

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО»

Н. Е. Быстров

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2016

УДК 51-7:621.37(075.8)
ББК 32.811.3я73
Б95

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

профессор **Ю. Д. Ульяницкий**
(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет)

доктор технических наук **В. А. Едемский**
(Новгородский государственный университет)

Быстров, Н. Е.

Б95

Введение в статистическую теорию радиотехнических систем: учебное пособие / Н.Е. Быстров, НовГУ им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, 2016 г. – 104 с.

Учебное пособие содержит основные сведения из статистической теории радиотехнических систем, необходимые для понимания принципа представления реальных физических сигналов статистической радиотехники.

Рассматриваются математические модели сигналов и помех, на основе которых решаются задачи обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов современных РТС.

Учебное пособие отвечает новым образовательным стандартам и предназначено для подготовки бакалавров по направлению 11.03.01 – «Радиотехника».

Пособие подготовлено и издано в рамках выполнения Госзадания Минобрнауки России.

УДК 51-7:621.37(075.8)
ББК 32.811.3я73

© Новгородский государственный
университет, 2016
© Н. Е. Быстров, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ.....	5
1.1. Аналитическое описание радиосигналов.....	5
1.2 Аналитическое описание помех	13
2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ.....	18
2.1. Общая задача приема сигналов	18
2.2. Задачи оптимального приема сигналов	21
2.3. Критерии качества оптимального приема сигналов.....	23
2.4. Фильтры, максимизирующие отношение сигнал/шум	25
3. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ	34
3.1. Разрешение по времени запаздывания.....	34
3.2. Разрешение по времени и частоте	35
3.3. Частотно-временная ФН прямоугольного радиоимпульса.....	37
3.4. Частотно-временная ФН радиоимпульса.....	39
с линейной частотной модуляцией.....	39
3.5. Особенности частотно-временной ФН	40
сложных дискретных сигналов	40
3.6. Анализ ФН дискретных фазоманипулированных сигналов	42
3.7. Влияние боковых лепестков ФН на разрешение сигналов.....	44
4. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ	46
4.1. Обнаружение детерминированных сигналов.....	47
4.2. Функция и отношение правдоподобия сигналов	49
на фоне аддитивного нормального шума	49
4.3. Обнаружение сигналов со случайными параметрами	56
5. РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ	68
5.1. Оптимальное различение сигналов.....	68
5.2. Различение двух детерминированных сигналов.....	68
5.3. Различение М-детерминированных сигналов.....	73
5.4. Различение сигналов со случайными начальными фазами	77
6. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА	80
6.1. Байесовские оценки случайных параметров сигналов	80
6.2. Критерии оценки неслучайных параметров сигналов	83
и граница Крамера – Рао	83
6.3. Измерение параметров сигнала при воздействии.....	86
аддитивного нормального шума	86
6.4. Устройства измерения параметров сигнала.....	91
Заключение.....	102
Литература	103

Предисловие

Дисциплина «Статистическая теория радиотехнических систем» занимает важное место в программе подготовки специалистов по направлению «Радиотехника». Структура учебных планов подготовки бакалавров по направлению 11.03.01 – «Радиотехника» характеризуется существенным сокращением числа часов, отводимых на лекционные занятия, в рамках которых необходимо изложить концептуальные основы дисциплины, перенести изучение деталей и подробностей на самостоятельную работу. Это соображение и побудило автора к написанию учебного пособия, отвечающего изложенной выше стратегии преподавания. Без овладения современными методами анализа и синтеза систем обработки сигналов трудно рассчитывать на глубокое освоение специальных дисциплин и успешную научно-исследовательскую работу, которая является важным звеном образовательного процесса.

Изучение дисциплины «Статистическая теория радиотехнических систем» опирается на серьезную математическую подготовку, особенно в области теории вероятностей, случайных величин и процессов. Эта предварительная подготовка, помимо цикла «Высшая математика», реализуется с помощью дисциплины «Математический аппарат статистической радиотехники», предшествующей разделам дисциплины, которым посвящено настоящее учебное пособие.

Предлагаемое учебное пособие отражает основные разделы «Статистической радиотехники». В пособии отражены математические модели сигналов и помех и рассматривается теория оптимального приема сигналов. Формулируются задачи и критерии качества оптимального приема сигналов. Далее рассматривается общая теория разрешения сигналов. Детально отражены вопросы частотно-временного разрешения сигналов. Анализируются разрешающие характеристики сигналов с линейной частотной модуляцией частоты и сложных фазоманипулированных импульсов. Рассматривается влияние боковых лепестков функции неопределенности на разрешение сигналов. Особое внимание уделено теории обнаружения сигналов и различения сигналов. Рассматриваются как детерминированные сигналы, так и сигналы со случайными параметрами.

Завершается пособие разделом оценивания параметров сигнала, в котором рассматриваются алгоритмы и устройства оценивания амплитуды, задержки и частоты принимаемых сигналов.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Ю.Д. Ульяницкому за рецензирование и полезные замечания, способствующие качественному изложению материалов пособия.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

1.1. Аналитическое описание радиосигналов

Под сигналом понимают физический процесс, с помощью которого осуществляется перенос информации. Сигналы, используемые в радиотехнических системах, характеризуются совокупностью своих параметров $s(t, \lambda)$. Если параметр λ содержит только информационные параметры, то сигнал называется полностью известным. В общем случае сигнал $s(t, \lambda)$ может иметь и случайные параметры. Поэтому модели сигналов, встречающихся далее, будут варьироваться в зависимости от содержания исследуемого вопроса.

Наряду с описанием сигнала как функции времени и параметров $s(t, \lambda)$ широко используется спектральное представление, определяемое для абсолютно интегрируемых сигналов как

$$\tilde{s}(\omega, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \lambda) e^{-j\omega t} dt.$$

В общем случае комплексная функция $\tilde{s}(\omega, \lambda)$, вещественная для четных сигналов, называемая Фурье-спектром или просто спектром сигнала $s(t, \lambda)$, может быть представлена в виде

$$\tilde{s}(\omega, \lambda) = |\tilde{s}(\omega, \lambda)| e^{j\varphi(\omega, \lambda)},$$

где четная функция $|\tilde{s}(\omega, \lambda)|$ называется амплитудным, а нечетная функция $\varphi(\omega, \lambda)$ – фазовым спектром сигнала.

Эффективная ширина спектра и эффективная длительность сигнала.

Сигналы, используемые в РТС, традиционно подразделяются на видео- и радиосигналы: спектры первых концентрируются в окрестности нулевой частоты, тогда как спектры радиосигналов концентрируются в окрестности центральной частоты ω_0 , определяемой как

$$\omega_0 = \frac{\int_0^{\infty} \omega |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |s(\omega, \lambda)|^2 d\omega}. \quad (1.1)$$

Важной характеристикой спектра сигнала является среднеквадратическая частота, определяемая как

$$\omega_{\text{СК}} = \left[\int_0^{\infty} \omega^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \bigg/ \int_0^{\infty} |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Ширину спектра радиосигнала $\Delta\omega_p$ можно определить по выражению

$$\Delta\omega_p = \left[\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \bigg/ \int_0^{\infty} |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right]^{1/2}. \quad (1.3)$$

Величина $\Delta\omega_p$ имеет смысл среднеквадратического отклонения (СКО) для распределения $W(\omega)$ и называется среднеквадратической шириной спектра.

Более универсальной характеристикой является эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{\text{эфф}}$, определяемая как

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{|\tilde{s}(\omega_{\text{max}}, \lambda)|^2} \int_0^{\infty} |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega, \quad (1.4)$$

где ω_{max} - абсцисса максимума функции $|\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2$ на положительной части оси частот.

Аналогичные характеристики используются для оценки протяженности сигнала и его положения на оси времени. Так среднеквадратическая длительность сигнала определяется, как

$$\Delta t_{\text{СК}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 s^2(t, \lambda) dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt \right]^{1/2}, \quad (1.5)$$

где $t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot s^2(t, \lambda) dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt$ - характеризует временное положение сигнала.

Эффективная длительность сигнала $\Delta t_{\text{эфф}}$ по аналогии с $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ равна

$$\Delta t_{\text{эфф}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt}{s_{\text{max}}^2}. \quad (1.6)$$

Напомним, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega = E(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ – энергия сигнала.

Для комплексных сигналов следует заменить $s^2(t, \lambda)$ на $|s(t, \lambda)|^2$.

Радиосигнал с частотно-временным произведением $B = \Delta\omega\Delta t$, называемым базой сигнала, значительно превышающей единицу, принято называть сложным, в отличие от простых, для которых это произведение имеет порядок единицы.

Огибающая и фаза.

подавляющее большинство сигналов РТС являются узкополосными (несмотря на то, что ширина спектра может быть весьма большой – десятки и сотни мегагерц). Условие узкополосности выполняется за счет выбора соответствующего значения центральной частоты ω_0 .

Для узкополосных сигналов удобным является представление с помощью огибающей $S(t, \lambda_1)$ и фазы $\varphi(t, \lambda_2)$

$$s(t, \lambda) = S(t, \lambda_1) \cos(\omega_0 t + \varphi(t, \lambda_2)) = S(t, \lambda_1) \cos \Phi(t, \lambda_2), \quad (1.7)$$

где $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ и λ_1, λ_2 компоненты вектора λ , от которых зависят огибающая и фаза соответственно. При этом огибающая $S(t, \lambda_1)$ и фаза $\varphi(t, \lambda_2)$ являются медленно меняющимися функциями времени по сравнению с исходным сигналом, скорость изменения которого определяется множителем $\cos(\omega_0 t + \varphi(t, \lambda_2))$. Это обстоятельство позволяет существенно упростить вычисление энергии узкополосного сигнала, так как

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) \cos^2(\omega_0 t + \varphi(t, \lambda_2)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) \cos(2\omega_0 t + 2\varphi(t, \lambda_2)) dt. \end{aligned}$$

В этом выражении вторым слагаемым по сравнению с первым для узкополосного сигнала можно пренебречь и получим

$$E \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) dt. \quad (1.8)$$

Таким образом, параметры λ_2 определяющие поведение фазы $\varphi(t, \lambda_2)$ не влияют на энергию узкополосного сигнала и их можно считать неэнергетическими.

Замена сигнала $s(t)$ двумя новыми функциями: огибающей $S(t)$ и фазой $\Phi(t)$, т.е. представление в форме $s(t) = S(t) \cos \Phi(t)$ может быть сделано различными способами. Однако для узкополосных сигналов решение многих задач упростится, если прибегнуть к комплексному представлению радиосигналов. Для узкополосных сигналов наиболее продуктивным является использование гильбертовых огибающей и фазы, определяемых на основе преобразования Гильберта исходного сигнала

$$s_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1.9, a)$$

Записанный интеграл есть свертка исходного сигнала $s(t)$ и функции $h_b(t) = 1/(\pi \cdot t)$, которую можно рассматривать как импульсную характеристику фильтра, реализующего преобразование Гильберта.

Аналогично можно выразить исходный сигнал через квадратурный $s_{\perp}(t)$

$$s(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_{\perp}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1.9, б)$$

Комплексная функция суммы исходного синфазного и квадратурного сигналов

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= s(t) + js_{\perp}(t) = S(t) \cos \omega_0 t + \varphi(t) + j \sin \omega_0 t + \varphi(t) = \\ &= S(t) \cdot \exp[j\varphi(t)] \cdot \exp[j\omega_0 t] = \dot{S}(t) \cdot \exp[j\omega_0 t] \end{aligned} \quad (1.10)$$

называется *аналитическим сигналом*.

Как видно из выражения (1.10) для аналитического сигнала $\dot{s}(t)$, функция

$$\dot{S}(t) = S(t) \cdot \exp -j\varphi(t) , \quad (1.11)$$

называется *комплексной огибающей сигнала*.

Комплексная огибающая содержит в себе всю информацию о законах амплитудной $S(t)$ и угловой $\varphi(t)$ модуляции, т.е. по существу всю информацию о сигнале, кроме характеристики положения спектра на оси частот, определяемого средней частотой ω_0 .

Располагая аналитическим сигналом $\dot{s}(t)$, можно определить гильбертовы огибающую $S(t)$ и фазу $\Phi(t)$ следующим образом

$$S(t) = \sqrt{s^2(t) + s_{\perp}^2(t)} ; \quad (1.12)$$

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{s_{\perp}(t)}{s(t)} + \pi \frac{\operatorname{sign} s(t) - 1}{2}.$$

Из определения аналитического сигнала (1.10) и комплексной огибающей (1.11) видно, что исходный сигнал можно представить в виде

$$s(t) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t) \cdot \exp -j\omega_0 t \right]. \quad (1.13)$$

Спектральное представление радиосигналов.

Наряду с описанием сигнала как функции времени $s(t)$, широко используется спектральное представление, определяемое выражением

$$\tilde{s}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp -j\omega t \, dt. \quad (1.14)$$

Комплексная функция $\tilde{s}(\omega)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{s}(j\omega) = |\tilde{s}(\omega)| \cdot \exp -j\varphi(\omega) , \quad (1.15)$$

где четная функция $|\tilde{s}(\omega)|$ называется амплитудным, а нечетная функция $\varphi(\omega)$ - фазовым спектром сигнала.

