

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Рассветалов Л.А.

ЗАДАЧНИК
по дисциплинам
Статистическая теория связи
и
Радиосистемы передачи информации

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Великий Новгород
2014 г.

ББК

УДК 621.396; 681.3.07

Рассветалов Л.А. Задачи по цифровой связи: Учебное пособие / ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2014 г. - 42 с. Издание второе, переработанное и дополненное.

Рецензенты:

В учебном пособии представлены задачи и решения по сигналам и видам модуляции, оптимальному приему бинарных сигналов в каналах с постоянными и случайными параметрами, приему многопозиционных сигналов, а также вопросам кодирования и декодирования решетчатых кодов. Включенные задачи соответствуют дисциплинам «Радиотехнические системы передачи информации» направления 210300.65 (Радиотехника), 210300.68 (Системы и устройства передачи, приема и обработки сигналов), а также «Статистическая теория связи» направления 210300.68.

Учебное пособие одобрено советом института Электронных и Информационных Систем Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, 2014

Содержание

| | |
|---|----|
| Содержание | 3 |
| Введение | 4 |
| 1. Краткие теоретические сведения | 4 |
| 1.1 Векторное представление сигналов и шума | 4 |
| 1.2 Правила принятия решения | 6 |
| 1.3 Двоичная (бинарная) передача | 6 |
| 1.4 Прием многоосновных сигналов | 8 |
| 1.5 Сверточные коды | 11 |
| Пример | 14 |
| 1.6 Широкополосные сигналы в системах связи | 16 |
| Задачи | 18 |
| 2 Общие сведения о цифровых системах передачи информации | 18 |
| 3 Сигналы, модуляция | 19 |
| 4 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами 22 | |
| 5 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами | 23 |
| 6 Прием многопозиционных сигналов | 24 |
| 7 Сверточные коды | 24 |
| 8 Широкополосные сигналы в системах связи | 30 |
| Решения | 32 |
| 2 Общие сведения о цифровых системах передачи информации | 32 |
| 3 Сигналы, модуляция | 32 |
| 4 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами 34 | |
| 5 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами | 34 |
| 6 Прием многопозиционных сигналов | 35 |
| 7 Сверточные коды | 36 |
| 8 ШПС в системах связи | 41 |
| Список литературы | 42 |

Введение

При составлении Задачника использованы задачи, имеющиеся в [1-5], причем для [1] на сопровождающем сайте <ftp://ftp.wiley.co.uk/pub/books/ipatov> приведены решения имеющихся в книге задач (на англ. языке).

1. Краткие теоретические сведения

1.1 Векторное представление сигналов и шума

В современной теории передачи информации для описания, анализа и преобразования сообщений и сигналов широко используется геометрическое представление, при котором сигналы рассматриваются как элементы некоторого пространства, свойства сигналов – как свойства пространства, преобразование сигналов – как отображение одного пространства на другое.

Определим N -мерное *ортogonalное пространство* как пространство, определяемое набором N линейно независимых функций $\{\psi_j(t)\}$, именуемых *базисными*. Любая функция этого пространства может выражаться через линейную комбинацию этих базисных функций, которые должны удовлетворять условию

$$(\psi_j, \psi_k) = \int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt = K_j \delta_{jk}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad j, k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где (ψ_j, ψ_k) – скалярное произведение, δ_{jk} – оператор Кронекера.

В общем случае отличие между двумя любыми элементами пространства можно задавать некоторым положительным числом, которое трактуется как количественная мера различия сигналов и называется *расстоянием*.

Множество сигналов S с определенным каким-либо способом расстоянием между элементами называется *пространством сигналов*. Для определения расстояния между элементами пространства используют функционал d , который интуитивно связывается с понятием расстояния через свойства:

$$\begin{aligned} d(s_i, s_j) &\geq 0, \quad d(s_i, s_j) = d(s_j, s_i); \\ d(s_i, s_k) &\leq d(s_i, s_j) + d(s_j, s_k); \\ d(s_i, s_j) &= 0, \text{ только, если } s_i = s_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Функционал, удовлетворяющий (2), называется *метрикой*. Множество S с метрикой d называется *метрическим пространством*.

При ненулевых константах K_j в (1) пространство называется *ортogonalным*. Если базисные функции нормированы так, что все $K_j = 1$, пространство называется *ортонормированным*.

Если $\psi_j(t)$ соответствует действительному компоненту напряжения или силы тока сигнала, нормированному на сопротивление 1 Ом, то нормированная энергия в джоулях, переносимая сигналом $\psi_j(t)$ за T секунд будет равна

$$E_j = \int_0^T \psi_j^2(t) dt = K_j$$

Произвольный конечный набор сигналов $\{s_i(t)\}$ ($i = 1, \dots, M$), где каждый элемент множества физически реализуем и имеет длительность T , можно выразить как линейную комбинацию N ортogonalных сигналов $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)$, где $N \leq M$, так что

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_j(t), \quad i = 1, \dots, M, \quad N \leq M,$$

где a_{ij} – коэффициент разложения сигнала s_i по базисным функциям:

$$a_{ij} = \frac{1}{K_j} \int_0^T s_i(t) \psi_j(t) dt, \quad i=1, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T, \quad j=1, \dots, N.$$

Набор сигналов $\{s_i(t)\}$ можно рассматривать как набор векторов $\{\mathbf{s}_i\} = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}\}$. Каждый из сигналов определяется вектором его коэффициентов $\mathbf{s}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$, $i = 1, \dots, M$.

Для количественной характеристики сигналов в линейном пространстве вводят *норму*, определяющую длину векторов \mathbf{s}_j , обозначаемую символом $\|\mathbf{s}_j\|$

Для N -мерного линейного пространства действительных или комплексных чисел $\{\mathbf{s}_j\} = (s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jN})$, $j = 1, 2, \dots$, норма определяется, как

$$\|\mathbf{s}_j\| = \left[\sum_{k=1}^N |s_{jk}|^2 \right]^{1/2},$$

а для функционального пространства - как

$$\|\mathbf{s}_j\| = \left[\int_0^T |s_j(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

При этом квадрат нормы представляет собой энергию сигнала.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму

$$\|\mathbf{s}_i\| = (\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i)^{1/2},$$

и метрику

$$d(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_i) = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| = (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)^{1/2}.$$

Т.о., пространство со скалярным произведением можно всегда сделать нормированным и метрическим. Такое пространство при конечном числе N называется *евклидовым* (обозначается R_N), а при бесконечном N – *гильбертовым* (обозначается L_2).

Евклидово расстояние между непрерывными сигналами $s(t)$ и $y(t)$ определяется как

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \sqrt{\int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt}, \quad T - \text{длительность сигналов,}$$

а между векторам \mathbf{s} и \mathbf{y} как $d(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} [y_i - s_i]^2}$.

Обычно под \mathbf{y} понимают принятое колебание, а под \mathbf{s}_i – ансамбль передаваемых сигналов. Тогда

$$d^2(\mathbf{s}_i, \mathbf{y}) = \int_0^T y^2(t) dt - 2 \int_0^T y(t) s_i(t) dt + \int_0^T s_i^2(t) dt = \|\mathbf{y}\|^2 - 2z_i + \|\mathbf{s}_i\|^2,$$

где z_i соответствует корреляции между наблюдением $y(t)$ и i -м сигналом $s_i(t)$

$$z_i = (\mathbf{y}, \mathbf{s}_i) = \int_0^T y(t) s_i(t) dt. \quad (3)$$

Часто вместо корреляционной функции используют *коэффициент корреляции* сигналов $s_i(t)$, $s_j(t)$

$$\rho_{ij} = \frac{(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)}{\|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{s}_j\|} = \frac{1}{\sqrt{E_i E_j}} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt, \quad (4)$$

где E_i, E_j – энергии сигналов:

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$$

1.2 Правила принятия решения

В соответствии с правилом *максимального правдоподобия* (МП) решение принимается в пользу того сигнала s_i , для которого вероятность трансформации его каналом в принятое колебание y является максимальным. Для гауссовского канала правило МП преобразуется в правило *минимума расстояния*:

$$d(s_j, y) = \min_i d(s_i, y) \Rightarrow \hat{H}_j \quad (5)$$

или в соответствующее ему правило *максимума корреляции*:

$$z_j - \frac{E_j}{2} = \max_i (z_i - \frac{E_i}{2}) \Rightarrow \hat{H}_j \quad (6)$$

Для приемной стороны имеется M гипотез H_i , состоящих в том, какой из M возможных сигналов был в действительности передан и трансформирован каналом в принятое колебание $y(t)$.

1.3 Двоичная (бинарная) передача

В случае двоичных данных (сигналы $s_0(t)$ и $s_1(t)$) существуют только две гипотезы H_0 и H_1 , правило принятия решения записывают либо в терминах расстояний между сигналами

$$\begin{array}{c} \hat{H}_0 \\ d(s_0, y) < \\ > \\ d(s_1, y) \\ \hat{H}_1 \end{array}, \quad (7)$$

либо через их корреляции

$$\begin{array}{c} \hat{H}_0 \\ z = z_0 - z_1 > \\ < \\ \frac{E_0 - E_1}{2} \\ \hat{H}_1 \end{array}. \quad (8)$$

Вероятность p_{01} ошибочного решения в пользу сигнала $s_1(t)$, если был передан сигнал $s_0(t)$ находится, как

$$p_{01} = P(z < \frac{E_0 - E_1}{2} | s_0(t)) = \int_{-\infty}^{\frac{E_0 - E_1}{2}} W(z | s_0(t)) dz \quad (9)$$

где $P(A|B)$ – условная вероятность события A при условии, что событие B произошло, а $W(z|s_0(t))$ – условная плотность вероятности разности корреляций z из (8) при условии, что сигнал $s_0(t)$ действительно был передан.

Т.к. z является линейным преобразованием гауссовского наблюдения $y(t)$, то

$$W(z | s_0(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma^2}\right],$$

интегрирование которого, согласно (9), приводит к выражению

$$p_{01} = Q\left(\frac{2\bar{z} - E_0 + E_1}{2\sigma}\right), \quad (10)$$

где

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

– дополнительная функция ошибок.

В случае, когда действительно был принят сигнал $s_0(t)$, т.е. $\overline{y(t)} = s_0(t)$, математическое ожидание z будет

$$\bar{z} = \int_0^T y(t) [s_0(t) - s_1(t)] dt = E_0 - p_{01} \sqrt{E_0 E_1}, \quad (11)$$

а дисперсия σ^2

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{N_0 E}{2}. \quad (12)$$

Если w – вероятность передачи сигнала $s_0(t)$, полная вероятность ошибочного приема устанавливается соотношением

$$P_E = wp_{01} + (1-w)p_{10} = Q\left(\sqrt{\frac{d^2(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)}{2N_0}}\right) \quad (13)$$

Отношение сигнал/шум (ОСШ) h^2 определяют, как отношение энергии сигнала, приходящееся на один бит информации, к спектральной плотности мощности гауссовского (белого) шума: $h^2 = E_b/N_0$. Для двоичных систем E_b совпадает с энергией сигнала E . Введем параметр γ_c , определяющий тип сигнала и вид модуляции:

| | |
|-------------------------|-------------------------------|
| $\gamma_c = 1/\sqrt{2}$ | БАМ (пассивная пауза) |
| $\gamma_c = 1$ | БЧМ (ортогональные сигналы) |
| $\gamma_c = \sqrt{2}$ | БФМ (противоположные сигналы) |

Тогда вероятность ошибки **когерентного** приема двоичных сигналов можно записать, как

$$P_E = Q(\gamma_c h) = Q\left(\sqrt{\gamma_c \frac{E}{N_0}}\right) \quad (14)$$

Вероятность ошибки при **некогерентном** приеме БАМ определяется, как

$$P_E = 0,5 \{P(s_0 / s_1) + P(s_1 / s_0)\} = 0,5 \left\{ e^{-H_{opt}^2/2} + Q(H_{opt}) \right\}$$

Здесь вероятность ложной тревоги

$$P(s_1 / s_0) = \int_{H_{opt}}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz = \int_{H_{opt}}^{\infty} e^{-z^2/2} d\frac{z^2}{2} = e^{-H_{opt}^2/2}$$

где оптимальный порог принятия решения $H_{opt} \approx a/2 = h/\sqrt{2}$ при больших h и:

$$P_E = 0,5 \left\{ e^{-h^2/4} + Q(h/\sqrt{2}) \right\} \quad (15)$$

Вероятность пропуска сигнала

$$P(s_0 / s_1) = Q(H_{opt}) = Q(h/\sqrt{2})$$

Вероятность ошибки при **некогерентном** приеме сигналов БЧМ

$$P_E = 0,5 \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$$

Для **когерентного** приема сигналов ОБФМ

$$P_E = 2[Q(h\sqrt{2}) - Q^2(h\sqrt{2})] \approx 2 Q(h\sqrt{2}), \quad (16)$$

и, используя разложение гауссовой функции ошибок $Q(h\sqrt{2})$ в ряд, получим

$$P_E \approx \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \exp(-h^2). \quad (17)$$

При **некогерентном** приеме ОБФМ

$$P_E = 0,5 \exp(-E_b/N_0) \quad (18)$$

1.4 Прием многоосновных сигналов

При использовании схемы, в которой за такт обрабатывается m бит, передача сигналов называется M -арной. Каждый символ M -арного алфавита можно однозначно связать с последовательностью из m бит, где

$$M = 2^m \text{ или } m = \log_2 M \text{ и } M - \text{размер алфавита}$$

1.4.1 Полоса частот и скорость передачи

Поскольку один из M символов (или сигналов) передается за интервал T , скорость передачи данных R можно записать в следующем виде.

$$R = \frac{m}{T} = \frac{\log_2 M}{T} \text{ бит/с} \quad (19)$$

Из последнего соотношения *эффективную* длительность T_0 каждого бита можно представить через длительность символа T или скорость передачи данных R

$$T_0 = \frac{1}{R} = \frac{T}{m} = \frac{1}{mR_s}, \quad (20)$$

где R_s – скорость передачи символов (техническая скорость передачи).

Техническая и информационная скорости передачи связаны, как

$$R_s = \frac{R}{\log_2 M} \quad (21)$$

Одна из часто используемых частотных характеристик приемного фильтра называется *приподнятым косинусом*. Она принадлежит к классу Найквиста (нулевая МСИ в моменты взятия выборок) и описывается следующим выражением

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{для } |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{|f| + W - 2W_0}{W - W_0}\right) & \text{для } 2W_0 - W < |f| < W \\ 0 & \text{для } |f| > W \end{cases} \quad (22)$$

Здесь W – максимальная ширина полосы, а $W_0 = 1/2T$ – минимальная ширина по Найквисту для прямоугольного спектра и ширина полосы по уровню -6 дБ для косинусоидального спектра. Разность $W - W_0$ называется "избытком полосы"; она означает дополнительную ширину полосы по сравнению с минимумом Найквиста. *Коэффициент сглаживания* определяется как $r = (W - W_0)/W_0$, где $0 < r < 1$. Коэффициент сглаживания — это избыток полосы, деленный на ширину полосы по уровню -6 дБ (т.е. относительный избыток полосы). Для данного W_0 выравнивание r задает требуемый избыток относительно W_0 и характеризует крутизну фронта характеристики фильтра.

