

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Рассветалов Л.А.

ЗАДАЧИ ПО ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Великий Новгород
2011 г.

ББК

УДК 621.396; 681.3.07

Рассветалов Л.А. Задачи по цифровой связи: Учебное пособие / ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2011 г. - 10 с.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Голик Ф.В.

В учебном пособии представлены задачи и решения по сигналам и видам модуляции, оптимальному приему бинарных сигналов в каналах с постоянными и случайными параметрами, а также приему многопозиционных сигналов. Включенные задачи соответствуют дисциплинам «Радиотехнические системы передачи информации» направления 210300.65 (Радиотехника), 210300.68 (Системы и устройства передачи, приема и обработки сигналов), а также «Статистическая теория связи» направления 210300.68.

Учебное пособие одобрено советом института Электронных и Информационных Систем Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, 2011

Содержание

Задачи	3
1 Общие сведения о цифровых системах передачи информации.....	3
2 Сигналы, модуляция.....	3
3 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами	6
4 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами	6
5 Прием многопозиционных сигналов	7
Решения	7
1 Общие сведения о цифровых системах передачи информации.....	7
2 Сигналы, модуляция.....	7
3 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами	10
4 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами	10
5 Прием многопозиционных сигналов	10

Задачи

1 Общие сведения о цифровых системах передачи информации

- 1.1 Объяснить разницу между технической и информационной скоростью передачи. В каких случаях техническая скорость может быть больше информационной, а в каких меньше?
- 1.2 Показать, что минимум удельных затрат энергии в идеальном гауссовском канале связи определяется величиной $\ln 2$.
- 1.3 Почему при передаче информации нельзя добиться одновременного уменьшения удельных затрат энергии и полосы?
- 1.4 Какой код называют первичным? Какой максимальной избыточностью может обладать такой код?

2 Сигналы, модуляция

- 2.1 Даны три сигнала (рис. 2.1). Во сколько раз максимальное расстояние в данном ансамбле больше минимального?
- 2.2 Наблюдение $y(t)$ на выходе гауссовского канала имеет вид, представленный на рис. 2.2, а сигналы на входе – на рис. 2.1.

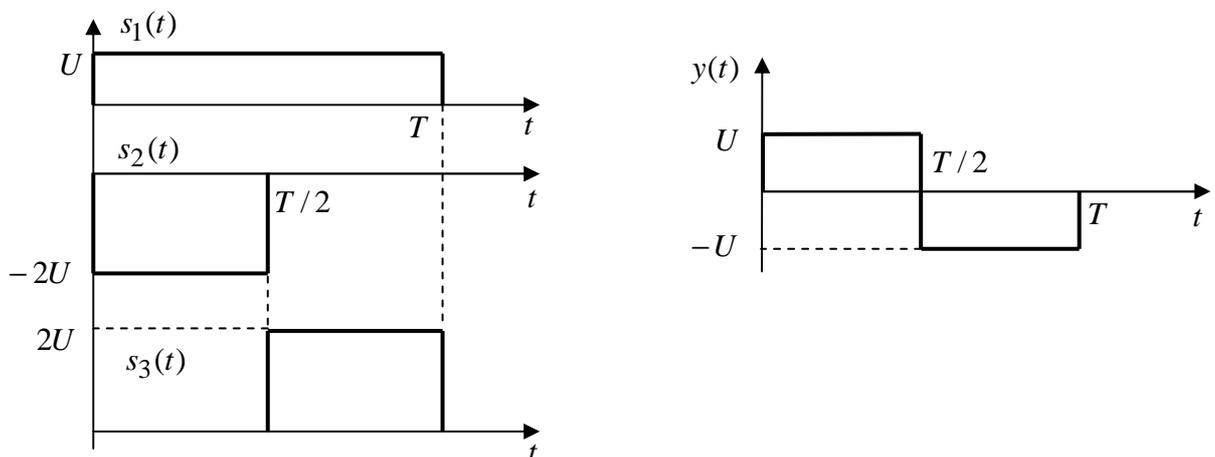


Рис.2.1.

Рис. 2.2.

Каким будет решение оптимального приемника?

Указание. Сравнить корреляции между наблюдением и сигналами.

