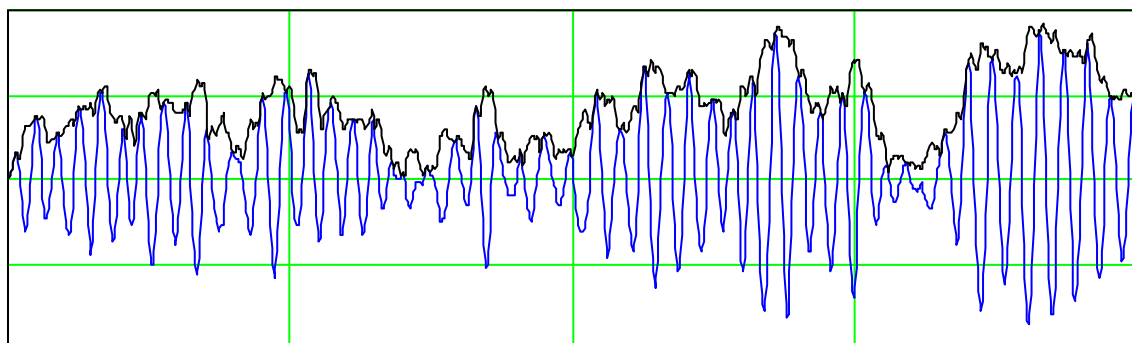


Н.Е. Быстров

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ**



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО**

Н.Е. Быстров

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Великий Новгород

2016

УДК 51-7: 621.37(07)
ББК В171я7
М 34

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

Профессор Ю.Д. Ульяницкий
(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет)

Доктор физико-математических наук, профессор А.В. Колногоров
(Новгородский государственный университет)

М 34 **Быстров, Н.Е.** Введение в теорию случайных величин и процессов:
Учебное пособие / Н.Е. Быстров,
НовГУ им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, 2016 г. – 93 с.

Учебное пособие содержит основные сведения из теории случайных величин и случайных процессов, необходимые для понимания принципа представления реальных физических процессов статистическими моделями.

Рассмотренные основные модели случайных процессов широко применяются при решении радиотехнических задач оптимального обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов, являющихся основой для решения прикладных задач в рамках создания и совершенствования радиотехнических систем и комплексов.

Учебное пособие отвечает новым образовательным стандартам и предназначено для подготовки бакалавров по направлению 11.03.01 - «Радиотехника».

Пособие подготовлено и издано в рамках выполнения Госзадания Минобрнауки России.

УДК 51-7: 621.37(07)
ББК В171я7
М 34

© Новгородский государственный университет, 2016 г.
© Н.Е. Быстров, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПРОЦЕССЫ	7
1 ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	7
1.1 Функциональные характеристически одномерных случайных величин	7
1.2 Числовые характеристики одномерных случайных величин	10
2 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	16
2.1 Функциональные характеристики многомерных случайных величин	16
2.2 Числовые характеристики многомерных случайных величин	19
3 ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	23
3.1 Преобразование плотности вероятности одномернойслучайной величины	23
3.2 Преобразование плотности вероятности двухмерных случайных величин.....	26
3.3 Преобразование плотности вероятности векторных случайных величин.....	29
4 АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ЗАКОНОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	30
4.1 Анализ основных законов дискретных распределений одномерных случайных величин	30
4.2 Анализ основных законов непрерывных распределений одномерных случайных величин	35
4.3 Анализ двухмерного нормального закона распределения.....	37
4.4 Анализ основных законов распределения случайных величин, получаемых функциональным преобразованием.....	38
5 СЛУЧАЙНЫЕ ПРЦЕССЫ.....	45
5.1 Понятие и определение случайных процессов	45
5.2 Статистическое описание случайных процессов.....	47
5.3 Непрерывность, дифференцируемость и интегрирование случайных процессов	51
5.4 Преобразование стационарных случайных процессов в линейных системах	53
6 КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	55
6.1 Свойства корреляционных функций и спектральных плотностей	56

6.2 Корреляционные и спектральные характеристики узкополосных стационарных процессов.....	60
6.3 Случайные процессы с дискретным спектром	63
6.4 Анализ спектральных плотностей и корреляционных характеристик распространенных случайных процессов.....	64
7 ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ	68
7.1 Случайная импульсная последовательность	68
7.2 Меандровый процесс со случайной начальной фазой.....	70
7.3 Кусочно-постоянные случайные процессы	71
8 АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	74
8.1 Гармоническое колебание со случайной начальной фазой и детерминированными амплитудой и частотой.....	74
8.2 Гармоническое колебание со случайной амплитудой и начальной фазой	75
8.3 Гармонический сигнал со случайной амплитудой, частотой и начальной фазой.....	76
9 СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА.....	78
9.1 Линейное преобразование НСП	78
9.2 Распределения отсчетов производной нормального случайного процесса	80
9.3 Совместные распределения отсчетов процесса и его производной.....	81
10 УЗКОПОЛОСНЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС.....	82
10.1 Описание узкополосного нормального СП.....	82
10.2 Преобразования узкополосного нормального СП	83
10.3 Свойства и характеристики линейной смеси узкополосного нормального СП и детерминированного сигнала	84
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	89
Список литературы.....	89

Предисловие

Учебное пособие содержит основные сведения из теории случайных величин и случайных процессов, необходимые для понимания принципа представления реальных физических процессов статистическими моделями.

Изложенный математический аппарат ориентирован на изучение дисциплины «Математический аппарат статистической радиотехники» и посвящен целевой подготовке студентов радиотехнического профиля.

Составитель пособия ориентировался на классические учебники по статистической радиотехники [1,2,3] и на материалы специальных учебных пособий по одноименному курсу, изданных в СПбГЭТУ «ЛЭТИ» [4,5,6].

Пособие состоит из десяти тематических разделов.

В первых двух разделах рассматриваются общие вопросы теории описания случайных величин и рассматриваются основные числовые характеристики одномерных и многомерных случайных величин. Последующий раздел посвящен функциональному преобразованию случайных величин. В четвертом разделе приводится анализ распространенных дискретных и непрерывных законов распределения.

Последующие темы пособия ориентированы на изучения случайных процессов. В начальных темах вводятся определения случайных процессов, статистическое описание и основные свойства случайных процессов. В дальнейшем достаточно подробно рассматриваются корреляционные и спектральные характеристики случайных процессов. Отдельно в темах 7 и 8 выполняется анализ импульсных случайных процессов и случайных гармонических процессов. Наконец, в завершающих темах рассматриваются свойства и характеристики нормального случайного процесса, а также особенности узкополосного нормального случайного процесса.

Этот материал необходим для грамотного компьютерного моделирования изучаемых процессов.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Ю.Д. Ульяницкому за рецензирование и полезные замечания, способствующие качественному изложению материалов пособия.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим положения, связанные с основными определениями и способами описания случайных величин и случайных процессов.

Пусть рассматриваемая случайная величина ξ принимает значения из множества X , которое может быть конечное $X = \{x; x_1, x_2, \dots, x_n\}$, счетное $X = \{x; x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ или непрерывное (континуальное) $X = \{x; x \in (a, b)\}$, причем возможны случаи $a = -\infty$, $b = \infty$.

Случайная величина (СВ), для которой X - конечное или счетное множество, называется дискретной. Дискретную СВ можно полностью определить, задав распределение вероятностей, т.е. совокупность пар чисел (p_i, x_i) , где x_i - значение СВ, а p_i - вероятность этого значения. Вероятности этих значений должны удовлетворять условию нормировки: $\sum_i p_i = 1$.

Для случайных величин, у которых множество X - непрерывное, задание распределения вероятностей невозможно, т.к. вероятность определенного значения равна нулю. В этом случае случайная величина задается функцией распределения или плотностью вероятности.

Кроме одномерных случайных величин широкое применение находят векторные или многомерные случайные величины. Случайным называется вектор $\vec{\xi}$, компоненты которого $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ есть СВ. Случайный вектор $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, называется также n -мерной случайной величиной.

Случайные величины тесно связаны со случайными процессами. Случайным процессом (СП) $\xi(t)$ называется функция времени (процесс), значения которой в любой момент времени t_0 есть случайная величина. Поэтому естественно, что описание случайных процессов опирается на описание случайных величин (СВ).

1 ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1 Функциональные характеристически одномерных случайных величин

1.1.1 Функции распределения и плотность вероятности

Универсальным способом описания случайной величины любой природы является задание *функции распределения* (ФР), определяемой как вероятность события, состоящего в том, что СВ ξ будет меньше значения x , являющегося аргументом функции распределения, т.е. :

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}.$$

Свойства функции распределения:

1. Функции распределения $F_{\xi}(x)$ - неотрицательная неубывающая функция.
2. Функция $F_{\xi}(x)$ непрерывна слева, что символически можно записать как $F_{\xi}(x-0) = 0$.
3. Значения $F_{\xi}(x)$ на левой и правой границе множества X , как вероятности невозможного и достоверного событий, равны соответственно нулю и единице. В частности, $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$.
4. Функция $F_{\xi}(x)$ терпит разрыв первого рода при тех значениях x , которые принимаются СВ ξ с конечной вероятностью $0 < p \leq 1$. Величина скачка в точке разрыва равна вероятности p .
5. Функция распределения позволяет определить вероятность попадания СВ ξ в интервал $[x_1, x_2)$ как

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1).$$

На рис. 1 приведены ФР для СВ дискретного (а), непрерывного (б) и смешанного (в) типов.

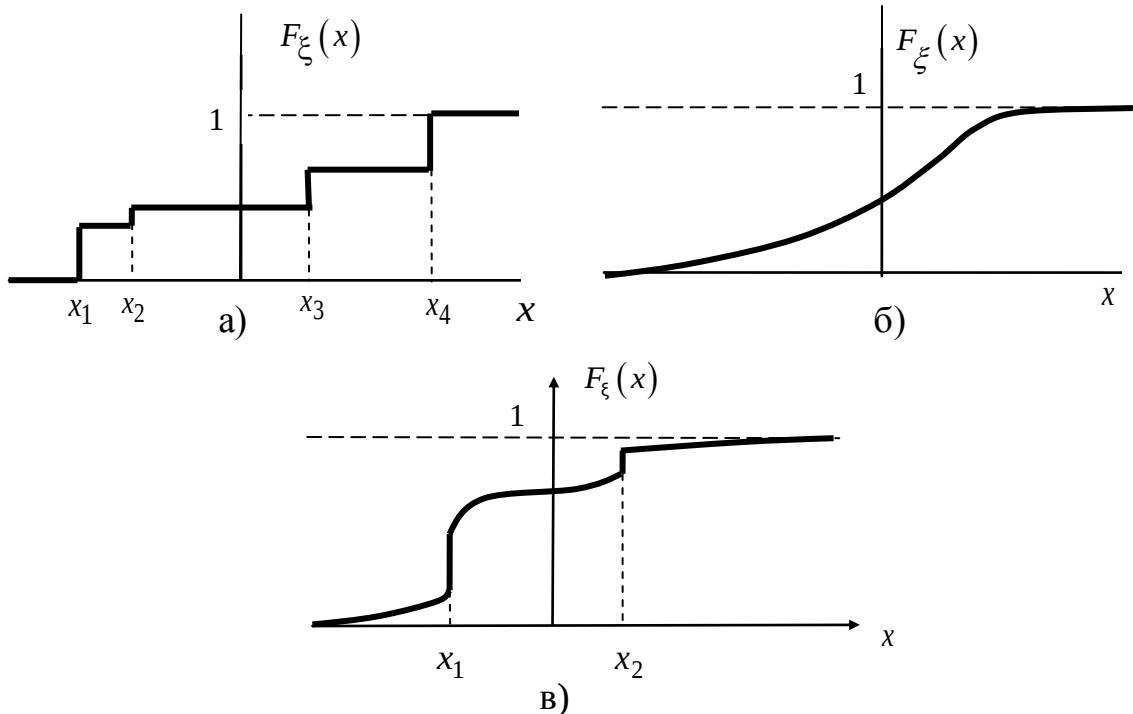


Рис. 1.1. Примеры типов функций распределения

Другой важной функциональной характеристикой случайных величин

является **плотность вероятности (ПВ)**. Плотность вероятности $W_{\xi}(x)$ характеризует вероятность попадания случайной величины ξ малый интервал своих значений dx . Плотность вероятности $W_{\xi}(x)$ определяется как производная от функции распределения вероятности:

$$W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}.$$

Случайная величина называется непрерывной (относится к классу, типу непрерывных СВ), если существует неотрицательная функция $W_{\xi}(x)$, удовлетворяющая при любых x равенству

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(y) dy.$$

Свойства плотности вероятности:

1. Плотность вероятности $W(x) \geq 0$ - положительная функция.
2. Плотность вероятности $W(x)$ позволяет определить вероятность попадания СВ ξ в интервал $[x_1, x_2)$

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W(x) dx.$$

3. Если $W(x)$ непрерывна в точке x , то с точностью до бесконечно малых порядков

$$P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} = W(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

4. Следствием свойства 2 является условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Плотность вероятности можно определить и для дискретных типов СВ.

ПВ случайной величины, для которой X состоит из M значений $x_1, x_2, \dots, x_M$, имеет вид

$$W(x) = \sum_{i=1}^M p_i \cdot \delta(x - x_i),$$

где p_i - вероятность принятия значения x_i ; $\delta(x)$ - дельта функция.

Функция распределения при этом будет равна

$$F(x) = \sum_{i=1}^M p_i \cdot 1(x - x_i),$$

где $1(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0; \\ 0, x < 0 \end{cases}$ - функция единичного скачка или функция Хэвисайда.

1.1.2 Характеристическая функция

Преобразование Фурье ПВ $W_{\xi}(x)$ определяет характеристическую функцию (ХФ) случайной величины

$$\Theta_{\xi}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) \cdot \exp(jvx) dx.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет выразить ПВ через ХФ

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\xi}(v) \cdot \exp(-jvx) dv.$$

Основные свойства ХФ:

1. Характеристическая функция равномерно непрерывна на всей числовой оси $-\infty < v < \infty$ и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Theta_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = 1;$$

$$|\Theta_{\xi}(v)| \leq 1.$$

2. Характеристическая функция $\Theta_{\xi}(v)$ непрерывна для всех v , для нее выполняются следующие условия:

$$\Theta_{\xi}(0) \geq |\Theta_{\xi}(v)|; \quad \Theta_{\xi}(-v) = \Theta_{\xi}^*(v) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\xi}(v) \exp(-jvx) dv \geq 0, \forall x.$$

3. Характеристическая функция суммы двух независимых СВ ξ_1 и ξ_2 равна произведению их характеристических функций: если $\xi = \xi_1 + \xi_2$, то

$$\Theta_{\xi}(jv) = \Theta_{\xi_1}(jv) \cdot \Theta_{\xi_2}(jv).$$

Данное утверждение справедливо и для произвольного числа слагаемых.

4. Если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k W_{\xi}(x) dx$ конечен, то ХФ данной случайной величины дифференцируема k раз и при $n \leq k$ справедливо соотношение

$$\Theta_{\eta}^{(n)}(v) = \Theta_{\xi}^{(n)}(v) / j^n.$$

1.2 Числовые характеристики одномерных случайных величин

Рассмотренные выше функция распределения и плотность вероятности дают наиболее полное представление о характере случайных величин.

Однако во многих случаях достаточно бывает использовать для описания случайных величин совокупность чисел, называемых числовыми характеристиками СВ. Познакомимся с этими числовыми характеристиками.

1.2.1 Начальные и центральные моменты

Обобщенными числовыми характеристиками для случайных величин являются начальные и центральные моменты k -го порядка.

Моменты СВ ξ существуют тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k W_{\xi}(x) dx < \infty, \quad k=1,2,\dots$$

Начальным моментом k -го порядка m_k случайной величины ξ называют математическое ожидание от величины ξ в k -ой степени:

$$m_k = M(\xi^k).$$

В случае непрерывной случайной величины ξ можем записать

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot W_{\xi}(x) dx.$$

Для дискретных случайных величин ξ , задаваемых распределением (x_i, p_i) , $i=1, 2, \dots, n$ начальные моменты определяются зависимостью

$$m_k = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^k \cdot p_i,$$

Среди начальных моментов особую роль играет **математическое ожидание** СВ $M(\xi)$. Для непрерывных случайных величин имеем

$$m_1 = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx.$$

Для дискретных СВ, математическое ожидание равно

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot p_i.$$

Для дискретных СВ можно пользоваться также интегральной формой записи математического ожидания

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i.$$

Математическое ожидание характеризует также положение ПВ случайной величины относительно оси ординат и является абсциссой центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой $W_{\xi}(x)$.

Часто бывает полезно представление математического ожидания m_1 с помощью ФР $F_{\xi}(x)$. Можно показать, что

$$m_1 = \int_0^{\infty} (1 - F_{\xi}(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_{\xi}(x) dx,$$

т.е. математическое ожидание равно разности площадей, заключенных между осью ординат, прямой $y=1$ и кривой $y=F_{\xi}(x)$ в интервале $(0, \infty)$ и между осью абсцисс, кривой $y=F(x)$ и осью ординат в интервале $(-\infty, 0)$.

На рис. 1.2 указанные площади заштрихованы и отмечен знак, с которым нужно взять соответствующие площади.

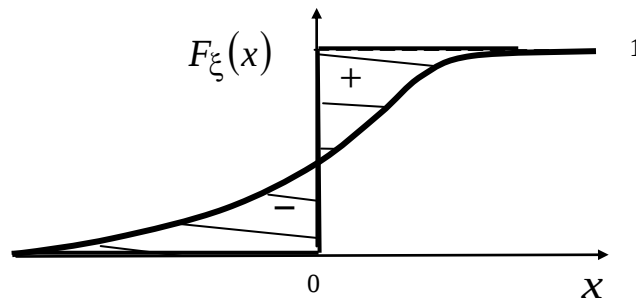


Рис. 1.2. Положение ПВ случайной величины относительно оси ординат

Центральным моментом k -го порядка M_k называют математическое ожидание от величины $(\xi - M(\xi))^k$. Когда $k=1$ имеем $M_1 = M(\xi - M(\xi)) = 0$, если $k=2$, то $M_2 = M(\xi - M(\xi))^2$, при $k=3$, $M_3 = M(\xi - M(\xi))^3$ и так далее.

Для непрерывной случайной величины определение имеет вид

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k \cdot W_{\xi}(x) dx.$$

Если случайная величина ξ - дискретная, принимающая конечное число значений, то

$$M_k = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - m_1)^k \cdot p_i.$$

Важнейшим центральным моментом является M_2 , называемый *дисперсией* СВ ξ и обозначаемый обычно как D_ξ . Корень из дисперсии $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ называют *среднеквадратическим отклонением* СВ ξ .

Отразим связь между центральными и начальными моментами. Рассматриваемая взаимосвязь, определяется формулой:

$$M_k = M\{\xi - M_\xi\}^k = \sum_{l=0}^k C_k^l M_\xi^l (-M_\xi)^{k-l}.$$

Запишем эту связь для первых четырех центральных моментов:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = D\{\xi\} = m_2 - m_1^2;$$

$$M_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3; \quad M_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4.$$

1.2.2 Определение асимметрии и коэффициента эксцесса

Вычисление асимметрии и эксцесса позволяет установить симметричность распределения случайной величины ξ относительно математического ожидания $M(\xi)$. Третий центральный момент M_3 характеризует асимметрию закона распределения случайной величины. Если он равен нулю, то случайная величина симметрично распределена относительно математического ожидания. Центральный момент четвертого порядка M_4 используется для определения эксцесса, который характеризует плосковершинность или островершинность плотности вероятности $W(\xi)$. Эксцесс также характеризует удельный вес больших отклонений от математического ожидания или, как говорят «тяжесть хвостов» ПВ.

На практике обычно используют нормированный момент $\gamma_1 = M_3 / M_2^{3/2}$, называемый коэффициентом *асимметрии*, и нормированный момент $\gamma_2 = M_4 / M_2^2$, именуемый коэффициентом *эксцесса*.

На рис.1.3 приведены графики, которые характеризует несимметричность ПВ $W_\xi(x)$ случайных величин относительно математического ожидания.

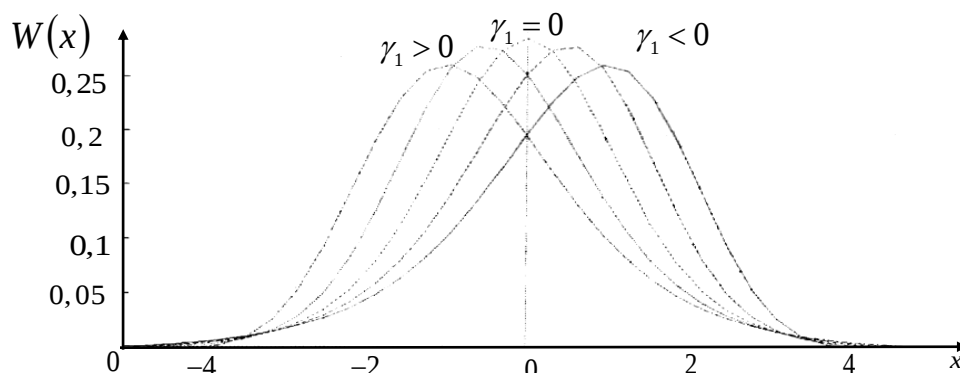


Рис. 1.3. Графики иллюстрации асимметрии ПВ

Иллюстрация эксцесса ПВ $W_{\xi}(x)$ случайных величин представлена зависимостями на рис. 1.4.

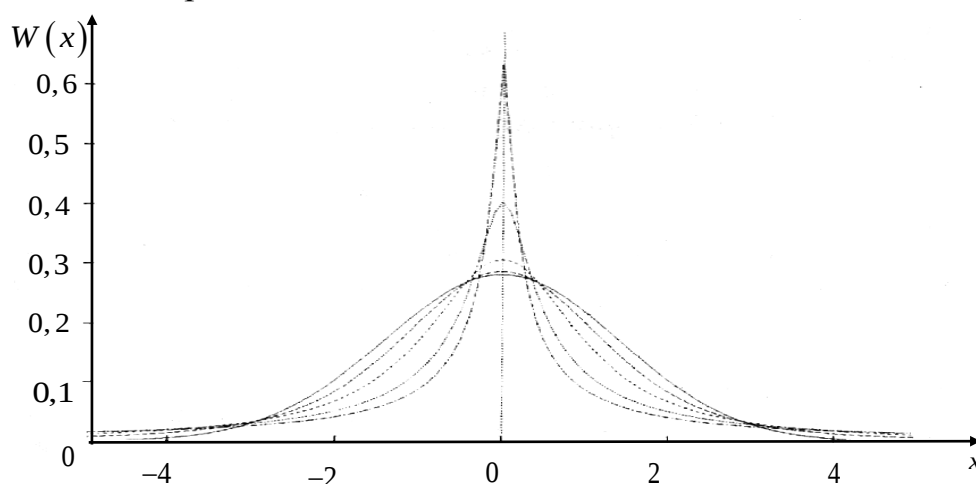


Рис. 1.4. Графики иллюстрации эксцесса ПВ

Часто островершинность распределения $W(\xi)$ сопоставляется с нормальным законом распределения $W_{\text{норм}}(\xi)$. Поэтому часто вместо γ_2 используют коэффициент $\gamma = \gamma_2 - 3$, который позволяет сравнивать данную ПВ с гауссовской, для которой $\gamma_2 = 3$.

1.2.3 Квантили и кумулянты

Моменты СВ являются удобным способом описания СВ, если они существуют. Однако СВ может и не иметь моментов. Кроме того, при экспериментальном определении (оценке) моменты оказываются весьма чувствительными к засорению выборки, т.е. появлению в наблюдаемой совокупности чисел, значений другой СВ, обычно сильно отличающихся по своим свойствам от изучаемой СВ (аномальные ошибки). В этих условиях

полезным оказывается использование квантилей, к определению которых мы и переходим.