Аналогично можно определить спектральную плотность комплексной огибающей сигнала $\dot{S}(t)$:

$$\tilde{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (1.16)$$

На основании (1.13) выразим спектральную плотность $\tilde{S}(j\omega)$ сигнала $s(t)$ через спектральную плотность $\tilde{S}(j\omega)$ комплексной огибающей

$$\begin{aligned} \tilde{S}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\dot{S}(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)] \cdot \exp(-j\omega \cdot t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \exp[-j(\omega - \omega_0) \cdot t] dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}^*(t) \cdot \exp[-j(\omega + \omega_0) \cdot t] dt = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \tilde{S}^*(-\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, спектральная плотность узкополосного сигнала $\tilde{S}(j\omega)$ может быть найдена путем переноса спектра комплексной огибающей $\tilde{S}(j\omega)$ из окрестности нулевой частоты в окрестность точек $\pm\omega_0$.

Характерный вид амплитудного спектра узкополосного сигнала и его комплексной огибающей представлен на рис. 1.1.

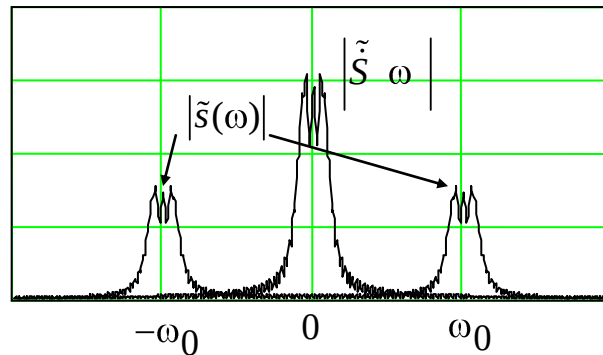


Рис. 1.1. Вид амплитудного спектра узкополосного сигнала и его комплексной огибающей.

Определим спектральную плотность аналитического сигнала $\dot{s}(t)$. Зная временную функцию Гильберта $hb(t) = 1/\pi \cdot t$, можно определить и частотную характеристику преобразования Гильберта

$$Hb(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/\pi t \cdot \exp(-j\omega t) dt = \begin{cases} \exp(-j\pi/2), & \omega \geq 0 \\ \exp(j\pi/2), & \omega < 0 \end{cases}. \quad (1.18)$$

Следовательно, преобразование Гильберта не меняя амплитудных значений спектральных составляющих, сдвигает фазы составляющих на $\pi/2$, делая

сигнал $s_{\perp}(t)$ ортогональным относительно исходного сигнала $s(t)$.

В силу этого спектральные плотности исходного и квадратурного сигналов связаны между собой следующим соотношением:

$$\tilde{s}_{\perp}(\omega) = Hb_{\omega} \cdot \tilde{s}(\omega) = \begin{cases} j \cdot \tilde{s}(\omega), & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j \cdot \tilde{s}(\omega), & \omega > 0 \end{cases}. \quad (1.19)$$

Отсюда получаем спектральную плотность аналитического сигнала

$$\tilde{\tilde{s}}(j\omega) = \begin{cases} 2\tilde{s}(j\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

На рис. 1.2 приведен пример амплитудного спектра $\tilde{s}(\omega)$ узкополосного сигнала и соответствующему ему спектр $\tilde{\tilde{s}}(\omega)$ аналитического сигнала.

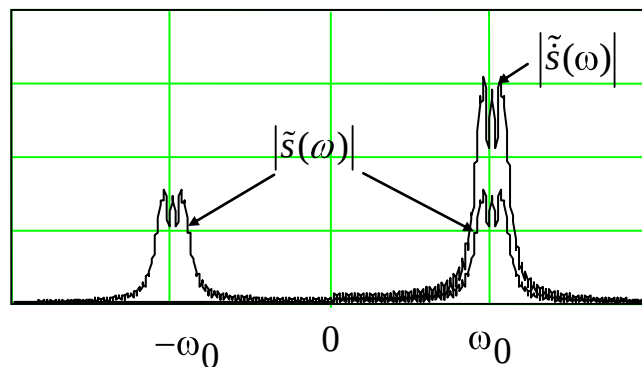


Рис. 1.2. Вид амплитудного спектра узкополосного сигнала и спектра аналитического сигнала.

Спектральную плотность аналитического сигнала отлична от нуля только в области положительных частот и ее значение равно удвоенному значению спектральной плотности сигнала $s(t)$. В области отрицательных частот суммирование спектральных плотностей исходного и квадратурного сигналов приводит к их взаимной компенсации.

Сопоставляя спектральные плотности комплексной огибающей $\tilde{S}(\omega)$ и аналитического сигнала $\tilde{\tilde{s}}(\omega)$ можно видеть, что они полностью совпадают по форме, но спектральная плотность аналитического сигнала располагается в области положительных частот.

Корреляционные функции и функции неопределенности.

Важнейшей характеристикой сигнала является его корреляционная функция $R(\tau)$, определяемая как скалярное произведение сигнала $s(t)$ на его комплексно-сопряженную копию $s^*(t - \tau)$ сдвинутую на время τ , т.е.

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t - \tau) dt. \quad (1.21)$$

На основании равенства Парсеваля корреляционная функция может быть выражена через спектр сигнала

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 \cdot \exp j\omega\tau d\omega, \quad (1.22)$$

т.е. она является преобразованием Фурье энергетического спектра сигнала.

Для комплексной огибающей $\dot{S}(t)$, корреляционная функция описывается выражением

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau) dt. \quad (1.23)$$

Подставив в (1.22) описание сигнала в форме (1.13), получим

$$\begin{aligned} R_s \tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t) \cdot \exp j\omega_0 t \right] \cdot \operatorname{Re} \left[\dot{S}^*(t - \tau) \cdot \exp -j\omega_0 t - \tau \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau) dt \cdot \exp j\omega_0 \tau \right] = \frac{1}{2} R \tau \cdot \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Таким образом, корреляционная функция сигнала $R_s(\tau)$ с точностью до постоянного множителя равна реальной части корреляционной функции аналитического сигнала или произведению корреляционных функций комплексной огибающей $R(\tau)$ и гармонического косинусоидального колебания.

Обобщением функции корреляции является функция неопределенности (ФН) сигнала $s(t, \lambda)$ по параметру λ

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \lambda_1) \cdot s^*(t, \lambda_2) dt. \quad (1.25)$$

Если ФН зависит только от разности одноименных компонентов вектора λ , то такая ФН называется функцией неопределенности стационарного типа.

В этом случае функция неопределенности описывается выражением

$$\dot{\psi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t, \lambda) dt. \quad (1.26)$$

С учетом сказанного ФН комплексной огибающей $\dot{S}(t, \lambda)$ имеет вид

$$\dot{\psi}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t, \lambda) dt. \quad (1.27)$$

Часто функцией неопределенности называют абсолютное значение (1.27), обозначая его как $\Psi(\lambda)$, т.е.

$$\Psi(\lambda) = \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t, \lambda) dt \right|. \quad (1.28)$$

Особую роль играет частотно-временная ФН Вудворда, соответствующая случаю когда $\lambda = (\tau, F)$, где τ и F смещение сигнала по времени и по частоте. Так как сдвигу спектра на F Гц отвечает во временной области умножение на $\exp -j2\pi Ft$, то с учетом комплексного сопряжения в (1.28), можно записать

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau) \exp -j2\pi Ft dt \right|. \quad (1.29)$$

1.2 Аналитическое описание помех

В радиотехнических системах приходится сталкиваться с различными видами помех. Помеху $x(t)$ можно рассматривать как случайный процесс (СП). Исчерпывающим описанием СП на интервале наблюдения $[0, T]$ является задание совместной ПВ отсчетов $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ при любом n и любом расположении моментов $t_1, t_2, \dots, t_n$ в пределах интервала наблюдения $[0, T]$. Понятно, что для точного описания СП $x(t)$ на интервале наблюдения $[0, T]$ потребуется предельный переход в ПВ $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ при $\Delta t \rightarrow 0$,

при котором ПВ переходит в функционал плотности вероятности (ФПВ) $W[x(t)]$, показывающий, насколько одна реализация СП более или менее вероятна, чем другая.

Среди моделей СП наибольшее распространение получил нормальный, или гауссовский, процесс. Перечислим аргументы в пользу данной модели.

1. Результат прохождения СП с произвольным, но удовлетворяющим условиям центральной предельной теоремы распределением отсчетов, через линейную систему приближенно является гауссовским СП, если ширина спектра исходного процесса много больше полосы пропускания линейной системы. Данное явление называется эффектом нормализации.

2. Для исчерпывающего описания нормального СП достаточно знать его математическое ожидание и корреляционную функцию.

3. Линейное преобразование нормального СП дает нормальный случайный процесс или нормальную СВ, если преобразование осуществляется линейным функционалом.

Напомним, как выглядит многомерное нормальное распределение ПВ $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для его записи необходимо знать вектор средних значений $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, где T – знак транспонирования, $a_i = M\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $M\{\cdot\}$ – символ статистического усреднения, а также корреляционную матрицу $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}$, где $K_{ij} = M\{(x_i - a_i)(x_j - a_j)\}$ – ковариация i -й и j -й СВ. Так как $K_{ij} = K_{ji}$, то $\mathbf{K}$ – симметрическая матрица, ее диагональные элементы $K_{ii} = M\{(x_i - a_i)^2\}$ являются дисперсиями СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Кроме того, матрица $\mathbf{K}$ предполагается невырожденной, т.е. ее определитель $\det \mathbf{K} = |\mathbf{K}|$ отличен от нуля. Матрица $\mathbf{K}$ имеет обратную матрицу $\mathbf{K}^{-1}$.

Корреляционная матрица $\mathbf{K}$ является неотрицательно определенной. Это означает, что выражение $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij} (x_j - a_j)$, называемое квадратич-

ной формой, неотрицательно при любых x_i, x_j и a_i, a_j . Неотрицательно определенной является и матрица, обратная корреляционной $\mathbf{K}^{-1}$, т.е. при любых

x_i, x_j, a_i, a_j справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij}^{-1} (x_j - a_j) \geq 0$.

Многомерное нормальное распределение после введенных обозначений примет вид

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^n \det K}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij}^{-1} (x_j - a_j) \right), \quad (1.30)$$

или в векторно-матричной форме

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

В результате предельного перехода в показателе экспоненты выражения (1.30), записанного для моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ при $\Delta t \rightarrow 0$ описанная выше квадратичная форма превратится в двойной интеграл

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij}^{-1} (x_j - a_j) \right) = \\ = \int_0^T \int_0^T (x(t_1) - a(t_1)) K^{-1}(t_1, t_2) (x(t_2) - a(t_2)) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\Delta t = \max_i |t_i - t_{i-1}|$.

В полученном выражении обратная корреляционная функция $K^{-1}(t_1, t_2)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^T K^{-1}(t_1, t) K(t, t_2) dt = \delta(t_1, t_2). \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) представляет собой результат предельного перехода в матричном тождестве $KK^{-1} = E = \sum_{l=1}^n K_{il} K_{lj}^{-1} = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Таким образом, ФПВ нормального случайного процесса имеет вид

$$W(x(t)) = k \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T x(t_1) - a(t_1) \quad K^{-1} \quad t_1, t_2 \quad x(t_2) - a(t_2) \quad dt_1 dt_2 \right), \quad (1.33)$$

где $a(t)$ – среднее значение процесса $x(t)$. Коэффициент $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi^n \det K}}$ не зависит от реализации процесса $x(t)$, и для целей обработки наблюдаемых данных несущественен.

Рассмотрим, как выглядит ФПВ некоторых гауссовских процессов. Одной из основных моделей помехи является нормальный белый шум (НБШ), спектральная плотность которого $S(\omega) = N_0 / 2$ в пределах всей частотной оси, а корреляционная функция $K(t_1 - t_2) = (N_0 / 2) \delta(t_1 - t_2)$. Этой моделью можно пользоваться, если спектральная плотность помехи постоянна в пределах расположения основной части спектра сигнала. При этом за значение $N_0 / 2$ принимается значение спектральной плотности в этих пределах.

Решая уравнение (1.32) с учетом того, что

$$K(t_1 - t_2) = (N_0 / 2) \delta(t_1 - t_2), \quad (1.34)$$

и принимая во внимание, фильтрующее свойство δ -функции получим

$$K^{-1}(t_1, t_2) = (2 / N_0) \delta(t_1 - t_2). \quad (1.35)$$

Подставляя найденное значение обратной корреляционной функции в (1.33) и учитывая, что среднее значение белого шума равно нулю, получим следующее выражение для ФПВ нормального белого шума

$$W(x(t)) = k \exp \left(-(1 / N_0) \int_0^T x^2(t) dt \right). \quad (1.36)$$

Полученное выражение показывает, что чем меньше энергия реализации в пределах интервала наблюдения $\int_0^T x^2(t) dt$, тем она более вероятна.

