

УДК 517.954

Данг Хань Хой

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА СФЕРЕ

Институт электронных и информационных систем НовГУ

In this paper we study periodic solutions of some linear evolution second-order equations over a sphere. The set of parameters, under which there exists a unique periodic solution of this problem, is shown to be a measurable set of full Lebesgue measure. The obtained results could be used for investigation of wave propagations on a spherical surface.

На сфере S^n , $n \geq 2$, рассмотрим задачу о периодических решениях для нелокального уравнения (волнового типа)

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 \Delta\right)u + 2\lambda i \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^2 u = \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^2 + a^2 \Delta\right]u(x, t) = v G(u - f) \quad (1)$$

с условием периодичности по t

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}. \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$ — комплексная функция на $[0, b] \times S^n$, $a \neq 0$, λ , v — заданные комплексные числа, $G u(x, t) = \int_{S^n} g(x, y) u(y, t) dy$ (dy — мера Лебега—Хаусдорфа на сфере S^n) — интегральный оператор на пространстве $L_2([0, b] \times S^n)$ с гладким ядром $g(x, y)$ на $S^n \times S^n$, $f(x, t)$ — заданная функция. Заменой $t = b\tau$ наша задача сводится к задаче с

фиксированным периодом, но для нового уравнения, в котором коэффициент при производной по τ есть $\frac{1}{b}$:

$$\left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda\right)^2 + a^2 \Delta\right]u(x, b\tau) = v G(u(x, b\tau) - f(x, b\tau)).$$

Итак, задача (1), (2) сводится к задаче о периодических решениях для уравнения

$$L u \equiv \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda\right)^2 + a^2 \Delta\right]u = v G(u - f)$$

с фиксированным условием периодичности по t

$$u|_{\tau=0} = u|_{\tau=1}.$$

Считаем, что дифференциальный оператор $\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda\right)^2 + a^2 \Delta$ задан на пространстве функций $u(x, t) \in C^\infty([0, 1] \times S^n)$, таких, что $u|_{\tau=0} = u|_{\tau=1}$. Обозначим через L замыкание этого оператора в $L_2([0, 1] \times S^n)$. Известно, что собственные числа оператора Лапласа Δ на сфере S^n имеют вид

$\lambda_k = -k(k+n-1)$, $k \in Z$, $k \geq 0$ и им соответствует ортонормированный базис собственных функций $w_{kj}(x) \in C^\infty(S^n)$, $j \in J_k = \{1, 2, \dots, j_k\}$ (см., напр., [1]).

Лемма 1. Функции $e_{kjm}(x, t) = e^{i2\pi mt} w_{kj}(x)$, $k, m \in Z$, $k \geq 0$ есть собственные функции оператора L на пространстве $L_2([0, 1] \times S^n)$ с соответствующими собственными значениями

$$\tilde{\lambda}_{km} = \left(\frac{2m\pi}{b} - \lambda \right)^2 - a^2 k(k+n-1) = (\lambda_{km} - \lambda)(\lambda'_{km} - \lambda).$$

$$\text{Здесь } \lambda_{km} = \frac{2m\pi}{b} + a\sqrt{k(k+n-1)}, \quad \lambda'_{km} = \frac{2m\pi}{b} -$$

$a\sqrt{k(k+n-1)}$. Эти функции образуют ортонормированный базис в указанном пространстве. Область определения оператора L есть

$$D(L) = \left\{ u = \sum u_{kjm} e_{kjm} \in L_2([0, 1] \times S^n) \mid \sum |\tilde{\lambda}_{km} u_{kjm}|^2 < \infty \right\}.$$

Спектр $\sigma(L)$ оператора L есть замыкание множества $\{\tilde{\lambda}_{km}\}$.

$$\text{Лемма 2. } \|G\|^2 \leq M_0^2 = \iint_{S^n \times S^n} |g(x, y)|^2 dx dy.$$

Заметим, что оператор Лапласа Δ является формально самосопряженным относительно скалярного произведения $(u, v) = \int_{S^n} u(x) \bar{v}(x) dx$ на пространстве $C^\infty(S^n)$. Произведение $\Delta_x \circ G = \Delta_x G$ есть интегральный оператор с ядром $\Delta_x g(x, y)$. Положим $M = \max\{\|\Delta_x^2 G\|, \|G\|\}$.