Квантилей p -ого порядка, или p -квантилю, называют корень уравнения $F_{\xi}(x) = p$, обозначаемый как x_p . При использовании ПВ $W_{\xi}(x)$ квантиль x_p определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{x_p} W_{\xi}(x) dx = p.$$

При $p=1/2$ квантиль **называют медианой** и обозначают $\mu = x_{1/2}$. Медиана определяет точку на оси x , которая делит значения СВ на две равновероятные половины. Кроме медианы, используют $x_{1/4}$ и $x_{3/4}$, которые **называются квантилями**. В качестве характеристики разброса СВ часто принимается **интерквартильный размах** или **срединное отклонение** СВ, равное $(x_{3/4} - x_{1/4})/2$.

Полезной характеристикой распределения **является мода** - абсцисса локального максимума ПВ. Абсцисса глобального максимума называется **наивероятнейшим значением** СВ. По числу мод распределения ПВ делятся на **унимодальные и полимодальные**.

Еще одним видом числовых характеристик СВ являются **кумулянты**. В ряде случаев их использование оказывается более эффективным, чем описание СВ с помощью моментов.

Прежде чем дать определение кумулянтам, остановимся на свойствах введенной ранее характеристической функции.

Производная k -ого порядка характеристической функции в нуле

$$\left. \Theta_{\xi}^{(k)}(v) \right|_{v=0} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) e^{jvx} dx \Big|_{v=0} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot W_{\xi}(x) dx = j^k \cdot m_k$$

позволяет определить k -ый начальный момент СВ ξ .

Логарифм ХФ $\ln \Theta_{\xi}(v) = \psi_{\xi}(v)$ называется **кумулянтной функцией**.

Характеристическая функция может быть представлена рядом Маклорена

$$\Theta_{\xi}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Theta_{\xi}^{(k)}(0)}{k!} v^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} (jv)^k.$$

Разлагая кумулянтную функцию в ряд Маклорена, получим

$$\psi_{\xi}(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (jv)^k,$$

где χ_k - кумулянты распределения $W_{\xi}(x)$.

Характеристическая функция, а значит и ПВ, однозначно определяются кумулянтами, если записанный ряд сходится для всех v , так как

$$\Theta_{\xi_1}(jv_1) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (jv)^k \right).$$

Очевидно, что кумулянты и моменты СВ связаны между собой.

Так, $\chi_1 = m_1$, $\chi_2 = m_2 - m_1^2 = M_2$, $\chi_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = M_3$.

В свою очередь, моменты также могут быть выражены через кумулянты.

2 МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Функциональные характеристики многомерных случайных величин

2.1.1 Функция распределения и плотность вероятности

Случайный вектор $\vec{\xi}$ полностью характеризуется n -мерной функцией распределения, определяемой как вероятность произведения случайных событий $A_i = \{\xi_i < x_i\}$, т.е.

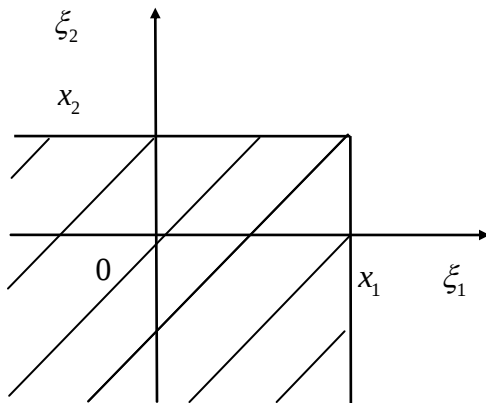
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P \left\{ \prod_{i=1}^n A_i \right\} = P \left\{ \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n \right\}.$$

Многомерная ФР является неубывающей функцией по каждому из аргументов. Можно рассматривать величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ как координаты точек n -мерного евклидова пространства $\mathbf{R}_n$. Тогда $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дает вероятность попадания точки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ в n -мерный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат.

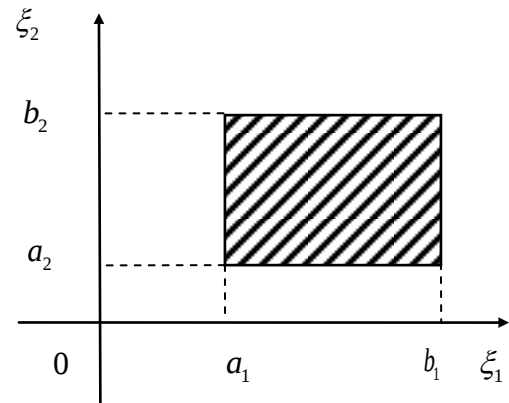
Например, двумерная функцией распределения $F(x_1, x_2)$, приведенная на рис. 2.1 -а), отражает вероятность попадания точки (ξ_1, ξ_2) в заштрихованную область. Иллюстрация двумерного случая попадания точки в прямоугольную область

$$P\{a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2\} = F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(b_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2)$$

приведена на рис.2.1 -б).



а)



б)

Рис. 2.1. Иллюстрация свойств двумерной функции распределения

Аналогично одномерному случаю, определяется непрерывная многомерная плотность вероятности $W_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если существует неотрицательная функция такая, что при любых $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$W_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Как и одномерная, многомерная ПВ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Многомерные функции распределения и плотности вероятности связаны выражением

$$F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} W_{\bar{\xi}}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

2.1.2 Характеристическая функция

Характеристическая функция может быть определена и для многомерных СВ $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$:

$$\Theta_{\xi}(jv_1, jv_2, \dots, jv_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x_1, \dots, x_n) e^{jv_1 x_1 + \dots + jv_n x_n} dx_1 \dots dx_n,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - случайный вектор.

Из определения многомерных ХФ видно, что если в случайном векторе $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, т.е. $W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n W_{\xi_i}(x_i)$, то переменные в многомерном интеграле, определяющем $\Theta_{\vec{\xi}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, разделяются и

$$\Theta_{\vec{\xi}}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n \Theta_{\xi_i}(v_i).$$

Свойства многомерной характеристической функции аналогичны свойствам одномерной ХФ.

2.1.3 Основные свойства многомерной плотности вероятности и функции распределения

Если многомерную ПВ проинтегрировать по всем значениям одной из переменных, то получим ПВ остальных СВ, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i = W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Для ФР это эквивалентно тому, что мы положили $x_i = \infty$. Эти свойства называются **согласованностью** высших и низших ФР и ПВ.

Например, по заданной двумерной плотности вероятности $W_2(x, y)$ нетрудно найти законы распределения вероятностей каждой из случайных величин. Действительно для случайной величины ξ получим

$$F_{1\xi}(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^x W_{1\xi}(x) dx, \quad \text{где} \quad W_{1\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dy.$$

Аналогично для случайной величины η имеем

$$F_{1\eta}(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^y W_{1\eta}(y) dy, \quad \text{где} \quad W_{1\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dx.$$

Таким образом, для того чтобы из совместной плотности вероятности двух случайных величин получить плотности вероятности одной из них, следует проинтегрировать функцию $W_2(x, y)$ по тому аргументу, который соответствует другой случайной величине.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ являются **зависимыми**, если ПВ одной из них зависит от того, какое значение приняла другая СВ. Это

записывается при помощи **условной** ПВ случайной величины $W_{\xi_1}(x_1|x_2)$, что читается как условная ПВ случайной величины ξ_1 при условии, что СВ ξ_2 приняла значение x_2 . Условные плотности вероятностей обладают всеми свойствами ПВ. Они неотрицательны, т.е. $W_{\xi_1}(x_1|x_2) \geq 0$ и выполняется условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi_1}(x_1|x_2) dx_1 = 1$ при любых значениях x_2 .

Если ПВ случайных величин ξ_1 и ξ_2 не зависит от того, какое значение приняла другая из величин, то такие СВ называются **независимыми**.

В общем случае **совместная** ПВ случайных величин ξ_1 и ξ_2 записывается в виде

$$W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = W_{\xi_1}(x_1) \cdot W_{\xi_2}(x_2|x_1) = W_{\xi_2}(x_2) \cdot W_{\xi_1}(x_1|x_2).$$

Для независимых СВ справедливо соотношение

$$W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = W_{\xi_1}(x_1) \cdot W_{\xi_2}(x_2).$$

В случае многомерных СВ эти формулы примут вид

$$W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = W_{\xi_1}(x_1) \prod_{i=2}^n W_{\xi_i}(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1}).$$

Для независимых СВ имеем

$$W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n W_{\xi_i}(x_i).$$

Определение независимых СВ на языке ФР звучит так: если для любой совокупности исходных случайных величин $\xi_i, \xi_k, \xi_l, \dots, \xi_n$ имеет место равенство $F_{\vec{\xi}}(x_i, x_k, x_l, \dots, x_n) = F_{\xi_i}(x_i) \cdot F_{\xi_k}(x_k) \cdot F_{\xi_l}(x_l) \dots F_{\xi_n}(x_n)$, то СВ $\xi_i, \xi_k, \xi_l, \dots, \xi_n$ - независимы.

2.2 Числовые характеристики многомерных случайных величин

2.2.1 Условное математическое ожидание

Условное математическое ожидание СВ ξ описывается выражением

$$m_1(\xi_1|x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot W_{\xi_1}(x_1|x_2) dx_1.$$

Зависимость $m_1(\xi_1|x_2)$ от x_2 определяет кривую регрессии ξ_1 на ξ_2 .

Переменную x_2 , называют **регрессором**, а $m_1(\xi_1|x_2)$ - **откликом**.

Для **векторных** СВ математическое ожидание определяется как вектор, в которых СВ заменены своими средними значениями, т.е.

$$M\{\vec{\xi}\} = (M\{\xi_1\}, M\{\xi_2\}, \dots, M\{\xi_n\}),$$

где

$$M\{\xi_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

2.2.2 Свойства математического ожидания и дисперсии

1. Математическое ожидание постоянной (детерминированной величины) равно ей самой, а дисперсия равна нулю:

$$M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \delta(x-a) dx = a \quad \text{и} \quad D\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \delta(x-a) dx = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$M\{C\xi\} = C\{M\xi\}.$$

3. Математическое ожидание суммы любых (зависимых и независимых) СВ равно сумме математических ожиданий, т.к.

$$\begin{aligned} M\{\xi_1 + \xi_2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Выполняя внутреннее интегрирование в первом слагаемом по x_2 , а во втором по x_1 , получим

$$M\{\xi_1 + \xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 W_{\xi_1}(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 W_{\xi_2}(x_2) dx_2 = M\{\xi_1\} + M\{\xi_2\}.$$

4. С учетом свойств 2 и 3 можно утверждать, что математическое ожидание линейной комбинации СВ $\sum_{i=1}^n C_i \xi_i$ равно линейной комбинации с теми же коэффициентами C_i математических ожиданий $M\{\xi_i\}$, т.е.

$$M \left\{ \sum_{i=1}^n C_i \xi_i \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ C_i M(\xi_i) \right\}.$$

5. Математическое ожидание произведения независимых СВ равно произведению их математических ожиданий, т.е.

$$\begin{aligned} M \left\{ \xi_1 \xi_2 \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_{\xi_1}(x_1) W_{\xi_2}(x_2) dx_1 dx_2 = M \left\{ \xi_1 \right\} \cdot M \left\{ \xi_2 \right\}. \end{aligned}$$

6. Для суммы или разности независимых СВ ξ_1 и ξ_2 дисперсия равна

$$\begin{aligned} D \left\{ \xi_1 \pm \xi_2 \right\} &= M \left\{ \left(\xi_1 \pm \xi_2 - M \left\{ \xi_1 \right\} \mp M \left\{ \xi_2 \right\} \right)^2 \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\xi_1 - M \left\{ \xi_1 \right\} \right) \pm \left(\xi_2 - M \left\{ \xi_2 \right\} \right) \right]^2 W_{\xi_1}(x_1) \cdot W_{\xi_2}(x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Возводя в квадрат и используя введенные обозначения, будем иметь

$$D \left\{ \xi_1 \pm \xi_2 \right\} = D \left\{ \xi_1 \right\} + D \left\{ \xi_2 \right\} \pm 2M_{1\xi_1} M_{1\xi_2} = D \left\{ \xi_1 \right\} + D \left\{ \xi_2 \right\},$$

где $M_{1\xi_1}$ и $M_{1\xi_2}$ - равные нулю первые центральные моменты СВ ξ_1 и ξ_2 .

7. Дисперсия произведения постоянной величины c на СВ ξ равна $c^2 D(\xi)$.

8. Дисперсия линейной комбинации $\eta = \sum_{i=1}^n C_i \xi_i$ попарно независимых СВ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \quad \text{равна} \quad D(\eta) = \sum_{i=1}^n C_i^2 D(\xi_i).$$

2.2.3 Корреляция случайных величин

Для характеристики случайного вектора $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ могут быть использованы **начальные моменты** $m_{k_1, k_2, \dots, k_n}$, определяемые как

$$\begin{aligned} m_{k_1, k_2, \dots, k_n} &= M \left\{ \prod_{i=1}^n \xi_i^{k_i} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \cdot W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

и **центральные моменты**:

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_n} = M \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\xi_i - M(\xi_i) \right)^{k_i} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 - M(\xi_1) \right)^{k_1} \dots \left(x_n - M(\xi_n) \right)^{k_n} W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Порядком момента называют величину $k_{\Pi} = \sum_i k_i$.

Если все показатели степени $k_1, k_2, \dots, k_n$, за исключением одного k_l равны нулю, то приведенные выражения дадут моменты для СВ ξ_l :

$$m_{k_l} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_l)^{k_l} \cdot W_{\xi}(x_l) dx_l \quad \text{и} \quad M_{k_l} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_l - M(\xi_l))^{k_l} \cdot W_{\xi}(x_l) dx_l.$$

При отличных от нуля двух показателях степени k_l и k_m мы получим характеристику статистической связи двух СВ ξ_l и ξ_m :

$$M_{k_l k_m} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_l - M(\xi_l) \right)^{k_l} \cdot \left(x_m - M(\xi_m) \right)^{k_m} \cdot W_{\vec{\xi}}(x_l, x_m) dx_l dx_m.$$

При $k_l = k_m = 1$ мы приходим к понятию **ковариации** двух СВ ξ_l и ξ_m , характеризующему меру **линейной** связи между СВ ξ_l и ξ_m :

$$COV(\xi_l, \xi_m) = M \left(\left(\xi_l - M(\xi_l) \right) \cdot \left(\xi_m - M(\xi_m) \right) \right).$$

При непрерывных случайных величинах ξ_l и ξ_m имеем

$$COV(\xi_l, \xi_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_l - M(\xi_l) \right) \cdot \left(x_m - M(\xi_m) \right) \cdot W_{\vec{\xi}}(x_l, x_m) dx_l dx_m.$$

Для нахождения ковариации дискретных величин ξ_l и ξ_m используют формулу

$$COV(\xi_l, \xi_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(x_i - M(\xi_l) \right) \cdot \left(y_j - M(\xi_m) \right) \cdot p(x_i, y_j).$$

Чтобы исключить зависимость ковариации от величины разброса СВ ξ_l и ξ_m ее нормируют относительно их среднеквадратических значений и переходят к безразмерному отношению

$$r_{\xi_l \xi_m} = \frac{COV(\xi_l, \xi_m)}{\sqrt{D\{\xi_l\}} \sqrt{D\{\xi_m\}}},$$

называемому **коэффициентом корреляции**.

Если коэффициент корреляции $r_{\xi_l \xi_m}$ равен нулю, то СВ ξ_l и ξ_m называют некоррелированными. Если СВ ξ_l и ξ_m независимы, то они некоррелированы, т.к. в этом случае

$$\begin{aligned} COV(\xi_l, \xi_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_l - M(\xi_l)) \cdot (x_m - M(\xi_m)) W_{\xi_l}(x_l) \cdot W_{\xi_m}(x_m) dx_l dx_m = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_l - M(\xi_l)) W_{\xi_l}(x_l) dx_l \int_{-\infty}^{\infty} (x_m - M(\xi_m)) W_{\xi_m}(x_m) dx_m = M_{1\xi_l} M_{1\xi_m} = 0 \end{aligned}$$

Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Например, если $\xi_l = \cos \varphi$ и $\xi_m = \sin \varphi$, где φ - СВ, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$, то

$$M\{\xi_l\} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = M\{\xi_m\} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0$$

$$\text{и } COV(\xi_l, \xi_m) = M\{\cos \varphi \cdot \sin \varphi\} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0,$$

т.е. ξ_l и ξ_m - некоррелированные СВ, но между ними существует функциональная связь $\xi_l^2 + \xi_m^2 = 1$ (но не линейная!).

3 ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1 Преобразование плотности вероятности одномерной случайной величины

Пусть известна одномерная плотность вероятности $W_1(\xi)$ случайной величины ξ и нужно найти плотность вероятности $W_1(\eta)$ случайной величины η , связанной со СВ ξ функциональным соотношением $\eta = g(\xi)$. Разрешая уравнение $\eta = g(\xi)$ относительно ξ получаем обратную функцию $\xi = h(\eta)$. Будем вначале считать, что обратная функция $g(\xi)$ задает взаимно однозначное соответствие между СВ ξ и η , представленное на рис. 3.1.

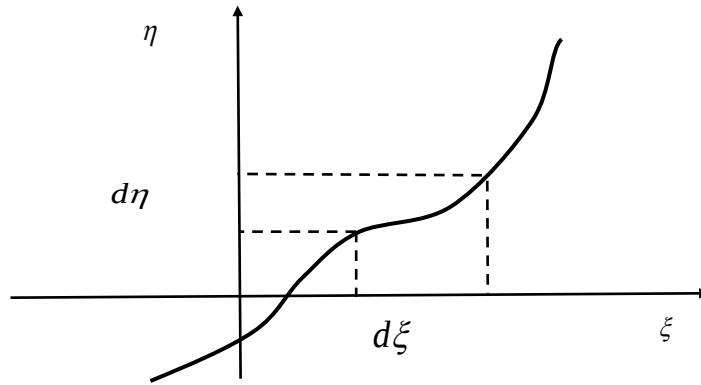


Рис. 3.1. Однозначное преобразование
одномерной плотности вероятности

В силу функциональной связи между ξ и η можно утверждать, что вероятность попадания СВ ξ в промежуток $d\xi$ равна вероятности попадания СВ η в промежуток $d\eta$. Считая $d\xi$ и $d\eta$ малыми значениями, это утверждение можно записать в виде:

$$W_1(\eta)d\eta = W_1(\xi)d\xi. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что:

$$W_1(\eta) = W_1(\xi) \frac{d\xi}{d\eta} = W_1(h(\eta)) \cdot \left| \frac{dh}{d\eta} \right| \because \xi = h(\eta). \quad (3.2)$$

Несколько более сложным является случай, когда уравнение $\eta = g(\xi)$ имеет несколько решений и обратная функция $\xi = h(\eta)$ неоднозначна. Пусть, например, имеются две ветви $h_1(\eta)$ и $h_2(\eta)$ как это показано на рис. 3.2.

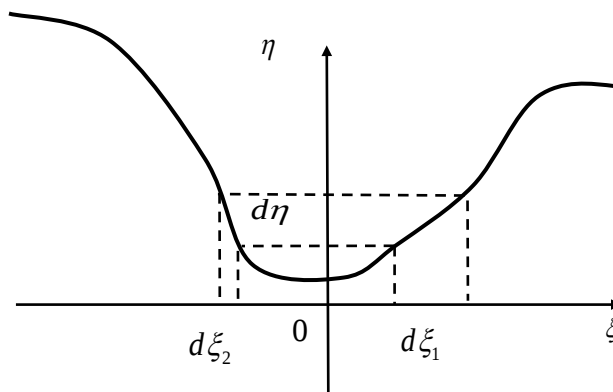


Рис. 3.2. Двухзначное преобразование
одномерной плотности вероятности

В данном случае имеются две несовместимые возможности

$$\left[\xi_1 < \xi \leq \xi_1 + d\xi_1 \right] \text{ и } \left[\xi_2 < \xi \leq \xi_2 + d\xi_2 \right] \quad (3.3)$$

обеспечивающие неравенства

$$\left[\eta_0 < \eta \leq \eta_0 + d\eta \right]. \quad (3.4)$$

Следует отметить, что вероятность попадания СВ η в интервал $d\eta$ есть вероятность объединения двух несовместных событий: попадание СВ ξ в интервал $d\xi_1$ и попадание СВ ξ в интервал $d\xi_2$. Поэтому вероятность выполнения неравенства (3.4) должна равняться сумме вероятностей каждого из неравенств (3.3):

$$W_1(\eta)d\eta = W_1(\xi_1)d\xi_1 + W_1(\xi_2)d\xi_2. \quad (3.5)$$

Выразив ξ через η можно получить:

$$W_1(\eta) = W_{1\xi}(h_1(\eta)) \cdot \left| \frac{dh_1}{d\eta} \right| + W_{1\xi}(h_2(\eta)) \cdot \left| \frac{dh_2}{d\eta} \right|. \quad (3.6)$$

где $h_1(\eta)$ и $h_2(\eta)$ - функции, обратные к $g(\xi)$ на интервалах однозначности.

В качестве примера рассмотрим случайную величину с нормальным законом распределения

$$W_x(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp \left[-x^2 / (2\sigma^2) \right].$$

Пусть случайная величина y , образуется в результате квадратичного функционального преобразования

$$y = g(x) = a \cdot x^2, \quad a > 0.$$

Найдем обратную функцию $x = h(y)$ и модуль ее производной:

$$x = h_{1,2}(y) = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}; \quad \left| \frac{dh_1(y)}{dy} \right| = \left| \frac{dh_2(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{a \cdot y}}.$$

Поскольку обратная функция двузначна, то получим:

$$W_y(y) = 1 / (2\sqrt{a \cdot y}) \cdot [W_x(\sqrt{y/a}) + W_x(-\sqrt{y/a})].$$

После несложных преобразований получим:

$$W(y) = \begin{cases} 1 / (\sigma \sqrt{2\pi \cdot a \cdot y}) \exp \left[-y / (2a \cdot \sigma^2) \right], & \text{при } y \geq 0 \\ 0, & \text{при } y < 0 \end{cases}.$$

График плотности вероятности исходной случайной величины, функции преобразования и полученного распределения показаны на рис. 3.3 .

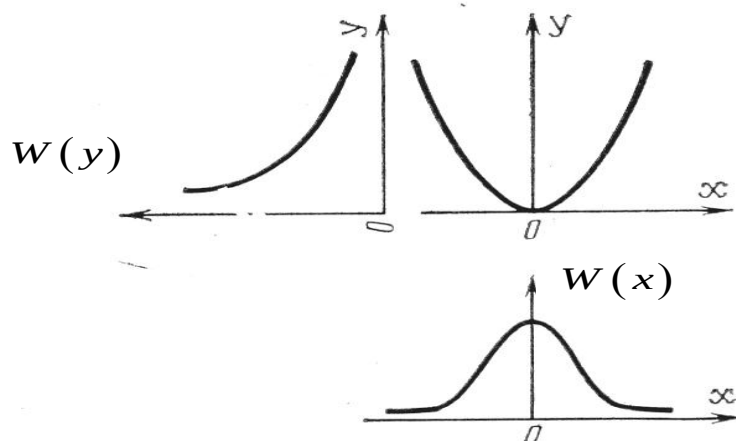


Рис. 3.3. Иллюстрация функционального преобразования случайной величины с нормальным законом распределения

3.2 Преобразование плотности вероятности двумерных случайных величин

Рассмотрим двумерный случай, который иллюстрируется рис. 3.4. Пусть связь СВ (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) задается функциями $\eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2)$ и $\eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2)$.