- 2.3 Источник генерирует данные со скоростью $R = 10$ кбит/сек. Каждый бит передается по гауссовскому каналу бинарной ФМ. Доступна полоса вплоть до $W = 10$ МГц. Разумно ли использовать сигналы с полосой 10 МГц?
- 2.4 Какие сигналы с бинарной ФМ предпочтительнее для передачи по гауссовскому каналу:
- прямоугольные импульсы с пиковой мощностью 1000 Вт и полосой 100 кГц;
 - прямоугольные импульсы такой же длительности с пиковой мощностью 900 Вт и полосой 10 МГц?
- 2.5 Вычислить энергетические потери для пар сигналов, используемых для бинарной передачи данных по гауссовскому каналу (см. рис.2.3), по отношению к оптимальной паре.

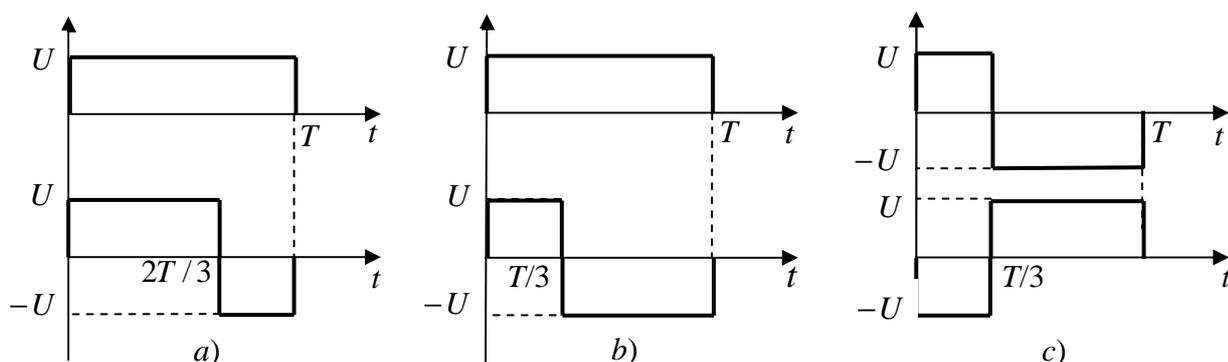


Рис. 2.3.

- 2.6 При относительной бинарной фазовой манипуляции (ОБФМ) значение бита передается с чередованием или без полярности двух последовательных импульсов: импульсы одинаковой полярности соответствуют нулю, а различной – единице. Сравнить в первом приближении ОБФМ и ФМ по уровню потребляемой энергии (основываясь только на минимуме расстояния) и ширине занимаемой полосы при условии равенства скоростей.
- 2.7 При квадратурной ФМ (КФМ, ФМ-4) два бита (4 сообщения) передаются четырьмя сигналами с начальными фазами: $0, \pi, \pm \pi/2$. Является ли данный вариант оптимальным для передачи двух битов? Если нет, укажите наилучший способ и оцените его асимптотический выигрыш по сравнению с ФМ-4.
- 2.8 Можно ли построить 10 эквидистантных сигналов, для которых коэффициент корреляции между двумя любыми был бы равным $-1/7$? Каково максимально возможное число сигналов с указанным коэффициентом корреляции?
- 2.9 Найдите и постройте зависимость от M энергетических потерь (в децибелах) множества M ортогональных сигналов по сравнению с множеством M оптимальных сигналов для гауссовского канала. Определите значение потерь в асимптотике при увеличении M .

