$ — седла или антиседла. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что может реализоваться случай, когда γ уходит на бесконечность лишь в одном направлении (рис.1). По лемме 1 в этом направлении есть особая точка. Рис.1 выполнен для случая фокуса в I четверти и узла в IV четверти.

Если $D > 0$, то может существовать пять направлений, три из которых идут в особую точку (рис.2). На рис.2 штрихпунктирной линией изображены два направления ветвей кривой γ , удовлетворяющие уравнению

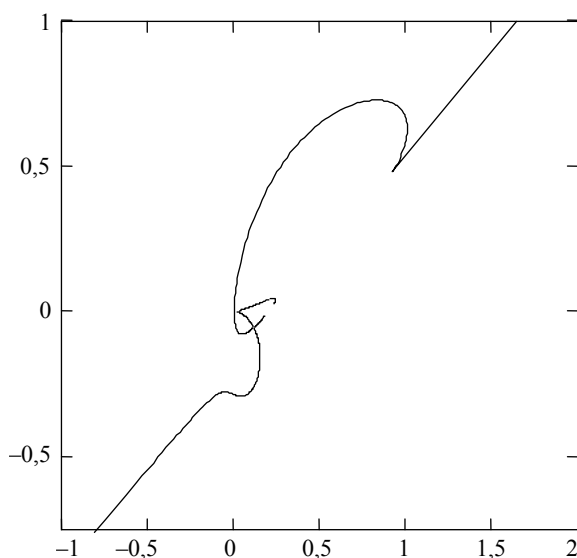


Рис.1

$$f(v) = v^3 - av^2 - (b + m^2)v - c = 0.$$

Многочлен $\alpha(k)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha(k) = -bk^5 + (ab - 2(am^2 + c))k^4 + \\
+ (b^2 + 2a(am^2 + c))k^3 + (3b + 2m^2)(am^2 + c)k^2 + \\
+ (2c(am^2 + c) + bm^2(b + m^2))k + bm^2c.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\alpha(k) = -bk^5 + abk^4 + b^2k^3 + b(am^2 + c)k^2 + m^2(b + m^2)k + \\
+ bm^2c - 2(am^2 + c)k(k^3 - ak^2 - (b + m^2)k - c), \\
\alpha(k) = (-bk^2 - bm^2)f(k) - 2(am^2 + c)f(k),
\end{aligned}$$

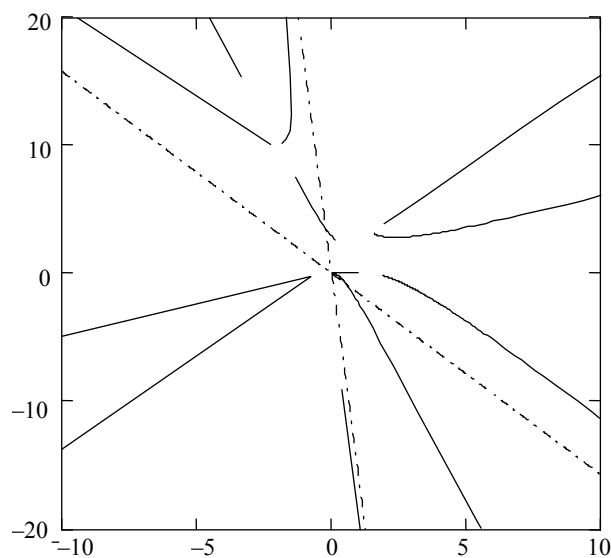


Рис.2

$$bk^2 + 2(am^2 + c)k + bm^2 = 0.$$

Рис.2 выполнен для случая фокуса в I четверти и седла во II четверти.

Заменим формально в уравнении (4) $\frac{P}{Q} \mapsto t$:

$$t^2 2x - t(2ax + (b + 2m^2)y) - (1 + bx - 2cy) = 0.$$

Рассмотрим параметрическое семейство прямых

$$x(2t^2 - 2at - b) - y((b + 2m^2)t + 2c) - 1 = 0. \quad (7)$$

Это семейство имеет огибающую Γ . Найдем ее уравнение. Продифференцируем равенство (7) по t :

