

УДК 517.9

Л.Е.Бритвина

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ СВЕРТКОЙ КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ*Институт электронных и информационных систем НовГУ*

In this paper a class of integral convolution transforms and their applications to solve of the linear integral equations is considered.

Введение

Уравнения типа свертки являются одним из важнейших математических средств решения разнообразных прикладных задач. Они применяются в различных областях математической физики и прикладной математики, техники и экономики.

Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свертки основывается на применении интегральных преобразований, которыми простые уравнения непосредственно сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, а более сложные

— к линейным краевым задачам аналитических функций [1].

Данная работа посвящена рассмотрению интегральных преобразований, в основе которых лежит свертка косинус-преобразования Фурье, определяемая посредством равенства

$$(f_c * k_c)_c(t) = \int_0^{\infty} (k(t+\tau) + k(|t-\tau|))f(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (1)$$

Она обладает факторизационным свойством

$$V_c[(f_c * k_c)_c](x) = (V_c k)(x)(V_c f)(x).$$

Свертка косинус-преобразования Фурье была впервые введена в работе [2].

Если одну из функций в равенстве (1) зафиксировать, например $k(t)$, то мы получим интегральное преобразование сверточного типа

$$AL: f \rightarrow \mathfrak{I}(f_c * k_c)_c,$$

где $\mathfrak{I}$ — некоторый оператор (чаще всего дифференциальный). Функция $k(t)$ будет при этом называться ядром этого интегрального преобразования.

Впервые преобразования, порожденные сверткой (1), были рассмотрены Ву Ким Туаном [3]. В работе [4] автором были получены результаты с дифференциальными операторами более общего вида.

Результаты

В [3] была доказана

Лемма 1. Пусть $f(t), k(t) \in L_2(\mathbf{R}_+)$, тогда справедлива формула Парсеваля

$$\int_0^\infty (k(t+\tau) + k(|t-\tau|)) f(\tau) d\tau = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty (V_c k)(V_c f) \cos xt dx, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

На основе этой леммы в [4] автором представлена

Теорема 1. Если $f(t), k(t) \in L_2(\mathbf{R}_+)$ и

$$\int_0^\infty (k(t+\tau) + k(|t-\tau|)) \overline{k(\tau)} d\tau = \frac{4}{\pi} V_c \left[\frac{1}{r_n^2(y)} \right] (t), \quad (2)$$

где $r_n(y) = \sum_{m=0}^n a_m y^{2m}$, $y \in \mathbf{R}_+$, $a_m \in \mathbf{R} \quad \forall m = 0, 1, \dots, n$,

то формула

$$g(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m a_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (k(t+\tau) + k(|t-\tau|)) f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

определяет почти всюду функцию $g(t) \in L_2(\mathbf{R}_+)$ такую, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbf{R}_+)} = \|g\|_{L_2(\mathbf{R}_+)}.$$

Кроме того почти всюду справедлива формула обращения

$$f(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m a_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (\overline{k(t+\tau)} + \overline{k(|t-\tau|)}) g(\tau) d\tau,$$

$t \in \mathbf{R}_+$.

По аналогии с работой [3] функцию $k(t)$, удовлетворяющую равенству (2), назовем симметричным косинус-ядром Фурье с характеристическим полиномом $r_n(y)$. Очевидно, что при рассмотрении ядер данного вида подразумевается, что косинус-преобразование Фурье функции $\frac{1}{r_n^2(y)}$ существует.

На основе леммы 1 и теоремы 1 нетрудно доказать следующее свойство симметричных косинус-ядер Фурье [4].

Теорема 2. Пусть $k_1(t)$ и $h_1(t)$ — симметричные косинус-ядра Фурье с характеристическими полиномами $r_n(y) = \sum_{m=0}^n a_m y^{2m}$ и $\rho_\ell(y) = \sum_{m=0}^\ell b_m y^{2m}$ со-

ответственно. Тогда

$$s_1(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m a_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (k_1(t+\tau) + k_1(|t-\tau|)) h_1(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

является симметричным косинус-ядром Фурье с характеристическим полиномом $\rho_\ell(y)$, $\ell, n \geq 1$.

С точки зрения приложений более интересным классом интегральных преобразований, порождаемых сверткой косинус-преобразования Фурье, являются преобразования с несимметричными ядрами, условия существования которых представлены в следующих теоремах.