- 2.10 Асимптотический энергетический выигрыш при ортогональном кодировании в сравнении с не кодированной передачей для случая $M = 2$ стремится к 0,5 или -3 дБ, т.е. является отрицательным, демонстрируя потери, а не выигрыш. Как это можно объяснить физически?
- 2.11 Асимптотический энергетический выигрыш при ортогональном кодировании в сравнении с некодированной передачей для случая $M = 4$ стремится к 1 или 0 дБ, т.е. отсутствует совсем. Дать физическое объяснение результату.
- 2.12 Сообщения ($M = 8$) передаются с использованием ФМ-8, т.е. идентичными радиоимпульсами с 8-ю различными эквидистантными начальными фазами. Является ли этот вариант передачи 8 сообщений по гауссовскому каналу наилучшим при отсутствии ограничений на ширину полосы? Если нет, то каковы энергетические потери варианта с ФМ-8 по сравнению с оптимальным множеством из M сигналов?
- 2.13 Сравните асимптотическую (на основании минимума расстояния) эффективность M -ичной ФМ по отношению к ортогональному кодированию по энергетическим затратам (при заданной вероятности ошибки) и занимаемой полосе.
- 2.14 В обратном канале сотовой системы радиосвязи стандарта IS-95 осуществляется ортогональное кодирование блоками из 6-ти бит. Скорость передачи составляет 28.8 кбит/сек. Оценить величину полосы, занимаемую кодированными сигналами.
- 2.15 Некоторая система цифровой связи занимает полосу $W = 1.2288$ МГц. Какое максимальное число M ортогональных сигналов может быть использовано для передачи данных со скоростью 38.4 кбит/сек?
- 2.16 В некоторой системе осуществляется передача данных по гауссовскому каналу со скоростью 10 кбит/сек. Проектировщик системы планирует обеспечить энергетический выигрыш в 6 дБ по сравнению с передачей без кодирования. Достижима ли эта цель на основе ортогонального кодирования, если допустимой считается полоса в 320 КГц?
- 2.17 Некоторой системе отведена полоса, равная 10.24 МГц, при необходимой скорости передачи в 100 кбит/сек. Какой величины может достичь в этой системе потенциальный асимптотический выигрыш от кодирования?
- 2.18 По гауссовскому каналу необходимо передавать данные со скоростью 100 кбит/сек на несущей в 2 ГГц. Реалистично ли рассчитывать на энергетический выигрыш $G = 10$ дБ при использовании ортогональных сигналов?
- 2.19 Покажите, что коэффициент взаимной корреляции простых сигналов с ФМ $s_1(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$; $s_2(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$, $0 \leq t \leq \tau_0$ определяется формулой $\rho = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.
- 2.20 Изобразите сигнальные точки созвездия 4-АМ. Выразите минимальное расстояние между сигналами через их среднюю энергию.
- 2.21 Изобразите сигнальные точки созвездия 16-КАМ. Выразите минимальное расстояние между сигналами через их среднюю энергию.
- 2.22 Изобразите сигнальные точки созвездия 8-ФМ. Выразите минимальное расстояние между сигналами через энергию отдельного сигнала.

3 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами

- 3.1 Покажите, что структура оптимального приемника не изменяется, если образец сигнала, подаваемого на коррелятор, усилить в K_0 раз.
- 3.2 Определите структуру оптимального приемника сигналов с активной паузой для следующих условий:
а) $E_1 \neq E_2$, $p(s_1) = p(s_2)$; б) $E_1 = E_2$, $p(s_1) \neq p(s_2)$.
- 3.3 Получите формулы для вероятности ошибки в случае приема на оптимальные приемники сигналов с активной паузой для следующих условий:
а) $E_1 \neq E_2$, $p(s_1) = p(s_2)$; б) $E_1 = E_2$, $p(s_1) \neq p(s_2)$.
- 3.4 Найдите выражение для коэффициента взаимной корреляции простых сигналов с частотной манипуляцией
 $s_1(t) = S_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$; $s_2(t) = S_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$, $0 \leq t \leq \tau_0$.
Определите условия, при которых помехоустойчивость оптимального приемника таких сигналов достигает максимального значения.
- 3.5 Объясните, почему при некогерентном приеме простых БМ сигналов вероятность ошибки в основном определяется вероятностью ложного приема посылки? При каких условиях это утверждение станет неверным?
- 3.6 Зачем в приемнике БМ сигналов необходимо иметь АРУ? Почему такая регулировка не требуется в приемниках БЧМ и БФМ сигналов?
Указание. Сравните величины порогов для этих приемников.

4 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами

- 4.1 Объясните, почему время многолучевого растяжения зависит от диаграмм направленности передающей и приемной антенн и протяженности линии связи. Нарисуйте примерный вид этой зависимости от указанных факторов.
- 4.2 Линия связи использует многолучевой канал с максимальной разностью хода лучей $\Delta R_{\max} = 100$ м; скорость движения неоднородностей $U_{\text{отр}} = 3$ м/с. Какую скорость передачи можно обеспечить по такой линии связи, если применять простые двоичные сигналы?
- 4.3 Почему применение АРУ при одиночном приеме флуктуирующего сигнала не уменьшает среднюю вероятность ошибки приема?
- 4.4 Показать, что при некогерентном приеме бинарных ОФМ сигналов скорость передачи в релейском канале уменьшается по сравнению с гауссовским в соответствии с выражением
 $R_p/R_r = h^2 / \exp(h^2)$,
где h^2 – необходимое отношение сигнал/шум в гауссовском канале, при котором обеспечивается заданная вероятность ошибки.
Указание. При сравнении скоростей передач необходимо полагать вероятность ошибок в обоих случаях одинаковой и достаточно малой ($P_{\text{ош}} \ll 1$).
- 4.5 Покажите, что при оптимальном линейном объединении ветвей огибающая результирующего колебания пропорциональна сумме квадратов огибающих копий в отдельных ветвях.
- 4.6 Во сколько раз нужно увеличить мощность сигнала, чтобы при оптимальном линейном объединении ветвей двукратное разнесение стало эквивалентно по вероятности ошибки трехкратному?