Импульсный отклик, соответствующий функции $H(f)$, равен

$$h(t) = 2W_0 (\sin c 2W_0 t) \frac{\cos\left[2\pi(W - W_0)t\right]}{1 - \left[4(W - W_0)t\right]^2}. \quad (23)$$

Этот импульсный отклик изображен на рис. 1, б для $r = 0$, $r = 0,5$ и $r = 1$. Хвост имеет нулевые значения в каждый момент взятия выборки, вне зависимости от значения коэффициента сглаживания.

Фильтр, описанный уравнением (22), и импульс, представленный уравнением (23), можно реализовать только приблизительно, поскольку, строго говоря, спектр типа приподнятого косинуса физически не может быть реализован (причина та же, что и при реализации идеального фильтра Найквиста). Реализуемый фильтр должен иметь импульсный отклик конечной длительности и давать нулевой выход до момента включения импульса, что невозможно для семейства характеристик типа приподнятого косинуса. Эти нереализуемые фильтры являются непричинными (импульсный отклик фильтра имеет бесконечную продолжительность и фильтрованный импульс начинается в момент $t = -\infty$). На практике фильтр формирования импульсов должен удовлетворять двум требованиям. Он должен обеспечивать желаемое сглаживание и должен быть реализуем (импульсный отклик должен усекается до конечного размера).

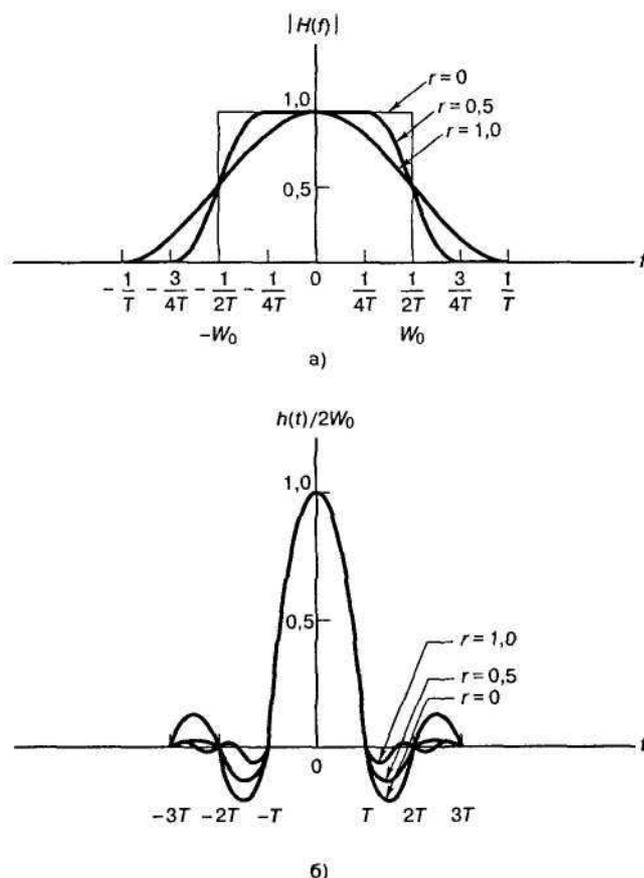


Рис. 1. Характеристики фильтра вида приподнятого косинуса.

Полоса частот при подобной фильтрации и скорость передачи с учетом коэффициента сглаживания r связаны соотношением

$$W = \frac{1}{2}(1+r)R_s \quad (24)$$

1.4.2 Вероятность ошибок для M-арной передачи

При возможном числе сигналов $M > 2$ вероятность $p_{1,e}$ перепутывания действительно принятого $s_1(t)$ с одним из $M - 1$ ошибочных сигналов $s_j(t)$, $j = 2, 3, \dots, M$, определяется, как

$$p_{1,e} = P(d^2(\mathbf{s}_1, \mathbf{y}) \neq \min_i d^2(\mathbf{s}_i, \mathbf{y}) | s_1(t)) = 1 - P(z_1 - \frac{E_1}{2} = \max_i (z_i - \frac{E_i}{2}) | s_1(t)).$$

Определение этой вероятности в общем случае вызывает значительные трудности, поэтому используют ее верхнюю точную границу.

$$P_e \approx \frac{n_{\min}}{M} Q \left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}} \right), \quad \frac{d_{\min}^2}{2N_0} \gg 1, \quad (25)$$

где d_{\min} есть минимальное расстояние на множестве всех возможных пар, встречающееся n_{\min} раз.

Соотношение (25.19) указывает на необходимость *максимизации минимума расстояния в множестве M сигналов*. В случае одинаковой $E = E_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, M$ энергии всех сигналов сигнальные точки (концы векторов сигналов) лежат на поверхности сферы, образуя *сферическую упаковку*. Размерность n_s сигнального пространства, внутри которого осуществляется их упаковка обусловлена лимитом доступного ресурса, но теперь спектрального. Диапазон частот и временной интервал, отведенные для всех M сигналов, ограничены значениями W_i и T_i соответственно. Первое из этих ограничений учитывает экономию полосы, тогда как второе отражает желание передавать данные с приемлемой скоростью $R = \log M / T_i$. Тогда, согласно теореме отсчетов, имеется около $W_i T_i$ независимых отсчетов, доступных для построения M сигналов, причем каждый из сигналов трактуется как вектор в пространстве размерности $n_s = W_i T_i$.

Если равенства энергий сигналов не требуется, а имеется лишь ограничение на величину их средней энергии, созвездие (ансамбль) сигналов образует *объемную упаковку*.

Сигналы, для которых верхняя граница для минимума расстояния удовлетворяет

$$d_{\min}^2 \leq \frac{2M}{M-1} E,$$

называются *симплексными*. Симплексные сигналы *эквидистантны* и линейно зависимы. Свойство эквидистантности симплексных сигналов влечет за собой равенство коэффициентов корреляции ρ_{ij} любой их пары. Оценка величины ρ_{ij} приводит к следующему результату

$$\rho_{ij} = \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_j\|} = -\frac{1}{M-1}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, M. \quad (26)$$

В любом множестве эквидистантных сигналов $d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = d_{\min}$ для любой пары различных векторов и асимптотическая оценка вероятности ошибки при использовании симплексных сигналов выражается, как

$$P_{e \min} \leq (M-1) Q \left(\sqrt{\frac{ME}{(M-1)N_0}} \right), \quad \frac{2E}{N_0} \gg 1 \quad (27)$$

Ортогональные сигналы, являющиеся еще одним примером эквидистантных, практически столь же эффективны, как и симплексные, при достаточно большом значении M . Действительно, коэффициент корреляции для ортогональных сигналов равен нулю, а расстояние между любой их парой $d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = d_{\min} = \sqrt{2E}$. Используя этот факт, получим асимптотическую оценку вероятности ошибки для M ортогональных сигналов, которая ограничивает сверху точное значение вероятности ошибки:

$$P_{e \text{ ort}} \leq (M-1) Q \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right), \quad \frac{2E}{N_0} \gg 1. \quad (28)$$

Точная формула вычисления вероятности ошибки **когерентного** приема M ортогональных сигналов:

$$P_{e, \text{ort}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - q_b \sqrt{m})^2}{2} \right] \Phi^{M-1}(x) dx, \quad (29)$$

где $q_b = \sqrt{2E_b / N_0}$ – отношение сигнал-шум на бит, а $\Phi(x) = 1 - Q(x)$ – функция ошибок.

Квадрат расстояния для ортогональных и симплексных сигналов $2E$ и $2EM/(M-1)$ соответственно.

1.4.3 Выигрыш: обмен на полосу частот

Выигрыш от ортогонального кодирования G_a определяется сравнением квадратов минимумов расстояния при кодировании и без него. Так, в отсутствие кодирования $d_{\min, u}^2 = 4E_b$, где второй индекс обозначает отсутствие кодирования (uncoded), а при ортогональном кодировании $d_{\min, ort}^2 = 2mE_b$. Тогда

$$G_a = \frac{d_{\min, ort}^2}{d_{\min, u}^2} = \frac{m}{2}. \quad (30)$$

Выигрыш от ортогонального кодирования приобретает за счет расширения полосы, поскольку размерность сигнально пространства n_s , т.е. число ортогональных сигналов $M = n_s$, непосредственно определяется общим частотно-временным ресурсом $W_t T_t$ системы. Пусть необходимая скорость передачи в системе составляет R бит/с, что соответствует передаче $m = RT_t$ бит за выделенный интервал времени T_t . Ясно, что ортогональное кодирование битовых блоков такой длины может быть осуществлено с помощью $M = 2^m = 2^{RT_t}$ сигналов, обеспечивая асимптотический выигрыш от кодирования $G_a = m/2 = RT_t/2$. Тогда спектральная эффективность R/W_t системы, т.е. скорость, приходящаяся на 1 Гц полосы, использующей ортогональные сигналы, будет

$$\frac{R}{W_t} = \frac{RT_t}{2^{RT_t}} = \frac{2G_a}{2^{2G_a}}, \quad (31)$$

откуда следует ее значительное уменьшение (почти экспоненциальное) с ростом желаемого выигрыша от кодирования.

Удельные затраты полосы частот (спектральная эффективность) для ортогональных сигналов

$$W/R = WT_0 = WT / \log_2 M = M / \log_2 M$$

1.5 Сверточные коды

1.5.1 Сверточный кодер

Схема сверточного кодирования представлена на рис. 2. Блок из m последовательных бит источника линейно преобразуется в $n > 1$ выходных двоичных кодовых символов в интервале, равном длительности одного бита источника. Следующий блок источника получается сдвигом окна из m бит на длительность одного бита и т.д.. При этом скорость кода оказывается равной $R_c = 1/n$.

Число бит источника, определяющих кодовые символы на одном шаге, называется *длиной кодового ограничения* (на рис.2 – это m).

Описанный выше принцип может быть реализован структурой, представленной на рис. 3, где регистр сдвига, состоящий из $m - 1$ ячейки памяти, хранит $m - 1$ предшествующих бит источника.

Вместе с поступающим битом они подаются в линейную логическую цепь, содержащую n сумматоров по модулю два. Выход каждой ячейки памяти и вход кодера может быть, а может и не быть (что объясняет обозначение связей пунктирной линией) соединены с каждым сумматором, причем схема соединений определяет конкретную зависимость выходных кодовых символов от m бит источника, т.е. правило кодирования.

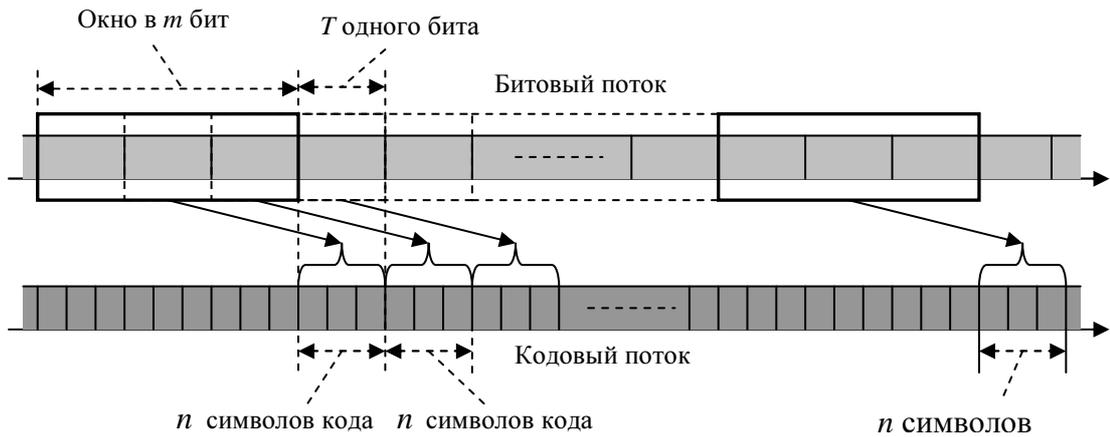


Рис. 2. Иллюстрация сверточного кодирования.

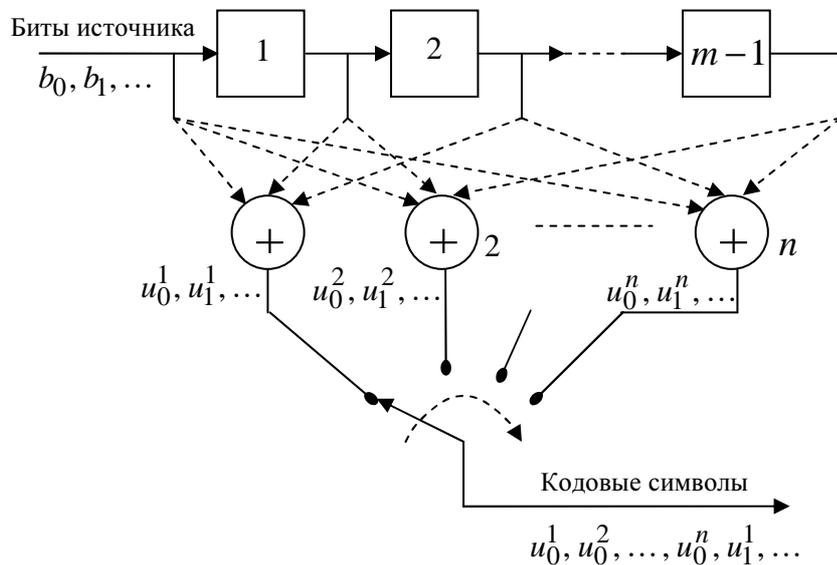


Рис. 3. Сверточный кодер.

При поступлении на вход текущего бита источника b_i на выходах сумматоров параллельно появляются n кодовых символов $u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^n$. После каждого такта битовый образец в регистре смещается вправо на одну ячейку, подготавливая цепь к формированию следующих n кодовых символов. Выходной ключ в течение одного бита поочередно подключается к выходам n сумматоров и преобразует параллельную форму представления кодовых символов в последовательную, создавая выходной кодовый поток $u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n, u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^n, \dots$.

Если на вход будет подана информационная последовательность из k бит, то на выходе кодера появится кодовая последовательность не из kn , а $(k+m-1)n$ символов, поскольку регистр сдвига обнулится только после $(m-1)$ дополнительного такта.

Очевидно, что схема, содержащая регистр сдвига и отдельные сумматоры по модулю два вместе со всеми их соединениями, представляет собой ничто иное, как *фильтр с конечным импульсным откликом* (КИО), сигнал на выходе которого представляет собой свертку входного потока битов и импульсной характеристикой фильтра, что объясняет название рассматриваемых кодов.

Свертка, связывающая кодовый символ u_i^l (т.е. появляющийся на выходе l -го сумматора при поступлении b_i бита источника) с входным битовым потоком, определяется как

$$u_i^l = \sum_{t=0}^{m-1} b_{i-t} g_t^l, \quad i = 0, 1, \dots; \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (32)$$

где $g_t^l = 1$, если l -й сумматор соединен с t -й ячейкой памяти ($t = 0$ соответствует входу кодера) и $g_t^l = 0$ в противном случае; $b_i = 0$ при $i < 0$. В частотной области подходящим инструментом для описания дискретных систем является z -преобразование. В z -области свертке соответствует произведение z -преобразований, так что соотношение (26) может быть представлено эквивалентной формой

$$u^l(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i^l z^i = b(z) g_l(z), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

где $b(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ – z -преобразование входного потока бит, а

$$g_l(z) = g_0^l + g_1^l z + \dots + g_{m-1}^l z^{m-1}, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

– передаточная функция l -го КИО-фильтра (т.е. формирующая l -й кодовый символ), называемая также l -м *порождающим полиномом* сверточного кода. Множество из n порождающих полиномов полностью определяет сверточный код, поскольку их ненулевые коэффициенты конкретизируют соединения сумматоров с регистром сдвига.