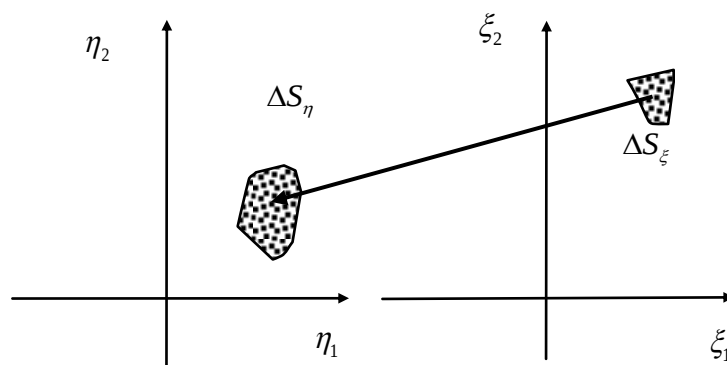


Рис. 3.4. Преобразование плотности вероятности двумерных случайных величин

Разрешение этой системы уравнений определяется выражениями $\xi_1 = h_1(\eta_1, \eta_2)$ и $\xi_2 = h_2(\eta_1, \eta_2)$. Вероятность попадания СВ ξ_1 и ξ_2 в область ΔS_ξ равна вероятности попадания СВ η_1 и η_2 в область ΔS_η . Поэтому с учетом малости областей ΔS_ξ и ΔS_η можно записать как

$$W_{\vec{\eta}}(\eta_1, \eta_2) \cdot |\Delta S_{\eta}| = W_{\vec{\xi}}(\xi_1, \xi_2) \cdot |\Delta S_{\xi}|.$$

Переходя к пределу, получим

$$W_{\vec{\eta}}(\eta_1, \eta_2) = W_{\vec{\xi}}(h_1(\eta_1, \eta_2), h_2(\eta_1, \eta_2)) \cdot |J|, \quad (3.7)$$

где $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h_1}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} \end{vmatrix}$ - определитель Якоби, или якобиан, имеющий смысл

масштабного коэффициента при преобразовании элемента площади из системы координат ξ_1, ξ_2 в систему η_1, η_2 , связанных между собой записанными выше соотношениями.

Например, при переходе от декартовых координат к полярным случайные величины ρ - радиус-вектор и Θ - полярный угол связаны со случайными величинами x и y , декартовы координаты, известными соотношениями $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\text{tg } \Theta = y/x$.

Соответственно, $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$. Вычисляя якобиан, получим

$$J = \begin{vmatrix} \cos \Theta & -\rho \sin \Theta \\ \sin \Theta & \rho \cos \Theta \end{vmatrix} = \rho \text{ и ПВ полярных координат } \eta_1 = \rho, \eta_2 = \Theta \text{ связана с}$$

ПВ декартовых координат $\xi_1 = x, \xi_2 = y$ соотношением

$$W_{\vec{\eta}}(\rho, \Theta) = W_{\vec{\xi}}(\rho \cos \Theta, \rho \sin \Theta) \cdot \rho.$$

Знак модуля в данном случае можно опустить, т.к. $\rho \geq 0$.

Рассмотрим далее конкретные и очень важные примеры. Пусть случайные величины $\eta_1 = g_1(\xi_1) = \xi_1, \eta_2 = \eta = g_2(\xi_1, \xi_2)$, причем обратные функции однозначны и равны $\xi_1 = h_1(\eta_1) = \eta_1, \xi_2 = h(\eta_1, \eta_2)$.

В данном случае якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h_1}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

Поэтому

$$W_{\eta}(\eta_1, \eta_2) = W_{\xi}(\eta_1, h(\eta_1, \eta_2)) \cdot \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right|.$$

Из этой формулы получаем одномерную плотность вероятности для одной случайной величины η :

$$W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\xi_1, h(\xi_1, \eta)) \cdot \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right| d\xi_1. \quad (3.8)$$

Последняя формула позволяет найти плотность вероятности суммы, разности, произведения и частного двух случайных величин:

1. Если $\eta = \xi_2 + \xi_1$, то получим $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\xi_1, \eta - \xi_1) d\xi_1$;
2. Если $\eta = \xi_2 - \xi_1$, то получим $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\xi_1, \eta + \xi_1) d\xi_1$;
3. Если $\eta = \xi_2 \cdot \xi_1$, то получим $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\xi_1, \frac{\eta}{\xi_1}) \cdot \frac{1}{|\xi_1|} d\xi_1$;
4. Если $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$, то получим $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\xi_1, \frac{\eta}{\xi_1}) \cdot |\xi_1| d\xi_1$.

Для независимых случайных величин (ξ_1, ξ_2) имеем

$$W_{\xi}(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1) \cdot Q(\xi_2).$$

Поэтому формула (3.8) приводится к виду

$$W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1) \cdot Q(h(\xi_1, \eta)) \cdot \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right| d\xi_1. \quad (3.9)$$

Плотность вероятности суммы, разности, произведения и частного двух независимых случайных величин приобретает вид:

1. $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1) \cdot Q(\eta - \xi_1) d\xi_1$ при $\eta = \xi_2 + \xi_1$;
2. $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1) \cdot Q(\eta + \xi_1) d\xi_1$ при $\eta = \xi_2 - \xi_1$;
3. $W_{\eta 1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1) \cdot Q\left(\frac{\eta}{\xi_1}\right) \frac{1}{|\xi_1|} d\xi_1$ при $\eta = \xi_2 \cdot \xi_1$;

$$4. W_{\eta_1}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1) \cdot Q(\eta \cdot \xi_1) |\xi_1| d\xi_1 \text{ при } \eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Отыскание плотности вероятности суммы независимых случайных величин по известным плотностям вероятности слагаемых называется композицией законов распределения. Плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин определяется сверткой плотностей вероятности слагаемых:

$$W_{\eta} = W_{\xi_1} * W_{\xi_2}.$$

3.3 Преобразование плотности вероятности векторных случайных величин

Пусть известна n -мерная плотность вероятности $W_{\xi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и нужно найти плотность вероятности $W_{\eta}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ для случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ функционально связанных зависимостями

$$\begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \eta_2 &= g_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &\text{-----} \end{aligned}$$

$$\eta_n = g_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

Если существуют однозначные обратные функции:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \\ \xi_2 &= h_2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \\ &\text{-----} \end{aligned}$$

$$\xi_n = h_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

то интересующая нас плотность вероятности определяется формулой:

$$W_{\eta}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = W_{\xi}(h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), h_2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \dots, h_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)) \cdot |J_n|,$$

где J_n - якобиан преобразования от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ к случайным величинам $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

В тех случаях, когда обратные функции h_i неоднозначны, следует в правой части (3.12) взять сумму по каждой из подобластей:

$$W_{\eta}(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n) = \sum_{i=1}^M W_{\xi}(h_{1i}(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n) \dots h_{ni}(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n)) |J_i|,$$

где M - число решений.

Полученные результаты позволяют сравнительно просто решать задачу определения ПВ случайной величины, являющейся функцией нескольких СВ. К плотностям вероятности, полученных функциональным преобразованием, применимы все свойства плотностей вероятности.

4 АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ЗАКОНОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1 Анализ основных законов дискретных распределений одномерных случайных величин

4.1.1 Распределение Бернулли

Случайная величина ξ , описываемая распределением Бернулли, принимает значения $\xi_1 = 1$ с вероятностью p и $\xi_0 = 0$ с вероятностью $1-p$.

Плотность вероятности данной случайной величины равна

$$W(x) = (1-p) \cdot \delta(x) + p \cdot \delta(x-1).$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = (1-p) \cdot 1(x) + p \cdot 1(x-1).$$

На рис. 4.1 приведены графики ПВ -а) и ФР -б).

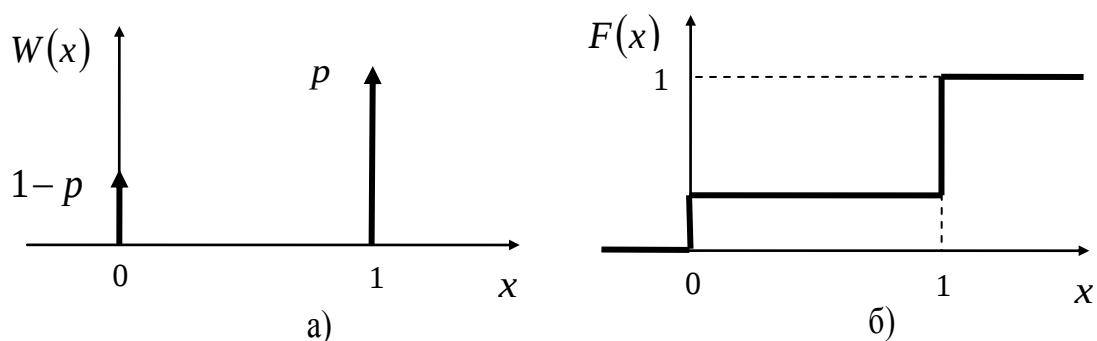


Рис. 4.1. Плотность вероятности и функция распределения Бернулли

Для рассматриваемой СВ все начальные моменты $m_k = p$. Поэтому математическое ожидание и дисперсия равны, соответственно

$$m_1 = p, \quad D\{\xi\} = m_2 - m_1^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Вычислим коэффициент асимметрии γ_1 для распределения Бернулли:

$$\gamma_1 = M_3 / M_2^{3/2}, \text{ где } M_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3, M_2 = D\{\xi\} = m_2 - m_1^2.$$

$$\text{Следовательно } \gamma_1 = \frac{p - 3p^2 + 2p^3}{(p(1-p))^{3/2}} = \frac{(1 - 3p + 2p^2)}{p^{1/2}(1-p)^{3/2}}.$$

Числитель полученного выражения обращается в 0 при $p=1/2$, поэтому, как и следовало ожидать, при $p=1/2$ распределение симметрично относительно среднего значения $m_1 = p$, равного в данном случае $1/2$.

Дисперсия $M_2 = p \cdot (1-p)$ при $p=1/2$ достигает своего максимального значения $M_{2\max} = 1/4$.

4.1.2 Биномиальное распределение

Пусть проведено N испытаний и нас интересует, какова вероятность того, что успех имел место ровно в M раз, где $0 \leq M \leq N$. Предполагается, что вероятность успеха в каждом испытании равна p и не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Рассмотрим элементарные события, соответствующие этой задаче. Если обозначить «успех» как 1, а «неудачу» как 0, то вероятность элементарного события, благоприятствующего наступлению интересующего нас случайного события (ровно M успехов в N испытаниях) равна $p^M (1-p)^{N-M}$. Число таких элементарных событий есть $C_N^M = N! / M!(N-M)!$, поэтому искомая вероятность будет равна

$$P(\xi = M) = C_N^M p^M (1-p)^{N-M}$$

и определяет биномиальное распределение. Функция распределения и плотность вероятности рассматриваемой СВ имеют вид

$$F(x) = \sum_{M=0}^N C_N^M p^M (1-p)^{N-M} \cdot 1(x-M),$$

$$W(x) = \sum_{M=0}^N C_N^M p^M (1-p)^{N-M} \cdot \delta(x-M).$$

Учитывая независимость слагаемых, ХФ приобретает вид

$$\Theta_M(v) = [1 + p \cdot (\exp(jv) - 1)]^N.$$

Графики ПВ рассматриваемой СВ для $N=50$ при $p=0.2$ и $p=0.5$ приведены на рис. 4.2.

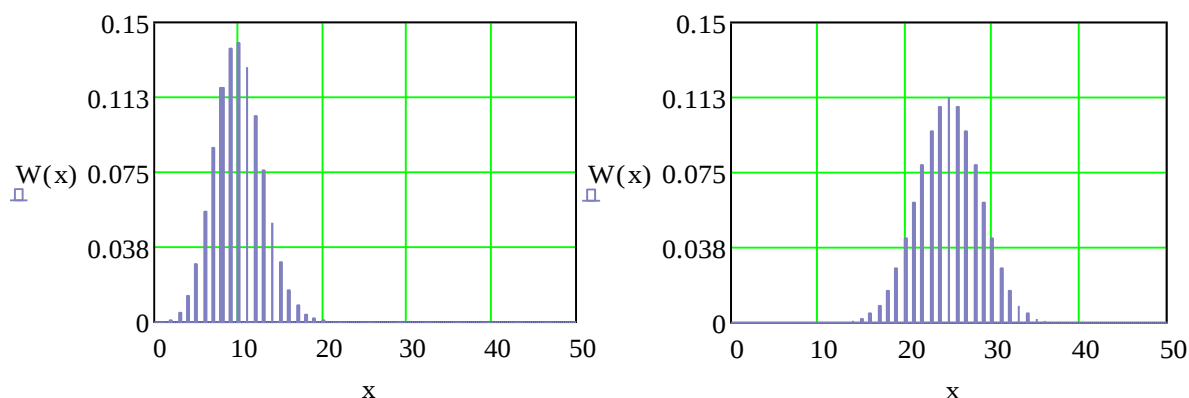


Рис. 4.2. Плотность вероятности биномиального распределения

Пользуясь правилами отыскания математического ожидания и дисперсии суммы (с учетом независимости СВ ξ_i), будем иметь:

$$m_1 = \sum_{i=1}^N M\{\xi_i\} = N \cdot p \quad \text{и} \quad D = \sum_{i=1}^N D\{\xi_i\} = N \cdot p \cdot (1-p).$$

С помощью приведенных соотношений, нетрудно найти асимметрию распределения $\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{Np(1-p)}}$ и коэффициент эксцесса $\gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{Np(1-p)}$.

Наивероятнейшее значение M_H находится в интервале $[p(N+1)-1, p(N+1)]$. Видно, что с ростом N $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow 0$, что свидетельствует о справедливости локальной теоремы Муавра. Причем для величин γ_1 и γ_2 скорость сходимости к нормальному распределению зависит от величины p , определяющей симметрию биномиального распределения. Скорость сходимости будет максимальна при $p=1/2$.

4.1.3 Отрицательное биномиальное распределение

Отрицательное биномиальное распределение также называется **распределением Паскаля**. Это распределение дискретной случайной величины дает вероятность того, что в схеме последовательных независимых испытаний с вероятностью успеха p до получения ровно r успехов пройдет k испытаний. Случайная величина ξ описывается отрицательным биномиальным распределением с параметрами (r, p) , если

$$P\{\xi = k\} = C_{r+k-1}^k \cdot p^r (1-p)^k, \quad k=0,1,2,\dots$$

При $r=1$ данное распределение называют **геометрическим**.

Графики ПВ рассматриваемой СВ для $N=50$ при $p=0.5$ для значений $r=10$ и $r=20$ приведены на рис. 4.3.

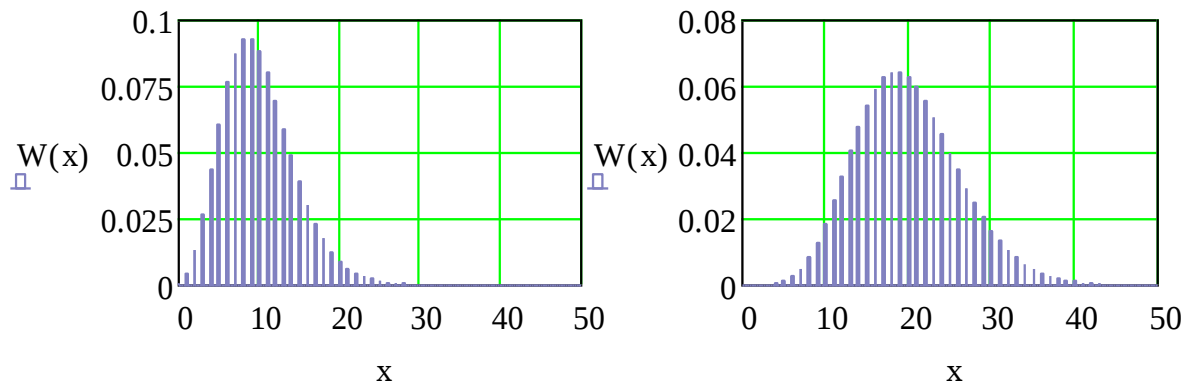


Рис. 4.3. Плотность вероятности распределения Паскаля

Числовые характеристики СВ ξ , подчиненной отрицательному биномиальному распределению, имеют вид:

$$M(\xi) = m_1 = r(1-p)/p; \quad D(\xi) = r(1-p)/p^2; \quad M_3 = r(1-p)(2-p)/p^3;$$

$$M_4 = r \cdot (1-p) \left[3r(1-p) + 6(1-p) + p^2 \right] / p^4. \quad \gamma_1 = M_3 / M_2^{3/2}.$$

4.1.4 Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является предельной формой для биномиального распределения, когда число испытаний $N \rightarrow \infty$, а вероятность успеха в одном испытании p_N зависит от N и $p_N \rightarrow 0$ так, что $\lambda = N \cdot p_N$ является конечным числом. Поскольку $N \cdot p$ представляет собой среднее значение числа успехов для биномиального распределения, то его предельное значение также имеет смысл среднего значения, или математического ожидания для распределения Пуассона равно

$$P(\xi = M) = \lambda^M / M! \cdot \exp(-\lambda).$$

Если биномиальное распределение зависит от двух параметров N и p , то распределение Пуассона определяется одним параметром λ , так как N и p_N связаны приведенным выше соотношением.

Графики ПВ СВ для $N = 50$ при $\lambda = 10$ и $\lambda = 20$ приведены на рис. 4.4.

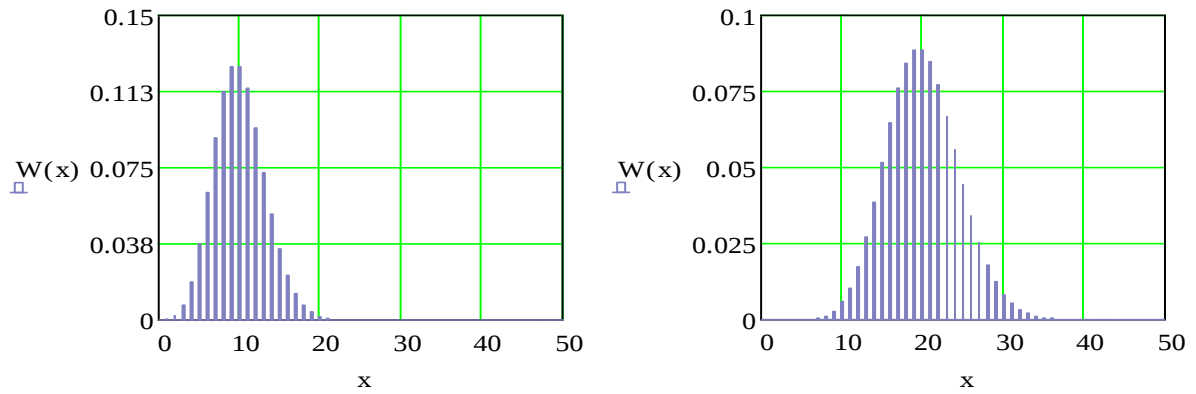


Рис. 4.4. Плотность вероятности распределения Пуассона

Характеристическая функция для распределения Пуассона может быть найдена путем подстановки в ХФ биномиального распределения $p = \lambda/N$ и предельного перехода с учетом того, что $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \alpha/N)^N = \exp(\alpha)$.

В результате получаем

$$\Theta_{\xi}(v) = \exp(\lambda(\exp(jv) - 1)).$$

Математическое ожидание СВ, описываемой распределением Пуассона, равно $\bar{\xi} = \lambda$, а дисперсия СВ равна $D(\xi) = m_2 - \bar{\xi} = \lambda^2$.

Пуассоновская СВ имеет одинаковые математическое ожидание и дисперсию, равные λ . Асимметрия и коэффициент эксцесса распределения Пуассона равны соответственно $\gamma_1 = 1/\sqrt{\lambda}$ и $\gamma = 1/(\lambda + 3)$.

Сопоставляя отношение вероятностей соседних значений

$$\frac{P(\xi = M)}{P(\xi = M - 1)} = \frac{\lambda^M / M! \exp(-\lambda)}{\lambda^{M-1} / (M-1)! \exp(-\lambda)} = \frac{\lambda}{M},$$

приходим к выводу, что при целочисленных значениях параметра λ наиболее вероятными будут значения $\lambda - 1$ и λ .

С ростом λ распределение Пуассона может быть аппроксимировано нормальным.

Далее рассмотрим основные непрерывные распределения случайных величин.

4.2 Анализ основных законов непрерывных распределений одномерных случайных величин

4.2.1 Равномерное распределение

Ранее была рассмотрена СВ, все значения которой в интервале $[a, b]$ равновероятны. ПВ такой величины ξ имеет вид

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения очевидно равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики ПВ и ФР равномерно распределенной СВ в интервале $[-2, 2]$ приведены на рис. 4.5 -а) и -б) соответственно.

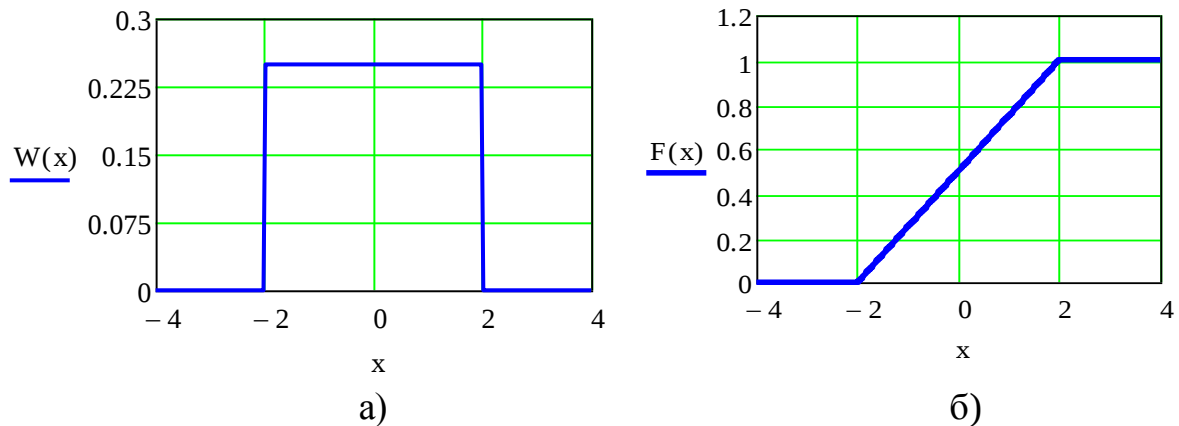


Рис. 4.5. Плотность вероятности и функция распределения равномерного закона

Характеристическая функция равномерного распределения равна

$$\Theta_{\xi}(v) = \int_a^b \frac{e^{jvx}}{b-a} dx = \frac{e^{jvb} - e^{jva}}{jv(b-a)} = \exp\left(jv \frac{a+b}{2}\right) \sin\left(v \frac{b-a}{2}\right) / \left(v \frac{b-a}{2}\right),$$

а для среднего значения и дисперсии справедливы соотношения

$$M\{\xi\} = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D\{\xi\} = \int_a^b \frac{(x - (a+b)/2)^2}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Асимметрия распределения равна 0, коэффициент эксцесса $\gamma = 4,8$.

4.2.2 Нормальное распределение

Общая форма записи ПВ одномерной нормальной СВ имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Функция распределения нормальной СВ может быть выражена через интеграл вероятностей

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

На рис. 4.6 -а) и -б) приведены графики ПВ и ФР нормальной СВ при $a=1$.