Если к нормальному белому шуму $x(t)$ добавляется сигнал $s(t)$, то для суммарного колебания $y(t) = x(t) + s(t)$ ФПВ имеет вид

$$W(y(t)) = k \exp \left(- (1/N_0) \int_0^T (y(t) - s(t))^2 dt \right). \quad (1.37)$$

При таком виде взаимодействия с сигналом НБШ обычно называют аддитивным белым гауссовским шумом и используют аббревиатуру АБГШ.

2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ

2.1. Общая задача приема сигналов

Любая информационная система, в которой данные передаются из одной точки пространства в другую, может быть представлена следующей абстрактной моделью. Пусть имеется некоторый источник сообщений, вырабатывающий в каждый конкретный момент времени одно из M возможных сообщений. Каждое из M конкурирующих сообщений передается посредством специфического сигнала, так что имеется множество S из M возможных сигналов: $S = \{s_i(t) : i = 1, 2, \dots, M\}$. Источник сообщений выбирает некоторый определенный сигнал $s_i(t) \in S$ и подает его на вход канала передачи информации. На приемной стороне (на выходе канала) наблюдается принятое колебание $y(t)$, которое является не точной копией переданного сигнала $s_i(t)$, а результатом трансформации $s_i(t)$, обусловленной искажающим воздействием помех, присущих любому реальному каналу.

Для приемной стороны имеется M конкурирующих гипотез H_i , состоящих в том, какой из M возможных сигналов был в действительности передан и трансформирован каналом в принятое наблюдение $y(t)$, и требуется выбрать только одну из них как истинную. Обозначим результат этого выбора, т.е. решение, через $\hat{H}_j$, означающее, что «решение принято в пользу сигнала с индексом j ». Из данной классической задачи приема вытекает следующая: *какова наилучшая стратегия принятия решения о возможном переданном сигнале, основанная лишь на наблюдении $y(t)$?*

Для ответа на поставленный вопрос необходимо знать модель канала. Математическое описание модели канала осуществляется с помощью *переходных вероятностей* $p[y(t)|s(t)]$, которые задают вероятность трансформации каналом заданного входного сигнала в то или иное выходное наблюдение $y(t)$. После того, как колебание $y(t)$ стало достижимым, решение принимается в пользу того сигнала, для которого вероятность трансформации его каналом в принятое наблюдение $y(t)$ является наибольшим (по сравнению с вероятностями для других сигналов).

Наиболее распространенной моделью служит канал с аддитивным белым гауссовским шумом или просто гауссовский канал.

В гауссовском канале переходная вероятность экспоненциально уменьшается с ростом квадрата Евклидова расстояния между переданным сигналом и выходным наблюдением:

$$p[y(t)|s(t)] = \exp\left(-\frac{1}{N_0} d^2(\mathbf{s}, \mathbf{y})\right),$$

где N_0 – спектральная плотность мощности одностороннего белого шума.

Во всех информационных дисциплинах расстояния между сигналами интерпретируются как вектора. Осуществим дискретизацию во времени непрерывного сигнала $s(t)$, т.е. представим его отсчетами $s_i = s(i \cdot \Delta)$, $i = 0, 1, \dots$. При длительности сигнала T всего имеется $n = T / \Delta$ подобных отсчетов и, значит, вектор $\mathbf{s} = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ полностью описывает сигнал. Прделав подобную же операцию с наблюдением $y(t)$, приходим к его векторному эквиваленту $\mathbf{y} = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Это позволяет найти Евклидово расстояние между векторами $\mathbf{s}$ и $\mathbf{y}$:

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} [y_i - s_i]^2}. \quad (2.1)$$

Если устремить Δ к нулю, то вектора $\mathbf{s}$ и $\mathbf{y}$, являвшиеся дискретными эквивалентами сигнала и наблюдения, становятся бесконечной размерности и одновременно сумма в правой части равенства (2.1) заменяется (без учета множителя) интегралом, и мы приходим к определению Евклидова расстояния для непрерывных во времени колебаний $s(t)$ и $y(t)$:

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \sqrt{\int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt}. \quad (2.2)$$

Таким образом, похожесть сигнала (вероятность того, что он преобразован каналом в наблюдение $y(t)$) уменьшается с увеличением Евклидова расстояния между $s(t)$, $y(t)$.

Для гауссовского канала решающее правило может быть преобразовано в правило *минимума расстояния*:

$$d(\mathbf{s}_j, \mathbf{y}) = \min_i d(\mathbf{s}_i, \mathbf{y}) \Rightarrow \hat{H}_j, \quad (2.3)$$

т.е. решение принимается в пользу сигнала $s_j(t)$, поскольку он наиболее близок (в смысле Евклидова расстояния) к наблюдению $y(t)$ среди всех M конкурирующих сигналов.

Другой важной геометрической характеристикой является скалярное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ двух сигналов $u(t)$, $v(t)$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^T u(t)v(t)dt.$$

Эта же характеристика может быть вычислена с помощью длины векторов и косинуса угла α между ними: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$. Таким образом, скалярное произведение свидетельствует о близости, или *похожести* сигналов.

Рассмотрим несколько иную версию правила минимального расстояния для того, чтобы подчеркнуть особую роль данной характеристики. Раскрыв скобки в (2.2), приходим к соотношению

$$d^2(\mathbf{s}_i, \mathbf{y}) = \int_0^T y^2(t)dt - 2 \int_0^T y(t)s_i(t)dt + \int_0^T s_i^2(t)dt = \|\mathbf{y}\|^2 - 2z_i + \|\mathbf{s}_i\|^2, \quad (2.4)$$

где z_i – корреляции между наблюдением $y(t)$ и i -м сигналом $s_i(t)$:

$$z_i = (\mathbf{y}, \mathbf{s}_i) = \int_0^T y(t)s_i(t)dt. \quad (2.5)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (2.4) фиксировано для данного наблюдения и поэтому не влияет на анализируемые расстояния. Последний член суммы есть ничто иное, как энергия i -го сигнала E_i . Учитывая это, правило минимума расстояния (2.3) может быть сформулировано как следующее правило *максимума корреляции*:

$$z_j - \frac{E_j}{2} = \max_i \left(z_i - \frac{E_i}{2} \right) \Rightarrow \hat{H}_j, \quad (2.6)$$

означающее, в частности, что из M возможных сигналов с одинаковой энергией фактически принятым считается тот, который имеет максимум корреляции с наблюдением $y(t)$.

Отразив основные идеи оптимального приема, можно перейти к рассмотрению основных задач оптимального приема сигналов.

2.2. Задачи оптимального приема сигналов

Важнейшая задача теории оптимального приема – научить наблюдателя оптимально, т.е. с наивысшей достоверностью, извлекать информацию, вложенную в сигнал $s(t)$, содержащийся в принятой реализации $y(t)$.

Под извлечением информации понимают такие процедуры, как разрешение сигналов, обнаружение сигнала, различение сигналов и оценка параметров сигнала.

Разрешение сигналов. Пусть принятое колебание $y(t)$ представляет собой сумму помехи $x(t)$ и двух сигналов $s_1(t; \lambda_1)$ и $s_2(t; \lambda_2)$, зависящих от параметров λ_1 и λ_2 : $y(t) = s_1(t; \lambda_1) + s_2(t; \lambda_2) + x(t)$. Априорные вероятности появления каждого из сигналов считаются известными.

Задачу разрешения двух сигналов можно сформулировать следующим образом. При возможности одновременного наличия двух сигналов необходимо по принятой реализации $y(t)$ разрешить оптимальным образом два сигнала по параметру λ . Задача разрешения может быть обобщена на случай нескольких параметров. Необходимая разрешающая способность, как правило, обеспечивается подбором наилучших видов сигналов.

Обнаружение сигнала. Предположим, что все параметры сигнала не зависят от времени, причем частота, фаза, задержка сигнала известны, а амплитуда может принимать два значения: $A=0$ (сигнал отсутствует) с вероятностью p_1 и $A=A_0 \neq 0$ (сигнал присутствует) с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. В задаче обнаружения требуется по принятой реализации $y(t) = s(t) + x(t)$ на интервале $0 \dots T$ оптимальным образом определить, отсутствует или присутствует сигнал $s(t)$ в принятой реализации $y(t)$.

Различение сигналов. Различение M сигналов определяют как анализ принятого колебания $y(t)$, заканчивающийся принятием решения о том, какой именно из M сигналов, принадлежащих указанному заранее множеству $S = \{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$, присутствует в $y(t)$. Нетрудно видеть, что обнаружение сигнала есть частный случай различения двух сигналов, один из которых равен нулю на всем интервале наблюдения.

Оценка параметров сигнала. Пусть в сигнале амплитуда A является случайной величиной с плотностью вероятности $W(A)$. По принятой реализа-

ции $y(t)$ необходимо с минимальной погрешностью определить значение амплитуды A . Если полезный сигнал зависит от нескольких случайных параметров, то может быть поставлена задача о совместной оценке двух и большего числа параметров. Например, можно говорить о совместной оценке амплитуды, фазы и частоты сигнала. Результаты оценки параметров характеризуют предельную точность измерения параметров сигнала и позволяют составить структурные схемы соответствующих оптимальных измерительных устройств радиолокационных и навигационных систем.

Мы указали основные задачи приема и обработки сигналов, тесно связанных между собой. Если отвлечься от конкретных особенностей перечисленных задач, то их можно сформулировать следующим образом. Относительно принятого колебания $y(t)$ высказывается ряд предположений, называемых гипотезой H_i , где i принадлежит множеству l , характер которого зависит от решаемой задачи. Так, для обнаружения $l = 0, 1$, т.е. на основе анализа колебания $y(t)$ требуется принять *решение* о том, какая из гипотез – H_0 : сигнал отсутствует или H_1 : сигнал присутствует в реализации $y(t)$, является истинной, а какую следует отвергнуть.

Для задач различения $l = 0, 1, \dots, M$. При этом, проанализировав колебание $y(t)$, необходимо принять решение в пользу одной из M гипотез H_i : $y(t) = s_i(t) + x(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, а остальные отвергнуть.

В задачах оценивания i принадлежит континуальному множеству l , эквивалентному множеству сигналов, отвечающих различным значениям параметра λ .

Таким образом, все сформулированные задачи можно рассматривать как задачи принятия решений.

Следует отметить, что *оптимальная процедура* принятия решения состоит в наилучшем использовании *априорной информации* и самого наблюдения. Остановимся более подробно на характере априорной информации. Эту информацию можно структурировать следующим образом:

- информация о сигнале (детерминированный или со случайными параметрами);
- информация о помехе (плотность вероятности или другие функциональные характеристики);
- информация о способе взаимодействия сигнала и помехи $y(t) = F[s(t), x(t)]$;
- информация об априорных вероятностях проверяемых гипотез и о последствиях, связанных с ошибочными решениями.

Априорные вероятности проверяемых гипотез задаются с помощью плотности вероятности, вид которых зависит от числа гипотез. Так, для задачи различения $W_i = \sum_{k=1}^M p_k \cdot \delta_{i-k}$, где p_k – вероятности гипотез H_k : $y(t) = s_k(t) + x(t)$, $s_k(t)$ – известный набор сигналов. В задачах оценивания параметра λ сигнала $s(t, \lambda)$ может быть задана плотность вероятности параметра W_λ .

Чрезвычайно важной является информация о последствиях, связанных с ошибочными решениями. Эта информация задается либо с помощью матрицы потерь для случая конечного числа гипотез, либо заданием функции потерь.

В зависимости от уровня неопределенности проверяемые гипотезы могут быть *простыми* или *сложными*. При простой гипотезе класс распределений W_i при истинности гипотезы H_i содержит одно и только одно распределение плотности вероятности. Любую другую гипотезу называют сложной.

2.3. Критерии качества оптимального приема сигналов

Для того чтобы задача синтеза оптимальных правил принятия решений обрела математическую содержательность, необходимо задаться критериями качества.

Критерий минимума среднего риска (критерий Байеса)

Предположим, что известна вероятность p_i присутствия в принятой реализации $y(t)$ сигнала $s_i(t)$. Эту вероятность называют априорной (доопыт-

ной). При этом p_i подчинены условию нормировки $\sum_{i=0}^{M-1} p_i = 1$. Вероятность

p_i можно назвать априорной вероятностью истинности гипотезы H_i , записав $p_i = P(H_i)$.

Предположим, что $p_{ik} = p(\hat{H}_k / H_i)$ характеризуют условную вероятность перепутывания i -го сигнала с k -м, т.е. принятия решения $\hat{H}_k$ о присутствии $s_k(t)$ в наблюдении $y(t)$ при условии, что истинна гипотеза H_i и в $y(t)$ содержится $s_i(t)$. Введем неотрицательные величины Π_{ik} , каждая из которых характеризует риск (потери, ущерб) от перепутывания i -го сигнала с k -м. При этом правильные решения считаются не наносящими ущерба, так что

$\Pi_{ii} = 0$. Безусловную вероятность того, что риск окажется равным Π_{ik} , по теореме умножения вероятностей можно найти как

$$p_i \cdot p_{ik} = P(H_i) \cdot P(\hat{H}_k / H_i).$$

В каждой отдельной попытке различения сигналов случайным будет и значение риска Π_{ik} . Поэтому математическое ожидание среднего риска будет определяться выражением:

$$\bar{\Pi} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} \Pi_{ik} \cdot p_i \cdot p_{ik}. \quad (2.7)$$

Критерий минимального среднего риска или критерий Байеса предписывает добиваться минимума выражения (2.7).

Критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова)

Предположим, что, не имея объективных данных для назначения всех рисков Π_{ik} , разработчик стремится лишь к тому, чтобы различитель как можно реже ошибался, т.е. чтобы полная вероятность ошибок:

$$p_{\text{ош}} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} p_i \cdot p_{ik}, \quad i \neq k \quad (2.8)$$

была минимальной. Такой критерий качества называется критерием идеального наблюдателя или критерием Котельникова. Критерий идеального наблюдателя можно рассматривать как частный случай байесовского, положив в (2.7) $\Pi_{ik} = \Pi$.

Критерий минимума суммы условных вероятностей ошибок

В случае если затруднение вызывает задание не только рисков Π_{ik} , но и априорных вероятностей p_i , тогда можно предложить вполне удовлетворительный критерий качества – критерий минимума суммы условных вероятностей ошибок:

$$p_{\text{ош усл}} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} p_{ik}. \quad (2.9)$$

Критерий Неймана – Пирсона

При обнаружении сигналов часто применяют критерий Неймана – Пирсона, предписывающий добиваться минимума вероятности пропуска $p_{\text{ПС}}$ при ограничении сверху на вероятность ложной тревоги $p_{\text{ЛТ}} \leq p_{\text{ЛТ0}}$.

Положив $p_{01} P_{01} = \mu \cdot 1 - p_0 P_{10}$, получим критерий Неймана – Пирсона:

$$\bar{P} = (1 - p_0) P_{10} p_{\text{ПС}} + \mu \cdot p_{\text{ЛТ}}, \quad (2.10)$$

где μ – неопределенный коэффициент Лагранжа.

Вероятностный характер наблюдаемого колебания $y(t)$ приводит к тому, что любой различитель или обнаружитель не застрахован от ошибок и может выносить решения, не соответствующие действительности, считая, что в наблюдаемом колебании присутствует $s_k(t)$ сигнал, тогда как в действительности в $y(t)$ содержится $s_l(t)$ сигнал. Необходимо так выбрать стратегию работы различителя или обнаружителя, чтобы вредные последствия, связанные с указанными ошибками, были минимальными.

2.4. Фильтры, максимизирующие отношение сигнал/шум

При решении различных радиотехнических задач отношение сигнал/шум (с/ш), играет ключевую роль. Отношение с/ш является одним из наиболее распространенных показателей качества обработки сигнала в присутствии помех (шума). Корректное определение понятия отношения с/ш на выходе устройства обработки возможно только для линейных систем, для которых на основе принципа суперпозиции можно отдельно рассматривать прохождение через систему (фильтр) сигнала и шума.

Под отношением с/ш на выходе линейного фильтра понимают отношение модуля значения выходного сигнала в момент t_0 к среднеквадратическому значению помехи на выходе в этот же момент времени, т.е.

$$q_{\text{ВЫХ}} = \frac{|s_{\text{ВЫХ}}(t_0)|}{\sqrt{D[x_{\text{ВЫХ}}(t_0)]}}.$$

Будем полагать, что помеха (шум) является стационарным случайным процессом. Спектральная плотность помехи $X(\omega)$ ограничена по частоте и характеризуется корреляционной функцией K_{t_1, t_2} .

Пусть фильтруемый сигнал $s(t)$ задан своей спектральной плотностью

$$\tilde{s}(j\omega) = |\tilde{s}(\omega)| \cdot \exp[j\varphi_s(\omega)].$$

Частотную характеристику синтезируемого фильтра представим в форме

$$K(j\omega) = |K(\omega)| \cdot \exp[j\varphi_k(\omega)],$$

где: $|K(\omega)|$ - амплитудно-частотная и $\varphi_k(\omega)$ - фазочастотная характеристика фильтра.

Для отыскания оптимальной частотной характеристики синтезируемого фильтра составим выражения для сигнала и шума на его выходе. Используя спектральный метод анализа, можно найти полезный сигнал на выходе фильтра в любой момент времени t_0

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(j\omega) \cdot K(j\omega) \exp[j\omega \cdot t_0] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)| \cdot |K(\omega)| \cdot \exp[j\omega \cdot t_0 + \varphi_s(\omega) + \varphi_k(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

Среднеквадратическое значение шума на выходе фильтра определяется выражением

$$\sigma_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot |K(\omega)|^2 d\omega}.$$

При использовании частотного метода анализа отношение сигнал/шум представляется выражением

$$\begin{aligned} q_{\text{вых}} &= \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega) K(j\omega) \exp(j\omega t_0) d\omega \right|}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega}} = \\ &= \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)| \cdot |K(\omega)| \exp[j\omega t_0 + \varphi_s(\omega) + \varphi_k(\omega)] d\omega \right|}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega}}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Задача нахождения оптимальной функции $K(j\omega)$ решается на основании известного неравенства Коши-Буняковского. Для того чтобы получить максимальный уровень сигнала, необходимо скомпенсировать начальные фазы спектральных компонент сигнала. Это достигается, если ФЧХ фильтра будет противоположно по знаку фазовому спектру сигнала. В этом случае, после прохождения через фильтр спектр выходного сигнала будет иметь фазовую характеристику, определяемую выражением

$$\varphi_{S \text{ Вых}}(\omega) = \varphi_S(\omega) + \varphi_K(\omega) = \varphi_S(\omega) + -\varphi_S(\omega) - \omega \cdot t_0 = -\omega \cdot t_0.$$

Как видно, фазовая характеристика оптимального фильтра $\varphi_K(\omega)$ обеспечивает когерентное сложение скорректированных по фазе всех компонентов спектра в момент $t = t_0$ и в результате этого образуется пик выходного сигнала.

Исследование функции (2.11) показывает, что максимально достижимое отношение с/ш определяется выражением

$$C_{\text{max Вых}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{X(\omega)} d\omega} \quad (2.12)$$

и достигается с помощью фильтра, имеющего коэффициент передачи

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = c \cdot \frac{|\tilde{s}(\omega)|}{X(\omega)} \cdot \exp[-j\varphi_S(\omega)] \cdot \exp[-j\omega \cdot t_0] = c \frac{\tilde{s}^*(\omega)}{X(\omega)} \exp[-j\omega t_0], \quad (2.13)$$

где c – коэффициент, не влияющий на отношение с/ш, и в дальнейшем полагается равным единице.

Сигнал на выходе оптимального фильтра равен

$$s_{\text{Вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{X(\omega)} \exp[j\omega(t - t_0)] d\omega. \quad (2.14)$$

Автокорреляционная функция сигнала определяется преобразованием Фурье энергетического спектра сигнала

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 \exp[j\omega\tau] d\omega.$$

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) оптимального фильтра в соответствии с (2.13) равна

$$\left| K_{\text{опт}}(j\omega) \right| = c \cdot \frac{|\tilde{s}(\omega)|}{X(\omega)}, \quad (2.15)$$

а фазо-частотная характеристика фильтра определяется соотношением

$$\arg K_{\text{опт}}(j\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0. \quad (2.16)$$

Как видно, АЧХ оптимального фильтра производит весовую обработку спектра входного колебания, придавая большие веса тем спектральным участкам, на которых больше отношение $|\tilde{s}(\omega)|/X(\omega)$, что условно можно считать отношением с/ш на частоте ω . ФЧХ оптимального фильтра обеспечивает синфазное суммирование спектральных компонент сигнала в момент времени $t = t_0$. Предельно достижимое отношение сигнал/шум в соответствии с (2.12) определяется интегрированием отношения энергетического спектра сигнала $|\tilde{s}(\omega)|^2$ и спектральной плотности мощности помех $X(\omega)$ по всем частотам, на которых это отношение определено.

Так как спектральная плотность помехи на выходе оптимального фильтра равна

$$X_{\text{вых}}(\omega) = X(\omega) |K_{\text{опт}}(j\omega)|^2 = X(\omega) \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{X^2(\omega)} = \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{X(\omega)},$$

то корреляционная функция помехи на выходе фильтра определяется обратным преобразованием Фурье

$$K_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{X(\omega)} \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.17)$$

Импульсная характеристика оптимального фильтра может быть выражена через частотный коэффициент передачи

$$h_{\text{опт}}(t, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}^*(\omega)}{X(\omega)} \exp(j\omega(t - t_0)) d\omega. \quad (2.18)$$

На основании равенства Парсеваля выражение (2.18) можно записать как свертку обратной корреляционной функцией помехи $K^{-1}(\tau_1 - \tau_2) = F[1/X(\omega)]$ (где F – оператор Фурье) и сигнала $s(t_0 - t)$, т.е.

$$h_{\text{ОПТ}}(t, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\tau - t) \cdot s(t_0 - \tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Так как преобразование Фурье энергетического спектра сигнала $|\tilde{s}(\omega)|^2$ есть его автокорреляционная функция $K_s(\tau)$, то сигнал на выходе есть свертка обратной корреляционной функции помехи $K^{-1} \tau$ и автокорреляционной функции сигнала, смещенной на время t_0

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\tau) \cdot K_s(t_0 - \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Согласованный фильтр. Пусть помехой является белый шум $x(t) = n(t)$ со спектральной равномерной плотностью $X(\omega) = \frac{N_0}{2}$. Оптимальный фильтр для помехи в виде белого шума называется согласованным фильтром (СФ).

В этом случае отношение сигнал/шум, исходя из формулы (2.12), принимает вид

$$q_{\text{max вых}} = \sqrt{\frac{2}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}. \quad (2.21)$$

Коэффициент передачи оптимального фильтра для помехи в виде белого шума, с учетом замечания о постоянном множителе, равен

$$K_{\text{сф}}(j\omega) = \tilde{s}^*(\omega) \exp -j\omega t_0. \quad (2.22)$$

АЧХ согласованного фильтра совпадает с амплитудным спектром сигнала, т.е.

$$|K_{\text{сф}}(j\omega)| = |\tilde{s}(\omega)|, \quad (2.23)$$

а ФЧХ по-прежнему определяется выражением

$$\arg K_{\text{ОПТ}}(j\omega) = -\varphi(\omega) - \omega t_0.$$

Так как корреляционная функция белого шума равна $K(\tau) = N_0/2\delta(\tau)$, то импульсная характеристика с учетом выражения (2.19) примет вид

$$h_{\text{сф}}(t, t_0) = s(-t + t_0). \quad (2.24)$$

Построение графика функции $h_{\text{сф}}(t, t_0)$ показано на рис. 2.1.

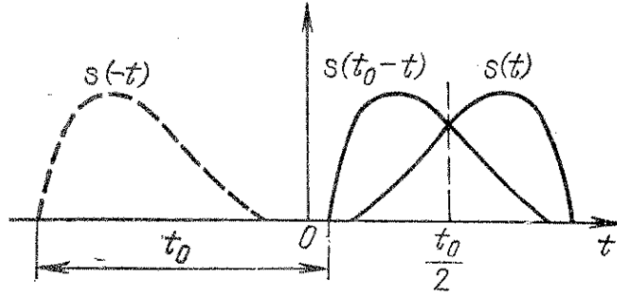


Рис. 2.1. Импульсная характеристика согласованного фильтра.

Кривая $s(-t)$ является зеркальным отражением заданного сигнала $s(t)$ с осью ординат в качестве оси симметрии. Функция же $s(t_0 - t)$, сдвинутая относительно $s(-t)$ на время t_0 вправо, также зеркальна по отношению к исходному сигналу $s(t)$, но с осью симметрии, проходящей через точку $t_0/2$ на оси абсцисс. Очевидно, что только при $t_0 \geq T_c$ может быть использована вся энергия сигнала для создания наибольшего возможного пика выходного сигнала. Ясно, что увеличение t_0 сверх T_c не влияет на пиковое значение выходного сигнала, а просто сдвигает его вправо (в сторону запаздывания).

Сигнал на выходе согласованного фильтра в соответствии с (2.20) равен

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = K_S \delta(t - t_0). \quad (2.25)$$

Следовательно, в момент времени $t = t_0$ пиковое значение выходного сигнала равно $s_{\text{макс}}(t_0) = R_S \cdot 0 = E$.