1.5.2 Решетчатая диаграмма, свободное расстояние и асимптотический выигрыш от кодирования

Регистр сдвига сверточного кодера обладает 2^{m-1} возможными состояниями и имеет только два состояния, в которые он может перейти из текущего состояния после очередного такта. Именно значение входного бита источника b_i определяет выбор одного из двух возможных переходов. Если на i -м тактовом интервале состояние регистра определяется, как $(b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_{i-m+1})$, то следующее состояние будет либо $(0, b_{i-1}, \dots, b_{i-m+2})$ при поступлении на вход бита источника $b_i = 0$, либо $(1, b_{i-1}, \dots, b_{i-m+2})$, если $b_i = 1$. Аналогично, регистр приходит в состояние $(b_i, b_{i-1}, \dots, b_{i-m+1})$, если его предыдущее состояние было либо $(b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_{i-m+2}, 0)$, либо $(b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_{i-m+2}, 1)$. Для схематического изображения всех деталей поведения регистра адекватным инструментом служит *решетка (trellis)*. Она включает две колонки из 2^{m-1} узлов, причем левая колонка отвечает текущему состоянию регистра, а правая – следующему. Ребра (стрелки) выходят из каждого узла левой колонки и входят в некоторые два узла следующей, причем сплошные и пунктирные ребра показывают пути, соответствующие приходу бита нуля или единицы соответственно. Аналогично, в каждый узел правой колонки входят два ребра, отмеченные или сплошной (нулевой входной бит), или пунктирной (входной бит равен единице) линиями. Каждое ребро помечено n -разрядным блоком, который представляет собой группу из n кодовых символов, выдаваемых кодером в момент, когда входной бит источника переводит его из одного состояния в другое.

Пример

Пусть имеется сверточный кодер, представленный на рис. 4.

Он характеризуется порождающими полиномами $g_1(z) = 1 + z + z^2$ и $g_2(z) = 1 + z^2$.

Двухразрядный регистр сдвига может находиться в одном из четырех возможных состояниях: (00), (10), (11) и (01), причем запись состояния ведется с левой ячейки памяти. На рис. 5 приведена решетка, построенная согласно выше приведенному описанию. Например, ребро из состояния (10) в (01) отмечено сплошной линией, а в состоянии (11) – пунктирной. Ребро, идущее из состояния (11) в (01), помечено кодовыми символами 01, поскольку при единицах в обеих ячейках и нулевым битом на входе верхний сумматор на рис. 4 вырабатывает нулевой выходной сигнал, а нижний выдает единицу и т.п.

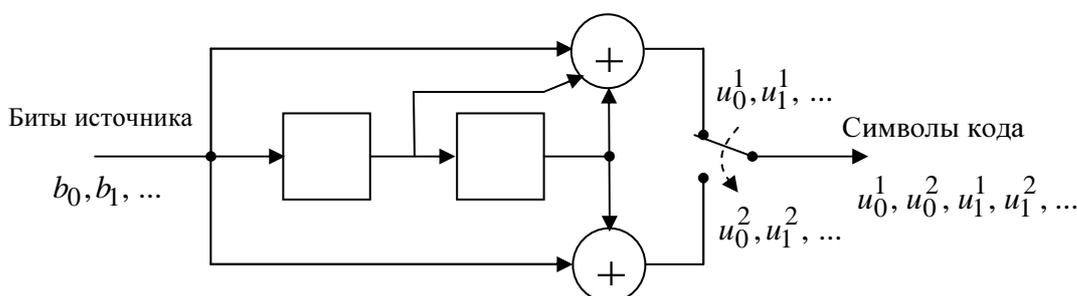


Рис. 4. Сверточный кодер со скоростью 1/2.

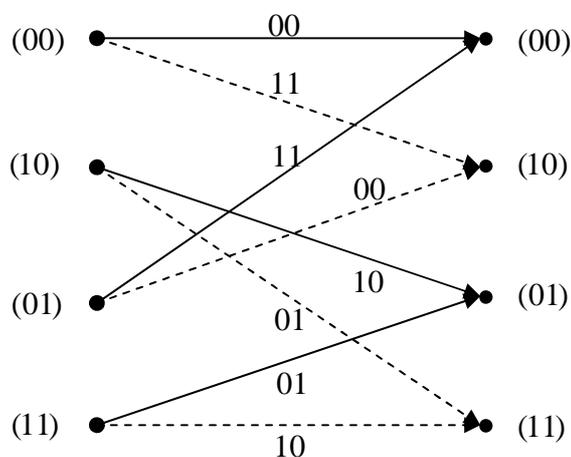


Рис. 5. Решетка кодера на рис. 4.

В течение интервала каждого такта состояние кодера изменяется согласно движению вдоль какого-то ребра решетки, одновременно выдавая на выход кодовые символы, которыми помечено данное ребро.

Для декодирования последовательности входных бит следует повторить решетку столько раз, сколько необходимо, используя правую колонку текущего шага в качестве левой для последующего шага. Каждая последовательность–кандидат входных битов данных выбирает определенный путь по решетчатой диаграмме, который можно отследить, например, для последовательности $\{b_i\} = 10100100\dots$. Ее первый бит равен единице, что

направляет кодер из узла (00) в узел (10), выдавая выходные кодовые символы 11. Вторым битом, равным нулю, переводит кодер из узла (10) в (01), генерируя кодовые символы 10. Третий бит изменяет состояние кодера с (01) на (10), выдавая на выход кодовые символы 00 и т.д. Жирной чертой выделен результирующий путь, отвечающий кодовому слову 1110001011111011.

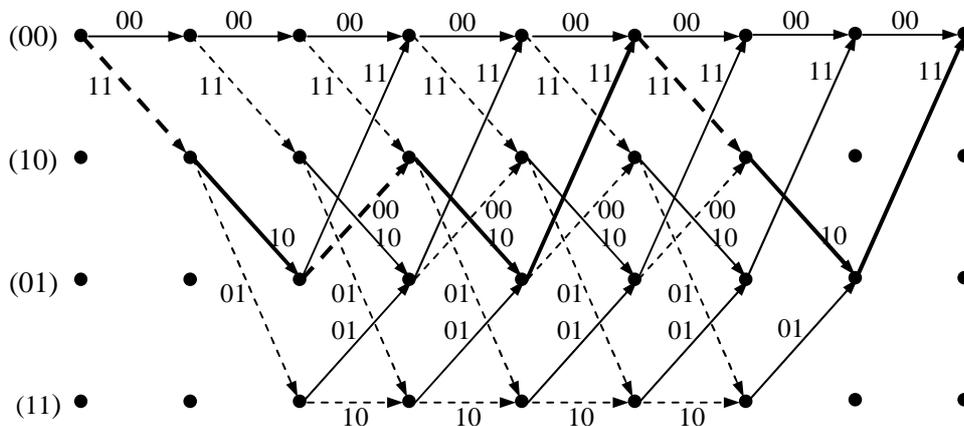


Рис. 6. Решетчатая диаграмма кодера на рис. 4.

Вес пути определяется количеством единиц, а для отыскания расстояния сверточного кода следует исследовать только пути, отклоняющиеся от нулевого пути в начале решетчатой диаграммы и не отходящие от него после первого объединения. В теории сверточных кодов эта величина традиционно называется *свободным расстоянием*, и обозначается как d_f . Среди всех путей с единственным отклонением от нулевого пути, изображенных на рис. 6, кодовое слово 11101100..., кодирующее битовый поток 100..., имеет минимальный вес, так что $d_f = 5$. Очевидно, что свободное расстояние d_f гарантирует исправление лю-

бых $\left\lfloor \frac{d_f - 1}{2} \right\rfloor$ ошибок в символах, однако, как правило, исправляются также и многие образцы с большим числом ошибок.

Выигрыш от кодирования, показывающий во сколько раз может быть уменьшена энергия сигнала на бит или мощность сигнала в результате кодирования при фиксированной вероятности ошибки, является универсальной мерой для оценки эффективности того или иного кода. Понятно, что асимптотический выигрыш от кодирования в случае АБГШ канала определяется выигрышем в евклидовом расстоянии. При передаче с использованием бинарной ФМ любое различие в символах двух сигналов увеличивает квадрат евклидова расстояния на величину, равную $4E_s$, где E_s – энергия одного символа. Имеется пара слов сверточного кода, имеющая d_f различных символов, и отсутствует пара с меньшим различием (расстоянием Хэмминга). Следовательно, минимум квадрата евклидова расстояния между словами сверточного кода, передаваемыми с помощью бинарной ФМ, составляет $d_{\min, cc}^2 = 4d_f E_s$. В то же время аналогичная характеристика при некодированной передаче составляет $d_{\min, u}^2 = 4E_b$, определяя асимптотический выигрыш от кодирования сверточным кодом, как

$$G_a = \frac{d_{\min, cc}^2}{d_{\min, u}^2} = \frac{d_f E_s}{E_b} = d_f R_c,$$

где R_c – скорость кода, измеренная в бит/сим. Для кода из вышеприведенного примера $R_c = 1/2$, $d_f = 5$, так что $G_a = 2.5$ или около 4 дБ.

Среди причин широкой популярности сверточных кодов особую роль играет существование эффективного алгоритма декодирования, а именно алгоритма декодирования Витерби. Этот алгоритм подробно рассмотрен в [Расветалов Л.А. Системы цифровой связи. Уч. пособие. НовГУ, В.Новгород, 2014], поэтому здесь его описание отсутствует.

1.6 Широкополосные сигналы в системах связи

Детерминированный сигнал, для которого произведение длительности на полосу частот $B = WT \gg 1$ и полосой которого можно управлять независимо от длительности, называется сигналом с *расширенным спектром* или *широкополосным* (ШПС). Система, использующая сигналы с расширенным спектром, является широкополосной.

Величина B , называемая *базой сигнала*, определяет важнейшие характеристики радиотехнических систем.

Типичный случай наблюдения широкополосного сигнала на фоне АБГШ и узкополосной помехи представлен на рис. 7.

При прямоугольном спектре сигнала ($|\tilde{s}(f)|$ равен константе \tilde{s} в пределах полосы сигнала W и нулю вне ее) амплитудная передаточная функция фильтра равномерна в полосе сигнала W и равна нулю вне ее. Без потери общности положим, что ее ненулевое значение равняется единице. Следовательно помеха, трактуемая как случайный процесс, проходит на выход фильтра без изменения своей мощности J , тогда как отфильтрованное

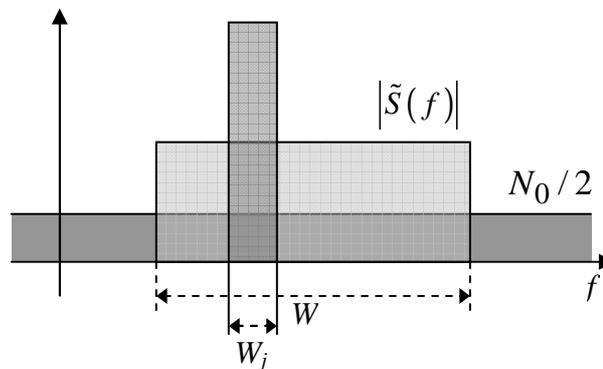


Рис. 7. Спектр сигнала, помехи и фонового АБГШ.

значение мощности шума составит N_0W . С другой стороны, фильтр согласован с сигналом и, значит, когерентно суммирует все гармонические составляющие сигнала, обеспечивая максимальное значение амплитуды на выходе $A_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)| df = 2W\tilde{s}$, где учтена равномерность спектра в полосе сигнала W , а удвоение обусловлено вкладом «отрицательных» частот. При аналогичных обозначениях энергия сигнала вычисляется с помощью теоремы Парсеваля как $E = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)|^2 df = 2W\tilde{s}^2$. В итоге имеем

$$q_i^2 = \frac{A_{out}^2}{J + N_0W} = \frac{4W^2\tilde{s}^2}{J + N_0W} = \frac{2E}{N_0 + J/W} \quad (35)$$

Из последнего равенства можно увидеть, что, несмотря на конкретное значение полосы помехи W_j , отношение SIR на выходе согласованного фильтра ведет себя так, как если бы мощность помехи была равномерно распределена в полосе W сигнала (не помехи), образуя дополнительный «АБГШ» со спектральной плотностью J/W . Если использовать вариант режекции превосходящей АБГШ узкополосной помехи, наблюдается полное отсутствие помехи, но заодно вырезаются и частотные компоненты сигнала в пределах полосы помехи, точно также как и шум. Модель спектра может трактоваться, как образец, в котором исходный сигнал занимал бы только часть полосы W , свободную от помех, и обладал энергией, равной $E(1-W_j/W)$. Тогда согласованный фильтр, очищая этот остаточный сигнал от АБГШ, обеспечивал бы выходное отношение мощностей сигнала и шума в виде (индекс « J » отвечает помехе)

$$q_J^2 = \frac{2E(1-W_j/W)}{N_0} = q^2(1-W_j/W), \quad (36)$$

Рассмотрим процесс соревнования между системой связи с ШПС и приемником условного противника, пытающегося обнаружить факт работы системы связи. Поскольку параметры сигнала противной стороне неизвестны, ей приходится рассматривать перехватываемый сигнал как случайный и основывать его обнаружение только на факте появления избытка энергии в подозрительном участке частотного диапазона, т.е. использовать *энергетический приемник*, или *радиометр* (рис. 8).

С точки зрения перехватчика указанием на присутствие сигнала служит избыточная (сигнальная) спектральная плотность мощности $N_s/2 = P/2W$, дополнительная к спектральной плотности мощности теплового шума $N_0/2$. В отсутствии сигнала случайный процесс на выходе полосового фильтра радиометра характеризуется мощностью $\sigma_n^2 = N_0W_i$, а при его наличии – $\sigma_n^2 + \sigma_s^2 = (N_s + N_0)W_i = (P/W + N_0)W_i$.

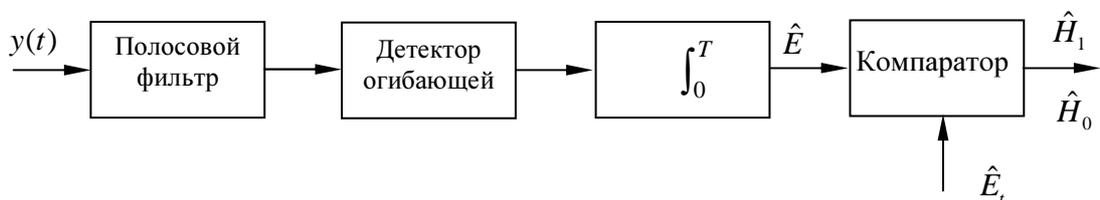


Рис. 8. Энергетический детектор.

С точки зрения перехватчика максимально возможная полоса фильтра, т.е. равная полосе сигнала ($W_i = W$), является оптимальной, обеспечивая наибольшее отношение сигнал-шум

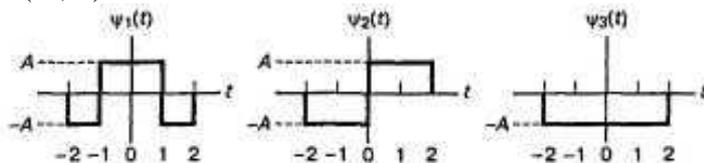
$$q_i = \frac{P\sqrt{T}}{\sqrt{WN_0}} = \frac{q^2}{2\sqrt{WT}}, \quad (37)$$

где $q^2 = 2E/N_0 = 2PT/N_0$, как и ранее, отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра приемника скрытой системы.