5 Прием многопозиционных сигналов

- 5.1 Сравните необходимое отношение мощности сигнала к мощности шума в многопозиционной системе с ФМ с соответствующим отношением в идеальной по Шеннону системе. Принять $M = 8$, вероятность ошибки символа в системе с ФМ с оптимальным приемом $p_{ош} = 10^{-5}$.
- 5.2 В чем проявится различие между сложными сигналами, имеющими различные длительности и ширину спектра, но одинаковую базу? В чем проявится сходство?
- 5.3 Построить автокорреляционные функции последовательностей
010110100101011
011001010110101.
Найти взаимокорреляционную функцию этих последовательностей. Чему равен коэффициент корреляции между последовательностями при отсутствии сдвига между ними?
- 5.4 Определить, какому приблизительно числу ветвей разнесенного приема соответствует система «Рейк», если при базе 220 она обеспечивала передачу двоичной информации с вероятностью ошибки $p_{ош} \leq 10^{-6}$, а при уменьшении базы до 50 вероятность ошибки возросла до 10^{-2} . Прием в обоих случаях считать оптимальным, канал – релейским.
Примечание: это задача на бонус.

Решения

1 Общие сведения о цифровых системах передачи информации

- 1.1 Информационная скорость – количество двоичных единиц в секунду. Техническая скорость – число переданных символов (чипов) в секунду. При бинарной передаче эти скорости совпадают. Помехоустойчивое кодирование уменьшает информационную скорость, и в бинарном случае техническая скорость выше. Передача многопозиционными кодами ($M > 2$) увеличивает информационную скорость.
- 1.2 См. материалы лекций «Удельные характеристики систем цифровой связи».
- 1.3 Аналогия с вечным двигателем. См. математическое обоснование в том же разделе.
- 1.4 Код, для которого выполняется условие $n^{m-1} < N < n^m$, где N – число сообщений, называется первичным. Неиспользуемая часть кодовых комбинаций (избыточность) всегда меньше половины общего числа кодируемых дискретных величин.

2 Сигналы, модуляция

2.1. Энергии сигналов $E_1 = U^2T$, $E_2 = E_3 = 2 U^2T$. Коэффициент корреляции $\rho_{12} = -1/\sqrt{2}$, $\rho_{13} = 1/\sqrt{2}$, $\rho_{23} = 0$. Согласно теореме косинусов, квадрат расстояния между сигналами $d_{kl}^2 = E_k + E_l - 2\sqrt{E_k E_l} \rho_{kl}$ оказывается $d_{12}^2 = 5U^2T = d_{\max}^2$, $d_{13}^2 = U^2T = d_{\min}^2$, $d_{23}^2 = 4U^2T$, и $d_{\max} / d_{\min} = \sqrt{5}$.

2.2. Корреляция $y(t)$ со всеми тремя сигналами есть $z_1 = 0$, $z_2 = -U^2T$, $z_3 = -U^2T$. Согласно решающему правилу, $z_k - E_k/2$ имеют значения $-U^2T/2$, $-2U^2T$, $-2U^2T$ для $k=1,2,3$, соответственно. Поэтому решение будет, что принят сигнал $s_1(t)$.

2.3. Ширина полосы, необходимая для передачи БФМ, порядка R , т.е. 10 кГц. Расширение полосы до 10 МГц есть средство привлечения широкополосных сигналов с $WT \approx 10^3$, которые не дают положительного эффекта в вероятности ошибки на бит, зависящей только от энергии на бит.

2.4. Случай (а) лучше, т.к. энергия на бит для него выше, в то время как ширина полосы не дает эффекта для вероятности ошибок.