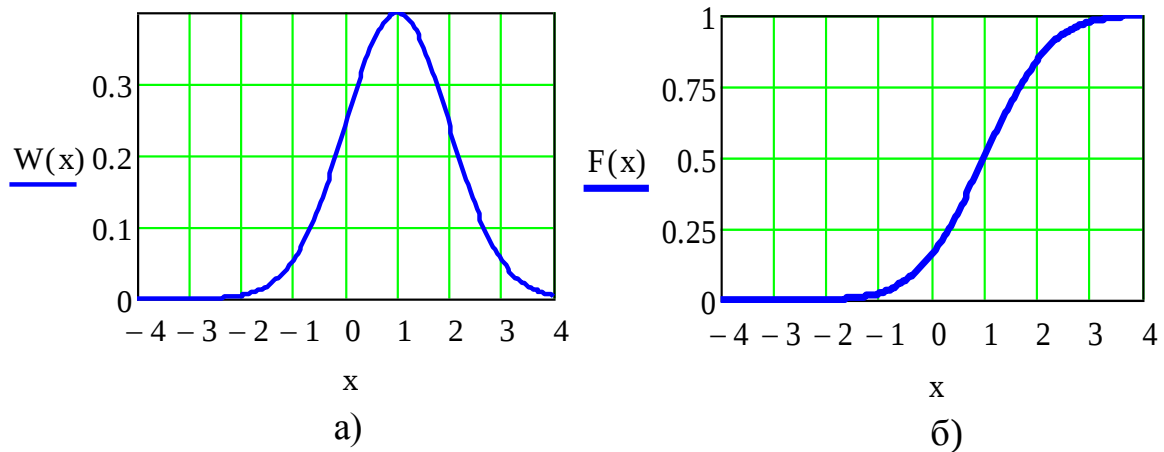


Рис. 4.6. Плотность вероятности и функция распределения нормального закона

В соответствии со свойствами преобразования Фурье характеристическая функция

$$\Theta_{\xi}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) \exp(jvx) dx = \exp\left(jva - \sigma^2 v^2/2\right) \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Математическое ожидание нормальной СВ ξ вычисляется как

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Выполняя замену переменной $t = (x-a)/\sigma$, получим

$$m_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, а второй – единице в соответствии со свойством интеграла вероятности. Таким образом, параметр a имеет смысл математического ожидания нормальной СВ, $m_1 = a$.

Центральные моменты нормальной СВ равны

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k / \sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-(x-a)^2 / (2\sigma^2)\right) dx.$$

Из приведенного соотношения можно получить $M_2 = \sigma^2$, т. е. параметр σ^2 есть дисперсия нормальной СВ. Асимметрия нормального распределения $\gamma_1 = M_3 / M_2^{3/2} = 0$ и коэффициент эксцесса $\gamma = M_4 / M_2^2 - 3 = 0$.

4.3 Анализ двумерного нормального закона распределения

Рассмотрим распределение нормального случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$. Выражение для двумерной ПВ двух нормально распределенных случайных величин выглядит следующим образом:

$$W_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-r^2)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

где $a_1 = M\{\xi_1\}$ и $a_2 = M\{\xi_2\}$ - математические ожидания СВ ξ_1 и ξ_2 , σ_1^2 и σ_2^2 - их дисперсии, а r - коэффициент корреляции.

Можно видеть, что в точке $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$ плотность вероятности максимальна и равна $W(a_1, a_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-r^2)}}$. От этой точки поверхность распределения во всех направлениях монотонно приближается к плоскости (x_1, x_2) .

Типовой вид двумерной поверхности изображен на рис. 4.7 .

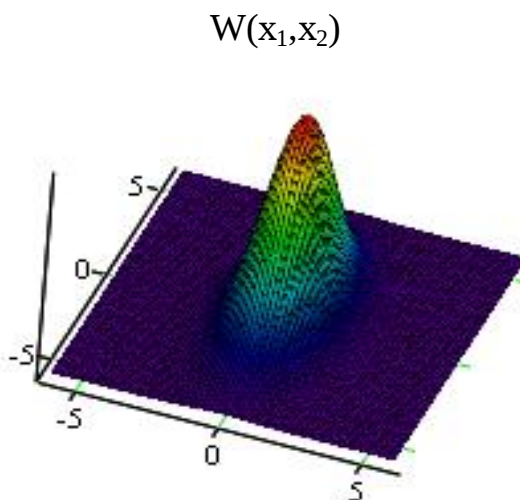


Рис. 4.7. Двумерное нормальное распределение

Если СВ независимы ($r = 0$), то выражение для двумерной ПВ будет иметь вид

$$W_{\xi}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}} \exp \left\{ - \left[\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \right\} = W_{\xi_1}(x_1) W_{\xi_2}(x_2).$$

4.4 Анализ основных законов распределения случайных величин, получаемых функциональным преобразованием

4.4.1 Распределение Симпсона

Положим $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Тогда при двух одинаковых равномерных распределений, характеристическая функция будет иметь вид

$$\Theta_{\eta}(v) = \Theta_{\xi}^2(v) = \exp(jv(a+b)) \left[\frac{\sin(v \cdot (b-a)/2)}{v \cdot (b-a)/2} \right]^2,$$

а плотность вероятности

$$W_{\eta}(x) = \begin{cases} 1/(b-a) - 1/(b-a)^2 \cdot |a+b-x|, & x \in [2a, 2b] \\ 0, & x \notin [2a, 2b] \end{cases}.$$

Полученное распределение называется **треугольным**, или распределением **Симпсона**.

На рис. 4.8 , а) и –б) приведены графики плотности распределения (а) и функции распределения для случайной величины.

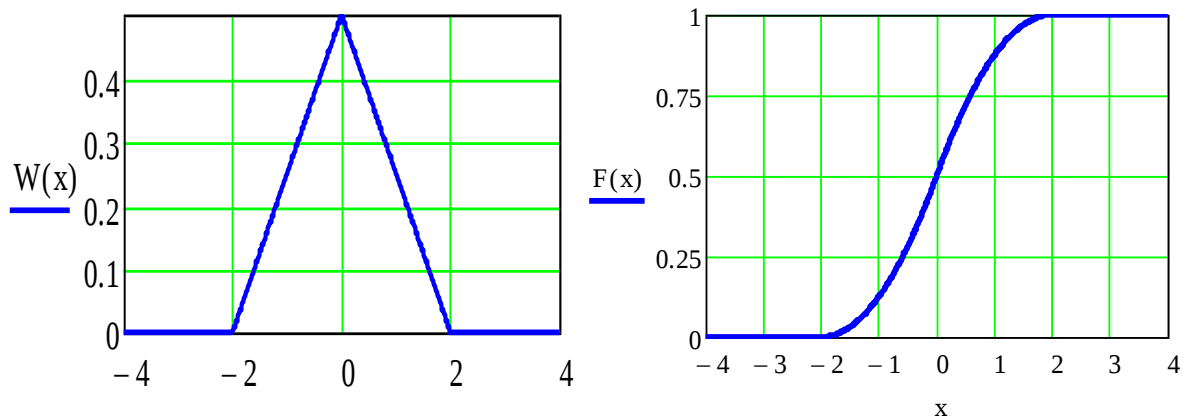


Рис. 4.8. Плотность вероятности и функция распределения Симпсона

Математическое ожидание будет равно сумме математических ожиданий слагаемых, т.е. $M\{\eta\} = M\{\xi_1\} + M\{\xi_2\} = a + b$. Дисперсия в силу независимости слагаемых также равна сумме дисперсий слагаемых $D\{\eta\} = D\{\xi_1\} + D\{\xi_2\} = \frac{(b-a)^2}{6}$. Асимметрия распределения равна 0, а коэффициент эксцесса $\gamma = 2,4$.

С ростом числа слагаемых M распределение суммы будет достаточно быстро стремиться к **нормальному** закону

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi M(b-a)^2/6}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - M(a+b)/2)^2}{M(b-a)^2/6}\right).$$

Нужно, однако, помнить, что в отличие от гауссовской, рассматриваемая СВ принимает значения в конечном интервале $[M\{a\}, M\{b\}]$.

4.4.2 Распределение Лапласа

Плотность вероятности распределения Лапласа, или двойного экспоненциального распределения, имеет вид

$$W_{\xi}(x) = \lambda/2 \cdot \exp(-\lambda|x-a|), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Функция распределения может быть записана как

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/2 \cdot \exp(-\lambda|x-a|), & x \leq a; \\ 1 - 1/2 \cdot \exp(-\lambda|x-a|), & x > a. \end{cases}$$

На рис. 4.9 приведены графики ПВ и ФР распределения Лапласа при $a = 0$ и $\lambda = 0.5$.

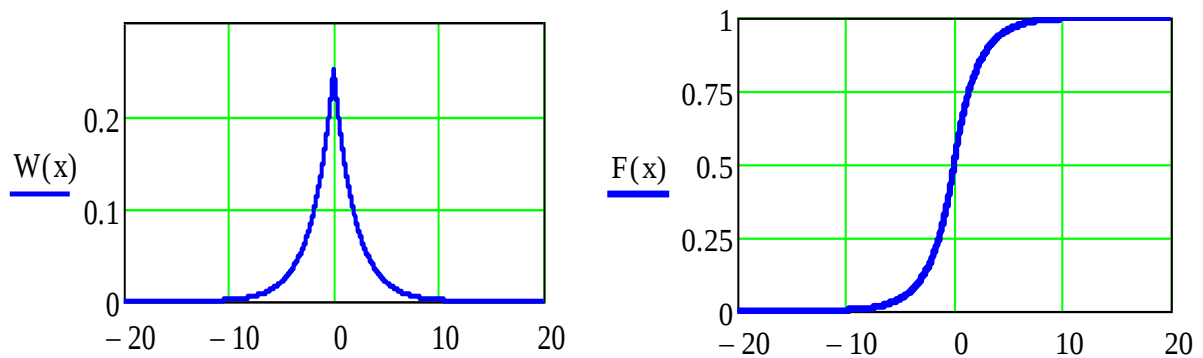


Рис. 4.9. Характеристики распределения Лапласа

Характеристическая функция для распределения Лапласа описывается

выражением

$$\Theta_{\xi}(v) = \frac{\lambda^2 \exp(jva)}{v^2 + \lambda^2}.$$

Откуда можно определить дисперсию $D(\xi) = 2/\lambda^2$, асимметрию $\gamma_1 = 0$ и эксцесс $\gamma_2 = 6$.

4.4.3 Закон арксинуса

Часто приходится рассматривать СВ вида $\xi = \cos \Theta$, где Θ - СВ, распределенная равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$. Пользуясь правилами функционального преобразования СВ, можно показать, что плотность вероятности будет иметь вид

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Функция распределения при этом будет равна

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{\pi} \arcsin x + 0.5, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

что и определяет название распределения.

Вид ПВ и ФР закона арксинуса приведен на рис. 4.10.

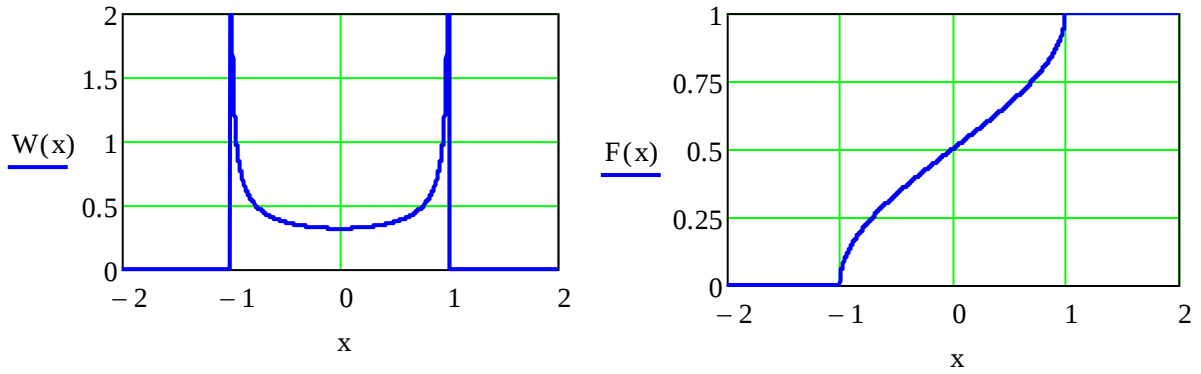


Рис. 4.10. Вид ПВ и ФР закона арксинуса

Характеристическая функция для закона арксинуса равна

$$\Theta_{\xi}(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\exp(jvx)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos vx}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Математическое ожидание равно нулю, а дисперсия

$$D\{\xi\} = D\{\cos \Theta\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \Theta d\Theta = \frac{1}{2}.$$

4.4.4 Распределение Хи-квадрат

Данному распределению подчиняется СВ $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, являющаяся суммой квадратов независимых СВ, описываемых стандартным нормальным распределением, имеющим нулевое среднее значение и единичную дисперсию:

$$W_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ - гамма-функция, являющаяся обобщением факториала на произвольные значения α .

Функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \gamma(n/2, x/2) / \Gamma(n/2),$$

а характеристическая функция:

$$\Theta(jv) = (1 - 2jv)^{-n/2}.$$

На рис. 4.11 приведены графики ПВ и ФР распределения ХИ-квадрат при $n = 20$.

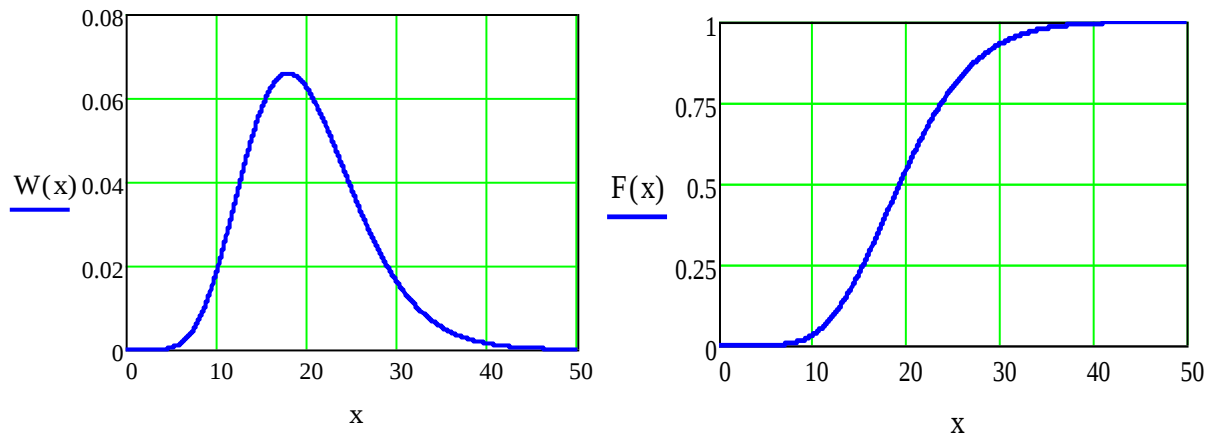


Рис. 4.11. Вид ПВ и ФР закона ХИ-квадрат

Если $\alpha = n$, n - целое число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$. При любом α гамма-функция равна $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \cdot \Gamma(\alpha-1)$ и $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Для среднего значения и дисперсии справедливы выражения

$$m_1 = n \quad \text{и} \quad M_2 = 2n.$$

4.4.5 Распределение Релея - Райса

Рассмотрим задачу о распределении модуля и аргумента нормального случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$. Компоненты вектора ξ_1 и ξ_2 независимы, имеют одинаковую дисперсию σ^2 и математическое ожидание a_1 и a_2 соответственно. Плотность вероятности имеет вид

$$W_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Модуль вектора равен $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, а для аргумента справедливо выражение: $\text{tg } \theta = \xi_2 / \xi_1$.

Решая задачу перехода от СВ ξ_1 и ξ_2 к ρ и θ с учетом полученных выше результатов ($|J| = \rho$), будем иметь

$$W(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{(\rho \cos \theta - a_1)^2 + (\rho \sin \theta - a_2)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2 + \rho^2 - 2A\rho \cos(\theta - \varphi)}{2\sigma^2}\right),$$

где $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ - модуль вектора, компонентами которого являются математические ожидания СВ ξ_1 и ξ_2 ; $\operatorname{tg} \varphi = a_2/a_1$ - аргумент этого вектора.

Для определения ПВ ρ необходимо проинтегрировать $W(\rho, \theta)$ по всем значениям θ

$$W(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2 + \rho^2 - 2A\rho \cos(\theta - \varphi)}{2\sigma^2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{A\rho}{\sigma^2} \cos(\theta - \varphi)\right) d\theta.$$

Отметим, что подынтегральное выражение зависит только от $\cos(\theta - \varphi)$ и интегрирование ведется по периоду 2π .

С учетом интегрального представления модифицированной функции Бесселя нулевого порядка $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$, получим описание плотности вероятности модуля нормального случайного вектора

$$W(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{A\rho}{\sigma^2}\right), & \rho > 0 \\ 0, & \rho \leq 0. \end{cases}$$

Это распределение называется Рэлея - Райса.

При $a_1 = a_2 = 0$ и, следовательно, $A = 0$, $I_0(0) = 1$ распределение Рэлея-Райса переходит в распределение Рэлея

$$W(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right), & \rho > 0 \\ 0, & \rho \leq 0. \end{cases}$$

После замены переменной $t/\sigma = x$ и введения параметра $h = A/\sigma$ функция распределения

$$F(\rho) = \int_0^{\rho} \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{At}{\sigma^2}\right) dt$$

выражается через табулированную Q - функцию Маркума

$$Q(u, v) = \int_0^u t \cdot \exp\left(-\frac{t^2 + v^2}{2}\right) \cdot I_0(vt) dt$$

следующим образом

$$F(\rho) = Q\left(\rho/\sigma, h\right).$$

Плотность вероятности Рэлея - Райса при переходе к безразмерной переменной $x = \rho/\sigma$ примет вид

$$W(x) = \begin{cases} x \cdot \exp\left(-\left(x^2 + h^2\right)/2\right) I_0(hx), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

При $h \gg 1$, воспользовавшись асимптотическим представлением модифицированной функции Бесселя $I_0(t) \approx \exp(t)/\sqrt{2\pi t}$, после несложных преобразований, будем иметь

$$W(x) = \begin{cases} \sqrt{x/h} \cdot 1/\sqrt{2\pi} \exp\left(-(x-h)^2/2\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $h \gg 1$ распределение Рэлея - Райса с точностью до поправочного множителя x/h , который при $h \gg 1$ мало отличается от единицы в той области, где располагается кривая нормального распределения $1/\sqrt{2\pi} \exp\left(-(x-h)^2/2\right)$, может быть аппроксимировано указанным выше **нормальным** распределением.

При возвращении к переменной ρ гауссовское распределение будет иметь среднее значение A и дисперсию σ^2 .

На рис. 4.12 приведены графики ПВ распределения Рэлея - Райса при $\sigma = 0.1$ для значений $h = 1, 3, 10$.

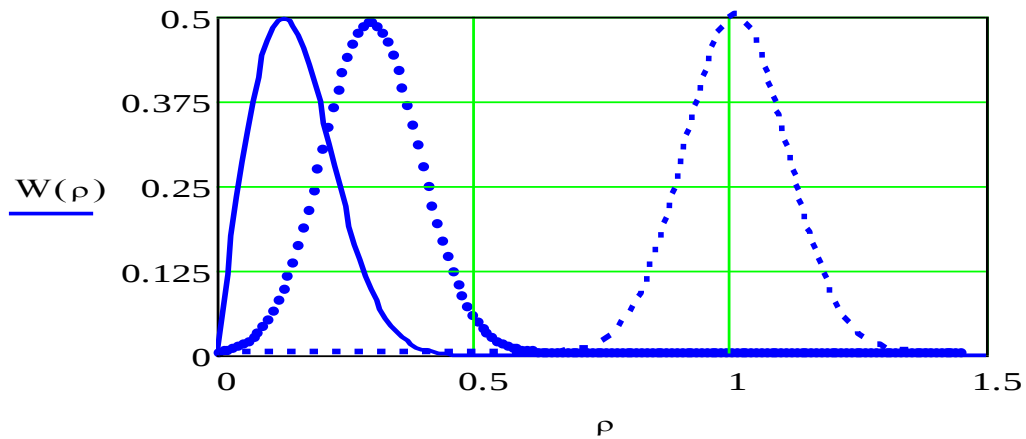


Рис. 4.12. Вид плотности вероятности распределения Рэлея-Райса

Моменты распределения Рэлея - Райса имеют вид:

$$m_2 = 2\sigma^2 + A^2, \quad m_4 = 8\sigma^4 + 8\sigma^2 A^2 + A^4,$$

$$m_6 = 48\sigma^6 + 72\sigma^4 A^2 + 18\sigma^2 A^4 + A^6, \dots$$

При $h = 0$ ($A = 0$, $a = b = 0$) распределение Рэлея - Райса переходит в распределение Рэлея и моменты приобретают соответствующие значения

$$m_1 = \sigma\sqrt{\pi/2}, \quad m_2 = 2\sigma^2, \quad m_3 = 3\sigma^3\sqrt{\pi/2}, \quad m_4 = 8\sigma^4 \quad \text{и т.д.}$$

Пользуясь связью между центральными и начальными моментами, можно определить дисперсию для распределения Рэлея - Райса

$$D\{\xi\} = \sigma^2 \left\{ 2 + h^2 - \pi/2 \cdot \exp\left(-h^2/2\right) \left[\left(1 + h^2/2\right) \cdot I_0\left(h^2/4\right) + h^2/2 \cdot I_1\left(h^2/4\right) \right] \right\}$$

и для распределения Рэлея

$$D\{\xi\} = (2 - \pi/2)\sigma^2.$$

5 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

5.1 Понятие и определение случайных процессов

Случайный процесс $\xi(t)$ описывается функцией двух аргументов $\varphi(t, \omega)$, где $\omega \in \Omega$, Ω - множество элементарных событий; $t \in T$, T - область определения функций $\varphi(t, \omega)$. Как и для СВ, область значений $\varphi(t, \omega)$ может быть счетным (дискретным) и непрерывным (континуальным) множеством.

При фиксированном значении t функцией двух аргументов $\varphi(t, \omega)$ является случайная величина, а для каждого фиксированного ω (заданного элементарного события) $\varphi(t, \omega)$ зависит только от t и определяет **реализацию** случайного процесса (СП) (выборочную функцию).

На рис. 5.1 приведено семейство реализаций случайного процесса.