Лемма 3. Пусть $v = Gu = \sum v_{kjm} e_{kjm}$, тогда

$$|v_{kjm}|^2 \leq \frac{4M^2}{(k^2(k+n-1)^2 + 1)^2} \|u\|^2.$$

При этом если $k \neq 0$, то

$$|v_{kjm}|^2 \leq \frac{4|\alpha_{kjm}|^2}{(k^2(k+n-1)^2 + 1)^2},$$

где $\alpha_{kjm} = \langle \Delta_x^2 Gu, e_{kjm} \rangle$.

Предположим, что a, λ вещественны. Тогда по лемме 1 спектр $\sigma(L)$ оператора L лежит на вещественной оси. Теперь мы также предположим, что $\tilde{\lambda}_{km} \neq 0 \forall k, m \in Z, k \geq 0$. Тогда определен обратный оператор L^{-1} , но этот оператор может быть неограничен, если $0 \in Cl\{\tilde{\lambda}_{km}\}$. В выражении для обратного оператора L^{-1} появляются малые знаменатели.

$$L^{-1}v(x, t) = \sum \frac{v_{kjm}}{\tilde{\lambda}_{km}} e_{kjm}, \quad (3)$$

где v_{kjm} — коэффициенты Фурье ряда $v(x, t) = \sum_{k, m \in Z, k \geq 0} v_{kjm} e_{kjm}$.

Для положительных чисел σ и C через $A_\sigma(C)$ обозначим множество таких положительных чисел b ,

для которых при всех целых m и k , $k \geq 0$, выполнено неравенство

$$\left| \frac{2m\pi}{b} \pm a\sqrt{k(k+n-1)} - \lambda \right| \geq \frac{C}{(k+1)^{1+\sigma}}. \quad (4)$$

Как видно из определения, множества $A_\sigma(C)$ увеличиваются при уменьшении C и при увеличении σ . Поэтому в дальнейшем для получения утверждений о непустоте такого множества или его части возникает требование, чтобы C было достаточно малым, а σ — достаточно большим. Через A_σ обозначим объединение по $C > 0$ множеств $A_\sigma(C)$.

Теорема 1. Множества $A_\sigma(C)$, A_σ — борелевские. При этом A_σ является множеством полной меры, т.е. его дополнение на полупрямой R^+ имеет нулевую меру.

Теорема 2. Пусть функция $g(x, y)$ задана на $S^n \times S^n$ и такова, что функция $\Delta_x^2 g(x, y)$ непрерывна на $S^n \times S^n$, $0 < \sigma < 1$, $b \in A_\sigma(C)$. Тогда определен обратный оператор L^{-1} и $L^{-1} \circ G$ есть компактный оператор.

Доказательство. Так как $b \in A_\sigma(C)$, то $\lambda_{km} \neq \lambda$, $\lambda'_{km} \neq \lambda \forall k \geq 0, m \in Z$ и определен обратный оператор L^{-1} , его выражение имеет вид (3). Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{4+4\sigma}}{(k^2(k+n-1)^2 + 1)^2} = 0.$$

Поэтому для заданного положительного числа $\varepsilon > 0$ существует $k_0 > 0$ такое, что для всех $k > k_0$

$$\frac{(k+1)^{4+4\sigma}}{(k^2(k+n-1)^2 + 1)^2} < \frac{\varepsilon^2 C^4}{(2M)^2}.$$

Обозначим $L^{-1}v(x, t) = Q_{k_0 1} v + Q_{k_0 2} v$, $v = Gu$.