Задачи

2 Общие сведения о цифровых системах передачи информации

- 2.1 Объяснить разницу между технической и информационной скоростью передачи. В каких случаях техническая скорость может быть больше информационной, а в каких меньше?
- 2.2 Показать, что минимум удельных затрат энергии в идеальном гауссовском канале связи определяется величиной $\ln 2$.
- 2.3 Почему при передаче информации нельзя добиться одновременного уменьшения удельных затрат энергии и полосы?
- 2.4 Какой код называют первичным? Какой максимальной избыточностью может обладать такой код?
- 2.5 Необходимо передать слово "HOW" с использованием восьмеричной системы.
- а) закодируйте слово "HOW" в последовательность битов, используя 7-битовый код ASCII, причем с целью выявления ошибок каждый знак дополняется восьмым битом. Значение этого бита выбирается так, чтобы число единиц во всех 8 битах было четным. Сколько всего битов содержит сообщение?
 - б) Разделите поток битов на 3-битовые сегменты. Представьте каждый из 3-битовых сегментов восьмеричным числом. Сколько восьмеричных символов имеется в сообщении?
 - в) Если бы в системе использовалась 16-уровневая модуляция, сколько символов понадобилось бы для представления слова "HOW"?
 - г) Если бы в системе применялась 256-уровневая модуляция, сколько символов понадобилось бы для представления этого слова?
- 2.6 Нужно передавать данные со скоростью 800 знаков/с, причем каждый символ представляется соответствующим 7-битовым кодовым словом ASCII, за которым следует восьмой бит выявления ошибок, как в задаче 2.1. Используется многоуровневая ($M=16$) кодировка PAM.
- а) Чему равна эффективная скорость передачи битов?
- б) Чему равна скорость передачи символов?
- 2.7 Определите, являются ли сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ ортогональными на интервале $(-1,5T_2 < t < 1,5T_2)$, где $s_1(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$; $s_2(t) = \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$, $f_2 = 1/T_2$, в следующих случаях.
- а) $f_1 = f_2$ и $\phi_1 = \phi_2$
- б) $f_1 = 1/3f_2$ и $(\phi_1 = \phi_2)$
- в) $f_1 = 2f_2$ и $\phi_1 = \phi_2$
- г) $f_1 = \pi f_2$ и $\phi_1 = \phi_2$
- д) $f_1 = f_2$ и $\phi_1 = \phi_2 + \pi/2$
- е) $f_1 = f_2$ и $\phi_1 = \phi_2 + \pi$
- 2.8 а) Покажите, что три функции, приведенные на рисунке, попарно ортогональны на интервале $(-2, 2)$.



- б) Определите значение константы A , преобразующей набор функций из п. а) в набор ортонормированных функций.
- в) Выразите сигнал $x(t)$ через ортонормированные функции, полученные при выполнении п. б).

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{для остальных } t \end{cases}$$

2.9 Даны следующие функции:

$$\psi_1(t) = \exp(-|t|) \text{ и } \psi_2(t) = 1 - A \exp(-2|t|).$$

Определите константу A , при которой функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ ортогональны на интервале $(-\infty, \infty)$.

3 Сигналы, модуляция

3.1 Даны три сигнала (рис. 3.1). Во сколько раз максимальное расстояние в данном ансамбле больше минимального?

3.2 Наблюдение $y(t)$ на выходе гауссовского канала имеет вид, представленный на рис. 3.2, а сигналы на входе – на рис. 3.1.

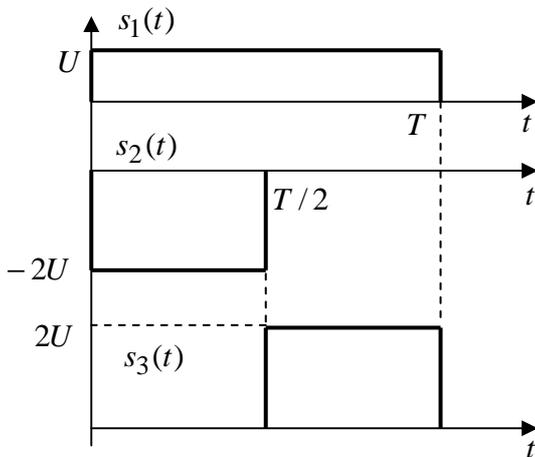


Рис.3.1.

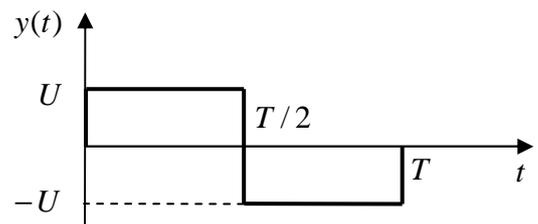


Рис. 3.2.

Каким будет решение оптимального приемника?

Указание. Сравнить корреляции между наблюдением и сигналами.

- 3.3 Источник генерирует данные со скоростью $R = 10$ кбит/сек. Каждый бит передается по гауссовскому каналу бинарной ФМ. Доступна полоса вплоть до $W = 10$ МГц. Разумно ли использовать сигналы с полосой 10 МГц?
- 3.4 Какие сигналы с бинарной ФМ предпочтительнее для передачи по гауссовскому каналу:
- прямоугольные импульсы с пиковой мощностью 1000 Вт и полосой 100 кГц;
 - прямоугольные импульсы такой же длительности с пиковой мощностью 900 Вт и полосой 10 МГц?
- 3.5 Вычислить энергетические потери для пар сигналов, используемых для бинарной передачи данных по гауссовскому каналу (см. рис.3.3), по отношению к оптимальной паре.

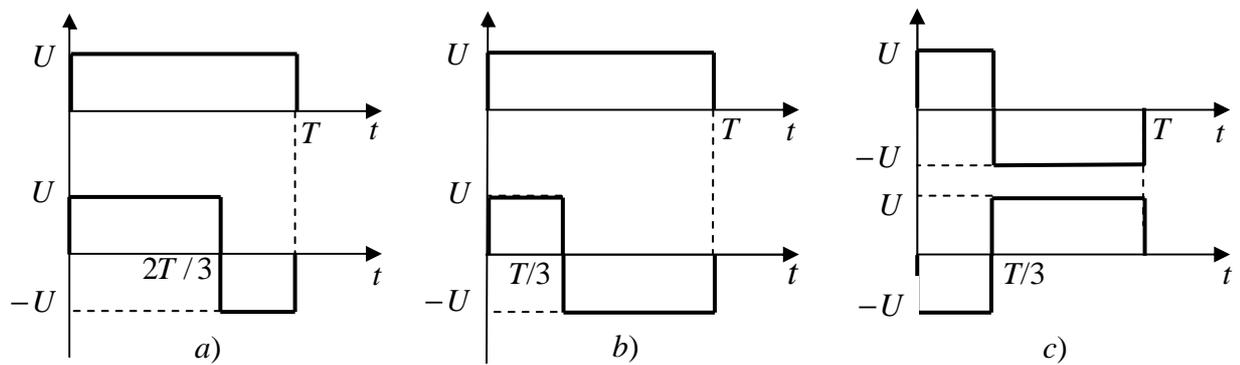


Рис. 3.3.

- 3.6 При относительной бинарной фазовой манипуляции (ОБФМ) значение бита передается с чередованием или без полярности двух последовательных импульсов: импульсы одинаковой полярности соответствуют нулю, а различной – единице. Сравнить в первом приближении ОБФМ и ФМ по уровню потребляемой энергии (основываясь только на минимуме расстояния) и ширине занимаемой полосы при условии равенства скоростей.
- 3.7 При квадратурной ФМ (КФМ, ФМ-4) два бита (4 сообщения) передаются четырьмя сигналами с начальными фазами: $0, \pi, \pm \pi/2$. Является ли данный вариант оптимальным для передачи двух битов? Если нет, укажите наилучший способ и оцените его асимптотический выигрыш по сравнению с ФМ-4.
- 3.8 Можно ли построить 10 эквидистантных сигналов, для которых коэффициент корреляции между двумя любыми был бы равным $-1/7$? Каково максимально возможное число сигналов с указанным коэффициентом корреляции?
- 3.9 Найдите и постройте зависимость от M энергетических потерь (в децибелах) множества M ортогональных сигналов по сравнению с множеством M оптимальных сигналов для гауссовского канала. Определите значение потерь в асимптотике при увеличении M .
- 3.10 Асимптотический энергетический выигрыш при ортогональном кодировании в сравнении с не кодированной передачей для случая $M = 2$ стремится к 0,5 или -3 дБ, т.е. является отрицательным, демонстрируя потери, а не выигрыш. Как это можно объяснить физически?
- 3.11 Асимптотический энергетический выигрыш при ортогональном кодировании в сравнении с не кодированной передачей для случая $M = 4$ стремится к 1 или 0 дБ, т.е. отсутствует совсем. Дать физическое объяснение результату.
- 3.12 Сообщения ($M = 8$) передаются с использованием ФМ-8, т.е. идентичными радиоимпульсами с 8-ю различными эквидистантными начальными фазами. Является ли этот вариант передачи 8 сообщений по гауссовскому каналу наилучшим при отсутствии ограничений на ширину полосы? Если нет, то каковы энергетические потери варианта с ФМ-8 по сравнению с оптимальным множеством из M сигналов?
- 3.13 Сравните асимптотическую (на основании минимума расстояния) эффективность M -ичной ФМ по отношению к ортогональному кодированию по энергетическим затратам (при заданной вероятности ошибки) и занимаемой полосе.
- 3.14 В обратном канале сотовой системы радиосвязи стандарта IS-95 осуществляется ортогональное кодирование блоками из 6-ти бит. Скорость передачи составляет 28.8 кбит/сек. Оценить величину полосы, занимаемую кодированными сигналами.

- 3.15 Некоторая система цифровой связи занимает полосу $W = 1.2288$ МГц. Какое максимальное число M ортогональных сигналов может быть использовано для передачи данных со скоростью 38.4 кбит/сек?
- 3.16 В некоторой системе осуществляется передача данных по гауссовскому каналу со скоростью 10 кбит/сек. Проектировщик системы планирует обеспечить энергетический выигрыш в 6 дБ по сравнению с передачей без кодирования. Достижима ли эта цель на основе ортогонального кодирования, если допустимой считается полоса в 320 КГц?
- 3.17 Некоторой системе отведена полоса, равная 10.24 МГц, при необходимой скорости передачи в 100 кбит/сек. Какой величины может достичь в этой системе потенциальный асимптотический выигрыш от кодирования?
- 3.18 По гауссовскому каналу необходимо передавать данные со скоростью 100 кбит/сек на несущей в 2 ГГц. Реалистично ли рассчитывать на энергетический выигрыш $G = 10$ дБ при использовании ортогональных сигналов?
- 3.19 Покажите, что коэффициент взаимной корреляции простых сигналов с ФМ $s_1(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$; $s_2(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$, $0 \leq t \leq \tau_0$ определяется формулой $\rho = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.
- 3.20 Изобразите сигнальные точки созвездия 4-АМ. Выразите минимальное расстояние между сигналами через их среднюю энергию.
- 3.21 Изобразите сигнальные точки созвездия 16-КАМ. Выразите минимальное расстояние между сигналами через их среднюю энергию.
- 3.22 Изобразите сигнальные точки созвездия 8-ФМ. Выразите минимальное расстояние между сигналами через энергию отдельного сигнала.
- 3.23 Рассмотрите эквивалентный низкочастотный модулирующий сигнал в виде
$$u(t) = \sum_n [a_n g(t - 2nT) - j b_n (t - 2nT - T)]$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ две последовательности статистически независимых двоичных символов, а $g(t)$ -синусоидальный импульс, который определяется так:

$$g(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) & (0 < t < 2T), \\ 0 & \text{для других } t \end{cases}$$

а) Этот вид сигнала рассматривается как четырёхфазовая ФМ, причём огибающая импульса $g(t)$ составляет полпериода синусоиды. Каждая из информационных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ передаётся со скоростью $1/2T$ бит/с, и, следовательно, общая скорость передачи равна $1/T$. Две последовательности синхронизированы во времени для передачи с задержкой на интервале T . Как следствие, сигнал $u(t)$ назван сигналом четырёхфазовой ФМ со сдвигом.

а) Докажите, что огибающая $|u(t)|$ - константа, независимо от информационных символов a_n в синфазной компоненте и информационных символов b_n в квадратурной компоненте. Другими словами, амплитуда несущей, используемая для передачи, постоянна.

б) Определите спектральную плотность мощности $u(t)$.

с) Сравните спектральную плотность мощности, полученную в (б), со спектральной плотностью мощности сигнала ММС. Какое заключение Вы можете сделать из этих сравнений?

- 3.24 Рассмотрите сигнал четырёхуровневой ФМ, представленной низкочастотным эквивалентом

$$u(t) = \sum_n [I_n g(t - 2nT)],$$

где I_n принимает одно из четырёх возможных значений $\sqrt{\frac{1}{2}}(\pm 1 \pm j)$ с равной вероятностью. Последовательность информационных символов $\{I_n\}$ статистически независима,

а) Определите и нарисуйте спектральную плотность мощности $u(t)$, когда

$$g(t) = \begin{cases} A & (0 \leq t \leq T), \\ 0 & \text{для других } t. \end{cases}$$

б) Повторите (а), когда

$$g(t) = \begin{cases} A \sin(\pi t / 2T) & (0 \leq t < T), \\ 0 & \text{для других } t. \end{cases}$$

4 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами

- 4.1 Покажите, что структура оптимального приемника не изменяется, если образец сигнала, подаваемого на коррелятор, усилить в K_0 раз.
- 4.2 Определите структуру оптимального приемника сигналов с активной паузой для следующих условий: а) $E_1 \neq E_2$, $p(s_1) = p(s_2)$; б) $E_1 = E_2$, $p(s_1) \neq p(s_2)$.
- 4.3 Получите формулы для вероятности ошибки в случае приема на оптимальные приемники сигналов с активной паузой для следующих условий:
а) $E_1 \neq E_2$, $p(s_1) = p(s_2)$; б) $E_1 = E_2$, $p(s_1) \neq p(s_2)$.
- 4.4 Найдите выражение для коэффициента взаимной корреляции простых сигналов с частотной манипуляцией
 $s_1(t) = S_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$; $s_2(t) = S_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$, $0 \leq t \leq \tau_0$.
Определите условия, при которых помехоустойчивость оптимального приемника таких сигналов достигает максимального значения.
- 4.5 Объясните, почему при некогерентном приеме простых БАМ сигналов вероятность ошибки в основном определяется вероятностью ложного приема посылки? При каких условиях это утверждение станет неверным?
- 4.6 Зачем в приемнике БАМ сигналов необходимо иметь АРУ? Почему такая регулировка не требуется в приемниках БЧМ и БФМ сигналов?
- 4.7 Предположим, что используется некоторая система цифровой связи; сигнальные компоненты вне приемника-коррелятора с равной вероятностью принимают значения $s_i(T) = +1$ или -1 В. Определите вероятность появления ошибочного бита, если гауссов шум на выходе коррелятора имеет единичную дисперсию.
- 4.8 Биполярный двоичный сигнал $s_i(t)$ — это импульс $+1$ или -1 В на интервале $(0, T)$. К сигналу добавляется аддитивный белый гауссов шум с двусторонней спектральной плотностью мощности 10^{-3} Вт/Гц. Если детектирование принятого сигнала производится с помощью согласованного фильтра, определите максимальную скорость передачи битов, которую можно поддерживать при вероятности появления ошибочного бита $P_b \leq 10^{-3}$.