Спектральная плотность шума на выходе согласованного фильтра равна

$$X_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \frac{N_0}{2} |K_{\text{сф}}(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |\tilde{s}(\omega)|^2 \quad (2.26)$$

Дисперсия шума на выходе равна

$$D\{x_{\text{ВЫХ}}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\text{ВЫХ}}(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0 E}{2}, \quad (2.27)$$

а корреляционная функция описывается выражением

$$\begin{aligned}
K_{\text{ВЫХ}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\text{ВЫХ}}(\omega) \exp j\omega\tau d\omega = \\
&= \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 \exp j\omega\tau d\omega = \frac{N_0}{2} K_s(\tau)
\end{aligned} \quad (2.28)$$

и по форме совпадает с автокорреляционной функцией сигнала. Совпадение форм корреляционной функции помехи на выходе СФ и автокорреляционной функции сигнала говорит о том, что помеха на выходе СФ становится «похожей» на сигнал $s(t)$ с точки зрения скорости изменения.

Дисперсия шума на выходе СФ

$$D x_{\text{ВЫХ}} = K_{\text{ВЫХ}}(0) = \frac{N_0 E}{2}. \quad (2.29)$$

Так как $K_s(0) = E$, то и отношение с/ш на выходе СФ будет равно

$$q = E / \sqrt{\frac{N_0 E}{2}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}},$$

что совпадает с выражением (2.21).

Корреляционный приемник. Сравним фильтр, максимизирующий отношение с/ш, с коррелятором, вычисляющим величину

$$z = \int_{-\infty}^{t_0} y(t) \cdot s_{\text{ОП}}(t) dt, \quad (2.30)$$

где $y(t) = n(t) + s(t)$ принятая реализация; $n(t)$ - шум; $s(t)$ - полезный сигнал; $s_{\text{ОП}}(t)$ - опорное колебание, являющееся детерминированной функцией времени; t_0 - момент времени взятия отсчета.

Так как коррелятор является линейной системой с переменными параметрами, то мы можем раздельно рассматривать прохождение через него сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$.

Преобразование сигнала определяется выражением

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s(t) \cdot s_{\text{ОП}}(t) dt. \quad (2.31)$$

СКО случайной величины, вызванной действием шума $n(t)$ равно

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \left[\int_{-\infty}^{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} K(t_1, t_2) s_{\text{оп}}(t_1) s_{\text{оп}}(t_2) dt_1 dt_2 \right]^{1/2} \quad (2.32)$$

Отношение сигнал/шум на выходе коррелятора будет определяться выражением

$$q_{\text{ВЫХ}} = \frac{s_{\text{ВЫХ}}}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \frac{t}{t_0} = \frac{\int_{-\infty}^{t_0} s(t) \cdot s_{\text{оп}}(t) dt}{\left[\int_{-\infty}^{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} K(t_1, t_2) s_{\text{оп}}(t_1) s_{\text{оп}}(t_2) dt_1 dt_2 \right]^{1/2}}. \quad (2.33)$$

Максимизируя отношение (2.33) за счет выбора $s_{\text{оп}} t$, получим следующее выражение для оптимального опорного сигнала

$$s_{\text{опт}}(t) = s(t). \quad (2.34)$$

Если момент времени t_0 соответствует окончанию сигнала, то значение сигнала на выходе будет равно

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s^2(t) dt = E. \quad (2.35)$$

Нахождение дисперсии шума на выходе коррелятора сводится к вычислению

$$\sigma^2 = D\{z\} = \overline{\left\{ \int_{-\infty}^{t_0} n(t) s(t) dt \right\}^2} = \int_{-\infty}^{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} \overline{n(t_1) n(t_2)} s(t_1) s(t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.36)$$

Напомним, что автокорреляционная функция белого шума (статистическое среднее произведения двух различных временных отсчетов) есть дельта-функция Дирака $\overline{n(t_1) n(t_2)} = (N_0 / 2) \delta(t_1 - t_2)$. Другими словами, любые два отсчета белого шума, не совпадающие во времени, являются некоррелированными.

Используя последний результат в выражении для дисперсии, а также фильтрующее свойство дельта-функции $\int_0^T s(t') \delta(t' - t) dt' = s(t)$, приходим к выражению

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{t_0} s^2(t) dt = \frac{N_0 E}{2}. \quad (2.37)$$

Таким образом, для отношения с/ш получим величину

$$q_{\text{max вых}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad (2.38)$$

совпадающую с отношением с/ш на выходе СФ.

Если опорное напряжение коррелятора отличается от оптимального, то возникают потери. Так для белого шума сигнал на выходе коррелятора будет равен

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s(t) s_{\text{оп}}(t) dt = \rho(t_0) \sqrt{E E_{\text{оп}}(t_0)}, \quad (2.39)$$

где $\rho(t_0)$ - коэффициент корреляции сигнала $s(t)$ и опорного колебания $s_{\text{оп}}(t)$.

Дисперсия шума на выходе коррелятора будет определяться выражением

$$\sigma_{\text{вых}}(t_0) = \sqrt{\frac{N_0 E_{\text{оп}}(t_0)}{2}}. \quad (2.40)$$

и отношение сигнал/шум примет вид

$$q_{\text{вых}} = \rho(t_0) \sqrt{\frac{2E}{N_0}}. \quad (2.41)$$

В завершении следует отметить, что хотя СФ инвариантен к временному положению сигнала, для реализации его возможностей надо знать момент времени, в который достигается максимальное отношение с/ш на выходе, т.е. знать временное положение сигнала. Аналогичную информацию надо иметь для реализации возможностей коррелятора. Поэтому с точки зрения обработки сигнала СФ и коррелятор равноценны, и решение в пользу той или иной структуры следует принимать, исходя из возможностей технической реализации.

3. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

Для многих радиолокационных и навигационных систем типичной является ситуация, когда принятый сигнал фактически представляет собой суперпозицию многих копий исходного сигнала, каждая из которых характеризуется своими значениями параметров (амплитуды, фазы, времени запаздывания и сдвигом частоты). Перекрываясь во времени, эти копии интерферируют между собой, образуя достаточно сложный результирующий сигнал. Процедура, направленная на разделение интерферирующих сигнальных копий, получила наименование *разрешения сигналов*.

Могут существовать различные пути решения данной задачи в рамках классического подхода к приему сигналов. Однако все они базируются на категории расстояния между копиями сигнала или их сходства.

Выделить информацию, содержащуюся в сигналах, можно лишь учтя различие их параметров. Таким образом, разрешение сигналов по параметру есть извлечение информации из каждого из наблюдаемых одновременно однотипных сигналов. Мерой разрешающей способности при этом может служить минимальная разница значений параметров накладываемых сигналов. Характеристики разрешающей способности находятся в сильной зависимости от одной и той же величины – функции неопределенности (ФН) сигнала по параметру λ .

Пусть радиосигнал $s(t, \lambda)$, имеющий значение некоторого неэнергетического параметра, равное λ , описывается выражением

$$s(t, \lambda) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t, \lambda) \exp j 2 \pi f_0 t \right], \quad (3.1)$$

где $\dot{S}(t, \lambda)$ – комплексная огибающая.

Остановимся на важнейших частных случаях.

3.1. Разрешение по времени запаздывания

Пусть параметром, по которому необходимо разрешать сигналы, служит время запаздывания. Качество разрешения двух копий сигнала $s(t; \tau_1)$ и $s(t; \tau_2)$ с временем запаздывания τ_i , $i = 1, 2$ определяется уровнем ФН по времени запаздывания $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Функция неопределенности комплексной огибающей $\dot{S}(t, \lambda)$ стационарна и описывается выражением

$$\Psi(\tau) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau) dt \right|, \quad (3.2)$$

которое представляет собой не что иное, как модуль обычной нормированной корреляционной функции комплексной огибающей сигнала.

Следовательно, две копии сигнала, отличающиеся временем запаздывания на τ , разрешаются тем успешнее, чем меньше уровень корреляционной функции комплексной огибающей при данном τ . В качестве меры разрешающей способности по задержке можно принять то минимальное расхождение $\tau_{\min}$ времен запаздывания двух копий сигнала, начиная с которого последние разрешаются удовлетворительно. Чем меньше $\tau_{\min}$, тем более высокой следует признать разрешающую способность по времени запаздывания.

Следует отметить, что достижение высокой разрешающей способности невозможно добиться простым уменьшением длительности импульса, поскольку для сохранения необходимого отношения сигнал-шум требуется обеспечить пропорциональное увеличение пиковой мощности. Следовательно, необходимо «усложнить» комплексную огибающую $\dot{S}(t)$, осуществив в пределах длительности сигнала модуляцию его фазы или частоты. Введению такой модуляции и сопровождающему его эффекту укорочения корреляционной функции будет неизбежно сопутствовать значительное расширение спектра сигнала.

3.2. Разрешение по времени и частоте

В радиолокационных и навигационных системах интерферирующие на входе приемника сигналы, отраженные различными объектами, обычно отличаются друг от друга не только временем запаздывания, но и доплеровскими сдвигами частоты. В таких случаях приходится говорить о разрешении сигналов по времени запаздывания τ и по частоте F , т.е. по двумерному векторному параметру $\vec{\lambda} = \tau, F$.

Качество разрешения при этом определяется видом частотно-временной ФН

$$\Psi_{\tau, F} = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) \exp[-j2\pi Ft] dt \right|. \quad (3.3)$$

Геометрически $\Psi_{\tau, F}$ задает некоторую поверхность над координатной плоскостью τ и F , причем в начале координат $\tau = 0$, $F = 0$ высота этой поверхности фиксирована и равна $\Psi_{0,0} = 1$. Две копии сигнала, сдвинутые

друг относительно друга по времени запаздывания на τ и по частоте на F , разрешить тем легче, чем ниже уровень ФН при данных τ и F . Таким образом, необходимо, чтобы ФН $\Psi(\tau, F)$ как можно быстрее спадала по мере удаления точки (τ, F) от начала координат.

Примерный вид функции неопределенности представлен на рис. 3.1, а. Для графического представления частотно-временной ФН нередко прибегают к отображению профиля ФН с помощью изолиний. Чтобы таким способом отразить рельеф поверхности, задаваемой ФН, следует нанести на плоскость τ, F сечения поверхности $\Psi(\tau, F)$ горизонтальными плоскостями, поднятыми на ту или иную высоту относительно координатной плоскости. Подобное сечение на высоте $\Psi(\tau, F) = 0.5$, называемое *областью высокой корреляции* либо *диаграммой неопределенности* задает область, в пределах которой уровень ФН превышает 0,5 (рис. 3.1, б).

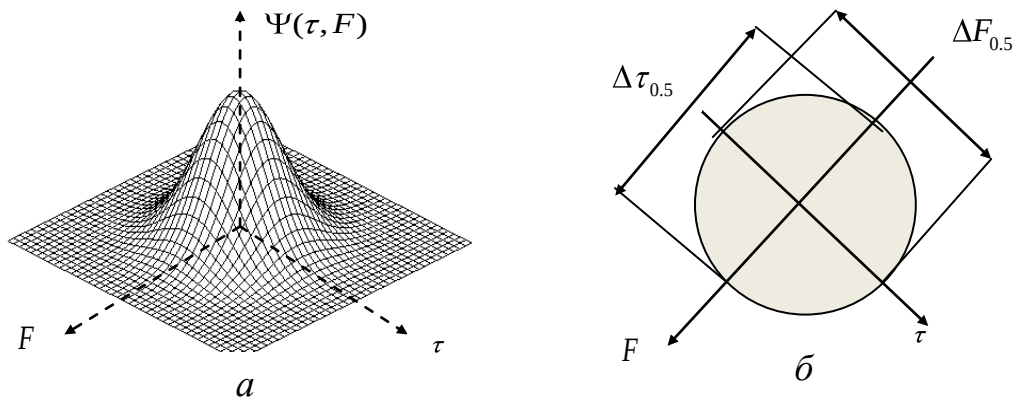


Рис. 3.1. Вид функции и диаграммы неопределенности

Важно отметить, что сечение ФН $\Psi(\tau, F)$ плоскостью $F = 0$, есть ФН по запаздыванию $\Psi(\tau, 0)$, и, следовательно, протяженность $\Psi(\tau, 0)$ по оси задержек τ характеризует достижимую для данного сигнала разрешающую способность только по времени запаздывания. Аналогично, протяженность вдоль оси F сечения $\Psi(0, F)$ ФН плоскостью $\tau = 0$ определяет разрешающую способность только по частоте. При этом, как следует из выражения (3.3), функция

$$\Psi(0, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 \exp(-j2\pi Ft) dt \right| = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \exp(-j2\pi Ft) dt \right| \quad (3.4)$$

повторяет по форме амплитудно-частотный спектр квадрата действительной огибающей сигнала, т.е. определяется исключительно законом амплитудной модуляции сигнала.

Если протяженность сечения $\Psi(\tau, 0)$ по задержке τ имеет порядок длительности τ_k корреляционной функции комплексной огибающей сигнала, то ширина сечения $\Psi(0, F)$ вдоль оси F близка к ширине спектра действительной огибающей сигнала, т.е. значению, обратному длительности сигнала.

Столь большое значение ФН позволяет с некоторой долей условности считать, что любые две копии сигнала, у которых взаимные рассогласования по времени запаздывания τ и частоте F попадают в пределы области высокой корреляции, неразрешимы. Это, в частности, означает, что для достижения высокой разрешающей способности по времени и частоте необходимо, чтобы диаграмма неопределенности имела довольно малую протяженность по любому направлению в плоскости τ, F .