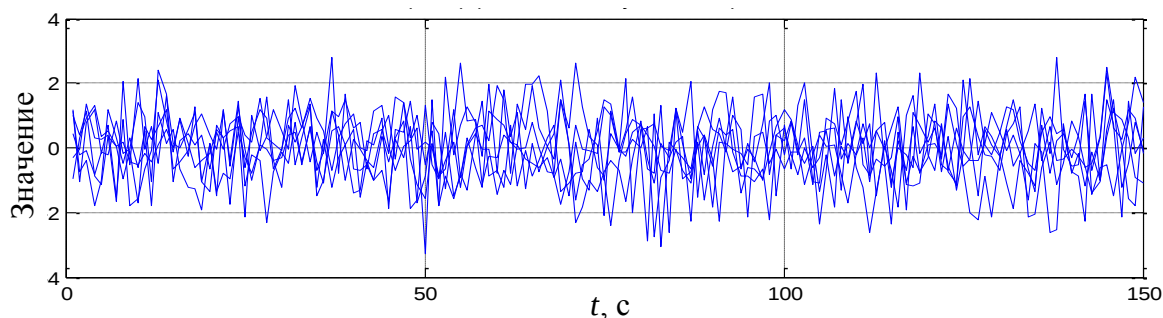


Рис. 5.1. Семейство реализаций случайного процесса

Часто приходится рассматривать СП, реализации которых в зависимости от t представляют неслучайные функции времени, при этом случайный характер определяется наличием случайных параметров. Самым характерным примером такого процесса является гармоническое колебание $\xi(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, где A, ω, θ - все или часть из них являются случайными величинами. На рис. 5.2 приведены реализации такого процесса для случая, когда A и ω – детерминированные величины, а θ – СВ с плотностью вероятности (ПВ) вида $W(\theta) = 1/2\pi$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

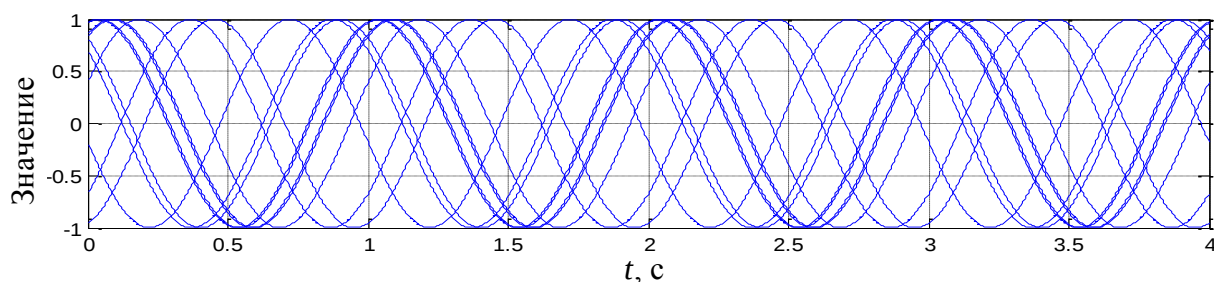


Рис. 5.2. Семейство реализаций случайного процесса

Значения такого СП в произвольный момент времени t_0 есть СВ вида $\xi = A \cos(\varphi_0 + \theta)$, где A и $\varphi_0 = \omega t_0$ - детерминированные величины, а θ распределена равномерно в интервале $[0, 2\pi]$.

В зависимости от характера множеств T и Ω случайные процессы можно разделить на четыре класса:

1. Процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;
2. Процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем;
3. Процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем;
4. Процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

5.2 Статистическое описание случайных процессов

Говорят, что имеется полное статистическое описание СП $\xi(t)$, если для любых моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ можно задать *многомерную функцию распределения*

$$F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P \left\{ \bigcap_{i=1}^n \left\{ \xi(t_i) < x_i \right\} \right\}.$$

Столь же полное вероятностное описание даст *многомерная плотность вероятности*

$$W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{\xi} \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n} \right)}{\partial x_1 \dots \partial x_n},$$

или многомерная характеристическая функция

$$\Theta_{\xi}(v_1 \dots v_n; t_1 \dots t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x_1 \dots x_n; t_1 \dots t_n) \cdot \exp \left(j \sum_{k=1}^n v_k x_k \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Для дискретных случайных последовательностей (цифровых сигналов), когда множество возможных значений дискретного сигнала конечно или счетно, вероятностное описание дается распределением вида

$$P_{\xi}(k_1, k_2 \dots k_n; t_1, t_2 \dots t_n) = \text{Вер} \left\{ \xi(t_1) = x_{k_1}, \xi(t_2) = x_{k_2} \dots \xi(t_n) = x_{k_n} \right\},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - возможные значения процесса, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ - целые числа.

Для описания случайных процессов могут быть использованы *моментные функции*, зависящие от моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$.

Начальные и центральные моменты определяются, соответственно, выражениями:

$$\begin{aligned} m_{k_1 \dots k_n}(t_1 \dots t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \cdot W_{\xi}(x_1 \dots x_n; t_1 \dots t_n) dx_1 \dots dx_n, \\ M_{k_1 \dots k_n}(t_1 \dots t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - M\{\xi_1\})^{k_1} \dots (x_n - M\{\xi_n\})^{k_n} \cdot W_{\xi}(x_1 \dots x_n; t_1 \dots t_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Наиболее часто для описания СП используют математическое ожидание (среднее значение) случайного процесса $\xi(t)$

$$m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W_{\xi}(x; t) dx$$

и корреляционную функцию (КФ)

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1(t_1)) \cdot (x_2 - m_1(t_2)) \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Корреляционная функция определяет зависимость ковариации случайных величин $\xi_1 = \xi(t_1)$ и $\xi_2 = \xi(t_2)$ от моментов времени t_1 и t_2 , в которых берутся отсчеты СП $\xi(t)$.

Как и для случайных величин, можно ввести коэффициент корреляции

$$r(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{M_2(t_1) \cdot M_2(t_2)}}, \quad |r(t_1, t_2)| \leq 1,$$

где $M_2(t_1)$ и $M_2(t_2)$ - значения дисперсии отсчетов случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 .

Если имеется два случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$, то можно ввести в рассмотрение взаимную корреляционную функцию:

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - M\{\xi(t_1)\}) \cdot (y_2 - M\{\eta(t_2)\}) \cdot W_{\xi\eta}(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2.$$

Эта функция также положительно определена, но не симметрична, так как

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\eta\xi}(t_2, t_1).$$

Случайные процессы по их вероятностным характеристикам классифицируются на:

1. независимые СП;
2. стационарные СП;
3. эргодичные СП.

Рассмотрим их определения.

5.2.1 Независимые СП

Наиболее простым с точки зрения вероятностного описания будет СП, у которого любая совокупность значений (отсчетов), взятых в произвольные моменты времени, принадлежащие множеству T , *независима*, т. е. многомерные функции распределения, плотности вероятности и характеристические функции определяются выражениями

$$F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n F_{\xi i}(x_i; t_i),$$

$$W_{\xi}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n W_{\xi i}(x_i; t_i).$$

$$\Theta_{\xi}(v_1, \dots, v_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \Theta_{\xi i}(v_i; t_i).$$

Пользуясь представлением многомерной ПВ через условные ПВ, можно по аналогии записать

$$W_{\xi}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = W_{\xi}(x_1; t_1) \prod_{i=2}^n W_{\xi}(x_i; t_i / x_{i-1}; t_{i-1}).$$

5.2.2 Стационарные СП

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным *в узком смысле* (строго стационарным), если его ФР, ПВ или ХФ при любых значениях $t_1, \dots, t_n \in T$ инвариантны к сдвигу моментов $t_1, \dots, t_n$ на величину τ . Так для плотности вероятности справедливо соотношение:

$$W_{\xi}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = W_{\xi}(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Аналогичные выражения можно записать для ФР и ХФ.

СП называется стационарным *в широком смысле* (по Хинчину), если выполняются более скромные требования:

1. Среднее значение процесса не зависит от времени, т. е. $m_1(t) = \text{const}$;

2. КФ $K_{\xi}(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности $t_1 - t_2 = \tau$, т. е.

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1 - t_2) = K_{\xi}(\tau).$$

Из второго условия следует, что дисперсия стационарного процесса

$$D_{\xi}(t) = K_{\xi}(t, t) = K_{\xi}(0) = \text{const}.$$

В силу симметрии $K_{\xi}(t_1, t_2)$ корреляционная функция стационарного СП является четной функцией: $K_{\xi}(-\tau) = K_{\xi}(\tau)$.

5.2.5 Эргодичные СП

Для стационарных процессов можно ввести операцию *временного усреднения* на основе одной реализации $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$. Для обозначения операции временного усреднения часто используют волнистую черту над усредняемым выражением:

$$\tilde{f}[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t)] dt.$$

Возникает вопрос, как соотносятся между собой характеристики процесса, полученные путем статистического усреднения (с помощью ПВ), и средние по времени.

В этой связи дадим следующее определение: стационарный в узком смысле процесс называется эргодическим, если любые его вероятностные характеристики, найденные на основе статистического усреднения, по множеству реализаций, с вероятностью сколь угодно близкой к единице совпадают с соответствующими средними по времени.

Иными словами, если известна одна единственная реализация процесса для $t \in (-\infty, \infty)$, то путем сдвигов по времени может быть получен бесконечный статистический ансамбль реализаций. Следовательно, по одной реализации можно узнать возможные вероятностные характеристики.

Часто понятие эргодичности связывают с конкретной вероятностной характеристикой, например, со средним значением, называя эргодическим такой СП, для которого $\tilde{x} = m_1$. При таком определении СП может быть эргодическим, но нестационарным.

Эргодичность процесса можно определить на основе условной ПВ

$$W_{\xi}(x_2; t_2 / x_1; t_1) = \frac{W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{W_{\xi}(x_1; t_1)}.$$

Для стационарного в узком смысле процесса двумерная плотность вероятности $W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ зависит только от разности $t_1 - t_2 = \tau$, поэтому условная ПВ для стационарного процесса будет равна

$$W_{\xi}(x_2 / x_1; \tau) = \frac{W_{\xi}(x_1, x_2; \tau)}{W_{\xi}(x_1)}.$$

Таким образом, если $\lim_{\tau \rightarrow \infty} W_{\xi}(x_2 / x_1; \tau) = W_{\xi}(x_2)$ и не зависит от x_1 , то процесс $\xi(t)$ называется эргодическим. Иными словами, требуется, чтобы отсчеты стационарного процесса в любые моменты времени t_1 и t_2 при стремлении $t_1 - t_2 \rightarrow \infty$ становились бы *независимыми*.

5.3 Непрерывность, дифференцируемость и интегрирование случайных процессов

Рассмотрим, как определяются непрерывность, дифференцируемость и существование интеграла для случайных процессов.

5.3.1 Определение непрерывности

Случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в точке t в среднеквадратическом смысле, если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M |\xi(t + \Delta t) - \xi(t)|^2 = 0,$$

где Δt - бесконечно малый интервал времени.

Если это условие выполняется для всех $t \in [a, b]$, то процесс $\xi(t)$ называют непрерывным на этом интервале.

Необходимым и достаточным условием непрерывности процесса в точке t является непрерывность его корреляционной функции $K_\xi(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$. Для стационарного процесса это означает непрерывность корреляционной функции $K_\xi(\tau)$ в нуле.

5.3.2 Дифференцирование случайных процессов

Случайный процесс $\xi(t)$ дифференцируем в момент времени t в среднеквадратическом смысле и имеет производную $\xi'(t)$, если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left| \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right|^2 = 0.$$

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости случайного процесса $\xi(t)$ будет существование и непрерывность корреляционной функции процесса $\xi'(t)$

$$K_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Для стационарного процесса $\xi(t)$ корреляционная функция производной процесса $\xi'(t)$ определяется выражением

$$K_{\xi'}(\tau) = -\frac{\partial^2 K_\xi(\tau)}{\partial \tau^2}.$$

Рассмотрим вопрос о *взаимной корреляционной функции процесса $\xi(t)$ и его производной $\xi'(t)$* .

Считая процесс дифференцируемым в среднеквадратическом смысле, можно показать, что

$$K_{\xi\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Для стационарного процесса имеем

$$K_{\xi\xi'}(\tau) = -K_{\xi'\xi}(\tau) = -\frac{\partial K_{\xi}(\tau)}{\partial \tau}.$$

Так как корреляционная функция стационарного СП является четной, то $K_{\xi\xi'}(\tau)$ - нечетная функция, т. е. $K_{\xi\xi'}(-\tau) = -K_{\xi\xi'}(\tau)$ и $K_{\xi\xi'}(0) = 0$.

Таким образом, значения дифференцируемого СП в совпадающие моменты времени ($t_1 = t_2 = t, \tau = 0$) *некоррелированы*.

5.3.3 Интегрирование случайных процессов

Изучим сначала *линейный функционал* от СП $\xi(t)$ вида $\eta = \int_0^T s(t) \cdot \xi(t) dt$,

где $s(t)$ - детерминированная функция. Записанный интеграл есть случайная величина η . Среднее значение и дисперсия этой случайной величины равны соответственно

$$M(\eta) = \int_0^T s(t) \cdot M(\xi(t)) dt,$$

$$D(\eta) = \int_0^T \int_0^T s(t_1) s(t_2) \cdot K_{\xi}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Для стационарного случайного процесса $M\{\xi(t)\} = \text{const}$ и, следовательно, можно записать:

$$M(\eta) = M\{\xi(t)\} \int_0^T s(t) dt;$$

$$D(\eta) = \int_0^T \int_0^T s(t_1) s(t_2) K_{\xi}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2.$$

Для “белого” шума, у которого среднее значение

$$M\{\xi(t)\} = 0,$$

а корреляционная функция (КФ) определяется соотношением

$$K_{\xi}(t_1 - t_2) = N_0/2 \cdot \delta(t_1 - t_2),$$

Анализируемая случайная величина $\eta = \int_0^T s(t) \cdot \xi(t) dt$ будет иметь среднее

значение $M(\eta) = 0$

и дисперсию $D(\eta) = N_0/2 \int_0^T s^2(t) dt.$

5.4 Преобразование стационарных случайных процессов в линейных системах

Рассмотрим реакцию линейной системы с импульсной характеристикой $h(t, \tau)$ на стационарный случайный процесс $\xi(t)$, т. е.

$$\eta(t) = \int_{-T}^t h(t, \tau) \cdot \xi(\tau) d\tau.$$

Среднее значение и корреляционная функция данного СП будут равны

$$M\{\eta(t)\} = M\{\xi(t)\} \int_{-T}^t h(t, \tau) d\tau,$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_{-T}^{t_1} \int_{-T}^{t_2} h(t_1, \tau_1) \cdot h(t_2, \tau_2) \cdot K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Как видно из приведенных выражений, процесс $\eta(t)$ нестационарный, так как среднее значение зависит от времени.

Если *линейная система стационарна*, то $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ и в установившемся режиме ($T = \infty$) процесс $\eta(t)$ будет стационарным в широком смысле.

Для “белого” шума $M\{\eta(t)\} = 0$, а КФ определяется выражением

$$\begin{aligned} K_{\eta}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) N_0/2 \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= N_0/2 \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau_2 = N_0/2 \int_0^{\infty} h(x) h(x + t_1 - t_2) dx = \\ &= N_0/2 \int_0^{\infty} h(x) \cdot h(x + \tau) dx. \end{aligned}$$

Дисперсия процесса $\eta(t)$ будет равна в этом случае

$$D\{\eta(t)\} = D\{\eta(0)\} = N_0/2 \int_0^{\infty} h^2(t) dt.$$

Для процесса $\eta(t) = \int_{-T}^t \xi(t) dt$, $t > -T$ среднее значение и дисперсия будут равны соответственно

$$M\{\eta(t)\} = \int_{-T}^t M\{\xi(t)\} dt; \quad D\{\eta(t)\} = \int_{-T}^t \int_{-T}^t K_{\xi}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2.$$

Для “белого” шума среднее значение равно $M\{\eta(t)\} = 0$, а дисперсия $D\{\eta(t)\} = N_0/2(t + T)$.

В установившемся режиме для стационарной линейной системы при отыскании корреляционной функции на выходе можно воспользоваться частотным методом, заменив корреляционную функцию $K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2)$ ее представлением через спектральную плотность:

$$K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) \exp(j\omega(\tau_1 - \tau_2)) d\omega.$$

В результате получим,

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) \exp(j\omega(\tau_1 - \tau_2)) d\omega d\tau_1 d\tau_2$$

Меняя порядок интегрирования по τ_1 , τ_2 и ω и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt = K(j\omega) \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} h(t) \exp(j\omega t) dt = K^*(j\omega),$$

получим окончательно:

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) |K(j\omega)|^2 \exp(j\omega(t_1 - t_2)) d\omega,$$

где $K(j\omega)$ - коэффициент передачи линейной системы.

Откуда видно, что корреляционная функция $K_{\eta}(t_1, t_2)$ данного СП $\eta(t)$ действительно зависит от разности $t_1 - t_2$.

Спектральная плотность процесса $\eta(t)$ равна:

$$S_{\eta}(\omega) = S_{\xi}(\omega) |K(j\omega)|^2.$$

6 КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для случайных процессов корреляционная функция $K_{\xi}(t_1, t_2)$ показывает, как меняется корреляционная связь между отсчетами СП, расположенными в моменты времени t_1 и t_2 . Если эта связь быстро изменяется, то соответственно быстро будет меняться и КФ. Реализации такого процесса будут быстро меняющимися функциями времени. Для иллюстрации на рис. 6.1 приведены реализации (слева) и КФ (справа) для двух стационарных СП. Дисперсии процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ предполагаются одинаковыми.

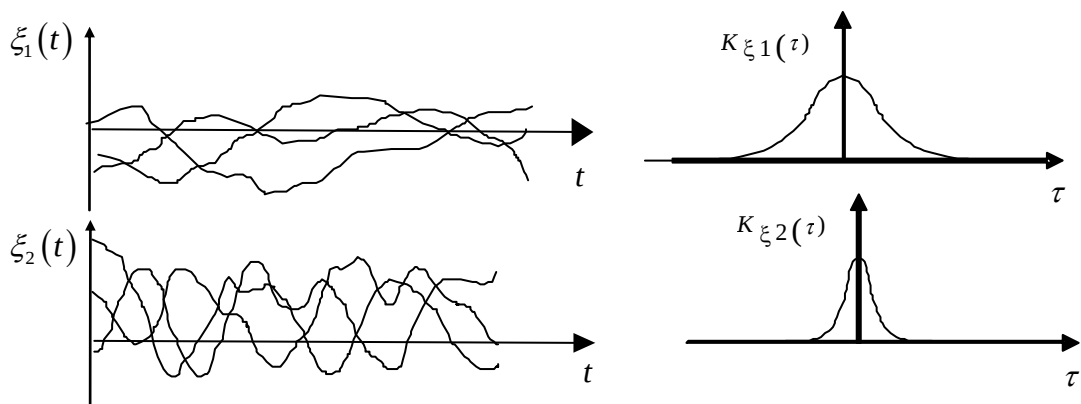


Рис. 6.1. Реализации случайного процесса
и их корреляционные функции

Для стационарных СП математическое ожидание $M\{\xi(t)\}$ не зависит от времени, а корреляционная функция $K_{\xi}(\tau)$ зависит только от разности $\tau = t_1 - t_2$. Корреляционная функция стационарного СП является чётной функцией, т. е. $K_{\xi}(-\tau) = K_{\xi}(\tau)$.

Для стационарного СП в качестве характеристики в частотной области используется преобразование Фурье от КФ

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau,$$

называемое спектральной плотностью СП.

Спектральную плотность СП $S(f)$ называют также спектральной плотностью мощности (СПМ) или энергетическим спектром процесса $\xi(t)$.

Корреляционная функция выражается через спектральную плотность мощности с помощью обратного преобразования Фурье:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f \tau) df,$$

Приведенные формулы определяют содержание теоремы ВинераХинчина, утверждающей, что КФ и спектральная плотность связаны друг с другом преобразованием Фурье.

Учитывая, что $K(0) = D[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$, можно утверждать, что

спектральная плотность $S(f)$ определяет в общем случае распределение дисперсии СП по частоте.

Остановимся на свойствах КФ и спектральной плотности стационарных СП.

6.1 Свойства корреляционных функций и спектральных плотностей

Прежде всего, отметим, что спектральная плотность $S(f)$, как преобразование Фурье четной функции $K(\tau)$, является вещественной четной функцией $S(f) \geq 0$. Это означает, что КФ должна иметь неотрицательное преобразование Фурье. Также справедливо неравенство

$$K(0) = D[\xi(t)] = \sigma^2 \geq K(\tau).$$

Напомним, что так как $S(f) \geq 0$, то $|S(f)| = S(f)$. Знак равенства в полученном соотношении $|K(\tau)| \leq K(0)$ достигается для периодических СП. Для непериодических СП $K(\tau)$ с ростом τ стремится к нулю аperiodически или совершая затухающие колебания.

Числовой характеристикой спектральной плотности $S(f)$ является эффективная ширина спектра СП $\Delta f_{\text{э}}$. Для СП, у которых $S(f)$ группируется около нулевой частоты, т. е. видеопроцессов (см. рис. 6.2, а) эффективная ширина спектра СП определяемая как

$$\Delta f_{\text{э}} = \frac{2}{S(0)} \int_0^{\infty} S(f) df.$$

Если $S(f)$ группируется около частот $\pm f_0$, где

$$f_0 = \frac{\int_0^{\infty} f \cdot S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df} - \text{средняя или центральная частота (см. рис. 6.2, б),}$$

то эффективная ширина спектра СП радиопроцессов определяется выражением

$$\Delta f_{\text{э}} = \frac{1}{S(f_0)} \int_0^{\infty} S(f) df.$$

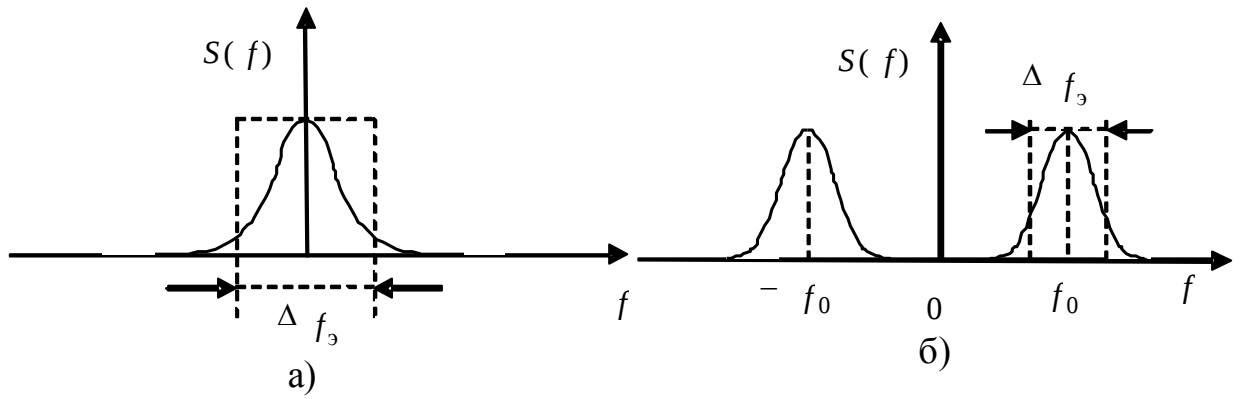


Рис. 6.2. Спектральная плотность случайного процесса

Зависимость корреляционной функции $K(\tau)$ от τ показывает, как меняется статистическая, точнее, корреляционная связь между значениями СП, разделенными интервалом протяженностью τ . Интервал, для которого эта связь становится пренебрежимо малой, называют временем корреляции СП и обозначают как τ_K . Количественное определение τ_K может быть различным. Более общим будет представление τ_K в виде

$$\tau_K = \frac{1}{K(0)} \int_0^{\infty} |K(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |r(\tau)| d\tau.$$

Для СП имеет место *соотношение неопределенности*, заключающееся в том, что произведение ширины спектра и времени корреляции равно константе, величина которой зависит от определения Δf и $\tau_{кор}$. Так, для процесса с неотрицательной АКФ

$$\Delta f_{\text{э}} \cdot \tau_K = \frac{2 \int_0^{\infty} S(f) df}{S(0)} \cdot \frac{\int_0^{\infty} K(\tau) d\tau}{K(0)} = \frac{1}{2},$$

поскольку $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau$ и $K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = 2 \int_0^{\infty} S(f) df$.