- 4.9 PCM-кодированный аналоговый сигнал передается с использованием двоичных сигналов через канал с полосой 100 кГц. Предполагается, что используются 32 уровня квантования и что полная эквивалентная передаточная функция — приподнятый косинус с выравниванием $r = 0,6$.
- Найдите максимальную скорость передачи битов, которую может поддерживать система без межсимвольной интерференции.
 - Найдите максимальную ширину исходного аналогового сигнала, возможную при приведенных параметрах.
 - Повторите пп. а и б для 8-уровневой кодировки PAM.
- 4.10 Равновероятные двоичные импульсы в кодировке RZ когерентно детектируются в гауссовом канале с $N_0 = 10^{-13}$ Вт/Гц. Предполагается, что синхронизация идеальна, амплитуда принятых импульсов равна 100 мВ и вероятность ошибки $P_E = 10^{-3}$; найдите наибольшую скорость передачи данных, возможную в описанной системе.

5 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами

- 5.1 Объясните, почему время многолучевого растяжения зависит от диаграмм направленности передающей и приемной антенн и протяженности линии связи. Нарисуйте примерный вид этой зависимости от указанных факторов.
- 5.2 Линия связи использует многолучевой канал с максимальной разностью хода лучей $\Delta R_{\max} = 100$ м; скорость движения неоднородностей $U_{\text{отр}} = 3$ м/с. Какую скорость передачи можно обеспечить по такой линии связи, если применять простые двоичные сигналы?
- 5.3 Почему применение АРУ при одиночном приеме флуктуирующего сигнала не уменьшает среднюю вероятность ошибки приема?
- 5.4 Показать, что при некогерентном приеме бинарных ОФМ сигналов скорость передачи в релейском канале уменьшается по сравнению с гауссовским в соответствии с выражением
- $$R_p/R_r = h^2 / \exp(h^2),$$
- где h^2 – необходимое отношение сигнал/шум в гауссовском канале, при котором обеспечивается заданная вероятность ошибки.
- Указание.** При сравнении скоростей передач необходимо полагать вероятность ошибок в обоих случаях одинаковой и достаточно малой ($P_{\text{ош}} \ll 1$).
- 5.5 Покажите, что при оптимальном линейном объединении ветвей огибающая результирующего колебания пропорциональна сумме квадратов огибающих копий в отдельных ветвях.
- 5.6 Во сколько раз нужно увеличить мощность сигнала, чтобы при оптимальном линейном объединении ветвей двукратное разнесение стало эквивалентно по вероятности ошибки трехкратному?
- 5.7 Система сохраняет работоспособность, если принятое отношение сигнал-шум по напряжению уменьшается не более чем в 4 раза ниже среднего предсказанного уровня. Определить вероятность выхода системы из строя вследствие крупномасштабного замирания со стандартным отклонением по мощности в 9 дБ.
- 5.8 Имеются два пути распространения: по прямой линии (LOS) и через отражатель, расположенный в 3-х км от LOS и равноудаленный от передатчика и приемника. Определить период в метрах и временной интервал между последовательными провалами в мощности в установившемся колебании на входе приемника, расположенном на расстоянии 12 км от передатчика и движущегося с постоянной скоростью 60 км/час, при длине волны 30 см.

- 5.9 . Возможно ли применение бинарной ФМ в канале с быстрыми многолучевыми релеевскими замираниями? Какой способ бинарной передачи приемлем в этом случае?
- 5.10 Сигнал системы занимает полосу в 60 КГц. Распределение задержки в канале составляет 20 мкс. Общая полоса не превышает 300 КГц. Сколько частотных ветвей разнесения может быть организовано при этих данных?
- 5.11 Имеются четыре пути распространения с длинами в 5 км, 5.4 км, 5.55 км и 6 км. В системе данные передаются со скоростью $R = 20$ кбит/с. Приблизительно оценить полосу сигнала и выигрыш от обработки, необходимые для организации 4-х зубчатого RAKE приемника.
- 5.12 Минимальная разность в длине путей распространения в канале составляет 300 м. Задержка распространения в канале лежит в пределах 10 мкс. В системе осуществляется передача данных с использованием QPSK со скоростью 20 кбит/с. Какова необходимая полоса и выигрыш от обработки сигнала для организации RAKE приемника с максимально возможным числом зубцов?
- 5.13 С выхода релеевского канала RAKE приемник разделяет результирующий сигнал на n_d сигналов равной энергии без замираний для применения комбинирования с максимальным отношением. Насколько среднее отношение сигнал-шум по мощности на выходе устройства комбинирования отличается от варианта, когда RAKE алгоритм не применяется? Как объяснить выигрыш в энергии от использования RAKE метода в свете данного ответа?

6 Прием многопозиционных сигналов

- 6.1 Сравните необходимое отношение мощности сигнала к мощности шума в многопозиционной системе с ФМ с соответствующим отношением в идеальной по Шеннону системе. Принять $M = 8$, вероятность ошибки символа в системе с ФМ с оптимальным приемом $p_{ou} = 10^{-5}$.
- 6.2 В чем проявится различие между сложными сигналами, имеющими различные длительности и ширину спектра, но одинаковую базу? В чем проявится сходство?
- 6.3 Построить автокорреляционные функции последовательностей
010110100101011
011001010110101.
Найти взаимокорреляционную функцию этих последовательностей. Чему равен коэффициент корреляции между последовательностями при отсутствии сдвига между ними?
- 6.4 Определить, какому приблизительно числу ветвей разнесенного приема соответствует система «Рейк», если при базе 220 она обеспечивала передачу двоичной информации с вероятностью ошибки $p_{ou} \leq 10^{-6}$, а при уменьшении базы до 50 вероятность ошибки возросла до 10^{-2} . Прием в обоих случаях считать оптимальным, канал – релеевским.

7 Сверточные коды

- 7.1 Найдите результат следующих действий над двоичными полиномами:

$$f(z) = (z^3 + z^2 + 1)(z^4 + 1) - (z^2 + 1)^2(z^3 - 1) + z^6 + z^2$$

- 7.2 Раскройте скобки в двоичном полиноме $(z^2 + 1)^i$, где i – целое положительное число.

- 7.3 Порождающими полиномами сверточного кода являются $g_1(z) = 1$, $g_2(z) = 1 + z$. Какова скорость и длина кодового ограничения порождаемого ими кода? Изобра-

- зять схему кодера, нарисовать решетчатую диаграмму и определить свободное расстояние кода.
- 7.4 Порождающими полиномами сверточного кода являются $g_1(z) = 1 + z + z^2$, $g_2(z) = 1 + z + z^2$, $g_3(z) = 1 + z^2$. Какова скорость и длина кодового ограничения порождаемого ими кода? Изобразить схему кодера, нарисовать решетчатую диаграмму и определить свободное расстояние кода.
- 7.5 Одним из двух порождающих полиномов сверточного кода является $g_1(z) = 1 + z + z^2$. Какой из полиномов $g_2(z) = 1$, $g_2(z) = 1 + z$ или $g_2(z) = 1 + z^2$ лучше в качестве второго порождающего полинома для получения наибольшего выигрыша от кодирования? Чему равен максимальный выигрыш от кодирования? Какого типа выводы следуют из этой задачи при сравнении систематического и не-систематического кода?
- 7.6 Порождающими полиномами сверточного кода являются $g_1(z) = 1 + z + z^2$ и $g_2(z) = 1 + z^3$. Закодировать битовый поток 110110110110110... и объяснить, почему этот код принадлежит классу так называемых *катастрофических* кодов, которые не рекомендуется к практическому использованию?
- 7.7 Декодировать максимально возможное число бит при условии приема наблюдения 100101100011000 и порождающих полиномов сверточного кода $g_1(z) = 1$, $g_2(z) = 1 + z$ и $g_3(z) = 1 + z$.
- 7.8 Декодировать наблюдение 1111110000000111, если известно, что в качестве порождающих полиномов сверточного кода используются полиномы задачи 7.4, а после кодирования четырех бит данных кодер принудительно устанавливается в нулевое состояние хвостовыми битами. Насколько далеко расположено декодированное слово от наблюдения? Если результат декодирования правилен, сколько ошибок исправил декодер?
- 7.9 Свёрточный код описывается генераторами $g_1 = [100]$, $g_2 = [101]$, $g_3 = [111]$.
- получите кодер, соответствующий этому коду,
 - получите диаграмму состояний для этого кода,
 - получите решётчатую диаграмму для этого кода,
 - найдите передаточную функцию и свободное расстояние этого кода,
 - проверьте, является ли этот код катастрофическим.
- 7.10 Свёрточный код из задачи 7.9 используется для передачи по каналу с АБГШ при декодировании жёстких решений. Выходом детектора (демодулятора) является (101001011110111...). Используя алгоритм Витерби, найдите переданную последовательность.
- 7.11 Повторите задачу 7.10 для кода с генераторами $g_1 = [110]$, $g_2 = [101]$, $g_3 = [111]$.
- 7.12 Блок-схема двоичного свёрточного кодера показана на рисунке 7.1

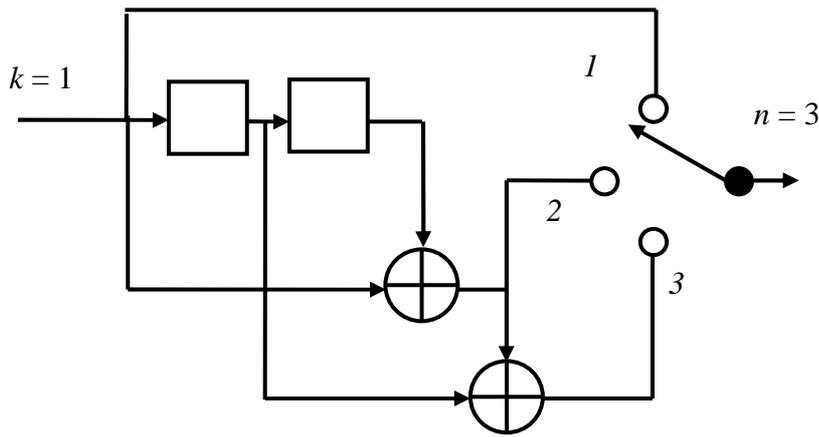


Рис. 7.1

а) получите диаграммы состояний кода.

б) найдите передаточную функцию кода $T(D)$.

с) найдите минимальное свободное расстояние кода d_{CB} и покажите соответствующий путь (на расстоянии d_{CB} относительно кодового слова из одних нулей) на решетке.

д) предположите, что сообщение кодируется этим кодом и передается через двоичный симметричный канал с вероятностью ошибки $p = 10^{-5}$. Используя алгоритм Витерби, найдите переданную последовательность символов, если принята последовательность $r = (110, 110, 110, 111, 010, 101, 101)$.

7.13 Блок схема свёрточного кода (3, 1) показана на рисунке 7.2

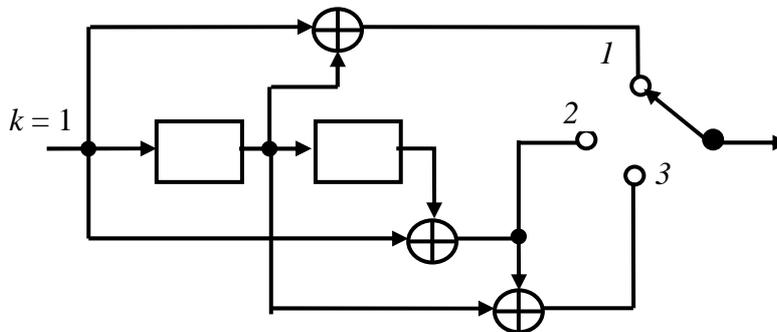


Рис.7.2

а) получите диаграммы состояний кода.

б) найдите передаточную функцию кода $T(D)$.

с) найдите минимальное свободное расстояние кода d_{CB} и покажите соответствующий путь (на расстоянии d_{CB} относительно кодового слова из одних нулей) на решетке.

д) предположите, что четыре двоичных информационных символа (x_1, x_2, x_3, x_4), за которыми следуют два нуля, закодированы. Эта информация передается по двоичному симметричному каналу с переходной вероятностью ошибки 0, 1. Принимаемая последовательность

тельность такова (111, 111, 111, 111, 111, 111). Используйте алгоритм декодирования Витерби, чтобы найти переданную последовательность данных.

7.14 Для свёрточного кода, генерируемого кодером показанным на рисунке 7.3:

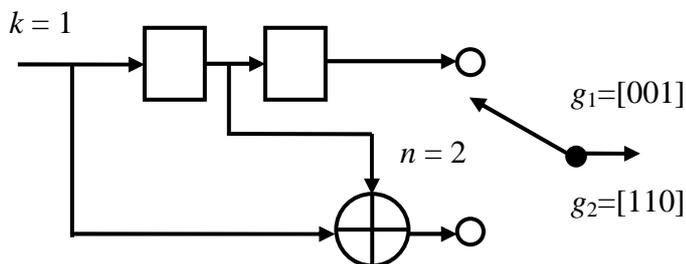


Рис.7.3

- Найдите передаточную функцию кода в форме $T(N,D)$.
- Найдите свободное расстояние кода $d_{св}$.
- Найдите верхнюю границу для средней вероятностной ошибки на бит, используя границу для вероятности ошибочного декодирования жёстких решений, если код используется в канале при условии, что переходная вероятность ошибки в канале $p = 10^{-6}$.

7.15 На рис. 7.4 изображён свёрточный код со скоростью 1/2 и кодовым ограничением $k = 2$.

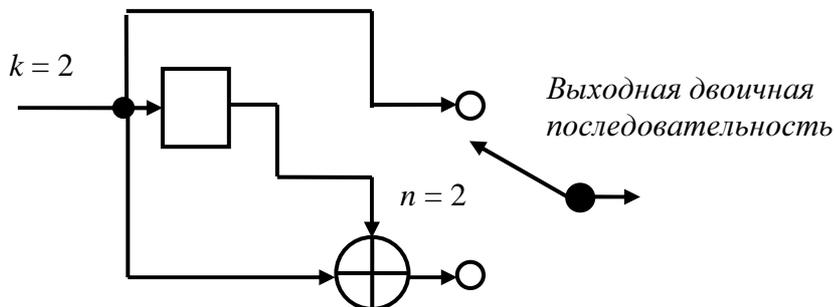


Рис. 7.4

- Нарисуйте древовидную диаграмму кода, решётчатую диаграмму и диаграмму состояний.
- Найдите передаточную функцию $T(N,D,J)$ и по ней определите минимальное свободное расстояние.