Важной характеристикой любых сигналов является их база, определяемая как произведение ширины спектра на длительность: $B = \Delta f_c T_c \gg 1$. Если $B=1$, то такие сигналы называются простыми. Если $B>1$, то такие сигналы называются сложными.

Противоречивость показателей разрешения по τ и по F характерна для всех простых сигналов. В основе ее лежит инвариантность к виду сигнала объема V *тела неопределенности*, т.е. тела, заключенного между плоскостью

τ, F и поверхностью, описываемой квадратом ФН $\Psi^2(\tau, F)$. Соответствующее утверждение известно как *принцип неопределенности Вудворда*. Объем V тела неопределенности можно представить выражением

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(\tau, F) d\tau dF = \frac{1}{4E^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t-\tau)|^2 d\tau = 1, \quad (3.5)$$

так как каждый из интегралов равен $2E$. Таким образом, тело неопределенности имеет единичный объем независимо от конкретного закона модуляции сигнала.

3.3. Частотно-временная ФН прямоугольного радиоимпульса

Рассмотрим частотно-временную ФН прямоугольного радиоимпульса, для которого комплексная огибающая равна

$$\dot{S}_t = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_c/2; \\ 0, & |t| > T_c/2. \end{cases} \quad (3.6)$$

При подстановке этого выражения в (3.3) получим

$$\Psi_{\tau, F} = \frac{1}{T} \left| \int_{-T_c/2 + \tau}^{T_c/2} \exp -j2\pi Ft \, dt \right| = \left| \frac{\sin \pi F (T_c - |\tau|)}{\pi F T_c} \right|, \quad |\tau| \leq T_c. \quad (3.7)$$

Нетрудно убедиться, что сечение ФН (3.7) плоскостью $F = 0$ есть равнобедренный треугольник с основанием $2T_c$:

$$\Psi_{\tau, 0} = 1 - |\tau|/T_c, \quad |\tau| \leq T_c; \quad \Psi_{\tau, 0} = 0, \quad |\tau| > T_c. \quad (3.8)$$

Этого и следовало ожидать, так как комплексной огибающей рассматриваемого сигнала является прямоугольный видеоимпульс, имеющий именно такую корреляционную функцию.

Сечение же ФН (3.7) плоскостью $\tau = 0$ есть функция вида

$$\Psi_{0, F} = \left| \sin \pi F T_c / \pi F T_c \right|. \quad (3.9)$$

Кроме того, сечения ФН (3.7) плоскостями $F = k/T_c$ (k – ненулевое целое) повторяют по форме модули синусов частот $k/2T_c$. Все эти детали отчетливо прослеживаются на аксонометрии ФН, приведенной на рис. 3.2.

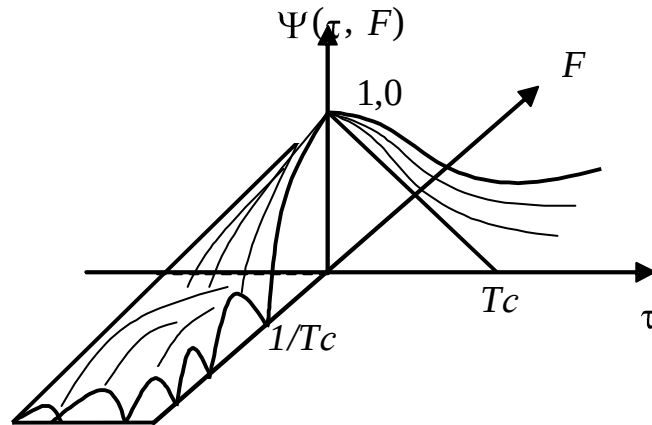


Рис. 3.2. Вид ФН прямоугольного видеоимпульса

Как видно, рельеф ФН сосредоточен в пределах диапазона $-T_c \leq \tau \leq T_c$, имеет склоны от начала координат – линейный вдоль оси τ и вида $\sin x/x$ вдоль оси F . На расстояниях от оси τ , больших $1/T_c$, поверхность $\Psi(\tau, F)$ становится волнистой, приобретая характер извилистых гребней и ложбин.

3.4. Частотно-временная ФН радиоимпульса с линейной частотной модуляцией

Если закон изменения частоты радиоимпульса линейно возрастает во времени, то такие сигналы носят название сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигналы). Примем, что радиоимпульс центрирован относительно точки $t=0$, а его длительность равна T_c . Пусть частота радиоимпульса линейно нарастает от начала импульса к его концу со скоростью: $\mu = \Delta\omega/T_c = 2\pi \cdot \Delta f/T_c$. Тогда ЛЧМ-сигнал может быть описан уравнением:

$$s(t) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t) \cdot \exp(j\omega_0 t) \right] = \operatorname{Re} \left[U_0 \cdot \exp\left(j \frac{\mu \cdot t^2}{2}\right) \cdot \exp(j\omega_0 t) \right], \quad (3.10)$$

где $\dot{S}(t) = U_0 \cdot \exp\left(j \frac{\mu \cdot t^2}{2}\right)$ – комплексная огибающая импульса (3.11)

Используя комплексную огибающую (3.11), можно определить вид ФН ЛЧМ-сигналов. На рис. 3.3, а представлена поверхность ФН ЛЧМ-сигнала.

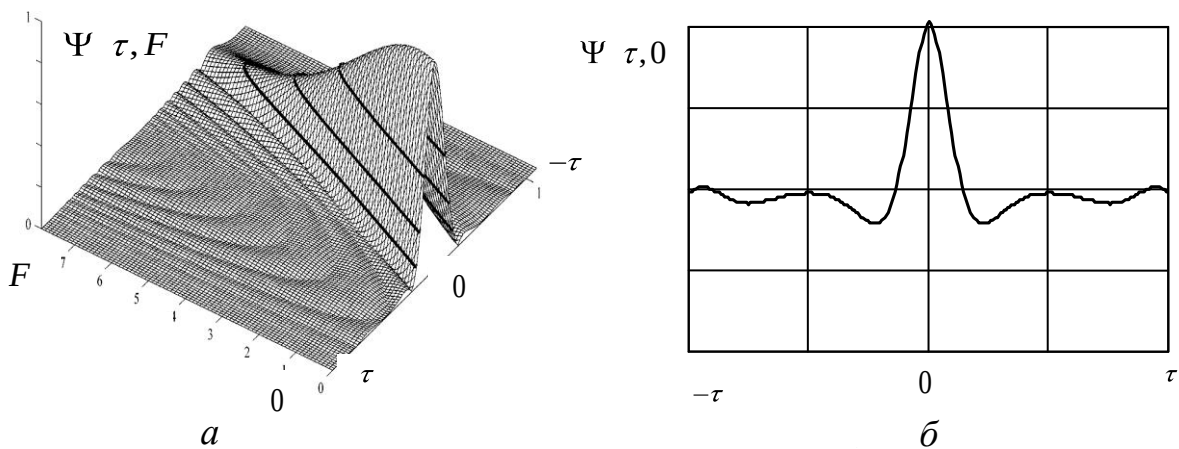


Рис. 3.3. ФН ЛЧМ-сигнала

Поверхность ФН $\Psi(\tau, F)$ имеет вид узкого длинного гребня, повернуто-

го относительно осей τ, F . Сечение ФН $\Psi(\tau, F)$ плоскостью $F = 0$ есть функция корреляции ЛЧМ-сигнала по запаздыванию $R(\tau)$, и, следовательно, протяженность $\Psi(\tau, 0)$ по оси задержек τ характеризует достижимую для данного сигнала разрешающую способность только по времени запаздывания.

Вид корреляционной функции комплексной огибающей ЛЧМ-сигнала приведен на рис. 3.3, б. Как видно, огибающая корреляционной функции ЛЧМ-импульса изменяется по закону функции $\sin x / x$. Сечение на высоте $\Psi(\tau, F) = 0.5$ образует область высокой корреляции. Область высокой корреляции вытянута вдоль прямой $F = W_f \tau / T_c$. Протяженность вдоль оси F сечения $\Psi(0, F)$ ФН плоскостью $\tau = 0$ определяет разрешающую способность только по частоте. Отрезки осей τ и F в пределах этой области имеют длины $1.2/W_f$ и $1.2/T_c$. Надлежащим выбором девиации W_f (ширины спектра) и длительности T_c можно добиться высокой разрешающей способности по времени запаздывания или по частоте. В то же время, какими бы ни были значения W_f и T_c , копии сигнала, сдвинутые по τ на $\Delta\tau < T_c$ и по частоте F на $\Delta F = W_f \Delta\tau / T_c$, будут иметь столь высокую корреляцию, что их следует считать практически неразрешимыми.

3.5. Особенности частотно-временной ФН сложных дискретных сигналов

Можно утверждать, что для получения хорошей разрешающей способности по τ и F ФН должна иметь пик в начале координат (основной пик) по возможности малого объема $V_{\text{осн}}$. Оставшийся объем $V - V_{\text{осн}}$, приходящийся на боковые лепестки, для минимизации уровня последних следует распределить как можно более равномерным слоем по прямоугольнику со сторонами $2T_c$ и $2\Delta f_c$. Следовательно, идеальная ФН должна иметь «кнопочный» вид, который изображен на рис. 3.4. Такой вид ФН обеспечивает высокую разрешающую способность сигналов по задержке и доплеровской частоте, а также однозначное измерение параметров сигналов в большом диапазоне задержек и в широкой доплеровской полосе частот. Отметим, что приближение к идеальной форме ФН возможно лишь в классе сложных амплитудно-фазоманипулированных сигналов. Действительно, для таких сигналов характерна малая по сравнению с длительностью сигнала T_c длительность корреляционной функции $\tau_k \approx 1/\Delta f_c$,

т.е. длина отрезка оси τ внутри области высокой корреляции $\tau_{к0,5} \approx 1/\Delta f_c$. Длина же отрезка оси F в пределах той же области – ширина спектра квадрата действительной огибающей $\Delta F_{0,5}$ – для сложных сигналов та же, что и для простых, $\Delta F_{0,5} = 1/T_c$.

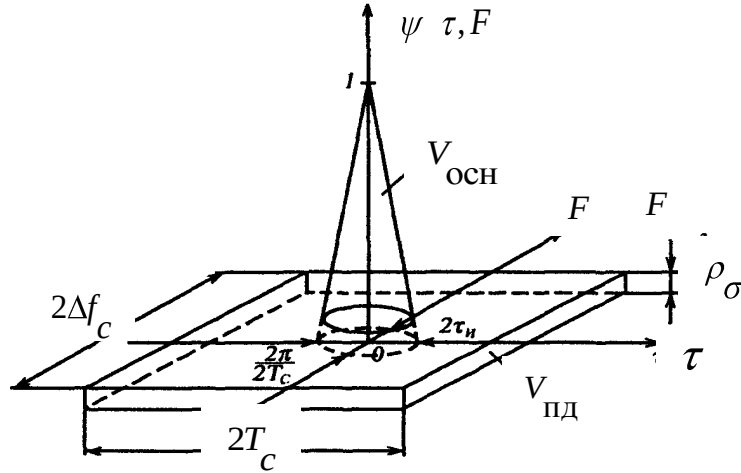


Рис. 3.4. Идеальная ФН сложных дискретных сигналов

Таким образом, если площадь области высокой корреляции близка к произведению длин указанных отрезков, т.е. к $\tau_{к0,5} \cdot \Delta F_{0,5} \approx 1/\Delta f_c T_c$, то объем основного пика (его высота равна единице, а площадь основания близка к площади высокой корреляции) $V_{осн} = 1 \cdot \tau_{к0,5} \Delta F_{0,5} \approx 1/\Delta f_c T_c = 1/B$. При базе $B \gg 1$ объем $V_{осн}$ составит малую долю полного объема $V = 1$, и последний практически весь придется на пьедестал, площадь которого $4\Delta f_c T_c = 4B$ значительно больше единицы. Средний квадрат боковых лепестков ФН можно найти, разделив объем пьедестала $V_{пд} = 1 - V_{осн}$ на площадь его основания. Среднеквадратический уровень боковых лепестков $\Psi_{\tau, F}$ примерно равен $\rho_{\sigma} = 1/\sqrt{2\Delta f_c T_c} = 1/\sqrt{2B}$, т.е. уменьшения боковых лепестков частотно-временной ФН можно добиться только за счет увеличения базы сигнала.

Реальная ФН фазоманипулированных сигналов имеет область высокой корреляции, как и для простых сигналов, симметрична относительно осей τ и F , однако размер ее вдоль оси τ примерно в $B \approx N$ раз меньше T_c : $\tau_k \approx T_c/N$. Поэтому, выбрав T_c и N достаточно большими, основному пику всегда можно придать иглообразную форму. При этом, однако, вместо «гладкого» пьедестала высоты $1/\sqrt{2\Delta f_c T_c} = 1/\sqrt{2N}$ вне основного пика оказываются хаотически

расставленными острыми боковыми пиками, отдельные из которых могут иметь уровни, заметно превосходящие $1/\sqrt{N}$.