Для описания связи двух СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$ используют *взаимную корреляционную функцию*. Отметим, что в отличие от автокорреляционных функций $K_{\xi}(\tau)$ и $K_{\eta}(\tau)$ взаимные корреляционные функции $K_{\xi\eta}(\tau)$ и $K_{\eta\xi}(\tau)$ четностью не обладают. Можно показать, что

$$|K_{\xi\eta}(\tau)| \leq \sqrt{K_{\xi}(0)K_{\eta}(0)}.$$

По аналогии определяется взаимный коэффициент корреляции

$$r_{\xi\eta}(\tau) = \frac{K_{\xi\eta}(\tau)}{\sqrt{K_{\xi}(0)K_{\eta}(0)}}.$$

Преобразование Фурье взаимной корреляционной функции $K_{\xi\eta}(\tau)$ определяет взаимный энергетический спектр

$$S_{\xi\eta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi\eta}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

Соответственно обратное преобразование определяет взаимную корреляцию двух случайных процессов

$$K_{\xi\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi\eta}(f) \exp(j2\pi f\tau) df.$$

Отметим, что в отличие от вещественных и неотрицательных спектральных плотностей (энергетических спектров) $S_{\xi}(f)$ или $S_{\eta}(f)$ взаимный энергетический спектр $S_{\xi\eta}(f)$ является комплексной функцией, вещественная часть которой чётна, а мнимая нечётна. Поскольку $K_{\xi\eta}(\tau) = K_{\eta\xi}(-\tau)$, то $S_{\xi\eta}(f)$ и $S_{\eta\xi}(f)$ являются комплексно-сопряжёнными функциями.

Как и для взаимной корреляционной функции, для взаимного энергетического спектра можно записать аналогичное неравенство

$$|S_{\xi\eta}(f)| \leq \sqrt{S_{\xi}(f) \cdot S_{\eta}(f)}.$$

При изучении стационарных СП большую роль играет *операция временного усреднения* процесса $\xi(t)$. Для прямоугольной функции окна с конечным временем усреднения оператор скользящего среднего можно определить как

$$\eta(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \xi(x) dx.$$

Если считать, что существует преобразование Фурье $\tilde{\xi}(j\omega)$ реализации случайного процесса $\xi(t)$, то можно записать

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Действуя оператором усреднения на левую и правую части записанного равенства, будем иметь

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \xi(x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(j\omega) \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{j\omega T/2} e^{j\omega t} d\omega.$$

Как видно из приведённого выражения, оператор скользящего среднего эквивалентен пропусканию процесса $\xi(t)$ через линейный фильтр с АЧХ вида

$$|K(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|.$$

Данный фильтр подавляет высокочастотную часть спектра СП тем сильнее, чем больше время усреднения T , т. е. сглаживает процесс $\xi(t)$.

Найдём статистические характеристики сглаженного процесса $\eta(t)$.

Среднее значение равно

$$M\{\eta(t)\} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} M\{\xi(x)\} dx = M\{\xi(t)\},$$

так как для стационарного процесса $M\{\xi(x)\} = \text{const}$.

Для дисперсии процесса $\eta(t)$ справедливо выражение

$$\sigma_{\eta}^2(T) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cdot K_{\xi}(\tau) d\tau,$$

а в частотной области справедливо следующее равенство

$$\sigma_{\eta}^2(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 d\omega.$$

Следует отметить, что скорость убывания дисперсии σ_{η}^2 процесса $\eta(t)$ с ростом T зависит от вида $S_{\xi}(\omega)$ или $K_{\xi}(\tau)$. Например, если спектральная плотность $S_{\xi}(\omega)$ в нуле конечна и равна S_0 , то при больших T

$$\sigma_{\eta}^2(T) \approx \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 d\omega = \frac{S_0}{T}.$$

Если $S_{\xi}(0) = 0$, то $\sigma_{\eta}^2(T) = \frac{S_0}{\alpha T^2} (1 - e^{-\alpha T})$,

т. е. в зависимости от T убывает по закону $1/T^2$. Как видно из приведённых примеров, зависимость σ_{η}^2 от T определяется поведением $S_{\xi}(\omega)$ в окрестности нуля. Наименее эффективным будет усреднение по времени процессов, спектральная плотность которых неограниченно возрастает при $\omega \rightarrow 0$, т. е. имеет вид $S(\omega) \approx c|\omega|^{-\alpha}$, где $c > 0$ - константа, $0 < \alpha < 1$. Для таких процессов $\sigma_{\eta}^2(T) \approx 1/T^{1-\alpha}$.

6.2 Корреляционные и спектральные характеристики узкополосных стационарных процессов

Напомним, что СП называется узкополосным, если выполняется условие $\Delta f_{\text{э}} \ll f_0$, где $\Delta f_{\text{э}}$ и f_0 - эффективная ширина спектра и средняя или центральная частота. Реализации такого СП $x(t)$ выглядят как гармоническое колебание частоты $\omega_0 = 2\pi f_0$, модулированное по амплитуде и фазе случайными процессами $X(t)$ и $\theta(t)$, медленно меняющимися по сравнению с $x(t)$. Реализация такого процесса приведена на рис. 6.3.

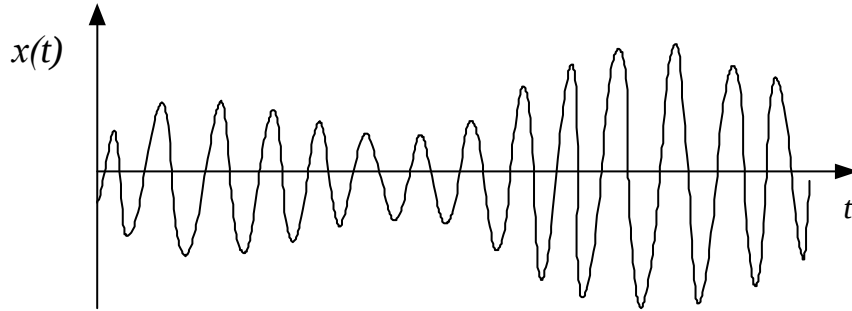


Рис. 6.3. Реализация узкополосного случайного процесса

Случайные процессы $X(t)$ и $\theta(t)$ называют огибающей и фазой СП

$$x(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)).$$

Для СП $x(t)$ часто бывает удобным введение квадратурных компонент

$$A(t) = X(t) \cos(\theta(t)) \text{ и } B(t) = X(t) \sin(\theta(t)),$$

определяющих процесс

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) - B(t) \sin(\omega_0 t).$$

Введение двух СП $X(t)$ и $\theta(t)$ вместо одного, реально существующего процесса $x(t)$, требует указания способа перехода от $x(t)$ к $X(t)$ и $\theta(t)$.

Наиболее распространенный способ основан на использовании преобразования Гильберта исходного процесса $x(t)$, имеющего вид

$$x_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

После чего огибающая $X(t)$ определяется как

$$X(t) = \sqrt{x^2(t) + x_{\perp}^2(t)},$$

а полная фаза

$$\Theta(t) = \omega_0 t + \theta(t) = \arctg \frac{x_{\perp}(t)}{x(t)}.$$

Огибающая $X(t)$, фаза $\theta(t)$ и квадратурные компоненты $A(t)$ и $B(t)$, имеют простой геометрический смысл, иллюстрированный рис. 6.4.

Для гармонического колебания $X \cos(\omega_0 t + \theta)$, где X и θ - константы, точка M с координатами $x = A \cos \theta$ и $y = B \sin \theta$ неподвижна. Для узкополосного СП точка M блуждает в соответствии со случайной величиной квадратурных компонент $A(t)$ и $B(t)$. Очевидно, чем уже спектр процесса $\xi(t)$, тем медленнее будут блуждания точки M .

Для узкополосных СП спектральную плотность $S(f)$ можно представить в виде двух неперекрывающихся слагаемых, как это показано на рис. 6.5. Тогда корреляционная функция может быть представлена выражением

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^0 S^-(f) \exp(-j2\pi f\tau) df + \int_0^{\infty} S^+(f) \exp(-j2\pi f\tau) df.$$

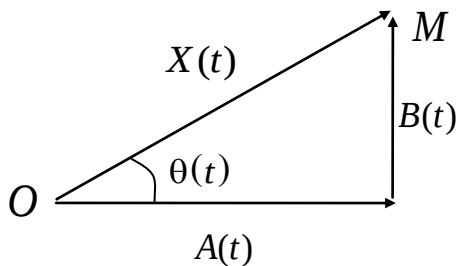


Рис. 6.4. Геометрический смысл узкополосного случайного процесса

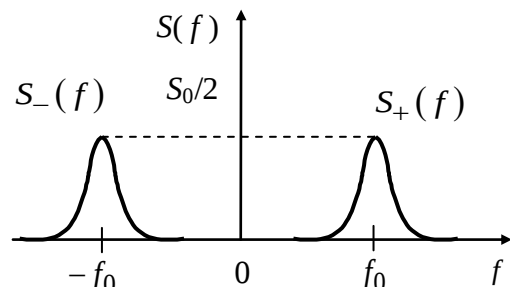


Рис. 6.5. Спектральная плотность узкополосного случайного процесса

Если ввести в рассмотрение функции $S_B^-(f)$ и $S_B^+(f)$, представляющие собой части СПМ $S^-(f)$ и $S^+(f)$, смещенные на величину f_0 соответственно вправо и влево, то получим:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^0 S_B^-(f + f_0) \exp(-j2\pi f\tau) df + \int_0^{\infty} S_B^+(f - f_0) \exp(-j2\pi f\tau) df$$

Выполняя в первом интеграле замену переменной $f + f_0 = x$, а во втором $f - f_0 = x$, и учитывая, что $S^-(f)$ и $S^+(f)$ при $|f| > f_0$ пренебрежимо малы, получим после несложных преобразований следующее выражение для КФ узкополосного процесса:

$$K(\tau) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \cos 2\pi f \tau df \right) \cos 2\pi f_0 \tau - \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \sin 2\pi f \tau df \right) \sin 2\pi f_0 \tau = \\ = \sigma^2 r(\tau) \cdot \cos(2\pi f_0 \tau + \Psi(\tau)),$$

где

$$\sigma^2 r(\tau) = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \cos 2\pi f \tau df \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \sin 2\pi f \tau df \right)^2}$$

- огибающая КФ узкополосного процесса, а $\Psi(\tau)$ - фаза КФ, определяемая выражением

$$\Psi(\tau) = \arctg \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \sin 2\pi f \tau df / \int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \cos 2\pi f \tau df \right).$$

Огибающая КФ является четной функцией τ , а $\Psi(\tau)$ - нечетная функция. Если СПМ симметричная относительно частот $\pm f_0$, то

$S_B^-(f) = S_B^+(f) = S_B(f)$ будут четными функциями, следовательно, будет

иметь место равенство $\int_{-\infty}^{\infty} S_B(f) \sin 2\pi f \tau df = 0$ и КФ узкополосного

процесса примет вид:

$$K(\tau) = \sigma^2 r(\tau) \cdot \cos 2\pi f_0 \tau,$$

где

$$\sigma^2 r(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_B(f) \cdot \cos 2\pi f \tau df.$$

Вид КФ узкополосного процесса иллюстрирует на рис. 6.6.

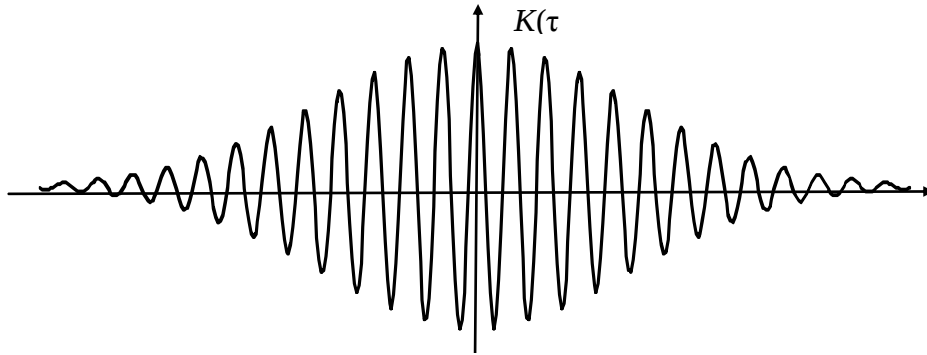


Рис. 6.6. Корреляционная функция узкополосного случайного процесса

Таким образом, КФ узкополосного СП имеет вид радиоимпульса с огибающей $\sigma^2 r(\tau)$ и высокочастотным заполнением, имеющим в общем случае угловую модуляцию по закону

$$\omega(\tau) = \frac{d[2\pi f_0 \tau + \Psi(\tau)]}{d\tau} = 2\pi f_0 + \frac{B'(\tau)A(\tau) - A'(\tau)B(\tau)}{A^2(\tau) + B^2(\tau)},$$

где $A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \cos 2\pi f \tau df$ и $B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_B^+(f) \sin 2\pi f \tau df$.

Если СПМ симметрична относительно частот $\pm f_0$, то $B(\tau) = B'(\tau) = 0$, $B'(\tau)A(\tau) = -A'(\tau)B(\tau) = 0$ и угловая модуляция КФ отсутствует.

6.3 Случайные процессы с дискретным спектром

Рассмотрим СП вида $\xi(t) = \sum_{k=1}^n (\zeta_k \cos \omega_k t + \eta_k \sin \omega_k t)$, где ζ_k и η_k - случайные, а ω_k - детерминированные величины. Выясним, при каких условиях данный СП будет стационарным в широком смысле.

Во-первых, среднее значение $M\{\xi(t)\}$ не должно зависеть от времени.

Это возможно только тогда, когда $M_2\{\zeta_k\} = M_2\{\eta_k\} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Во-вторых, корреляционная функция

$$K_\xi(t_1, t_2) = M \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\zeta_k \cos \omega_k t_1 + \eta_k \sin \omega_k t_1) (\zeta_l \cos \omega_l t_2 + \eta_l \sin \omega_l t_2) \right\}$$

должна зависеть от разности $t_1 - t_2 = \tau$.

Для этого должны выполняться следующие условия:

$$M_2\{\zeta_k\} = M_2\{\eta_k\} = \sigma_k^2, \quad M\{\zeta_k \eta_l\} = 0, \quad M\{\zeta_k \zeta_l\} = M\{\eta_k \eta_l\} = 0, \quad k \neq l.$$

При выполнении этих условий КФ процесса $\xi(t)$ принимает вид

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \cdot \cos \omega_k \tau.$$

Спектральная плотность, соответствующая записанной КФ, будет представлять собой сумму дельта-функций на дискретных частотах $\pm \omega_k$:

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^n \pi \sigma_k^2 (\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k)).$$

При $k=1$ получаем гармоническое колебание

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \zeta \cos(\omega t) + \eta \sin(\omega t) = \rho \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \rho \cos(\varphi) \cos(\omega t) + \rho \sin(\varphi) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

со случайными амплитудой $\rho = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}$ и фазой $\varphi = \arctg(\eta/\zeta)$.

Для стационарности процесса $\xi(t)$ в широком смысле достаточно, чтобы ρ и φ были независимыми СВ и выполнялись бы условия

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos \varphi W(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi W(\varphi) d\varphi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi W(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi W(\varphi) d\varphi = 0, \end{cases}$$

т. е. ряд Фурье для ПВ фазы $W(\varphi)$, рассматриваемой как периодическая функция с периодом 2π , не должен содержать первых двух гармоник, иначе

говоря,

$$W(\varphi) = a_0 + \sum_{k=3}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Естественно, должна быть обеспечена неотрицательность функции $W(\varphi)$. При $W(\varphi) = 1/2\pi, \varphi \in [0, 2\pi]$ процесс будет стационарным в узком смысле. Что касается СВ ξ и η , то их средние значения должны равняться нулю, а их дисперсии должны быть одинаковы и некоррелированы.

6.4 Анализ спектральных плотностей и корреляционных характеристик распространенных случайных процессов

Ниже рассмотрим наиболее часто встречающиеся спектральные плотности случайных процессов и соответствующие им корреляционные функции.

1. “Белый” шум.

Для “белого” шума $S(f) = N_0/2$ и $K(\tau) = N_0/2 \cdot \delta(\tau)$. Как процесс, имеющий дисперсию (среднюю мощность), равную бесконечности, он является математической абстракцией, удобной для проведения расчетов. Реальный СП заменяют “белым” шумом при анализе прохождения СП через линейную систему при условии, что спектральная плотность СП постоянна в полосе пропускания системы (см. рис. 6.7 а).

2. Финитный “белый” шум.

Этот процесс имеет спектральную плотность вида (рис. 6.7, б)

$$S(f) = \begin{cases} N_0/2, & |f| \leq F; \\ 0, & |f| > F \end{cases}$$

и корреляционную функцию $K(\tau) = N_0 F \sin(2\pi F \tau) / (2\pi F \tau)$.

Дисперсия процесса равна $K(0) = N_0 F$.

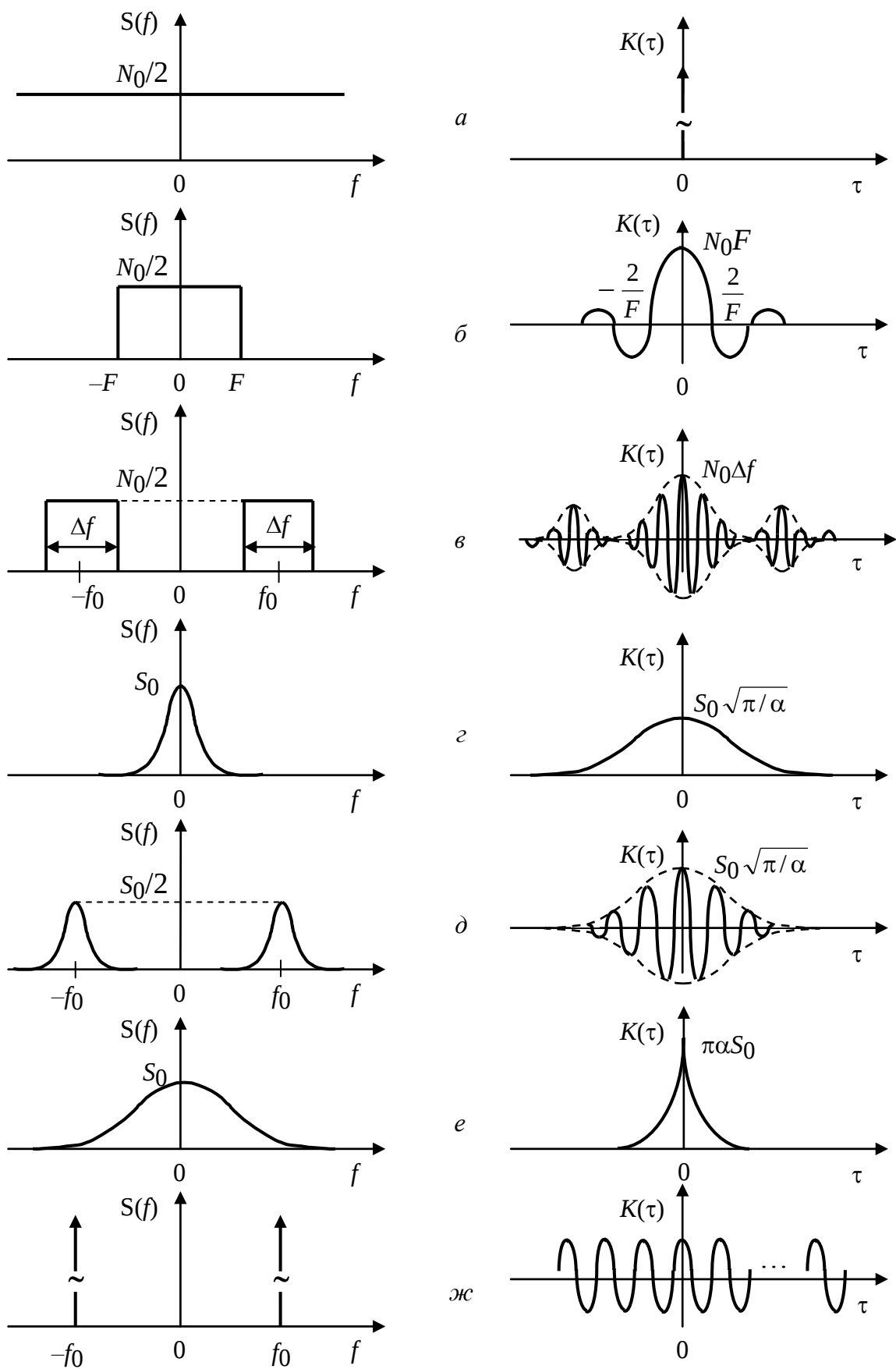


Рис. 6.7. Характеристики типовых случайных процессов

3. “Полосовой” шум с прямоугольным энергетическим спектром.

СПМ данного процесса имеет вид (рис. 6.7, в)

$$S(f) = \begin{cases} N_0/2, & f \in \Delta F; \\ 0, & f \notin \Delta F, \end{cases}$$

где $\Delta F = [-f_0 - \Delta f/2, -f_0 + \Delta f/2] \cup [f_0 - \Delta f/2, f_0 + \Delta f/2]$,

а корреляционная функция равна $K(\tau) = N_0 \Delta f \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau} \cos 2\pi f_0 \tau$.

Дисперсия процесса, как и в предыдущем примере, равна $K(0) = N_0 \Delta F$.

4. Видеопроцесс с гауссовским энергетическим спектром.

Для такого процесса (рис. 6.7, г) СП и КФ описываются выражениями

$$S(f) = S_0 \exp(-\alpha f^2); \quad K(\tau) = S_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \tau^2}{\alpha}\right).$$

Дисперсия процесса $K(0) = S_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, где параметр α определяет ширину

энергетического спектра $\Delta f = \frac{2}{S_0} \int_0^\infty S_0 \exp(-\alpha f^2) df = \frac{2S_0}{S_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

“Полосовой” шум с гауссовским энергетическим спектром.

СПМ и КФ данного процесса равны, соответственно:

$$S(f) = \frac{S_0}{2} \left(\exp(-\alpha(f - f_0)^2) + \exp(-\alpha(f + f_0)^2) \right),$$
$$K(\tau) = S_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \tau^2}{\alpha}\right) \cos 2\pi f_0 \tau.$$

Дисперсия будет такая же, как в предыдущем примере. Графики СПМ и КФ приведены на рис. 6.7 д.

5. Случайный процесс с “Лоренцевским” энергетическим спектром.

В приложениях часто встречается СП, у которого

$$S(f) = \frac{S_0}{1 + (f/\alpha)^2}.$$

КФ такого процесса имеет вид

$$K(\tau) = \pi S_0 \alpha \exp(-2\pi\alpha|\tau|).$$

Параметр α определяет ширину спектра и время корреляции.

Например, $\tau_{\kappa 1} = \frac{1}{K(0)} \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \exp(-2\pi\alpha\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi\alpha}$.

Графики СПМ и КФ приведены на рис. 6.7, е.

6. **Квазидетерминированный процесс** $\xi(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \theta)$, где U_m и ω_0 - известные амплитуда и несущая частота, а θ - случайная величина с ПВ $W(\theta) = 1/2\pi$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Математическое ожидание этого СП равно

$$\begin{aligned} M(\xi(t)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \xi(t) W(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} U_m \cos(2\pi f_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \\ &= U_m \cos 2\pi f_0 t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\theta) d\theta - U_m \sin 2\pi f_0 t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

КФ также можно найти с помощью усреднения по θ :

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M[\xi(t_1) - M(\xi(t_1))] \cdot [\xi(t_2) - M(\xi(t_2))] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} U_m \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta) U_m \cos(2\pi f_0 t_2 + \theta) d\theta = \\ &= \frac{U_m^2}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\pi f_0 (t_1 - t_2) d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + 2\pi f_0 t_2 + 2\theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл равен нулю, следовательно, КФ описывается выражением

$$K(\tau) = \frac{U_m^2}{2} \cos 2\pi f_0(\tau).$$

СПМ рассматриваемого процесса имеет вид

$$S(f) = \frac{U_m^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$

Графики $S(f)$ и $K(\tau)$ приведены на рис. 6.7, ж.

Из рассмотренных выше примеров случайных процессов “белый” шум является разрывным, недифференцируемым процессом; процесс с “Лоренцевским” энергетическим спектром является непрерывным, но не дифференцируемым. Остальные рассмотренные процессы непрерывны и дифференцируемы.

7 ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Процесс относится к классу импульсных, если его составляющие являются финитными функциями времени - импульсами.