7.16 На рисунке 7.5 показан свёрточный код со скоростью 1/2,

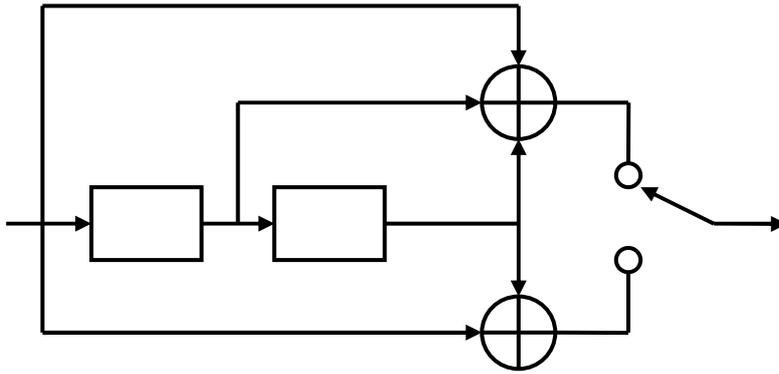


Рис. 7.5

Получите дерево кода, диаграмму решётки и диаграммы состояний.

- 7.17 Нарисуйте схемы свёрточных кодеров по следующим параметрам (k – кодовое ограничение, g – порождающие полиномы в восьмеричной записи):
- Скорость кода $1/2$, $k=3,4,5$, $g=(5,7)$; $(15,17)$; $(23,35)$. $d_{CB}=5,6,7$
 - Скорость кода $1/3$, $k=3,4,5$, $g=(5,7,7)$; $(13,15,17)$; $(25,33,37)$. $d_{CB}=8,10,12$
 - Скорость кода $2/3$, $k=2,3,4$, $g=(17,06,15)$; $(27,75,72)$; $(236,155,337)$. $d_{CB}=3,5,7$

7.18 Получите диаграмму состояний для свёрточного кода со скоростью $2/3$, $k = 5$, указанных в задаче 7.17(с) и покажите для каждого перехода выходную последовательность и расстояние выходной последовательности от последовательности, состоящей из одних нулей.

7.19 Рассмотрите свёрточный код со скоростью $1/2$, $k = 3$, показанный на рисунке 7.5. Предположим, что код используется в двоичном симметричном канале и принимаемая последовательность для первых восьми ветвей такова 0001100000001001. Постройте диаграмму решётки. Проследите за решением по диаграмме решётки и пометьте у выживших путей расстояние Хемминга на каждом узле. Если возникнет неувязка с метриками, требуемыми для решения, выберите верхний путь (произвольный выбор).

7.20 . Получите диаграмму состояний для свёрточного кода, генерируемого кодером, показанным на рисунке 7.6, и затем определите, является ли код катастрофическим или нет. Также дайте пример свёрточного кода со скоростью $1/2$, $k = 4$, который проявляет катастрофические распространения ошибок.

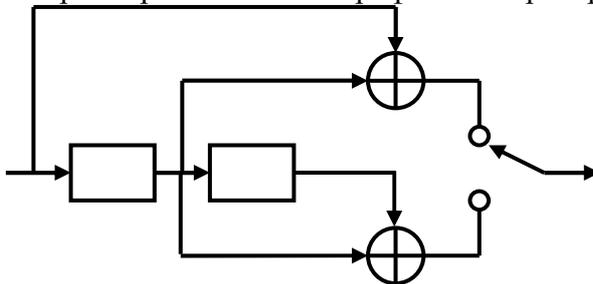


Рис.7.6

- 7.21 Порождающие полиномы двоичного свёрточного кода в восьмеричной системе счисления заданы в виде $(g_1, g_2) = (23, 35)$.
- Какова длина кодового ограничения и скорость формируемого кода?
 - Изобразить кодер на основе регистра сдвига.
 - Закодировать поток входных данных 1000000000... и 1100000000, определить вес полученных кодовых слов и расстояние между ними.

- 7.22 Порождающие полиномы двоичного сверточного кода в восьмеричной системе счисления заданы в виде $(g_1, g_2, g_3, g_4) = (5, 7, 7, 7)$.
- Какова длина кодового ограничения и скорость формируемого кода?
 - Изобразить кодер на основе регистра сдвига.
 - Закодировать поток входных данных 1000000000... и 1100000000..., определить вес полученных кодовых слов и расстояние между ними.
- 7.23 Используется сверточный код, порождаемый полиномами $g_1(z) = 1$ и $g_2 = 1 + z$. Переданное кодовое слово имеет вид 110100111001, причем последние два символа отвечают дополнительным нулевым битам, устанавливающим кодер в нулевое состояние. Ошибки происходят на позициях второго и пятого кодовых символов. Сколько и какие передаваемые биты сообщения окажутся неправильно декодированными?
- 7.24 Порождающие полиномы двоичного сверточного кода в восьмеричной системе счисления заданы в виде $(g_1, g_2) = (23, 35)$.
- Какова длина кодового ограничения и скорость формируемого кода?
 - Изобразить кодер на основе регистра сдвига.
 - Закодировать поток входных данных 1000000000... и 1100000000, определить вес полученных кодовых слов и расстояние между ними.

8 Широкополосные сигналы в системах связи

8.1 От системы требуется обеспечить максимально возможное отношение мощности полезного сигнала к общей мощности АБГШ и помехи. На входе присутствует узкополосная помеха. Какая из двух стратегий является лучшей: игнорирование помехи или использование режекторного фильтра, если:

а). мощность помехи равна мощности АБГШ в пределах полосы сигнала, а ширина полосы помехи составляет половину от ширины полосы сигнала;

б). мощность помехи на 6 дБ меньше мощности АБГШ в пределах полосы сигнала, а ширина полосы помехи составляет четвертую часть от ширины полосы сигнала;

с). мощность помехи на 3 дБ больше мощности АБГШ в пределах полосы сигнала, а ширина полосы помехи составляет четвертую часть от ширины полосы сигнала.

8.2 Спектры сигнала и узкополосной помехи представлены на рис. 8.1. Какая центральная частота помехи является наиболее опасной в случае, когда приемник игнорирует помеху и когда использует режекторный фильтр? Почему?

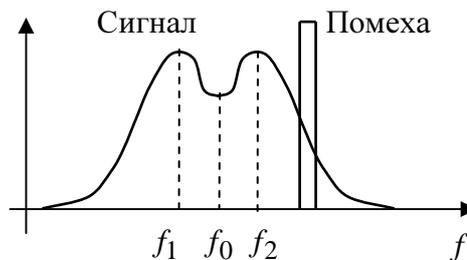


Рис. 8.1. Спектр сигнала и помехи.

8.3 В некоторой системе отношение сигнал–мешающее воздействие по мощности (SIR) на выходе согласованного фильтра проигрывает в 101 раз отношению сигнал–шум по мощности (SNR), тогда как система может сохранить свою работоспособность только при SIR по мощности в два раза меньшем SNR по мощности. Что следует изменить в сигнале при сохранении постоянного значения SNR по мощности, если:

а). разрешено использовать только простые сигналы?

б). пиковая мощность сигнала не может возрасти (каким будет выигрыш в обработке сигнала в этом случае)?

8.4 В некоторой системе режекторный фильтр нейтрализует узкополосную помеху. В результате этой операции отношение сигнал–шум (SNR) на выходе согласованного фильтра уменьшается на 3 дБ.

а). Что следует сделать с длительностью и амплитудой простого сигнала, если допустимым считается уменьшение SNR по мощности только на два процента (в отсутствие режекторного фильтра величина SNR фиксирована)?

б). Возможно ли уменьшить ухудшение ниже 2 процентов без увеличения мощности сигнала? Если да, то каким должен быть выигрыш от обработки сигнала?

8.5 Система может работать с отношением сигнал–шум (SNR) не менее 10 дБ. В результате воздействия заградительной помехи SNR уменьшилось до –3 дБ. Какие

параметры сигнала могут быть изменены для нейтрализации действия помехи, если:

- a). Разрешено использовать только простые сигналы с фиксированной энергией?
- b). Могут быть использованы только простые сигналы с одинаковой пиковой мощностью?
- c). Фиксированы только величина пиковой мощности и энергии сигнала?
- d). Фиксирована только пиковая мощность сигнала, а его полоса может быть увеличена только в 10 раз?

Найти выигрыш от обработки сигнала для случаев (c) и (d).

8.6 В рамках борьбы с передатчиком заградительной помехи система увеличила длительность сигнала в 4 раза с одновременным уменьшением мощности сигнала в два раза и расширением полосы в 50 раз. Постановщик помехи способен увеличить свою мощность не более чем на 13 дБ. Какая из сторон окажется победителем в этом противостоянии?

8.7 Отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра скрытного приемника равно 14 дБ. Выигрыш от обработки сигнала составляет $WT = 400$. Найти:

- a). отношение спектральных мощностей сигнала и АБГШ;
- b). отношение сигнал-шум на выходе интегратора радиометра перехватчика.

Решения

2 Общие сведения о цифровых системах передачи информации

2.1 Информационная скорость – количество двоичных единиц в секунду. Техническая скорость – число переданных символов (чипов) в секунду. При бинарной передаче эти скорости совпадают.

Помехоустойчивое кодирование уменьшает информационную скорость, и в бинарном случае техническая скорость выше. Передача многопозиционными кодами ($M > 2$) увеличивает информационную скорость.

2.2 См. материалы лекций «Удельные характеристики систем цифровой связи».

2.3 Аналогия с вечным двигателем. См. математическое обоснование в том же разделе.

2.4 Код, для которого выполняется условие $nm-1 < N < nm$, где N – число сообщений, называется первичным. Неиспользуемая часть кодовых комбинаций (избыточность) всегда меньше половины общего числа кодируемых дискретных величин.

3 Сигналы, модуляция

3.1 Энергии сигналов $E_1 = U^2T$, $E_2 = E_3 = 2 U^2T$. Коэффициент корреляции $\rho_{12} = -1/\sqrt{2}$, $\rho_{13} = 1/\sqrt{2}$, $\rho_{23} = 0$. Согласно теореме косинусов, квадрат расстояния между сигналами $d_{kl}^2 = E_k + E_l - 2\sqrt{E_k E_l} \rho_{kl}$ оказывается

$$d_{12}^2 = 5U^2T = d_{\max}^2, \quad d_{13}^2 = U^2T = d_{\min}^2, \quad d_{23}^2 = 4U^2T, \quad \text{и } d_{\max} / d_{\min} = \sqrt{5}.$$

3.2 Корреляция $y(t)$ со всеми тремя сигналами есть $z_1 = 0$, $z_2 = -U^2T$, $z_3 = -U^2T$. Согласно решающему правилу, $z_k - E_k / 2$ имеют значения $-U^2T / 2$, $-2 U^2T$, $-2 U^2T$ для $k=1,2,3$, соответственно. Поэтому решение будет, что принят сигнал $s_1(t)$.

3.3 Ширина полосы, необходимая для передачи БФМ, порядка R , т.е. 10 кГц. Расширение полосы до 10 МГц есть средство привлечения широкополосных сигналов с $WT \approx 10^3$, которые не дают положительного эффекта в вероятности ошибки на бит, зависящей только от энергии на бит.

3.4 Случай (а) лучше, т.к. энергия на бит для него выше, в то время как ширина полосы не дает эффекта для вероятности ошибок.

3.5 Все сигналы имеют одинаковую энергию, т.о., пары отличаются только коэффициентами корреляции внутри пары. Третья пара – противоположные сигналы, имеющая коэффициент корреляции $\rho = -1$. Это оптимальная пара, т.е. не имеет потерь энергии. Для первой и второй пар коэффициенты корреляции $+1/3$ и $-1/3$, соответственно. Энергии одинаковы, квадрат расстояния пропорционален $1 - \rho$. Поэтому потери энергии в сравнении с третьей (оптимальной) парой для первой пары $2/[1 - (1/3)] = 3$ (4,8 дБ) и для второй $2/[1+(1/3)] = 3/2$ (1,8 дБ).

3.6 Имеются четыре возможных конфигурации передаваемых пар последовательно-стоящими импульсов: $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$. Они соответствуют четырем сигнальным точкам на плоскости, имеющие квадрат расстояния $2E_p$ от начала и $4E_p$ от (до) другой ближайшей точки, где E_p – энергия импульса.

Ошибка бита случается каждый раз, когда переданная точка перепутана с одной из смежного квадранта. Блок m последовательных импульсов может передавать $m - 1$ бит, при этом $E_p = (m-1) E_b / m$, E_b – энергия в бите. Следовательно, квадрат минимального расстояния для ОБФМ – $4 (m-1) E_b / m$, который близок к таковому при БФМ всякий раз, когда $m \gg 1$.

Импульс для ОБФМ в $m / (m - 1)$ раз короче чем при БФМ, при одинаковой скорости, подразумевая то же самое расширение ширины полосы.

- Опять, когда $m \gg 1$, это отличие незначительно, и асимптотически ОБФМ и БФМ эквивалентны и в потреблении энергии и в ширине полосы.
- 3.7 Коэффициент корреляции между соседними сигналами есть нуль, поэтому минимальное расстояние $d_{\min}^2 = 2E_p$, где E_p – энергия манипулированного импульса. Т.к. каждый импульс передает два бита, $E_p = 2E_b$ и $d_{\min}^2 = 4E_b$ (так же, как при БФМ). Для оптимальных (симплексных) четырех сигналов $\rho = -1/3$ и $d_{\min}^2 = 2E_p \times (4/3) = 8E_p / 3 = 16E_b / 3$, так что асимптотические потери энергии для КФМ к симплексному набору 4/3 или 1,2 дБ.
- 3.8 Это возможно не более чем для восьми сигналов.
- 3.9 Квадрат расстояния для ортогональных и симплексных сигналов $2E$ и $2EM/(M-1)$ соответственно. Поэтому потери энергии ортогональных сигналов $-10 \lg [M/(M-1)]$ и снижаются от 3 дБ для $M=2$, стремясь к нулю при росте M .
- 3.10 $M=2$ – средство передачи одного бита. Лучше использовать пару противоположных, а не ортогональных сигналов, которые имеют потери энергии на 3 децибела меньше.
- 3.11 При некодированной передаче 2 битов, квадрат минимума расстояния между двумя самыми близкими блоками из 2 битов (например, 00 и 10) $-4E_b$. В семействе четырех ортогональных сигналов энергии E квадрат минимума расстояния $-2E$. Так как эти сигналы имеют два информационных разряда ($E = 2E_b$), то квадрат минимума расстояния для обоих режимов передачи равны.
- 3.12 Оптимальный режим передачи, без ограничений ширины полосы, использует набор восьми симплексных сигналов. Их квадрат минимума расстояния $-d_{\min \text{ sim}}^2 = 16E/7$, в то время как для 8-ФМ с той же самой сигнальной энергией E самые близкие сигналы имеют коэффициент корреляции $\rho_{\max} = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ и поэтому квадрат расстояния $d_{\min 8}^2 = E(2 - \sqrt{2})$. Тогда потери энергии 8-ФМ к оптимальному набору есть $d_{\min \text{ sim}}^2 / d_{\min 8}^2 = 16/7(2 - \sqrt{2}) \approx 3,90$ или 5,9 дБ.
- 3.13 Для M -ичной ФМ коэффициент корреляции между самой близкой парой $\rho_{\max} = \cos(2\pi/M)$ и с энергией импульса E_p квадратичное минимальное расстояние $d_{\min \text{ ФМ}}^2 = 2E_p [1 - \cos(2\pi/M)] = (4E_b \log_2 M) \sin^2(\pi/M)$. При ортогональном кодировании $d_{\min \text{ орт}}^2 = 2E_b \log_2 M$, так что энергия меньше M -ФМ в $d_{\min \text{ орт}}^2 / d_{\min \text{ ФМ}}^2 = (1/2) \sin^{-2}(\pi/M) \approx M^2 / 2\pi^2$, $M \gg 1$ раз. Для одинаковых длительностей полоса M -ФМ $W_{\text{ФМ}} \approx R/\log_2 M$, тогда как для ортогонального кодирования $W_{\text{орт}} \approx MR \log_2 M$. Поэтому $W_{\text{орт}} / W_{\text{ФМ}} \approx M$ и M -ФМ может оказаться предпочтительной, если экономия полосы более важна, чем экономия энергии.
- 3.14 Для ортогональных сигналов $W \approx MR / \log_2 M = W / R = 64 \times 28,8 \times 10^3 / 6 = 307,2$ кГц.
- 3.15 Т.к. $W \approx MR / \log_2 M$, $M/\log_2 M = W / R = (1,2288/38,4) \times 10^3 = 32$. Решение этого уравнения дает $M = 256$ ортогональных сигналов. Когда сигналы являются полосовыми, это число может быть удвоено, привлекая квадратуры каждого из них.
- 3.16 Увеличение на 6 дБ есть в 4 раза, поэтому $G_a = (\log_2 M)/2$, имея в виду, что $\log_2 M = 8$, и $M = 256$. Тогда необходима полоса $W \approx MR / \log_2 M = 256 \times 10^4 / 8 = 320$ кГц, т.е. увеличение на 6 дБ в полосе 320 кГц достижимо с ортогональным кодированием.
- 3.17 Поскольку $M/\log_2 M = W / R = 102,4$, что означает $M=1024$, $\log_2 M = 10$ и $G_a = (\log_2 M) / 2 = 5$, или 7 дБ.