3.6. Анализ ФН дискретных фазоманипулированных сигналов

Дискретный сигнал представляет собой последовательность элементарных импульсов определенной формы, повторяющихся с некоторым фиксированным временным интервалом Δ . Комплексная огибающая $\dot{S}_0(t)$, определяющая форму элементарного импульса, и внутренняя его угловая модуляция могут быть любыми. Элементарный импульс называют чипом. Модуляция всего сигнала заключается в манипулировании амплитудами и фазами отдельных чипов.

Представление комплексной огибающей дискретного сигнала дается выражением

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot \dot{S}_0(t - i\Delta), \quad (3.12)$$

где a_i – комплексная амплитуда i -го чипа. Последовательность комплексных амплитуд чипов $\{a_i, i = 0, 1, \dots, N-1\}$ называется кодовой последовательностью или просто кодом. Для примера в табл. 3.1 приведены известные бинарные коды Баркера и представлены характеристики их АКФ.

Таблица 3.1

N	Код Баркера	АКФ кода
2	1, -1	2, -1
3	1, 1, -1	3, 0, -1
4	1, 1, 1, -1	4, 1, 0, -1
	1, 1, -1, 1	4, -1, 0, 1
5	1, 1, 1, -1, 1	5, 0, 1, 0, 1
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	7, 0, -1, 0, -1, 0, -1
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1	11, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1	13, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

Временная диаграмма комплексной огибающей сигнала, построенной по закону кода Баркера длины $N_z = 7$, приведена на рис. 3.5, а, а соответствующий прямоугольный фазоманипулированный радиоимпульс изображен на рис. 3.5, б.

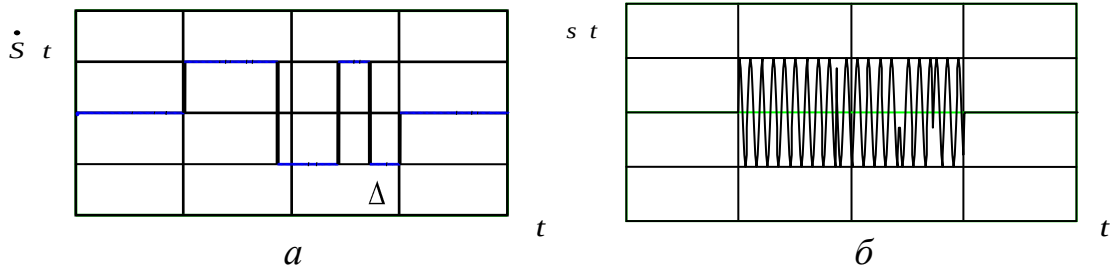


Рис. 3.5. Фазоманипулированный радиоимпульс по закону кода Баркера

Свойства функции неопределенности дискретных фазоманипулированных сигналов полностью определяются ФН кодовой последовательности. Если принять дискретный характер частот, то функцию неопределенности кодовой последовательности можно описать выражением вида:

$$\Psi_{m,k} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot a_{i-m} \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi \cdot i \cdot k}{N}\right) \quad (3.13)$$

Характерный вид функции неопределенности фазоманипулированного сигнала длиной $N=13$ представлен на рис. 3.6.

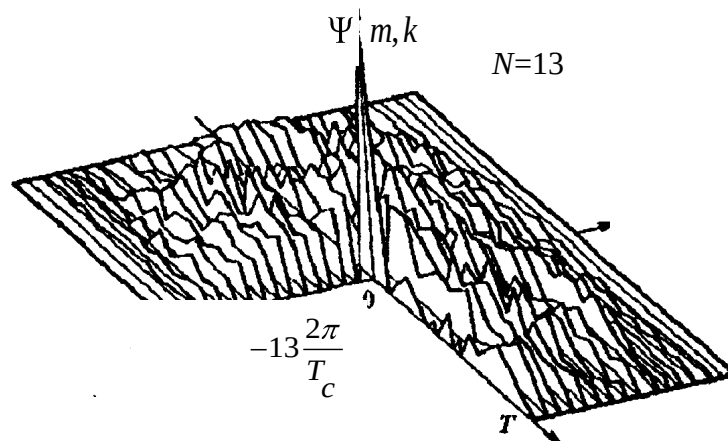


Рис. 3.6. ФН фазоманипулированного радиоимпульса по закону кода Баркера

Как видно, в плоскости задержка-частота выделяется главный пик ФН с высоким разрешением по задержке и частоте. Однако, вместо «гладкого» пьедестала вне основного пика оказываются хаотически расставленными острые боковые пики, отдельные из которых могут иметь уровни, заметно превосходящие $1/\sqrt{N}$.

Важной характеристикой ФН являются интегральные зависимости боковых лепестков в сечениях ФН плоскостями, параллельными осям задержек и частот, определяющие оценки разрешающей способности сигнала по времени и доплеровской частоте. Мера способности к одновременному разрешению по задержке и частоте определяется среднеквадратическим уровнем боковых лепестков в плоскости задержка-частота. Уровень боковых лепестков ФН кодо-

вой последовательности Баркера весьма близок к предельно достижимым характеристикам и составляет $1/\sqrt{N}$.

3.7. Влияние боковых лепестков ФН на разрешение сигналов

В качестве примера рассмотрим разрешение сигналов по задержке. Как отмечалось ранее, функция неопределенности любого сигнала наряду с *основным лепестком*, сосредоточенным в пределах интервалов корреляции по задержке и частоте, обладает также *боковыми лепестками*, находящимися вне указанного интервала. Наличие боковых лепестков ФН носит вредный характер, как при оценивании параметров сигналов, так и их разрешении по задержке и по частоте.

В качестве примера рассмотрим суперпозицию двух сигналов, которые характеризуется разными амплитудами и временными сдвигами, как это показано на рис. 3.7, а. В отсутствии шума отклик согласованного фильтра $r(\tau)$ на входной сигнал в точности представляет собой КФ $\Psi(\tau)$ огибающей. В реальной ситуации, когда сигнал наблюдается на фоне шума, всегда имеется вероятность возникновения ложного максимума вне основного пика КФ. После обработки в согласованном фильтре $r(\tau)$, основной лепесток более слабого сигнала оказывается полностью замаскированным боковыми лепестками более сильного сигнала (см. рис. 3.7, б). В этих условиях наблюдатель не сможет надежно извлечь необходимую информацию о сигналах или даже определить число принятых сигналов. Ясно, что перепутывание основного лепестка с ложным пиком, возникающим поблизости от большого бокового лепестка, более вероятно, чем с ложным пиком, возникающим при низком уровне боковых лепестков.

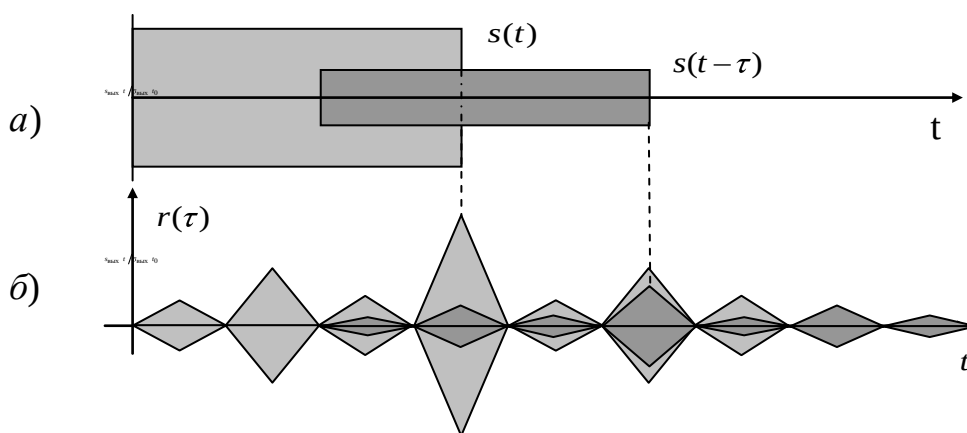


Рис. 3.7. Иллюстрация временного разрешения двух сигналов

Особое значение снижения уровня боковых лепестков имеет в условиях наблюдения целей на фоне мощных пассивных помех на большом интервале временных задержек, в пределы которого попадают сигналы, отраженные от наблюдаемых целей.

Из рассмотренного примера следует, что минимизация уровня боковых лепестков КФ имеет наивысший приоритет при синтезе сигнала всякий раз, когда одним из предназначений системы является измерение времени запаздывания или временное разрешение.

4. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

В задачах обнаружения следует полагать, что множество сигналов $S = s_0 t, s_1 t$ равно двум, при этом $s_0 t = 0$, а сигнал $s_1 t \neq 0$ подлежит обнаружению. Пусть на интервале времени $0, T$ наблюдается аддитивная смесь полезного сигнала $s t$ и шума $x t$: $y t = x t + s_i t$, $i \in 0, 1$. Необходимо вынести решения о наличии или отсутствии в принятой реализации полезного сигнала.

Предположим, что из наблюдаемой реализации доступны лишь дискретные отсчеты $y_j = y(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, составляющие вектор наблюдения $y = y_1, y_2, \dots, y_n^T$.

Выборочные значения принятого колебания описываются n -мерной плотностью вероятности (ПВ) $W_y = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Пусть $W_i = W(y | s_i)$, $i \in 0, 1$ – условная ПВ вектора y при условии, что в реализации $y t$ содержится $s_i t$ сигнал. Необходимо, пронаблюдав реализацию $y t$, решить, какому из двух непересекающихся классов W_i , принадлежит W_y . Предположение о том, что W_y принадлежит W_i , $i \in 0, 1$ называют гипотезой H_i . Решения, являющиеся результатом проверки гипотез, будем далее обозначать $\hat{H}_i$.

Решения о наличии или отсутствии сигнала сопровождаются ошибками двух видов. Условные вероятности $\alpha = p_{01} = P(\hat{H}_1 / H_0)$ и $\beta = p_{10} = P(\hat{H}_0 / H_1)$ называют *вероятностями ошибок первого и второго рода*. Эти же величины именуют *вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала*. Под ложной тревогой понимают факт решения $\hat{H}_1$ об обнаружении сигнала при условии, что он в наблюдаемом колебании $y t$ не содержится. Под пропуском понимают факт объявления решения $\hat{H}_0$ о том, что сигнала в $y t$ нет при условии, что в действительности он в $y t$ присутствует.

Далее для вероятностей ложной тревоги и пропуска будут использованы обозначения $p_{лт} = p_{01}$ и $p_{пс} = p_{10}$.

Пусть Π_{01} и Π_{10} – риски, связанные с ложной тревогой и пропуском сигнала, а p_0 – априорная вероятность отсутствия сигнала $s t$ в наблюдаемой реализации $y t$.

Критерии качества обнаружения сигнала можно представить в виде:
Критерий Байеса

$$\bar{P} = p_{\text{лт}} p_0 \Pi_{01} + p_{\text{пс}} (1 - p_0) \Pi_{10}.$$

Критерий идеального наблюдателя

$$P_{\text{ош}} = p_{\text{лт}} p_0 + p_{\text{пс}} (1 - p_0).$$

Критерий минимума суммы условных вероятностей ошибок

$$P_{\text{ош усл}} = p_{\text{лт}} + p_{\text{пс}}.$$

4.1. Обнаружение детерминированных сигналов

В общем случае процедура обнаружения может интерпретироваться следующим образом. При обнаружении n -мерное пространство векторов E^n необходимо разбить на две непересекающихся области G_0 и G_1 : $E^n = G_0 \cup G_1$, $G_0 \cap G_1 = \emptyset$. Тогда принятие решения сводится к указанию номера области, в которую попал вектор наблюдения $y = y_1, y_2, \dots, y_n^T$. Область G_0 называют *допустимой*, и если $y \in G_0$, то принимают решение об истинности гипотезы H_0 . Область G_1 называют *критической* и при $y \in G_1$ гипотезу H_0 отклоняют и принимают решение $\hat{H}_1$.

Учитывая изложенное, можно представить вероятности ложной тревоги $p_{\text{лт}}$ и пропуска $p_{\text{пс}}$ следующим образом:

$$p_{\text{лт}} = \int_{G_1} W(y|H_0) dy \quad \text{и} \quad p_{\text{пс}} = \int_{G_0} W(y|H_1) dy.$$

Далее рассмотрим общий подход к синтезу оптимальных обнаружителей детерминированных сигналов.