2.5. Все сигналы имеют одинаковую энергию, т.о., пары отличаются только коэффициентами корреляции внутри пары. Третья пара – противоположные сигналы, имеющая коэффициент корреляции $\rho = -1$. Это оптимальная пара, т.е. не имеет потерь энергии. Для первой и второй пар коэффициенты корреляции $+1/3$ и $-1/3$, соответственно. Энергии одинаковы, квадрат расстояния пропорционален $1 - \rho$. Поэтому потери энергии в сравнении с третьей (оптимальной) парой для первой пары $2/[1 - (1/3)] = 3$ (4,8 дБ) и для второй $2/[1+(1/3)] = 3/2$ (1,8 дБ).

2.6. Имеются четыре возможных конфигурации передаваемых пар последовательностями импульсов: $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$. Они соответствуют четырем сигнальным точкам на плоскости, имеющие квадрат расстояния $2E_p$ от начала и $4E_p$ от (до) другой ближайшей точки, где E_p – энергия импульса.

Ошибка бита случается каждый раз, когда переданная точка перепутана с одной из смежного квадранта. Блок m последовательных импульсов может передавать $m - 1$ бит, при этом $E_p = (m-1) E_b / m$, E_b – энергия в бите. Следовательно, квадрат минимального расстояния для ОБФМ – $4(m-1) E_b/m$, который близок к таковому при БФМ всякий раз, когда $m \gg 1$.

Импульс для ОБФМ в $m / (m - 1)$ раз короче чем при БФМ, при одинаковой скорости, подразумевая то же самое расширение ширины полосы.

Опять, когда $m \gg 1$, это отличие незначительно, и асимптотически ОБФМ и БФМ эквивалентны и в потреблении энергии и в ширине полосы.

2.7. Коэффициент корреляции между соседними сигналами есть нуль, поэтому минимальное расстояние $d_{\min}^2 = 2E_p$, где E_p – энергия манипулированного импульса.

Т.к. каждый импульс передает два бита, $E_p = 2E_b$ и $d_{\min}^2 = 4E_b$ (так же, как при БФМ). Для оптимальных (симплексных) четырех сигналов $\rho = -1/3$ и $d_{\min}^2 = 2E_p \times (4/3) = 8E_p / 3 = 16E_b / 3$, так что асимптотические потери энергии для КФМ к симплексному набору $4/3$ или 1,2 дБ.

2.8. Это возможно не более чем для восьми сигналов.

2.9. Квадрат расстояния для ортогональных и симплексных сигналов $2E$ и $2EM/(M-1)$ соответственно. Поэтому потери энергии ортогональных сигналов - $10 \lg [M/(M-1)]$ и снижаются от 3 дБ для $M = 2$, стремясь к нулю при росте M .

2.10. $M = 2$ – средство передачи одного бита. Лучше использовать пару противоположных, а не ортогональных сигналов, которые имеют потери энергии на 3 децибела меньше.

2.11. При некодированной передаче 2 битов, квадрат минимума расстояния между двумя самыми близкими блоками из 2 битов (например, 00 и 10) - $4E_b$. В семействе четырех ортогональных сигналов энергии E квадрат минимума расстояния - $2E$.

Так как эти сигналы имеют два информационных разряда ($E = 2E_b$), то квадрат минимума расстояния для обоих режимов передачи равны.

2.12. Оптимальный режим передачи, без ограничений ширины полосы, использует набор восьми симплексных сигналов. Их квадрат минимума расстояния - $d_{\min \text{ sim}}^2 = 16E/7$, в то время как для 8-ФМ с той же самой сигнальной энергией E самые близкие сигналы имеют коэффициент корреляции $\rho_{\max} = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ и поэтому квадрат расстояния

$d_{\min 8}^2 = E(2 - \sqrt{2})$. Тогда потери энергии 8-ФМ к оптимальному набору есть

$$d_{\min \text{ sim}}^2 / d_{\min 8}^2 = 16/7(2 - \sqrt{2}) \approx 3,90 \text{ или } 5,9\text{дБ.}$$

2.13. Для M -ичной ФМ коэффициент корреляции между самой близкой парой $\rho_{\max} = \cos(2\pi/M)$ и с энергией импульса E_p квадратичное минимальное расстояние

$$d_{\min \text{ ФМ}}^2 = 2E_p[1 - \cos(2\pi/M)] = (4E_b \log_2 M) \sin^2(\pi/M).$$