3.18 Выигрыш на 10 дБ есть 10 раз, поэтому из $G_a = (\log_2 M)/2$ следует, что $M = 2^{20} > 10^6$ и необходимая полоса $W \approx MR / \log_2 M > 10^5 \times 10^5 / 2 = 5$ ГГц, которая больше, чем двойная несущая частота. Конечно, это нереализуемо.

$$3.19 \quad d_{\min} = \sqrt{4E/5}$$

$$3.20 \quad d_{\min} = \sqrt{2E/5}$$

$$3.21 \quad d_{\min} = \sqrt{(2-\sqrt{2})E}$$

4 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами

4.4 $\rho_{12} = \frac{1}{2} \sin[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] - \frac{1}{2} \sin[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]$, или, с учетом фильтрации суммарной частоты: $\rho_{12} = \frac{1}{2} \sin[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]$. Помехоустойчивость максимальна, когда ρ_{12} минимален. В частности, для ортогональных сигналов $\rho_{12} = 0$.

4.7 Приемник корреляционный, значит прием когерентный и сигналы противоположные. Вероятность ошибки $P_E = P(s_1)P(s_2/s_1) + P(s_2)P(s_1/s_2) = P(s_2/s_1) = P(s_1/s_2)$.

$$P_E = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right); \quad 2E/N_0 = 2U^2/2WN_0;$$

$$WN_0 = P_{\text{ш}} = \sigma^2 = 1 \text{ В}^2; \quad U = 1 \text{ В}. \quad P_E = Q \sqrt{1} = 0,1587$$

4.8 $N_0 = 10^{-3}$ Вт/Гц; $P_b \leq 10^{-3}$;

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right); \quad \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 3,09 \text{ для } P_b = 10^{-3}. \text{ Отсюда } 2E_b = 9,5481 \times N_0, \text{ и } E_b =$$

$9,5481 \times 10^{-3} / 2$. Так как $E_b = U^2 T / 2$, а $U=1$, то $T = 2 E_b = 9,5481 \times 10^{-3}$ с. Следовательно, скорость передачи битов $R = 1/T = 104,7$ бит/с.

4.9 $W = 100$ КГц; $k = 5$; $r = (W - W_0)/W_0 = 0,6$; $W = 1,6W_0$; $W_0 = 62,5$ кГц.

а) $W_0 = 1/2T$; $T = 8$ мкс (длительность бита).. $R_s = 1/T = 1/8 \times 10^{-6} = 125$ Кбит/с

б) Длительность аналогового сигнала равна $kT = 40$ мкс

$$4.10 \quad P_E = Q\sqrt{\frac{2E}{N_0}}; \quad E = \frac{U_c^2 T_c}{2} = \frac{U_c^2}{2W}; \quad \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = 3,08 \text{ (для } P_E = 10^{-3});$$

$$\sqrt{\frac{2E}{N_0}} = \sqrt{\frac{U_c^2}{WN_0}} = \frac{U_c}{\sqrt{WN_0}} = 3,08; \quad WN_0 = \frac{U_c^2}{3,08^2}; \quad W = \frac{U_c^2}{10N_0} = \frac{0,01}{10^{-12}} = 10^{10} \text{ Гц}; \text{ Скорость}$$

передачи (для БФМ) возможна до 10 Гбит/с.

5 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами

5.2 Без учета замираний скорость передачи $R_{\text{max}} \leq 3 \cdot 10^6$ бит/с, что соответствует длительности бита 0,33 мкс. Период замираний равен периоду доплеровского смещения частоты, т.е. $T_z = 10^8 / f_0$, где f_0 – несущая частота. Чтобы замиранья были медленными, нужно выполнить $T_z \gg 1/f_0$, т.е. $f_0 \ll 3 \cdot 10^{14}$ Гц.

- 5.6 В 1,5 раза при одинаковых средних интенсивностях лучей.
- 5.7 Понижение напряжения в 4 раза означает понижение на $l=12$ децибел по мощности. Тогда согласно логнормальному закону длительного фединга с $\sigma = 9$ децибел, вероятность системного отказа - 0.9.
- 5.8 Ответ отсутствует.
- 5.9 Если фаза федингующего сигнала значительно изменяется от одного импульса (бита) к другому, достоверное восстановление опорного колебания невозможно, и BPSK становится недоступным. Единственное возможное решение - кодирование со сдвигом частот.
- 5.10 На первый взгляд может казаться, что частотное расстояние между ветвями, равными полосе пропускания когерентности, то есть $B_c \approx 1/\tau_{ds} \approx 50$ кГц, является достаточным, обеспечивая шесть ветвей. Это, однако, приведет к перекрытию спектров ветвей, то есть нарушения независимости ветвей. Чтобы устранить это, частотное пространство между ветвями должно быть не меньше чем полоса пропускания сигнала, то есть 60 кГц. Следовательно, максимальное число ветвей - $300/60 = 5$, а не 6.
- 5.11 Минимальное взаимное запаздывание - между вторыми и третьими путями: $\tau_{\min} = (150/3) \times 10^{-8} = 0,5$ мкс. Чтобы разрешить эти лучи, полоса сигнала должна быть $W \approx 1/\tau_{\min} = 2$ МГц. При скорости 20 кб/с, длительность символа данных - не меньше, чем $T=50$ мкс, в то время как время растяжения $\tau_{ds} = (6 \times 10^3 / 3) \times 10^{-8} = 20$ мкс, означая, что структура RAKE является разумной. Тогда выигрыш обработки будет не меньший, чем $WT = 100$.
- 5.12 Протяженность корреляции сигнала должна быть в пределах $\tau_c \approx 1$ мкс, соответствующая полосе пропускания приблизительно $W \approx 1$ МГц. Так как разрешены только сигналы с взаимной задержкой не меньшей чем τ_c , число зубцов RAKE - в пределах $\tau_{ds}/\tau_c + 1 = 11$. При передаче с квадратурной фазовой модуляцией продолжительность символа данных $T = 100$ мкс, соответствующая выигрышу обработки $WT = 100$.

6 Прием многопозиционных сигналов

- 6.1 См. решение задачи 3.12 с учетом большого отношения сигнал/шум, обеспечивающего вероятность ошибки $P_e = 10^{-5}$.
- 6.2 Сигнал с большей полосой частот после согласованной фильтрации имеет меньшую длительность и пригоден для разрешения по времени, тогда как другой используется для разрешения по частоте. Общим для них является одинаковый выигрыш в отношении сигнал/шум.
- 6.3 Взаимокорреляционная функция сигналов s_1 и s_2 есть

$$B_k = \sum_{i=0}^{n-1} s_{1i} s_{2(i-k)}, \quad k = -(n-1), \dots, 0, \dots, (n-1).$$

Коэффициент корреляции $\rho = B_0 / E = 3/15$.

7 Сверточные коды

7.1

$$f(z) = z^7 + \underline{z^6} + z^4 + z^3 + \underline{z^2} + 1 + \underline{z^6} + \underline{z^2} + (z^4 + 1)(z^3 + 1) = \\ = \underline{z^7} + \underline{z^4} + \underline{z^3} + \underline{1} + \underline{z^7} + \underline{z^4} + \underline{z^3} + \underline{1} = 0,$$

где подчеркнутые члены сокращаются.

7.2

Замечаем, что:

$$(z+1)^{2^i} = \left[(z+1)^2 \right]^{2^{i-1}} = (z^2+1)^{2^{i-1}}$$

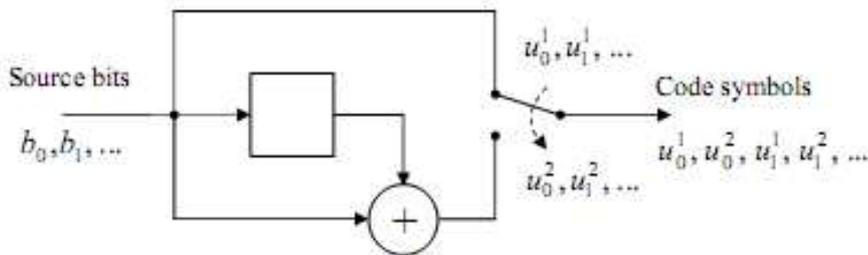
Повторяем эти шаги:

$$(z+1)^{2^i} = (z^2+1)^{2^{i-1}} = (z^4+1)^{2^{i-2}} = (z^8+1)^{2^{i-3}} = \dots$$

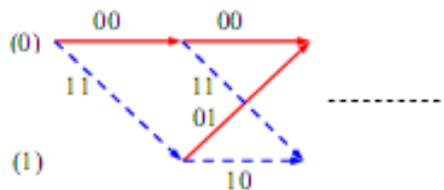
заканчиваем после i -го шага как

$$(z+1)^{2^i} = z^{2^i} + 1$$

7.3

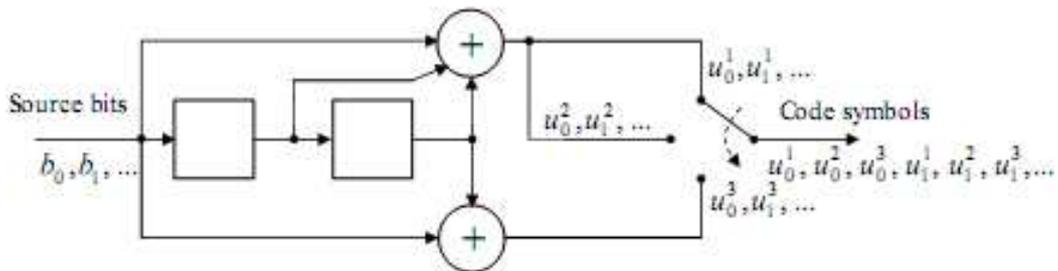


Сверточный кодер Задачи 7.3

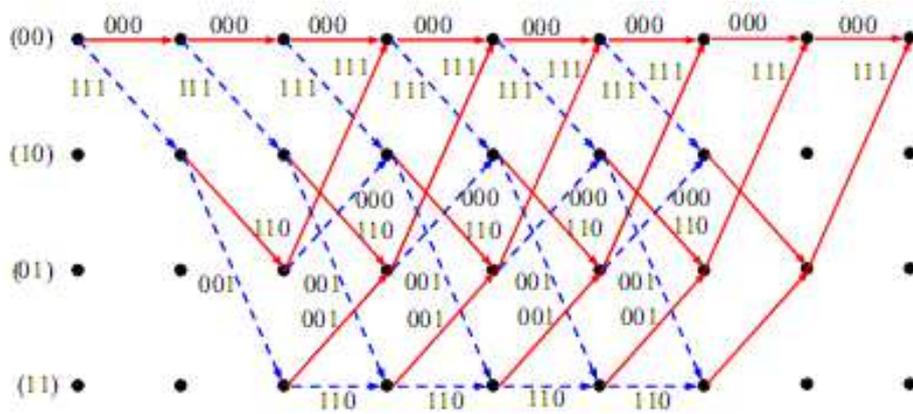


Решетчатая диаграмма сверточного кода Задачи 7.3

7.4



Сверточный кодер Задачи 7.4



Решетка кода к Задаче 7.4

Скорость и длина кодового ограничения $R_c = 1/3$, $m = 3$, $d = 8$.

7.5

Рассмотреть первый код. Полагая битовый поток 10000..., и рассчитывая последовательность кодовых символов из (3.1) Пособия: $u^l(z) = b(z)g_l(z)$, получить

$$u^1(z) = b(z)g_1(z) = 1 \times (1 + z + z^2) = (1 + z + z^2)$$

$$u^2(z) = b(z)g_2(z) = 1 \times 1 = 1.$$

Вес кода $d = 4$.

Аналогично, полагая кодовый поток 11000..., имеем для второго кода

$$u^1(z) = b(z)g_1(z) = (1 + z) \times (1 + z + z^2) = 1 + z^3,$$

$$u^2(z) = b(z)g_2(z) = (1 + z) \times (1 + z) = 1 + z^2. \text{ - Объяснить, почему.}$$

Вес $d = 4$.

Третий код имеет вес $d = 5$, лучший из данных. Вычислить.

Асимптотический выигрыш кодирования $G_a = dR_c = 2,5$ (4дБ).

7.6

Для конечной длины $3l$ (l – произвольное натуральное число) входной битовый поток в z -области есть $b(z) = 1 + z + z^3 + z^4 + z^6 + z^7 + \dots = (1 + z)(1 + z^3 + \dots + z^{3l})$.

Первая последовательность кодовых символов:

$$u^1(z) = b(z)g_1(z) = (1 + z)(1 + z^3 + \dots + z^{3l})(1 + z + z^2) =$$

$$= (1 + z^3)(1 + z^3 + \dots + z^{3l}) = 1 + z^{3l+3}, \quad \text{Почему? Объяснить}$$

Ее вес = 2.