7.1 Случайная импульсная последовательность

Начнем с одиночного импульса $x(t) = s(t - t_0)$, где форма $s(t)$ известна, а задержка t_0 является случайной величиной с ПВ $W(t_0)$.

Среднее значение

$$M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) \cdot W(t_0) dt_0,$$

а корреляционная функция

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M\left\{\left[x(t_1) - M\{x(t_1)\}\right] \cdot \left[x(t_2) - M\{x(t_2)\}\right]\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t_1 - t_0) - M\{x(t_1)\}\right] \cdot \left[s(t_2 - t_0) - M\{x(t_2)\}\right] W(t_0) dt_0. \end{aligned}$$

Рассматриваемый процесс в общем случае не является стационарным.

Если появление импульса равновероятно в пределах интервала $[-T/2, T/2]$ $W(t_0) = 1/T$ и $T \gg \tau_{\text{имп}}$, где $\tau_{\text{имп}}$ - длительность импульса

$$s(t), \text{ то } M\{x(t)\} \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$$

и не зависит от времени, а корреляционная функция

$$K_x(t_1, t_2) \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t - \tau) dt$$

зависит от $\tau = t_1 - t_2$, т. е. в пределах интервала $[-T/2, T/2]$ процесс $s(t - t_0)$ может считаться стационарным в широком смысле.

Используя равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(j\omega) \cdot \tilde{s}^*(j\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) d\omega,$$

получим выражение для спектральной плотности одиночного импульса

$$S_x(\omega) \cong \frac{1}{2\pi T} |\tilde{s}(j\omega)|^2.$$

Далее рассмотрим *случайную импульсную последовательность* $x(t)$, образованную линейной смесью одиночных импульсов вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k s(t-t_k),$$

где $s(t)$ - известная функция, а амплитуды a_k , запаздывания t_k и число импульсов n являются статистически независимыми случайными величинами, т. е.

$$W(n, a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_n) = W(n) \cdot \prod_{k=1}^n W(a_k) \cdot \prod_{k=1}^n W(t_k).$$

Распределения $W(a_k)$ и $W(t_k)$ будем считать не зависящими от значения k . Допустим, что $M\{a_k\} = 0$, а распределения запаздывания $W(t_k)$ равномерно $W(t) = 1/T$, $t \in [-T/2, T/2]$. Так как $M\{a_k\} = 0$, то среднее значение

$$M\{x(t)\} = M\left\{\sum_{k=1}^n a_k \cdot s(t-t_k)\right\} = 0.$$

Корреляционную функцию процесса можно описать выражением

$$K_x(t_1, t_2) = M\left\{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k \cdot a_l \cdot s(t_1-t_k) \cdot s(t_2-t_l)\right\}.$$

Меняя местами, усреднение и суммирование будем иметь

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n M\{a_k a_l\} \cdot M\{s(t_1-t_k) \cdot s(t_2-t_l)\}.$$

Учитывая, что $M\{a_k a_l\} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \sigma^2, & k = l \end{cases}$, получим

$$K_x(\tau) = \sum_{k=1}^n \sigma^2 K_s(\tau).$$

Так как значение n является случайной величиной, то можно записать

$$K_x(\tau) = M\{n\} \cdot \sigma^2 K_s(\tau).$$

Будем полагать, что число импульсов n , попавших в интервал $[-T/2, T/2]$, определяется распределением Пуассона

$$W(n) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^n / n!,$$

где λ - среднее число импульсов, попавших в интервал $[-T/2, T/2]$.

Для распределения Пуассона имеем $M(n) = \lambda$ и $K_x(\tau) = \lambda \cdot \sigma^2 K_s(\tau)$.

Спектральная плотность случайной импульсной последовательности будет иметь вид

$$S_x(\omega) = \frac{\lambda \sigma^2}{2\pi T} |\tilde{s}(j\omega)|^2.$$

где $\tilde{s}(j\omega)$ - Фурье-спектр сигнала $s(t)$.

7.2 Меандровый процесс со случайной начальной фазой

Данный процесс аналитически записывается как

$$x(t) = \text{sign}[\sin(2\pi f_0 t + \varphi)],$$

где f_0 - детерминированная величина, а φ - СВ с равномерным законом распределением $W(\varphi) = 1/2\pi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Случайный процесс $x(t)$ принимает значение :

$$+1, \text{ если } 2\pi f_0 t + \varphi \in [2k\pi, (2k+1)\pi],$$

$$-1, \text{ если } 2\pi f_0 t + \varphi \notin [2k\pi, (2k+1)\pi]. \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При равномерном распределении φ в промежутке $[0, 2\pi]$ вероятности этих событий (попадания и непопадания в указанные промежутки) одинаковы и равны 0,5, поэтому $M\{x(t)\} = 0$.

Для определения корреляционной функции

$$K_x(t, t - \tau) = M\{x(t) - x(t - \tau)\}$$

разложим «прямоугольную волну» $\text{sign}(\sin(2\pi f t + \varphi))$ в ряд Фурье

$$\text{sign}(\sin(2\pi f t + \varphi)) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k(2\pi f_0 t + \varphi),$$

где суммирование ведется по нечетным значениям $k = 1, 3, 5, \dots$

Так как $M\{x(t)\} = 0$, то корреляционная функция примет вид

$$K_x(t, t - \tau) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl} M\left\{\sin[k(2\pi f_0 t + \varphi)] \cdot \sin[l(2\pi f_0(t - \tau) + \varphi)]\right\}.$$

Заменяя произведение синусов полуразностью косинусов и учитывая, что средние значения косинусов, аргументы которых содержат $m \cdot \varphi$, где m - целое число, равны нулю, получим окончательно

$$K_x(t, t - \tau) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos[k2\pi f_0 \tau] = K_x(\tau).$$

Полученное выражение является рядом Фурье «пилообразной» функции $K_x(\tau)$, график которой представлен на рис. 7.1.

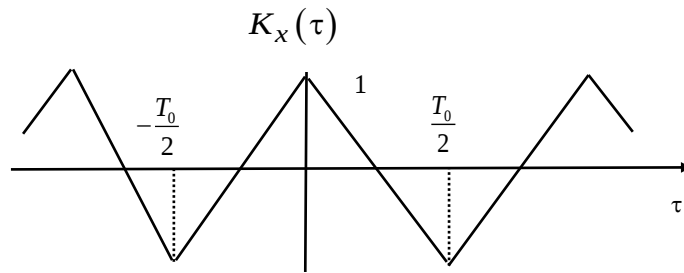


Рис. 7.1. Корреляционная функция случайного меандрового процесса со случайной фазой

Поскольку рассматриваемый процесс принимает значения ± 1 , то его средний квадрат очевидно равен 1, а так как среднее значение равно 0, то дисперсия $M_2\{x(t)\} = K_x(0) = 1$.

7.3 Кусочно-постоянные случайные процессы

Кусочно-постоянными будем называть случайные процессы, принимающие случайные значения $\xi(t_i) = \xi_i$ из некоторого множества U_i на промежутках, определяемых моментами времени t_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Рассмотрим примеры кусочно-постоянных случайных процессов.

Пример 1. Простейший процесс такого типа, когда моменты t_i разделены одинаковыми промежутками длиной $T = t_i - t_{i-1}$ и значения ξ_i есть независимые случайные величины равные U_m с вероятностью p и $-U_m$ с вероятностью $q = 1 - p$. Рассматриваемый процесс можно назвать **случайным бинарным сигналом**. Реализация такого процесса для случая $p = q = 1/2$ приведена на рис. 7.2.

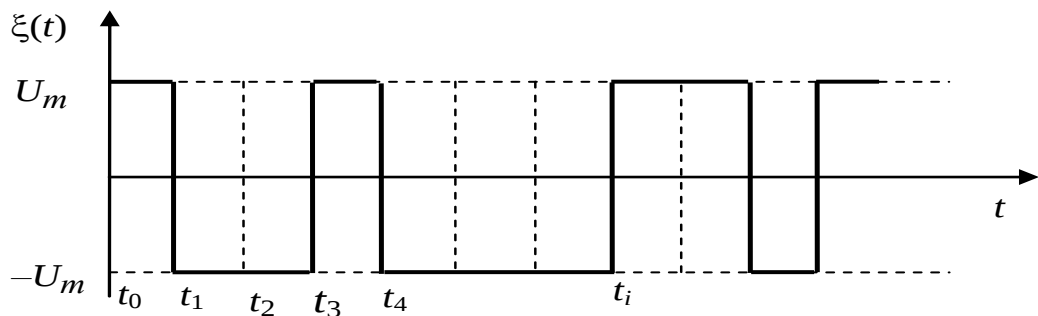


Рис. 7.2. Диаграмма случайного бинарного сигнала

Будем считать, что t_0 - случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, T]$. В этом случае процесс $\xi(t)$ будет стационарным. Если моменты t_i фиксированы, то $\xi(t)$ уже не будет стационарным процессом.

В рассматриваемом случае среднее значение

$$M\{\xi(t)\} = p \cdot U_m - q \cdot U_m = 0,$$

так как $p = q = 1/2$, а корреляционная функция описывается выражением

$$\begin{aligned} K_\xi(t, t \pm \tau) &= M\{\xi(t) \cdot \xi(t \pm \tau)\} = \\ &= U_m^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + \frac{1}{2} \frac{|\tau|}{T} U_m^2 - \frac{1}{2} \frac{|\tau|}{T} U_m^2 = U_m^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), |\tau| \leq T. \end{aligned}$$

Спектральная плотность процесса $\xi(t)$ будет равна

$$S_\xi(\omega) = U_m^2 T \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2.$$

Пример 2. Рассмотрим теперь случай, когда моменты t_i являются случайными величинами. Процесс устроен так, что в моменты t_i происходит перемена знака значения, которое было на промежутке $[t_{i-1}, t_i)$. Значения могут быть либо U_m , либо $-U_m$. Анализируемый процесс приведен на рис. 7.3 и называется *случайным телеграфным сигналом*.

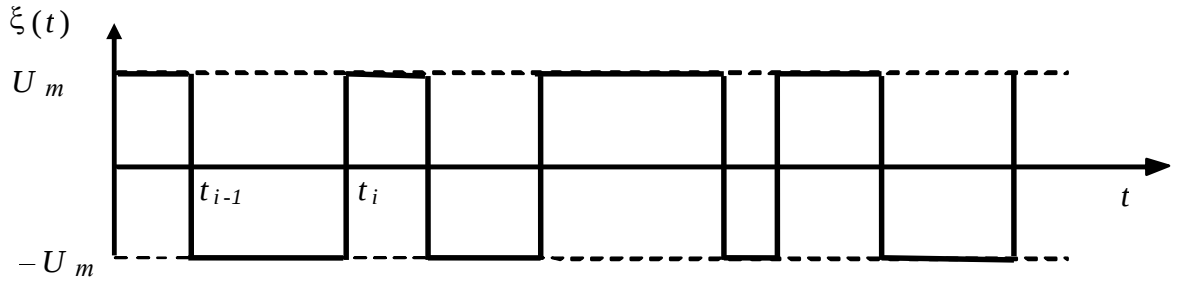


Рис. 7.3. Диаграмма случайного телеграфного сигнала

Пусть двухуровневый случайный процесс со значениями $\pm U_m$, у которого перемена знака происходит в случайные моменты времени, образует пуассоновский поток. Тогда вероятность того, что в единицу времени произойдет ровно M перемен знака равна

$$P(M) = \frac{\lambda^M}{M!} e^{-\lambda},$$

где λ - среднее число перемен знака в единицу времени.

Ясно, что среднее значение такого процесса равно нулю, а корреляционная функция $K_\xi(t, t + \tau)$ имеет вид

$$K_\xi(t, t + \tau) = M\{\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)\} = U_m^2 \cdot P\{M = 2n\} - U_m^2 \cdot P\{M = 2n + 1\}.$$

Произведение отсчетов равно U_m^2 , если на промежутке τ произошло четное число перемен знака процесса и $-U_m^2$, если таких перемен было нечетное число. Учитывая, что

$$P\{M = 2n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2n}}{2n!} e^{-\lambda\tau},$$

$$P\{M = 2n+1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-\lambda\tau}$$

то, подставляя эти выражения в формулу для функции корреляции, получим

$$K_{\xi}(t, t+\tau) = U_m^2 e^{-\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} = U_m^2 \cdot e^{-2\lambda\tau},$$

так как $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda\tau)^n}{n!}$ является рядом Маклорена для функции $e^{-\lambda\tau}$.

Учитывая, что точно такой же результат получается для функции корреляции $K_{\xi}(t, t-\tau)$, будем иметь окончательно

$$K_{\xi}(t, t \pm \tau) = U_m^2 \cdot \exp(-2\lambda|\tau|) = K_{\xi}(\tau).$$

Таким образом, анализируемый процесс $\xi(t)$ является стационарным в широком смысле.

Спектральная плотность случайного двоичного сигнала будет равна

$$S_{\xi}(\omega) = U_m^2 \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2}.$$

Корреляционная функция и спектральная плотность процесса приведены на рис. 7.4.

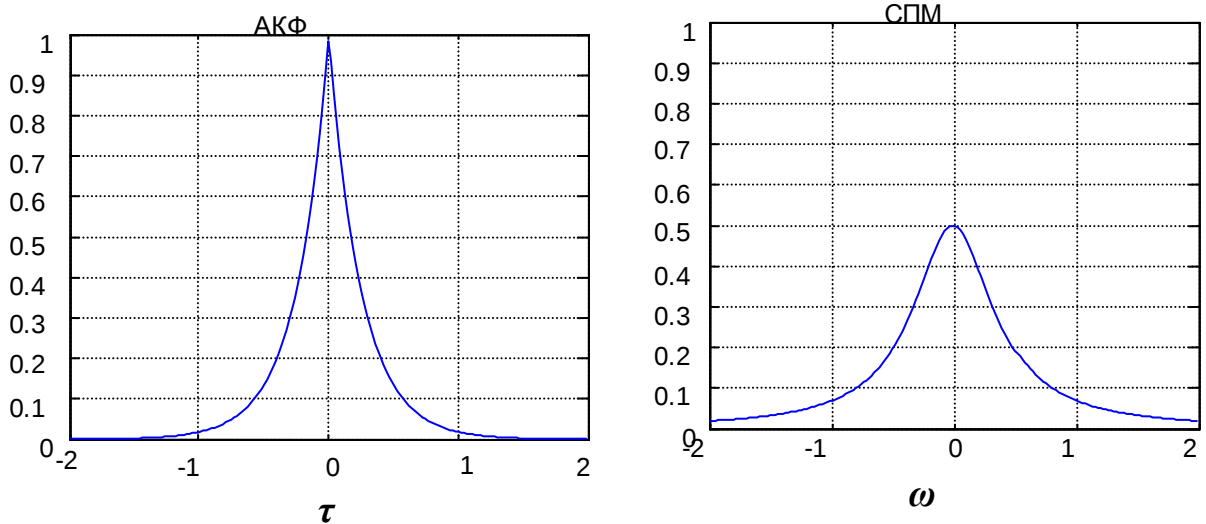


Рис. 7.4. Корреляционная функция и спектральная плотность случайного двоичного сигнала

Очевидно, что чем больше число перемен знака процесса $\xi(t)$ в единицу времени, тем шире его спектральная плотность.

8 АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Объектом исследования является случайный процесс вида $x(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi)$. Будем полагать, что A , f , φ - независимые случайные величины, заданные своими плотностями вероятности $W(A)$, $W(f)$, $W(\varphi)$.

8.1 Гармоническое колебание со случайной начальной фазой и детерминированными амплитудой и частотой

Рассмотрим введенный выше СП $x(t)$, когда A и f_0 - детерминированные величины, а φ - СВ с ПВ $W(\varphi) = 1/2\pi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Очевидно, что данный процесс является периодическим. Для определения ПВ отсчетов данного процесса $x(t)$ заметим, что поскольку $W(\varphi) = 1/2\pi$, то для любых моментов времени распределение отсчетов процесса $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ будет подчиняться закону арксинуса. Условная плотность вероятности случайного процесса имеет вид

$$W(x/A) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}, |x| \leq A.$$

Найдем среднее значение этого СП

$$\begin{aligned} M\{x(t)\} &= A \cdot M\{\sin(\omega_0 t + \theta)\} = \\ &= A \cdot \sin(2\pi f_0 t) \cdot M\{\cos \varphi\} + A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot M\{\sin \varphi\}. \end{aligned}$$

Так как $M\{\cos \varphi\} = \int_0^{2\pi} 1/(2\pi) \cos \varphi d\varphi = 0$ и, аналогично, $M\{\sin \varphi\} = 0$, то $M\{\xi(t)\} = 0$ и не зависит от времени.

Найдём теперь корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M\{A \cdot \sin(2\pi f_0 t_1 + \varphi) \cdot A \cdot \sin(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\} = \\ &= A^2/2 \cdot M\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\} - A^2/2 \cdot M\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)\} = 0$, а среднее значение неслучайной величины $M\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\} = \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))$, получим окончательно

$$K_{x(t)}(t_1, t_2) = A^2/2 \cdot \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) = A^2/2 \cdot \cos(2\pi f_0 \tau).$$

Дисперсия равна $K_{x(t)}(0) = A^2/2$.

При временном усреднении оценка корреляционной функции процесса $\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ определяется выражением

$$K(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi f t + \varphi) \cdot \cos(2\pi f (t - \tau) + \varphi) dt = \frac{1}{2} \cos 2\pi f \tau + \frac{1}{8\pi f T} (\sin(4\pi f T + \varphi - 2\pi f \tau) - \sin(\varphi - 2\pi f \tau)).$$

Так как разность синусов всегда меньше, чем 2, то погрешность из-за конечного времени усреднения не превышает $1/(4\pi f T)$.

Таким образом, на основе анализа полученных характеристик видим, что анализируемый СП является стационарным в широком смысле.

8.2 Гармоническое колебание со случайной амплитудой и начальной фазой

Рассмотрим случай, гармонического процесса $x(t)$, когда фаза φ равномерно распределена на интервале $[0, 2\pi]$, а амплитуда принимает случайное значение с ПВ $W(A)$, при этом f_0 - детерминированная величина. Для определения ПВ исследуемого процесса необходимо задать распределение $W(A)$. Тогда ПВ определяется в соответствии с выражением

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x/A) \cdot W(A) dA.$$

Будем считать, что случайная амплитуда A описывается распределением Рэлея

$$W(A) = \begin{cases} A/\sigma^2 \exp(-A^2/\sigma^2), & A \geq 0 \\ 0, & A < 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что распределение отсчетов процесса $A \cos(2\pi f t + \varphi)$ подчиняется закону арксинуса

$$W(x/A) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}, |x| \leq A,$$

то подставляя $W(A)$ в последнее выражение и выполняя интегрирование,

получим

$$W(x) = \int_0^{\infty} \frac{A \exp\left(-x^2 / \left(2\sigma^2\right)\right)}{\pi \sigma^2 \sqrt{A^2 - x^2}} dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, отсчеты гармонического процесса со случайной амплитудой и начальной фазой при рэлеевском распределении амплитуды подчиняются нормальному распределению.

Так как при распределении фазы $W(\varphi) = 1/2\pi$ справедливы соотношения $M\{\cos \varphi\} = M\{\sin \varphi\} = 0$, то в этом случае среднее значение процесса $x(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} M\{x(t)\} &= M\{A\} \cdot M\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = \\ &= M\{A\} \cdot [M\{\cos(2\pi f t)\} \cdot M\{\cos \varphi\} - M\{\sin(2\pi f t)\} \cdot M\{\sin \varphi\}] = 0. \end{aligned}$$

Запишем выражение для корреляционной функции процесса $x(t)$

$$\begin{aligned} K(t, t - \tau) &= M\{A^2 \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \varphi)\} = \\ &= \frac{M\{A^2\}}{2} [M\{\cos(2\pi f_0 \tau)\} + M\{\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi - 2\pi f_0 \tau)\}]. \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что при $W(\varphi) = 1/2\pi$ второе слагаемое $M\{\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi - 2\pi f_0 \tau)\} = 0$. Поэтому корреляционная функция примет

$$\text{вид} \quad K(t, t - \tau) = \frac{M\{A^2\}}{2} \cdot M\{\cos(2\pi f_0 \tau)\} = 2\sigma^2 \cos(2\pi f \tau),$$

а процесс $x(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi)$ будет стационарным в узком смысле.

8.3 Гармонический сигнал со случайной амплитудой, частотой и начальной фазой

Будем считать, что у случайного процесса $x(t)$ все параметры A , f , φ независимые СВ и имеют свои ПВ $W(A)$, $W(f)$, $W(\varphi)$. Как и раньше, будем считать фазу φ равномерно распределенной в интервале $[0, 2\pi]$.

Среднее значение процесса $x(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} M\{x(t)\} &= M\{A\} \cdot M\{\cos(2\pi f t + \varphi)\} = \\ &= M\{A\} \cdot [M\{\cos(2\pi f t)\} \cdot M\{\cos \varphi\} - M\{\sin(2\pi f t)\} \cdot M\{\sin \varphi\}] = 0, \end{aligned}$$

так как при $W(\varphi) = 1/(2\pi)$ справедливо равенство $M\{\cos \varphi\} = M\{\sin \varphi\} = 0$.

Запишем выражение для корреляционной функции исследуемого процесса

$$\begin{aligned} K(t, t - \tau) &= M\{A^2 \cos(2\pi f t + \varphi) \cdot \cos[2\pi f(t - \tau) + \varphi]\} = \\ &= M\{A^2\} / 2 \cdot [M\{\cos(2\pi f \tau)\} + M\{\cos(4\pi f t + 2\varphi - 2\pi f \tau)\}]. \end{aligned}$$

Отметим, что при $W(f) = 1/(2\pi)$ выражение $M\{\cos(4\pi ft + 2\varphi - 2\pi f\tau)\} = 0$. Поэтому описание корреляционной функций будет иметь вид

$$K(t, t - \tau) = \frac{M\{A^2\}}{2} \cdot M\{\cos(2\pi f\tau)\}.$$

Если считать, что ПВ частоты равномерна

$$W(f) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta f}, & f \in [f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f] \\ 0, & f \notin [f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f] \end{cases},$$

то получим описание корреляционной функции

$$\begin{aligned} K(t, t - \tau) &= \frac{M\{A^2\}}{2} \frac{1}{2\Delta f} \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} \cos(2\pi f\tau) df = \\ &= \frac{M\{A^2\}}{2} \cdot \frac{\sin(2\pi\Delta f\tau)}{2\pi\Delta f\tau} \cdot \cos(2\pi f_0\tau) \end{aligned}$$

Таким образом, речь идет о стационарном в широком смысле СП.

Заметим, что для любых моментов времени распределение отсчетов процесса $\cos(2\pi ft + \varphi)$ будет подчиняться закону арксинуса, а для процесса $A\cos(2\pi ft + \varphi)$ распределению

$$W(x/A) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, |x| \leq A.$$

Для определения ПВ исследуемого процесса необходимо задать распределение $W(A)$. Тогда $W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x/A)W(A) dA$.

Будем считать, что случайная амплитуда A описывается распределением Рэлея

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right), A \geq 0.$$

Подставляя $W(A)$ в предыдущее выражение и выполняя интегрирование, получим

$$W(x) = \int_0^{\infty} \frac{A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\pi\sigma^2 \sqrt{A^2 - x^2}} dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, при рэлеевском распределении амплитуды отсчеты процесса подчиняются нормальному распределению.

9 СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Под нормальным случайным процессом (НСП) понимается функция времени $\xi(t)$, принимающая любой момент времени t_0 значения случайных величин с нормальным законом распределения $W_{\xi}(x; t)$.