$$x(4t - 2a) = y(b + 2m^2).$$

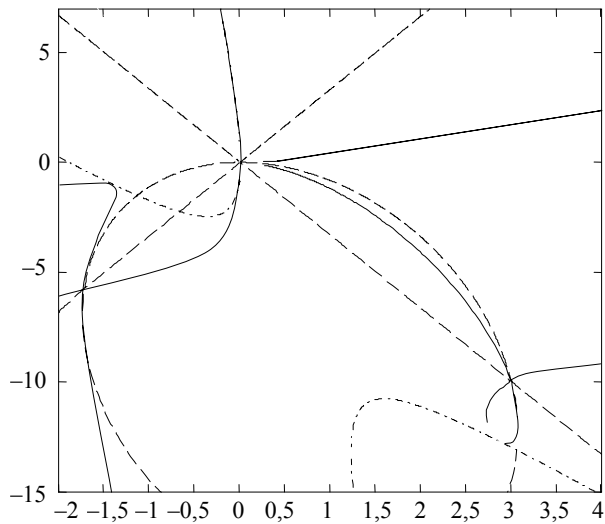


Рис.3

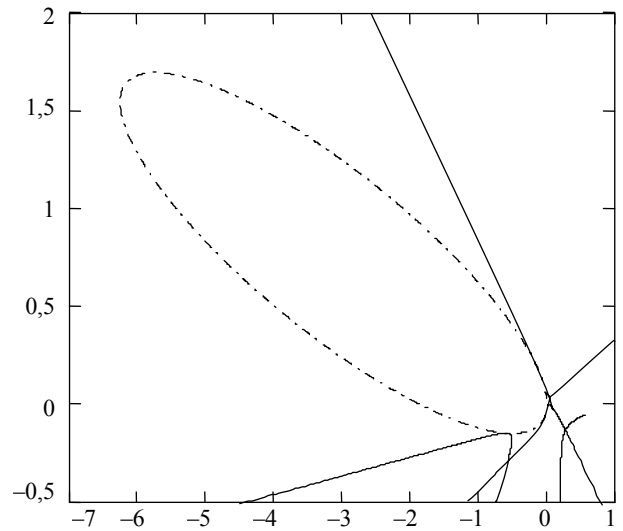


Рис.4

Обозначим $w = \frac{y(b+2m^2)}{4x}$. Тогда $t = w + \frac{a}{2}$. Под-

ставляя t в уравнение (7), получим

$$x \left[2 \left(w + \frac{a}{2} \right)^2 - 2a \left(w + \frac{a}{2} \right) - b \right] - y \left[(b+2m^2) \left(w + \frac{a}{2} \right) + 2c \right] - 1 = 0,$$

$$\text{т.е. } x \left(2w^2 + 2wa + \frac{a^2}{2} - 2wa - a^2 - b \right) - y(b+2m^2)w - \\ - y \frac{a(b+2m^2)+4c}{2} - 1 = 0,$$

$$x \left(2 \frac{y^2(b+2m^2)^2}{16x^2} - \frac{a^2}{2} - b \right) - \frac{(b+2m^2)^2 y^2}{4x} - \\ - \frac{y(a(b+2m^2)+4c)}{2} - 1 = 0,$$

$$y^2 \left(\frac{(b+2m^2)^2}{8x} - \frac{(b+2m^2)^2}{4x} \right) -$$

$$- \frac{y(a(b+2m^2)+4c)}{2} - \left(1 + \frac{a^2+2b}{2}x \right) = 0.$$

Умножим последнее равенство на $-8x$. Получим

$$y^2(b+2m^2)^2 + 4(a(b+2m^2)+4c)xy + \\ + 4(2x+(a^2+2b)x^2) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет некоторую кривую второго порядка. На рис.3 огибающая Γ — эллипс (штрихпунктирная линия). На рис.4 Γ — гипербола (в верхней части рисунка практически сливающаяся с γ). На рис.4 также изображены изоклины вертикального и горизонтального наклонов.

Перейдем к изображению сепаратрисного цикла системы (1).

Основная сложность заключается в выборе начальных условий вблизи особой точки M_1 . Эта проблема упрощается с применением уравнений (5).

На определенном этапе вычислений, при приближении траектории к изоклине вертикальных наклонов, система (1) рассматривалась в полярных ко-