Вторая последовательность кодовых символов:

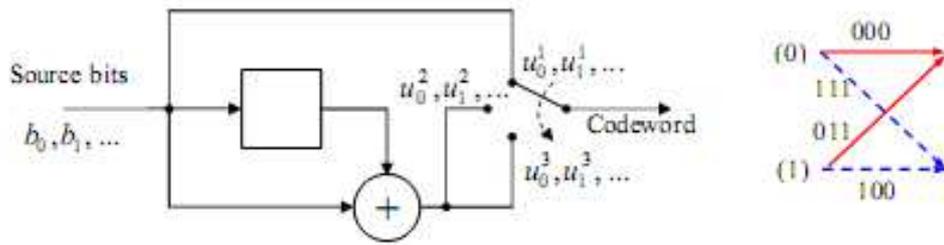
$$u^2(z) = b(z)g_2(z) = (1 + z)(1 + z^3 + \dots + z^{3l})(1 + z^3) =$$

$$= (1 + z)(1 + z^{3l+3}) = 1 + z + z^{3l+3} + z^{3l+4}. \quad \text{Почему? Объяснить}$$

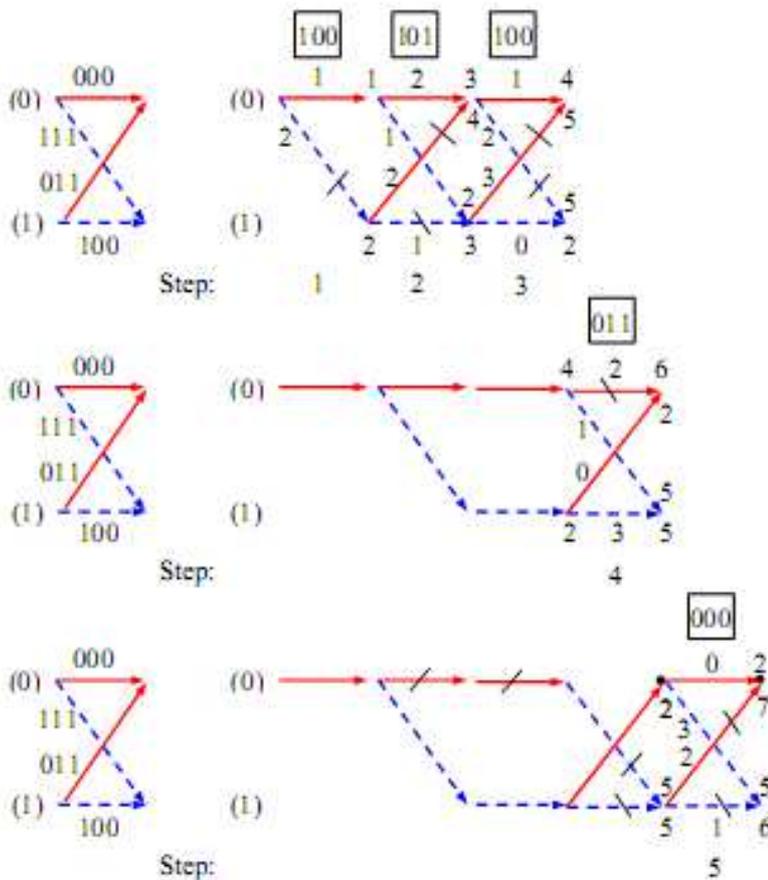
Вес этой последовательности = 4. Поэтому целое кодовое слово будет иметь вес = 6.

Пусть послан битовый поток 110110110110... произвольной длины $3l$ и искажены больше чем три бита в кодовом слове двоичного симметричного канала. Тогда наблюдаемый поток будет ближе к нулевому слову, чем к посланному и декодирован как нулевой. Коды этого вида называют *катастрофическими* и они непригодны для практического использования.

7.7



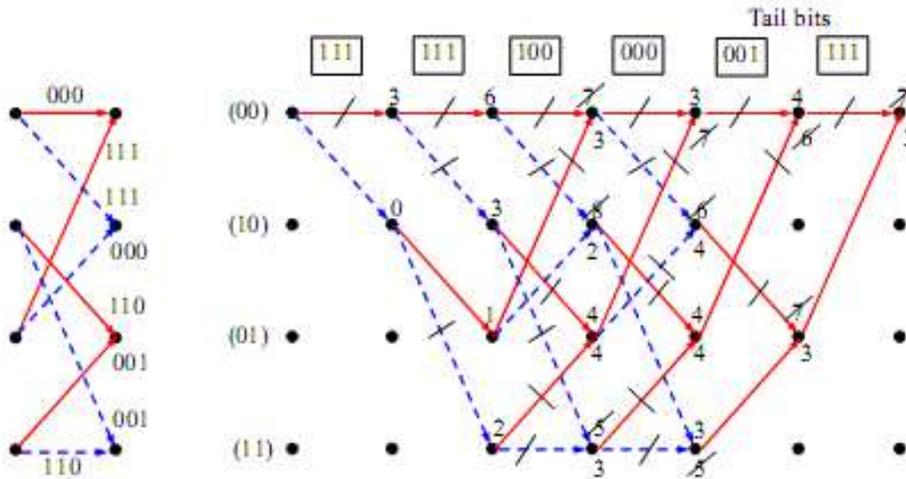
Сверточный кодер и решетка к Задаче 7.7



Процесс декодирования к задаче 7.7

7.8

Нижний рисунок иллюстрирует решение. Оба входящих пути сохраняются до тех пор, пока выживший не станет очевидным. Зачеркнуты метрики не выживших путей. Конечная выжившая метрика – три, показывая, что расстояние наблюдения, до которого это декодировано, есть три. Декодированное слово – 11111000001001111, и если это слово действительно посылали, три ошибки исправлены, что очень хорошо совместимо со свободным расстоянием кода $d = 8$.



Процесс декодирования к задаче 7.8

7.9

а) Схема кодера:

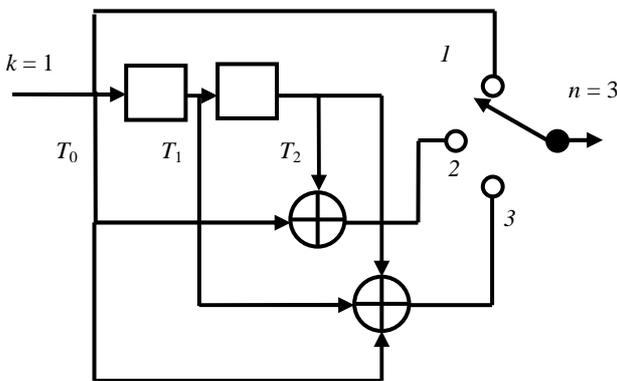
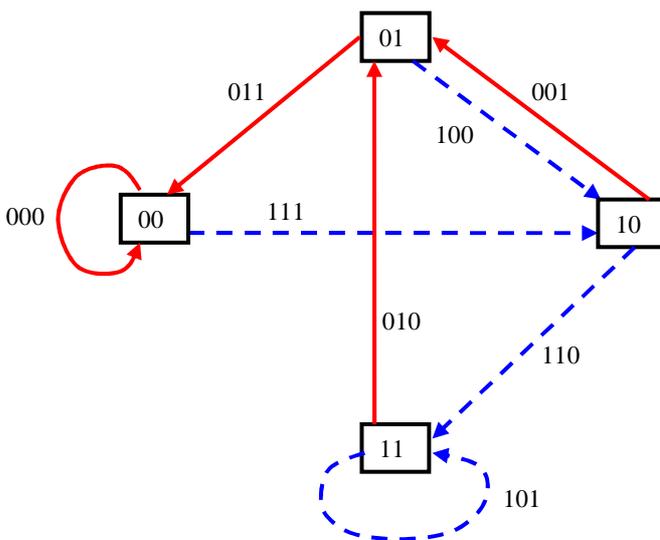


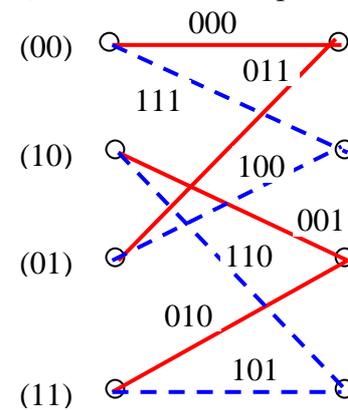
Таблица состояний кодера

| T_0 | T_1 | T_2 | T_0 | T_0+T_2 | $T_0+T_1+T_2$ |
|-------|-------|-------|-------|-----------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

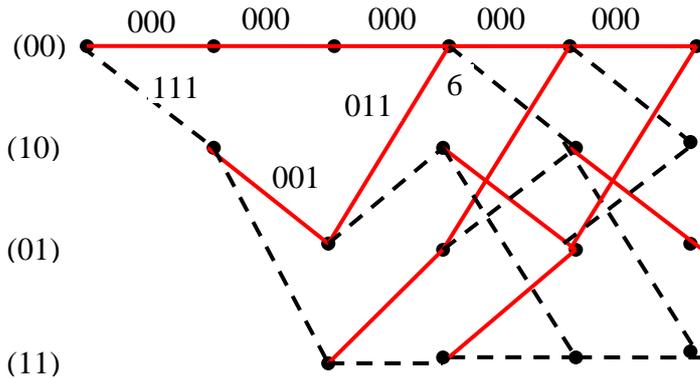
б) Диаграмма состояний кодера:



с) Решетчатая диаграмма кодера



с) Решетчатая диаграмма



d) Свободное расстояние: $d_{CB} = d_f = 6$.

7.23

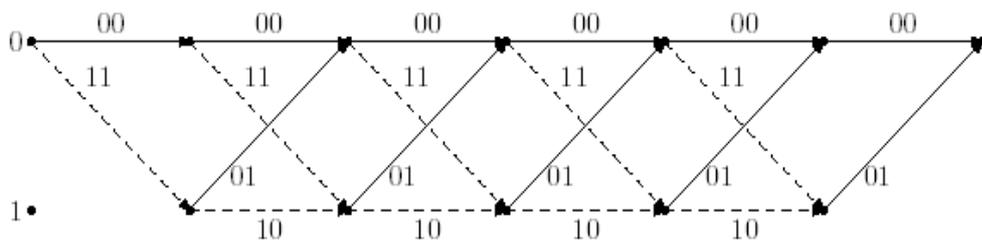
По условиям задачи передаваемое кодовое слово $\mathbf{u} = (110100111001)$, а принятое – $\mathbf{Y} = (100110111001)$. Решение возможно, либо рассматривая полностью алгоритм декодирования Витерби, либо на основании следующих предположений:

- Расстояние между векторами \mathbf{u} и \mathbf{Y} составляет $d(\mathbf{u}, \mathbf{Y}) = 2$, и тогда некоторые информационные биты будут декодированы неправильно, если найдется путь по решетчатой диаграмме, который находится к \mathbf{Y} на меньшем расстоянии.

- Как следует из решетчатой диаграммы, представленной ниже, любое кодовое слово начинается либо комбинацией 00, либо 11. Рассмотрим пути, отвечающие начальной комбинации 00:

- 00 00 00 $d = 3$
- 00 00 11 $d = 3$
- 00 11 01 $d = 4$
- 00 11 10 $d = 2$

откуда следует, что имеется один возможный кандидат (для остальных путей $d > 2$). Однако, следующими являются комбинации 10 либо 01, а значит, расстояние возрастает до трех, что приводит к отбрасыванию и этого пути.



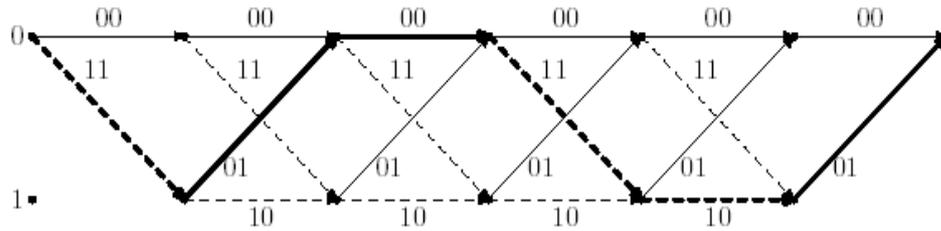
Рассмотрим теперь пути, начинающиеся комбинацией 11:

- 11 01 00 $d = 2$
- 11 01 11 $d = 2$
- 11 10 01 $d = 5$
- 11 10 10 $d = 3$

Среди полученных последовательностей имеются две, которые могут претендовать на указанную роль. Однако первая из них совпадает с \mathbf{u} и не нуждается в дальнейшей проверке. Для второй последовательности следующими являются символы 10 или 01, что увеличивает расстояние от \mathbf{Y} до трех, и, следовательно, также отбрасывается.

- Таким образом, не существует иного пути, кроме отвечающего \mathbf{u} , и, значит, принятая последовательность \mathbf{Y} единственным образом будет декодирована в \mathbf{u} , т.е. все информационные биты будут получены правильно.

Последнее иллюстрируется диаграммой, на которой представлен единственный выживший путь:



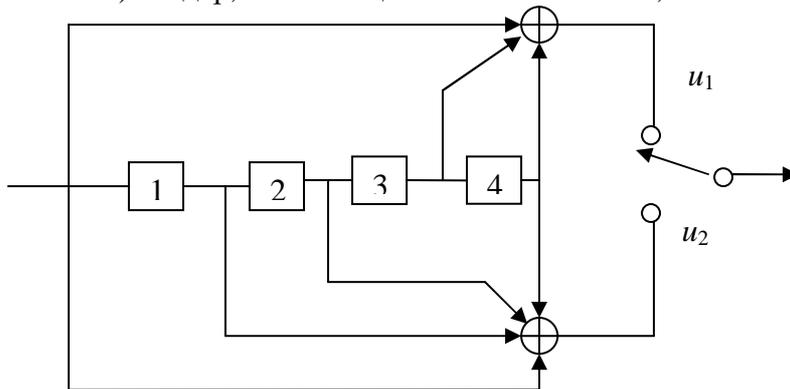
7.24

а). Восьмеричной записи порождающих полиномов соответствует следующее их двоичное представление

$$23 = 010|011, \quad 35 = 011|101,$$

откуда $g_1(z) = 1 + z^3 + z^4$ и $g_2(z) = 1 + z + z^2 + z^4$, и, значит, $m = 5$, а $R = 1/2$.

б). Кодер, отвечающий этим полиномам, имеет следующий вид:



в). Очевидно, что кодовые слова могут быть получены как реакция кодера на входное воздействие, однако, более простым представляется вариант, основанный на полиномиальном представлении кодовых последовательностей:

- при $a_1(z) = 1$ $u_1(z) = a_1(z)g_1(z) = 1 + z^3 + z^4$ и $u_2(z) = a_1(z)g_2(z) = 1 + z + z^2 + z^4$, тогда после перемежения символов получаем кодовое слово 11010110110000..., вес которого $w = 7$;

- при $a_2(z) = 1 + z$

$$u_1(z) = a_2(z)g_1(z) = 1 + z + z^3 + z^5 \quad \text{и} \quad u_2(z) = a_2(z)g_2(z) = 1 + z^3 + z^4 + z^5$$

и после перемежения получаем кодовое слово 1110001101110000... весом $w = 8$;

$$\text{Расстояние } d(a_1(z), a_2(z)) = 7.$$

8 ШПС в системах связи

8.1 ОСП (SIR) на выходе СФ:

$$q_i^2 = 2E / (N_0 + J / W) = q^2 / (1 + J / P_n)$$

J – мощность помехи;

$P_n = N_0 W$ – мощность шума в полосе сигнала.

При режекции полосы W_j :

$$q_J^2 = q^2 (1 - W_j / W)$$

а) Без режекции: $J = J(f)$ $W_j = N_0 W$; $W_j = W/2$; $q_j^2 = \frac{2E}{N_0 + J/W} = \frac{E}{N_0}$.

С режекцией: $q_j^2 = \frac{2E(1 - W_j / W)}{N_0} = q^2 (1 - W_j / W) = E/N_0$

б) $J = P_n/4$; $W_j = W/4$ тогда 1) $q_I^2 = (4/5)q^2$, 2) $q_j^2 = (3/4)q^2$

с) $J = 2P_n$, $W_j = W/4$, откуда 1) $q_I^2 = q^2 / 3$, 2) $q_j^2 = (3/4)q^2$

Список литературы

1. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. Москва: Техносфера, 2007. – 488 с.
2. Самойлов И.М. Задачник по курсу «Телекоммуникационные системы» С.Пб, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006. – 27 с.
3. Пропис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
4. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
5. Пенин П.И. Системы передачи цифровой информации: Учебное пособие для вузов.- М.: Сов. радио, 1983. – 368с.