Теорема 3. Пусть $\tilde{k}(x)$ и $\tilde{h}(x)$ — ограниченные функции на $\mathbf{R}_+$ такие, что $\tilde{k}(x)\tilde{h}(x) = \frac{4}{\pi^2}$. Функ-

ции $k_1(t)$ и $h_1(t)$ являются косинус-преобразованиями Фурье функций $\frac{\tilde{k}(x)}{r_n(x)}$ и $\frac{\tilde{h}(x)}{\rho_\ell(x)}$, где $r_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^{2m}$

и $\rho_\ell(x) = \sum_{m=0}^\ell b_m x^{2m}$, $\ell, n \geq 1$. Тогда преобразования

$$g(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m a_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (k_1(t+\tau) + k_1(|t-\tau|)) f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$f(t) = \sum_{m=0}^\ell \frac{(-1)^m b_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (h_1(t+\tau) + h_1(|t-\tau|)) g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

ограниченны в $L_2(\mathbf{R}_+)$ и взаимно обратны друг другу.

Теорема 4. Пусть $\tilde{k}(x)$ и $\tilde{h}(x)$ — ограниченные функции на $\mathbf{R}_+$ такие, что $\tilde{k}(x)\tilde{h}(x) = \frac{4}{\pi^2}$. Функции

$k_1(t)$ и $h_1(t)$ являются косинус-преобразованиями Фурье функций $\frac{\tilde{k}(x)}{r_n(x)}$ и $\frac{\tilde{h}(x)}{\rho_n(x)}$, где $r_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^{2m}$ и

$\rho_n(x) = \sum_{m=0}^n b_m x^{2m}$, $n \geq 1$. Тогда преобразования

$$g(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m b_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (k_1(t+\tau) + k_1(|t-\tau|)) f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$f(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m a_m}{2} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \int_0^\infty (h_1(t+\tau) + h_1(|t-\tau|)) g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

ограниченны в $L_2(\mathbf{R}_+)$ и взаимно обратны друг другу.

Доказательства теорем 3 и 4 абсолютно аналогичны доказательству теоремы 1. Сходимость интегралов в теореме 4 достигается вследствие равенства порядков полиномов $r_n(x)$ и $\rho_n(x)$.

Примеры

Пусть $\tilde{k}(x) \equiv \tilde{h}(x) \equiv \frac{2}{\pi}$ и $a, b \in \mathbf{R}_+$. Пользуясь справочником интегралов и рядов [5], получаем следующие приложения полученных результатов к решению линейных интегральных уравнений.

Рассмотрим пару ядер

$$k_1(t) = \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{1}{b^2 + x^2} \right] (t) = \frac{1}{b} e^{-bt},$$

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{1}{x^2 - a^2} \right] (t) = -\frac{1}{a} \sin at.$$

Интегральные преобразования с данными ядрами имеют вид

$$g(t) = -\frac{1}{2b} \left(a^2 + \frac{d^2}{dt^2} \right) \int_0^\infty (e^{-(t+\tau)b} + e^{-|t-\tau|b}) f(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) - \frac{a^2 + b^2}{2b} \int_0^\infty (e^{-(t+\tau)b} + e^{-|t-\tau|b}) f(\tau) d\tau,$$

$$f(t) = -\frac{1}{2a} \left(b^2 - \frac{d^2}{dt^2} \right) \int_0^\infty (\sin a(t+\tau) + \sin a|t-\tau|) g(\tau) d\tau =$$

$$= g(t) - \frac{a^2 + b^2}{2a} \int_0^\infty (\sin a(t+\tau) + \sin a|t-\tau|) g(\tau) d\tau.$$

Аналогично получаем пары интегральных преобразований, если

$$k_1(t) = \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{1}{b^2 + x^2} \right] (t) = \frac{1}{b} e^{-bt},$$

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{1}{a^2 + x^2} \right] (t) = \frac{1}{a} e^{-at}$$

или

$$k_1(t) = \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{1}{x^2 - b^2} \right] (t) = -\frac{1}{b} \sin bt,$$

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} V_c \left[\frac{1}{x^2 - a^2} \right] (t) = -\frac{1}{a} \sin at,$$

здесь $a \neq b$.

Выводы

Результаты, представленные в данной работе, позволяют находить аналитические решения ряда линейных интегральных уравнений сверточного типа, встречающихся, например, при математическом моделировании различных процессов.

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
2. Churchill R.V. Fourier Series and boundary value problems. N.Y., 1941. 206 p.
3. Tuan V.K. // J. Math. Anal. and Appl. 1999. №229. P.519-529.
4. Britvina L.E. // Integral transforms and Special Functions. 2005. V.16. №5-6. P.379-389.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.