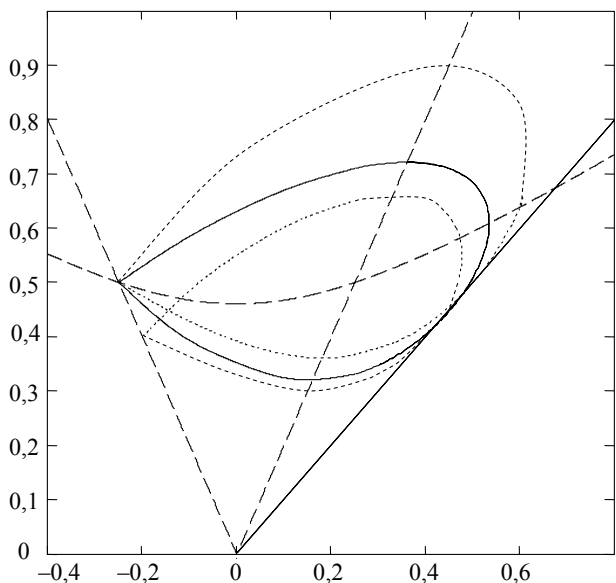


Рис.5

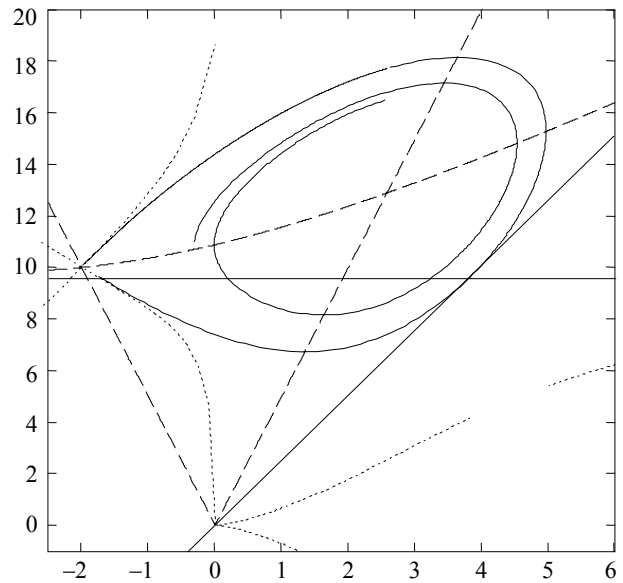


Рис.6

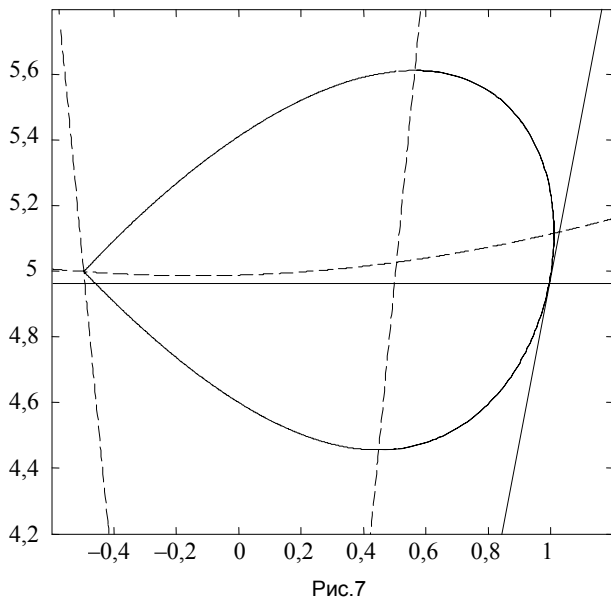


Рис.7

ординатах.

На рис.5 пунктирной линией изображены петли сепаратрис седла консервативных систем (2) и (3). Доказано [2], что обе петли касаются прямой $x - 2my = 0$

в точках $S\left(\frac{2m}{p_2}, \frac{-1}{p_2}\right)$ и $T\left(\frac{2m}{p_1 - 4m^3}, \frac{-1}{p_1 - 4m^3}\right)$ соответственно. Сплошной линией изображена петля сепаратрисы седла системы (1).

Для достаточно большого числа систем получено, что образование петли сепаратрисы седла системы (1) происходит с касанием на прямой $x - 2my = 0$. При этом точка касания R совпадает с серединой отрезка ST . В середине отрезка ST

$$y = \frac{p_1 + p_2 - 4m^3}{2} = p_2 + mb - 2m^3.$$

На рис.6-7 горизонтальная прямая $y = p_2 + mb - 2m^3$ проходит через точку касания R .

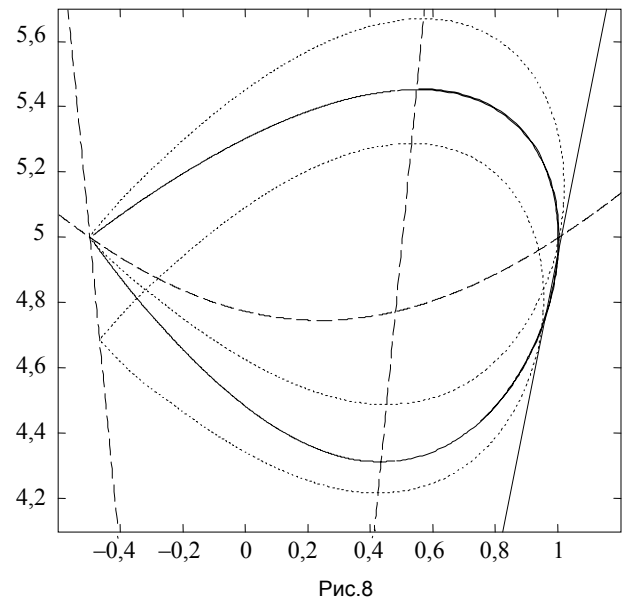


Рис.8

Рис.8 выполнен при $a = 0,475$, $b = -0,048$, $m = 0,1$, $p = -0,2$. Здесь мы видим, что петля сепаратрисы пересекает прямую $x - 2my = 0$ в двух точках. Параметр b был выбран так, что $b < -am$. В этом случае расположение точки S иное (выше) относительно изоклины вертикальных наклонов, чем на рис.5-7. В проведенных расчетах образование петли

происходило при $b \in (2m^2 - 1,6am, 2m^2 - 1,4am)$.

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
2. Богданова В.М. // Тр. Псковского политехн. ин-та. 2005. № 9.1. С.6-11.