Здесь

$$Q_{k_0 1} v = \sum_{k \leq k_0} \frac{v_{kjm}}{(\lambda_{km} - \lambda)(\lambda'_{km} - \lambda)} e_{kjm},$$

$$Q_{k_0 2} v = \sum_{k > k_0} \frac{v_{kjm}}{(\lambda_{km} - \lambda)(\lambda'_{km} - \lambda)} e_{kjm}.$$

Заметим, что при $k \leq k_0$

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{2m\pi}{b} \pm a\sqrt{k(k+n-1)} - \lambda \right|^2} = 0.$$

Поэтому существует положительное целое m_0 такое, что для любого m , $|m| > m_0$ для всех k , $0 \leq k \leq k_0$,

$$\frac{1}{|\lambda_{km} - \lambda|^2} < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \frac{1}{|\lambda'_{km} - \lambda|^2} < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Рассмотрим оператор $Q_{k_0 1} v = Q_{k_0 1}^* v + Q_{k_0 1}^* v$. Здесь

$$Q_{k_0 1}^* v = \sum_{k \leq k_0, |m| \leq m_0} \frac{v_{kjm}}{(\lambda_{km} - \lambda)(\lambda'_{km} - \lambda)} e_{kjm},$$

$$Q_{k_0 1}^* v = \sum_{k \leq k_0, |m| > m_0} \frac{v_{kjm}}{(\lambda_{km} - \lambda)(\lambda'_{km} - \lambda)} e_{kjm}.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \|Q_{k_0 1^*} v\|^2 &= \|Q_{k_0 1^*} \circ Gu\|^2 = \sum_{0 \leq k \leq k_0, |m| > m_0} \frac{|v_{kjm}|^2}{|\lambda_{km} - \lambda|^2 |\lambda'_{km} - \lambda|^2} \leq \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq k_0, |m| > m_0} |v_{kjm}|^2 \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 \leq \|Gu\|^2 \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 \leq \\ &\leq \|G\|^2 \|u\|^2 \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 \leq \varepsilon^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Итак, $\|Q_{k_0 1^*} \circ G\| \leq \varepsilon$.

Рассмотрим оператор $Q_{k_0 2} \circ G$. В силу леммы 3 и (4) мы имеем

$$\begin{aligned} \|Q_{k_0 2} v\|^2 &= \|Q_{k_0 2} \circ Gu\|^2 = \sum_{k > k_0} \frac{|v_{kjm}|^2}{|\lambda_{km} - \lambda|^2 |\lambda'_{km} - \lambda|^2} \leq \\ &\leq \sum_{k > k_0} \frac{4|\alpha_{kjm}|^2}{(k^2(k+n-1)^2+1)^2} \frac{(k+1)^{4+4\sigma}}{C^4} \leq \\ &\leq \frac{1}{C^4} \frac{\varepsilon^2 C^4}{(2M)^2} \sum_{k > k_0} 4|\alpha_{kjm}|^2 \leq \varepsilon^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Это значит, что $\|Q_{k_0 2} \circ G\| \leq \varepsilon$. В силу того, что оператор $Q_{k_0 1^*} \circ G$ имеет конечномерный образ, он компактен. Далее

$$\begin{aligned} \|L^{-1} \circ G - Q_{k_0 1^*} \circ G\| &= \|(Q_{k_0 1^*} + Q_{k_0 2}) \circ G\| \leq \\ &\leq \|Q_{k_0 1^*} \circ G\| + \|Q_{k_0 2} \circ G\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, оператор $L^{-1} \circ G$ есть предел последовательности компактных операторов,

и поэтому этот оператор компактен. Теорема доказана.

Исследуем вопрос о разрешимости задачи (1), (2) при фиксированном значении параметра v . Для этого нам будет нужно изучить структуру плоского множества $E \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, состоящего из пар (v, b) таких, что $v \neq 0$ и $\frac{1}{v} \notin \sigma(K)$, где $K = K_b = L^{-1} \circ G$. Из

теории Фредгольма для компактных операторов вытекает следующая

Теорема 3. Пусть $b \in A_0(C)$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное периодическое решение с периодом b для всех $v \in \mathbb{C}$ за исключением не более чем счетного дискретного множества значений.

Теорема 4. Множество E – измеримое множество полной меры на $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$.

Из теоремы 4 вытекает следующее важное

Следствие. Для почти всех $v \in \mathbb{C}$ задача (1), (2) имеет единственное периодическое решение для почти всех значений периода $b \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство теорем 3, 4 и следствия проводится так же, как в работе [2].

Пользуясь случаем, автор выражает свою искреннюю благодарность проф. Е.Ю.Панову за внимание к работе.

1. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. С.163.
2. Данг Хань Хой. // Вестник НовГУ. Сер.: Техн. науки. 2005. №34. С.53-56.