При ортогональном кодировании $d_{\min \text{ орт}}^2 = 2E_b \log_2 M$, так что энергия меньше M -ФМ в $d_{\min \text{ орт}}^2 / d_{\min \text{ ФМ}}^2 = (1/2) \sin^{-2}(\pi/M) \approx M^2 / 2\pi^2$, $M \gg 1$ раз. Для одинаковых длительностей полоса M -ФМ $W_{\text{ФМ}} \approx R \log_2 M$, тогда как для ортогонального кодирования $W_{\text{орт}} \approx MR \log_2 M$. Поэтому $W_{\text{орт}} / W_{\text{ФМ}} \approx M$ и M -ФМ может оказаться предпочтительной, если экономия полосы более важна, чем экономия энергии.

2.14. Для ортогональных сигналов $W \approx MR / \log_2 M = W/R = 64 \times 28,8 \times 10^3 / 6 = 307,2$ кГц.

2.15. Т.к. $W \approx MR / \log_2 M$, $M \log_2 M = W/R = (1,2288/38,4) \times 10^3 = 32$.

Решение этого уравнения дает $M = 256$ ортогональных сигналов.

Когда сигналы являются полосовыми, это число может быть удвоено, привлекая квадратуры каждого из них.

2.16. Увеличение на 6 дБ есть в 4 раза, поэтому $G_a = (\log_2 M)/2$, имея в виду, что $\log_2 M = 8$, и $M = 256$. Тогда необходима полоса $W \approx MR / \log_2 M = 256 \times 10^4 / 8 = 320$ кГц, т.е. увеличение на 6 дБ в полосе 320 кГц достижимо с ортогональным кодированием.

2.17. Поскольку $M \log_2 M = W/R = 102,4$, что означает $M=1024$, $\log_2 M = 10$ и $G_a = (\log_2 M) / 2 = 5$, или 7 дБ.

2.18. Выигрыш на 10 дБ есть 10 раз, поэтому из $G_a = (\log_2 M)/2$ следует, что $M = 2^{20} > 10^6$ и необходимая полоса $W \approx MR / \log_2 M > 10^5 \times 10^5 / 2 = 5$ ГГц, которая больше, чем двойная несущая частота. Конечно, это нереализуемо.

$$2.20. d_{\min} = \sqrt{4E/5}$$

$$2.21. d_{\min} = \sqrt{2E/5}$$

$$2.22. d_{\min} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})E}$$

3 Оптимальный прием двоичных сигналов в каналах с постоянными параметрами

3.4. $\rho_{12} = \frac{1}{2} \sin [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] - \frac{1}{2} \sin [(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]$, или, с учетом фильтрации

суммарной частоты: $\rho_{12} = \frac{1}{2} \sin [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]$. Помехоустойчивость максимальна,

когда ρ_{12} минимален. В частности, для ортогональных сигналов $\rho_{12} = 0$.

4 Прием двоичных сигналов в каналах со случайными параметрами

4.2. Без учета замираний скорость передачи $R_{max} \leq 3 \cdot 10^6$ бит/с, что соответствует длительности бита 0,33 мкс. Период замираний равен периоду доплеровского смещения частоты, т.е. $T_3 = 10^8 / f_0$, где f_0 – несущая частота. Чтобы замиранья были медленными, нужно выполнить $T_3 \gg 1/f_0$, т.е. $f_0 \ll 3 \cdot 10^{14}$ Гц.

4.6. В 1,5 раза при одинаковых средних интенсивностях лучей.

5 Прием многопозиционных сигналов

5.1. См. решение задачи 2.12 с учетом большого отношения сигнал/шум, обеспечивающего вероятность ошибки $P_e = 10^{-5}$.

5.2. Сигнал с большей полосой частот после согласованной фильтрации имеет меньшую длительность и пригоден для разрешения по времени, тогда как другой используется для разрешения по частоте. Общим для них является одинаковый выигрыш в отношении сигнал/шум.

5.3. Взаимокорреляционная функция сигналов s_1 и s_2 есть

$$B_k = \sum_{i=0}^{n-1} s_{1i} s_{2(i-k)}, \quad k = -(n-1), \dots, 0, \dots, (n-1).$$

Коэффициент корреляции $\rho = B_0 / E = 3/15$.