Нормальный случайный процесс $\xi(t)$ полностью определяется математическим ожиданием

$$M\{\xi(t)\} = m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W_{\xi}(x; t) dx$$

и корреляционной функцией

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1(t_1)) \cdot (x_2 - m_1(t_2)) \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

9.1 Линейное преобразование НСП

Если полоса пропускания линейной системы $\Delta F \ll \Delta f_{\Sigma}$ эффективной ширины спектра входного случайного процесса, то значения выходного СП в произвольный момент времени можно приближенно рассматривать как взвешенную сумму $k_{\text{св}} = \Delta f_{\Sigma} / \Delta F \gg 1$ независимых случайных величин. При этом независимо от распределения отсчетов входного СП, при выполнении условий центральной предельной теоремы, выходной процесс будет приближенно нормальным. Очевидно, что степень приближения зависит от числа $k_{\text{св}}$ независимых слагаемых и распределения отсчетов входного процесса. Это явление называют эффектом нормализации.

Пусть линейная система обладает импульсной характеристикой $h(t, \tau)$. Тогда результат преобразования стационарного нормального процесса

линейной системой даст нормальный СП $\eta(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) \cdot \xi(\tau) d\tau$, который, в

общем случае, уже не будет стационарным. Его среднее значение

определяется выражением $M\{\eta(t)\} = M\{\xi(t)\} \int_{t_0}^t h(t, \tau) d\tau$, и дисперсия

$$M\{\eta(t) - M\{\eta(t)\}\}^2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h(t, \tau_1) h(t, \tau_2) K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Если $t_0 = -\infty$, а $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, что соответствует установившемуся режиму отклика стационарной линейной системы с импульсной характеристикой $h(t)$, то процесс на выходе можно считать стационарным нормальным процессом со средним значением

$$M\{\eta(t)\} = M\{\xi(t)\} \int_0^{\infty} h(t) dt = \text{const}$$

и дисперсией

$$\sigma_{\eta}^2 = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^{\infty} h(t_1) h(t_2) K_{\xi}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \text{const},$$

не зависящими от времени.

Корреляционную функцию можно найти с помощью обратного преобразования Фурье спектральной плотности выходного процесса

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) |K(j\omega)|^2 \exp(j\omega\tau) d\omega,$$

где $K(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt$ – коэффициент передачи линейной цепи.

Часто при обработке сигнала на фоне шума приходится иметь дело с линейным функционалом вида $\eta(t) = \int_0^T s(t) \cdot \xi(t) dt$, где $s(t)$ –

детерминированная функция, $\xi(t)$ – стационарный нормальный СП. Как результат линейного преобразования нормального СП, величина η является нормальной случайной величиной со средним значением

$$M\{\eta\} = M\{\xi\} \cdot \int_0^T s(t) dt$$

и дисперсией

$$D\{\eta\} = \int_0^T \int_0^T s(t_1) s(t_2) K_{\xi}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2.$$

Если $\xi(t)$ – белый шум со спектральной плотностью мощности $S(\omega) = N_0/2$, то корреляционная функция процесса имеет вид

$$K_{\xi}(t_1 - t_2) = (N_0/2) \delta(t_1 - t_2),$$

и дисперсия равна

$$D\{\eta\} = (N_0/2) \int_0^T s^2(t) dt = N_0 E / 2.$$

При формировании нормального случайного процесса (НСП) с заданными характеристиками целесообразно использовать тот факт, что линейное преобразование нормального процесса дает нормальную случайную величину или нормальный случайный процесс. При таком подходе вначале формируется НСП с независимыми отсчетами, это нормальная случайная последовательность, получаемая путем последовательного обращения к датчику нормальных случайных чисел с нулевым средним значением и единичной дисперсией. НСП с требуемой корреляционной функцией получается путем пропускания сформированного НСП с независимыми отсчетами через линейный фильтр, импульсная характеристика которого соответствует желаемой корреляционной функции.

Если мы хотим получить НСП с корреляционной функцией в форме равнобедренного треугольника, т. е.

$$K_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|/T), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases},$$

то импульсная характеристика линейного фильтра $h(t)$ должна иметь форму прямоугольного импульса вида

$$h(t) = \begin{cases} h_0, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases},$$

где h_0 обеспечивает требуемое значение σ^2 .

При компьютерном моделировании отсчет процесса на выходе формирующего фильтра будет равен $x_n = h_0 \sum_{j=0}^k \xi_{n-j}$, где ξ_i - независимые нормальные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией; k - дискретный эквивалент длительности $h(t)$.

Тогда $D\{x_n\} = h_0^2 k$ и при заданном k h_0 определяет требуемую дисперсию σ^2 .

9.2 Распределения отсчетов производной нормального случайного процесса

Отразим вопрос о производной $\xi'(t)$ нормального СП $\xi(t)$. Поскольку оператор дифференцирования линеен, то производная $\xi'(t)$ будет также нормальным СП. Для стационарного НСП $M\{\xi'(t)\} = 0$ и дисперсия $D\{\xi'(t)\} = -d^2 K_\xi(\tau) / d\tau^2 \big|_{\tau=0}$ не зависят от времени.

Учитывая связь $K_\xi(\tau)$ и $S_\xi(\omega)$, можно записать

$$D\{\xi'(t)\} = -\frac{d^2}{d\tau^2} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right] \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \omega^2 \cdot S_\xi(\omega) d\omega.$$

Так как $D\{\xi(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\xi(\omega) d\omega$, то вводя параметр

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^\infty \omega^2 \cdot S_\xi(\omega) d\omega}{\int_0^\infty S_\xi(\omega) d\omega},$$

имеющий смысл отношения средних мощностей процессов $\xi'(t)$ и $\xi(t)$, можно представить ПВ отсчетов производной процесса $\xi'(t)$ в виде

$$W_{\xi'}(x) = \frac{1}{\sigma_\xi \omega_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2 \omega_1^2} \right].$$

Если выражение $S_\xi(\omega) / \left(\int_0^\infty S_\xi(\omega) d\omega \right)$ считать плотностью вероятности (это отношение ≥ 0 и выполняется условие нормировки), то ω_1^2 имеет смысл среднего квадрата, т. е. характеризует как положение спектральной плотности на оси частот, так и ее ширину. Параметр ω_1 называют среднеквадратической частотой для спектральной плотности $S_\xi(\omega)$. Для узкополосного процесса СКО $M_2^{1/2}$, характеризующее в данном случае ширину $S_\xi(\omega)$, много меньше среднего значения m_1 , в роли которого у нас выступает центральная частота ω_0 , поэтому $\omega_1^2 \approx \omega_0^2$.

9.3 Совместные распределения отсчетов процесса и его производной

Часто необходимо знать совместные распределения отсчетов процесса и его производной. Так как процесс и его производная совместно нормальны, то двумерная ПВ отчета процесса $\xi(t)$ в момент t и его производной $\xi'(t)$ в момент $t + \tau$ будет двумерным нормальным распределением с вектором средних значений $(M\{\xi(t)\}, M\{\xi'(t + \tau)\})$, а для стационарного НСП $(m_1, 0)$ и с корреляционной матрицей вида

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi}^2 & K'_{\xi}(\tau) \\ K'_{\xi}(\tau) & \omega_1^2 \sigma_{\xi}^2 \end{pmatrix}.$$

Запишем совместное распределение $W_{\xi, \xi_{\tau}}, (x, y)$ при $m_1 = 0$

$$W_{\xi, \xi_{\tau}}, (x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2 \sqrt{\omega_1^2 - [r'(\tau)]^2}} \exp \left\{ -\frac{\omega_1^2 x^2 - 2r'(\tau)xy + y^2}{2\sigma_{\xi}^2 (\omega_1^2 - [r'(\tau)]^2)} \right\},$$

где $r'(\tau) = \frac{K'_{\xi}(\tau)}{\sigma_{\xi}^2}$ - коэффициент корреляции.

При $\tau = 0$, $r'(0) = 0$ и совместное распределение примет вид

$$W_{\xi, \xi_0}, (x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}} \exp \left(-x^2 / (2\sigma_{\xi}^2) \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2 \omega_1^2}} \exp \left(-y^2 / (2\sigma_{\xi}^2 \omega_1^2) \right),$$

т. е. отсчеты НСП и его производной в совпадающие моменты времени ($\tau = 0$) независимы.

Ранее говорилось о некоррелированности отсчетов процесса и его производной в совпадающие моменты времени. Напомним, что для нормальных СВ некоррелированность влечет независимость.

10 УЗКОПОЛОСНЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

10.1 Описание узкополосного нормального СП

Для узкополосных СП весьма продуктивным является представление СП в виде модели

$$x(t) = X(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta(t)),$$

где $X(t) \geq 0$ - огибающая СП; $\theta(t)$ - случайная фаза; ω_0 - центральная частота спектра.

Преобразование исходного процесса $x(t)$ с помощью линейного оператора Гильберта даст узкополосный процесс вида

$$x_{\perp}(t) = X(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \theta(t)),$$

который будет также гауссовским процессом.

Рассматриваемую модель узкополосного СП можно описать выражением $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) - B(t) \sin(\omega_0 t)$,

где $A(t) = X(t) \cos \theta(t)$ и $B(t) = X(t) \sin \theta(t)$ - квадратурные компоненты узкополосного процесса $x(t)$.

Квадратурные компоненты $A(t)$ и $B(t)$, равные

$$A(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + x_{\perp}(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

и

$$B(t) = x(t) \cdot \sin(\omega_0 t) - x_{\perp}(t) \cdot \cos(\omega_0 t),$$

будут также гауссовскими процессами.

Однако отметим, что в отличие от процессов $x(t)$ и $x_{\perp}(t)$, они будут представлять собой видеопроцессы, спектральная плотность которых группируется в окрестностях нулевой частоты.

Можно показать, что процессы $A(t)$ и $B(t)$ в совпадающие моменты времени некоррелированы и независимы. Квадратурные процессы имеют нулевые средние значения $M\{A(t)\} = M\{B(t)\} = 0$ и одинаковые дисперсии σ^2 , совпадающие с дисперсией исходного процесса $x(t)$.

Как отмечалось выше, квадратурные компоненты $A(t)$ и $B(t)$ связаны с огибающей $X(t)$ и фазой $\theta(t)$ соотношениями

$$X(t) = \sqrt{A(t)^2 + B(t)^2} \quad \text{и} \quad \theta(t) = \arctg(B(t)/A(t)).$$

Если воспользоваться ранее рассмотренной задачей об определении ПВ модуля и аргумента нормального случайного вектора, то можем записать ПВ для отсчетов огибающей $X(t) = X$ и фазы $\theta(t) = \theta$

$$W_X(x) = x^2 / \sigma^2 \exp\left(-x^2 / (2\sigma^2)\right), \quad x \geq 0$$

и

$$W_{\theta} = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Это хорошо знакомые нам распределения Рэлея для огибающей и равномерное распределение для фазы θ .

10.2 Преобразования узкополосного нормального СП

Узкополосный НСП формируется также, как и в предыдущем примере, на основании импульсной характеристики формирующего фильтра в виде узкополосного радиоимпульса.

Если мы хотим получить узкополосный НСП с корреляционной функцией вида

$$K_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 (1 - |\tau|/T) \cdot \cos(2\pi f_0 \tau), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$

то импульсная характеристика формирующего фильтра должна иметь вид

$$h(t) = \begin{cases} h_0 \cdot \sin(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

Условие узкополосности означает выполнение неравенства $T \gg 1/f_0$, т. е. $h(t)$ должна содержать достаточно большое (10 и более) число периодов синусоидального колебания $\sin(2\pi f_0 t)$. Множитель h_0 , как и в предыдущем задании, обеспечивает получение требуемой дисперсии σ^2 .

При компьютерном моделировании для рассматриваемого фильтра $x_n = h_0 \sum_{j=0}^k \xi_{n-j} \cdot \sin(2\pi f_0 j \Delta t)$, где $\Delta t = T_0/l$, l – число отсчетов за период колебания $\sin(2\pi f_0 t)$, $k = T/\Delta t$, ξ_i – независимые нормальные СВ с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Так как $M\{\xi_i\} = 0$, то $M\{x_n\} = 0$ и

$$\begin{aligned} D\{x_n\} &= h_0^2 \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^k M\{\xi_{n-j} \cdot \xi_{n-i}\} \sin(2\pi f_0 j \Delta t) \cdot \sin(2\pi f_0 i \Delta t) = \\ &= \frac{h_0^2}{2} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^k M\{\xi_{n-j} \cdot \xi_{n-i}\} (\cos(2\pi f_0 (i-j) \Delta t) - \cos(2\pi f_0 (i+j) \Delta t)). \end{aligned}$$

Учитывая, что $M\{\xi_{n-j} \cdot \xi_{n-i}\} = \begin{cases} 1, & j = i; \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$ получим:

$$D\{x_n\} = \frac{h_0^2}{2} \sum_{j=0}^k (1 - \cos(4\pi f_0 j \Delta t)) = \frac{h_0^2}{2} \left(k - \sum_{j=0}^k \cos\left(\frac{4\pi}{l} j\right) \right),$$

поскольку $f_0 \Delta t = 1/l$. Если за счет выбора l величина $4\pi/l$ достаточно мала и составляет несколько градусов, а $k \gg l$, то стоящей в скобках суммой можно пренебречь. Тогда $D\{x_n\} \approx kh_0^2/2 = \sigma^2$ и $h_0^2 = 2\sigma^2/k$.

10.3 Свойства и характеристики линейной смеси узкополосного нормального СП и детерминированного сигнала

Пусть к узкополосному нормальному процессу $x(t) = X(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta(t))$ добавляется детерминированный сигнал $s(t) = S(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, где $S(t)$ и $\varphi(t)$ – огибающая и фаза, определяющие законы амплитудной и фазовой модуляции.

Тогда суммарное колебание $y(t) = x(t) + s(t)$, также как и раньше, можно представить с помощью квадратурных компонент

$$y(t) = C(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - D(t) \cdot \sin(\omega_0 t),$$

где

$$C(t) = A(t) + S(t) \cdot \cos \varphi(t)$$

и

$$D(t) = B(t) + S(t) \cdot \sin \varphi(t).$$

Таким образом, суммарный узкополосный процесс $y(t)$ записывается с помощью огибающей $Y(t)$ и фазы $\psi(t)$, как

$$y(t) = Y(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \psi(t)),$$

где

$$Y(t) = \sqrt{C^2(t) + D^2(t)}, \text{ а } \psi(t) = \arctg(C(t)/D(t)).$$

Отметим, что процесс $y(t)$, как сумма НСП $x(t)$ и детерминированного сигнала $s(t)$, будет также нормальным случайным процессом, но уже нестационарным. Его среднее значение $M\{y(t)\} = M\{x(t)\} + M\{s(t)\} = s(t)$ зависит от времени.

Квадратурные компоненты $C(t)$ и $D(t)$ являются независимыми НСП с одинаковыми дисперсиями σ^2 и средними значениями

$$M\{C(t)\} = S(t) \cdot \cos[\varphi(t)]$$

и

$$M\{D(t)\} = S(t) \cdot \sin[\varphi(t)].$$

Если сигнал $s(t)$ является детерминированным гармоническим колебанием вида $s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, то нетрудно показать, что у квадратурных компонент результирующего узкополосного нормального СП $y(t) = x(t) + s(t)$ появляются средние значения $U_m \cdot \cos(\varphi)$ и $U_m \cdot \sin(\varphi)$ соответственно.

Вспоминая рассмотренную задачу о распределении модуля и аргумента нормального случайного вектора, у которого средние значения проекций на декартовы координатные оси отличны от нуля, запишем ПВ для огибающей и фазы НСП $y(t)$. Отсчеты огибающей будут подчиняться распределению Релея–Райса:

$$W_y(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2 + U_m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{y \cdot U_m}{\sigma^2}\right), y \geq 0$$

а отсчеты фазы будут подчиняться распределению

$$W_\Psi(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{U_m^2}{2\sigma^2}\right) +$$

$$+ \frac{U_m \cos(\Psi - \varphi)}{\sigma \sqrt{2\pi}} \Phi \left(\frac{U_m \cos(\Psi - \varphi)}{\sigma} \right) \exp \left(-\frac{U_m^2}{2\sigma^2} \sin^2(\Psi - \varphi) \right), \quad |\Psi - \varphi| \leq \pi.$$

Вид распределения будет определяться параметром $h = U_m/\sigma$ - отношением амплитуды сигнала к среднеквадратическому значению процесса $x(t)$.

Хотя процесс $y(t)$ по-прежнему будет нестационарным (его среднее значение равно $s(t)$ зависит от времени), огибающая $Y(t)$ и фаза $\psi(t)$ являются теперь процессами стационарными в широком смысле.

При $h \ll 1$, заменяя функцию $I_0(x)$ первыми двумя членами определяющего ее степенного ряда, т. е., считая $I_0(x) \approx 1 + x^2/4$ при $|x| \ll 1$,

получим
$$W_y(y) \cong \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + \frac{h^2}{4} \left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

При $h \ll 1$ можно воспользоваться асимптотическим представлением функции $I_0(x)$ при больших значениях аргумента $I_0(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, где $O(1/x)$ - бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $1/x$.

Подставляя это выражение в распределение Рэлея–Райса, после несложных преобразований и перехода к безразмерной переменной $x = y/\sigma$,

получим
$$W(x) = \sqrt{\frac{x}{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-h)^2}{2}\right).$$

Таким образом, с точностью до множителя $\sqrt{x/h}$ распределение Рэлея–Райса при $h \ll 1$ стремится к нормальному, которое с учетом сделанной замены $x = y/\sigma$ имеет среднее значение U_m и дисперсию σ^2 .

Хорошо известно, что с вероятностью 0.997 значения нормальной случайной величины сосредоточены на промежутке $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ – правило “трех сигма”. В этой области поправочный множитель $\sqrt{x/h}$ при $h \ll 1$ мало отличается от единицы.

На рис. 9.1 представлен вид распределения Рэля–Райса при различных значениях параметра h .

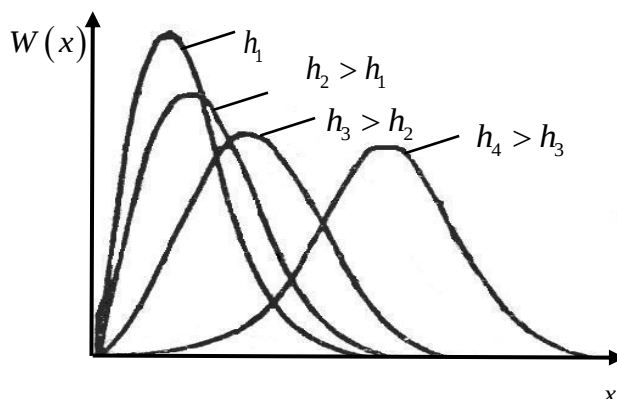


Рис. 9.1. Вид распределения Рэля–Райса при различных значениях параметра h .

Что касается распределения фазы, то при $h \ll 1$ оно хорошо аппроксимируется косинусоидальным распределением вида

$$W(\Psi) \cong \frac{1}{2\pi} \left(1 + h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(\Psi - \varphi) \right), \quad |\Psi - \varphi| \leq \pi.$$

При $h \gg 1$ распределение фазы стремится к нормальному со средним значением φ и дисперсией $1/h^2$, т. е.

$$W(\Psi) \cong \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{h^2 (\Psi - \varphi)^2}{2} \right), \quad |\Psi - \varphi| \leq \pi.$$

На рис. 9.2 приведено распределение $W(\psi)$ для различных значений параметра h .

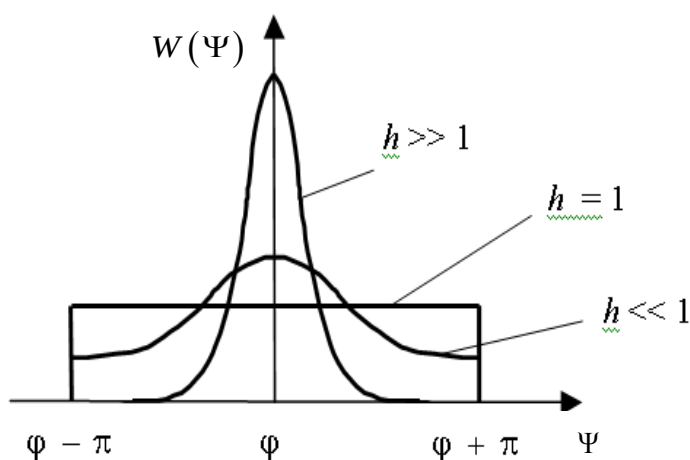


Рис. 9.2. Распределение фазы для различных значений параметра h .

Рассмотрим вопрос о стационарности суммы стационарного узкополосного процесса и гармонического сигнала.

Если начальная фаза φ сигнала $s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $[-\pi, +\pi]$, то суммарный процесс в предположении о независимости сигнала и узкополосного нормального процесса, будет стационарным в широком смысле, так как его среднее значение, равное сумме средних, будет равно нулю, а корреляционная функция, также равная сумме КФ слагаемых, будет равна $K(\tau) + U_m^2/2 \cos(\omega_0 \tau)$, где $K(\tau)$ - КФ узкополосного процесса, а $U_m^2/2 \cos(\omega_0 \tau)$ - корреляционная функция сигнала $s(t)$, будет зависеть лишь от τ .

Вид этого распределения для нескольких значений параметра $h = U_m/\sigma$ представлен на рис. 9.3.

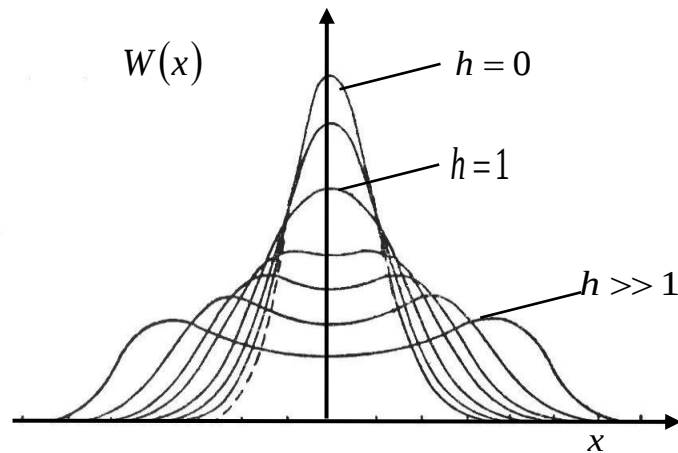


Рис. 9.3. Вид распределения узкополосного случайного процесса и гармонического колебания

Отметим, что суммарный процесс перестанет быть нормальным, так как ПВ его отсчетов, ПВ суммы независимых случайных величин, будет являться сверткой нормального распределения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

и распределения закона арксинуса

$$\frac{1}{\pi\sqrt{U_m^2 - x^2}}, |x| \leq U_m,$$

которому подчиняются отсчеты $s(t)$ при равномерном распределении φ в интервале $[-\pi, +\pi]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оканчивая теоретический курс «Введение в теорию случайных величин и процессов», хотелось бы сделать несколько замечаний по его использованию в учебном процессе.

В пособии основной упор сделан на овладение ключевыми положениями изучаемой дисциплины, которой в данном случае является теория случайных величин и процессов. Понимание представленного материала невозможно без серьезного изучения теории, анализа решений типовых задач и самостоятельной работы студентов по решению задач.

Список литературы

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – книга первая. М.: Сов. радио, 1966.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982.
3. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.
4. Математический аппарат радиотехники. Ч. 2. Случайные процессы: Учеб. пособие / Под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006, 128 с.
5. Компьютерный практикум по дисциплинам «Математический аппарат радиотехники» и «Статистическая теория РТС». Учеб. пособие / Под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011, 155 с.
6. Математическое моделирование случайных процессов. Учеб. пособие / Под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012, 127 с.