Начнем с байесовского обнаружителя сигналов и запишем выражение для среднего риска $\bar{P}$

$$\bar{P} = p_0 \Pi_{01} \cdot \int_{G_1} W(y|H_0) dy + (1 - p_0) \Pi_{10} \cdot \int_{G_0} W(y|H_1) dy. \quad (4.1)$$

Учитывая, что G_0 представляет разность $G - G_1$, а $\int_G W(y|H_0) dy = 1$, перепишем выражение (4.1) следующим образом

$$\begin{aligned}\bar{\Pi} &= p_0 \Pi_{01} \cdot \int_{G_1} W(y|H_0) dy + (1 - p_0) \Pi_{10} \cdot \left(1 - \int_{G_1} W(y|H_0) dy \right) = \\ &= (1 - p_0) \Pi_{10} - \int_{G_1} \left[(1 - p_0) \Pi_{10} \cdot W(y|H_1) - p_0 \Pi_{01} W(y|H_0) \right] dy.\end{aligned}$$

Из-за неотрицательности множителя $(1 - p_0) \Pi_{10}$ минимум среднего риска $\bar{\Pi}$ будет соответствовать максимуму выражения

$$\int_{G_1} \left[(1 - p_0) \Pi_{10} \cdot W(y|H_1) - p_0 \Pi_{01} W(y|H_0) \right] dy.$$

Интеграл как функция области G_1 достигает максимума, если в область G_1 включить все $y = y_1, y_2, \dots, y_n^T$, для которых подынтегральное выражение неотрицательно

$$\left[(1 - p_0) \Pi_{10} \cdot W(y|H_1) - p_0 \Pi_{01} W(y|H_0) \right] \geq 0.$$

В результате получаем признак принадлежности наблюдения y области G_1 с принятием решения $\hat{H}_1$:

$$(1 - p_0) \Pi_{10} \cdot W(y|H_1) \stackrel{\hat{H}_1}{\geq} p_0 \Pi_{01} W(y|H_0). \quad (4.2)$$

Выражение $W(y|H_i)$, рассматриваемое как функция y , является ПВ при истинности гипотезы H_i и называется *функцией правдоподобия* (ФП). ФП показывает, насколько правдоподобна та или иная гипотеза при данном наблюдении y .

Правило (4.2) традиционно представляют в виде

$$l = \frac{W(y|H_1)}{W(y|H_0)} \stackrel{\hat{H}_1}{\underset{\hat{H}_0}{>}} l_n = \frac{p_0 \Pi_{01}}{(1 - p_0) \Pi_{10}}. \quad (4.3)$$

Если перейти к случаю непрерывного наблюдения, то n -мерные ПВ превратятся в функционалы ПВ $W(y, t) | H_i$ и получаем:

$$l = \frac{W(y, t) | H_1}{W(y, t) | H_0} \frac{\langle \hat{H}_1 \rangle}{\langle \hat{H}_0 \rangle} l_{\Pi} = \frac{p_0 \Pi_{01}}{(1 - p_0) \Pi_{10}}. \quad (4.4)$$

называя отношение l двух значений ФП отношением правдоподобия (ОП).

Как видно, *байесовский обнаружитель* сигнала должен для полученной реализации y, t вычислить ОП l и сравнить его с порогом l_{Π} , зависящим от рисков и априорных вероятностей отсутствия и наличия сигнала.

Если разработчик обнаружителя ориентируется на *критерий идеального наблюдателя*, то в выражении (4.4) следует положить $\Pi_{01} = \Pi_{10}$, что превратит его в *правило максимума апостериорной вероятности* (МAB):

$$l = \frac{W(y, t) | H_1}{W(y, t) | H_0} \frac{\langle \hat{H}_1 \rangle}{\langle \hat{H}_0 \rangle} l_{\Pi} = \frac{p_0}{1 - p_0}.$$

Принятие за основу *критерия минимума суммы условных вероятностей ошибок* $\Pi_{01} = \Pi_{10}$, $p_0 = 1/2$ придаст выражению (4.4) вид правила максимального правдоподобия (МП), для которого $l_{\Pi} = 1$:

$$l = \frac{W(y, t) | H_1}{W(y, t) | H_0} \frac{\langle \hat{H}_1 \rangle}{\langle \hat{H}_0 \rangle} l_{\Pi} = 1.$$

Наконец, стратегию обнаружителя, оптимального *по критерию Неймана – Пирсона*, также можно описать соотношением (4.4), если значение порога выбрать из условия поддержания вероятности ложной тревоги не выше заданного уровня.

4.2. Функция и отношение правдоподобия сигналов на фоне аддитивного нормального шума

4.2.1 Детерминированные сигналы

Дальнейшее рассмотрение будет вестись применительно к помехе $x(t) = n(t)$ в виде нормального (гауссовского) шума с известной спектральной

плотностью N_0 . При отсутствии сигнала колебание $y(t)$, принятое на конечном интервале времени T , представляет собой случайный процесс $y(t) = x(t)$. Рассмотрим дискретное наблюдение, когда случайный процесс задан своими отсчетами $y_j = y(t_j)$ в моменты времени $t_j = j \cdot \Delta$, $j = 0, 1, \dots, n$. Вычислим сначала совместную плотность вероятности $W_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ для случайных величин $y_j = x_j$, которые имеют следующие характеристики: $\langle x_j \rangle = 0$, $\sigma_j^2 = \langle x_j^2 \rangle = N_0/2\Delta$ и корреляцию $\langle x_i \cdot x_j \rangle = 0$.

Гауссовский шум описывается нормальным законом распределения

$$W_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left(-x_j^2 / 2\sigma_j^2 \right).$$

В силу независимости отсчетов $x_1, x_2, \dots, x_n$ совместная плотность вероятности в отсутствии сигнала имеет вид

$$W_{y_1, y_2, \dots, y_n | H_0} = \prod_{j=1}^n W_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n y_j^2 \right). \quad (4.5)$$

При наличии сигнала можно записать $x_j = y_j - s_j$, и совместная плотность вероятности описывается выражением

$$W_{y_1, y_2, \dots, y_n | H_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - s_j)^2 \right). \quad (4.6)$$

Таким образом, отношение правдоподобия примет вид

$$l = \frac{W_{y_1, y_2, \dots, y_n | H_1}}{W_{y_1, y_2, \dots, y_n | H_0}} = \prod_{j=1}^n \frac{W_{x_j}(y_j - s_j)}{W_{x_j}(y_j)}.$$

После логарифмирования решающее правило (4.4) можно представить в виде

$$\ln l = \prod_{j=1}^n \ln \frac{W_x y_j - s_j}{W_x y_j} \frac{\hat{y}_{H_1}}{\hat{y}_{H_0}} \ln l_{\Pi}.$$

С учетом выражений (4.5) и (4.6) и после несложных преобразований решающее правило при дискретном наблюдении примет вид

$$\sum_{j=0}^n y_j \cdot s_j \frac{\hat{y}_{H_1}}{\hat{y}_{H_0}} z_{\Pi}, \quad (4.7)$$

где

$$z_{\Pi} = \sigma^2 \ln l_{\Pi} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n s_j^2$$

– пороговое значение определяется выбранным критерием оптимальности.

Как видно, полученное оптимальное правило сводится к вычислению скалярного произведения $y \cdot s$ и сравнение его с порогом z_{Π} .

В случае непрерывного наблюдения совместные плотности вероятности перейдут в соответствующие функционалы вероятности

$$W(y(t) | H_0) = c \cdot \exp \left(-\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt \right),$$

$$W(y(t) | H_1) = c \cdot \exp \left(-\frac{1}{N_0} \int_0^T y(t) - s \cdot t^2 dt \right).$$

где c – некоторый несущественный коэффициент, одинаковый для всех реализаций.

После раскрытия скобок под интегралом ФП $W(y(t) | H_1)$ удобно представить в форме

$$W(y(t) | H_1) = c_y \cdot \exp \left(\frac{2z - E}{N_0} \right), \quad (4.8)$$

где $z = \int_0^T y(t) \cdot s(t) dt$ – корреляционный интеграл принятой реализации и сигнала;

$E = \int_0^T s^2(t) dt$ – энергия сигнала; N_0 – спектральная плотность мощности белого шума;

$c_y = c \cdot \exp\left(-1/N_0 \int_0^T y^2(t) dt\right)$ – коэффициент, зависящий от $y(t)$ и не влияющий на принятия решения.

После необходимых преобразований получим решающее правило для непрерывного наблюдения

$$z = \int_0^T y(t) \cdot s(t) dt \underset{\langle \hat{H}_0 \rangle}{\overset{\hat{H}_1}{>}} z_{\Pi}, \quad (4.9)$$

где

$$z_{\Pi} = \left(\frac{N_0}{2} \ln l_{\Pi} + \frac{E}{2} \right)$$

– пороговый уровень определяется выбранным критерием оптимальности.

При общем байесовском подходе, пороговый уровень равен

$$z_{\Pi} = \frac{N_0}{2} \left[\ln \left(\frac{p_0 \Pi_0}{1 - p_0 \Pi_1} \right) + \frac{E}{2} \right].$$

При использовании критерия идеального наблюдателя полагают $\Pi_0 = \Pi_1$ и пороговый уровень равен

$$z_{\Pi} = \frac{N_0}{2} \left[\ln \left(\frac{p_0}{1 - p_0} \right) + \frac{E}{2} \right],$$

а для критерия минимума суммы условных вероятностей ошибок

$\Pi_{01} = \Pi_{10}$, $p_0 = 1/2$ получим

$$z_{\Pi} = E/2.$$

Таким образом, полученное выражение (4.9) устанавливает оптимальное решающее правило принятия решения при обнаружении сигналов. Обнаружители, оптимальные по любому из рассмотренных критериев, должны выполнять одни и те же действия: вычислять ОП и сравнивать его с порогом l_{Π} . От критерия зависит лишь значение порога, и поэтому обнаружитель, наилучший по од-

ному критерию, трансформируется в оптимальный по другому простым изменением порога I_{Π} .

4.2.2. Устройства и качественные показатели обнаружения детерминированных сигналов

При воздействии аддитивного нормального шума оптимальный обнаружитель согласно решающему правилу (4.9) должен вычислять корреляционный интеграл принятой реализации и сигнала и производить сравнение его с порогом обнаружения.

Структура устройства, называемого корреляционным приемником и реализующего алгоритм (4.9), приведена на рис. 4.1.

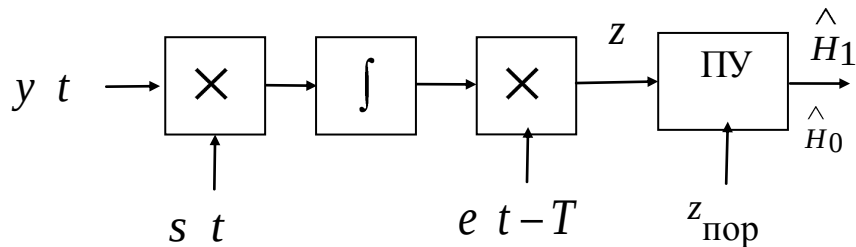


Рис. 4.1. Структура обнаружителя на некорреляционном приемнике.

Заметим, что опорный сигнал коррелятора является точной копией обнаруживаемого детерминированного сигнала $s(t)$. Третий блок предназначен для взятия отсчета (стробирования) текущего значения на выходе интегратора в момент окончания наблюдений T . Это равносильно умножению выходной величины интегратора на короткий импульс единичной амплитуды $e(t-T)$, запаздывающий на время T .

Возможна другая техническая реализация алгоритма (4.9), основанная на том, что корреляцию z можно сформировать как отсчет в момент времени $t = T$ сигнала на выходе согласованного фильтра, импульсная характеристика которого связана с сигналом соотношением $h(t) = s(T-t)$.

Структура обнаружителя, основанного на использовании согласованного фильтра (СФ), приведена на рис. 4.2.

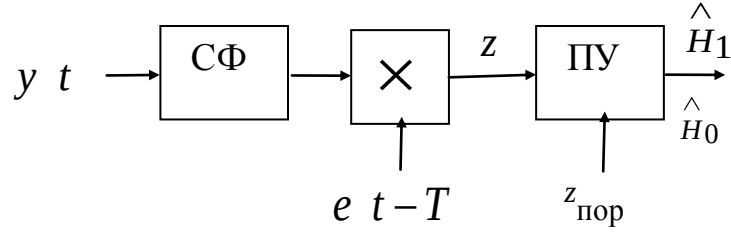


Рис. 4.2. Структура обнаружителя на согласованном фильтре.

Рассчитаем вероятности ошибок $p_{\text{ЛТ}}$ и $p_{\text{ПС}}$ в оптимальном обнаружителе детерминированного сигнала, пользуясь тем, что

$$P_{\text{ЛТ}} = P\left(\hat{H}_1/H_0\right) = P\left(z \geq z_{\text{П}}/H_0\right) = \int_{z_{\text{П}}}^{\infty} W(z/H_0) dz$$

и

$$P_{\text{ПС}} = P\left(\hat{H}_0/H_1\right) = P\left(z \geq z_{\text{П}}/H_1\right) = \int_{-\infty}^{z_{\text{П}}} W(z/H_0) dz.$$

На рис. 4.3 приведены графики ПВ $W(z|H_0)$ и $W(z|H_1)$, иллюстрирующие распределение решающих статистических величин для случая обнаружения полностью известного сигнала, где площади заштрихованных областей равны $\alpha = p_{\text{ЛТ}}$ (косая штриховка) и $\beta = p_{\text{ПС}}$ (прямая штриховка).

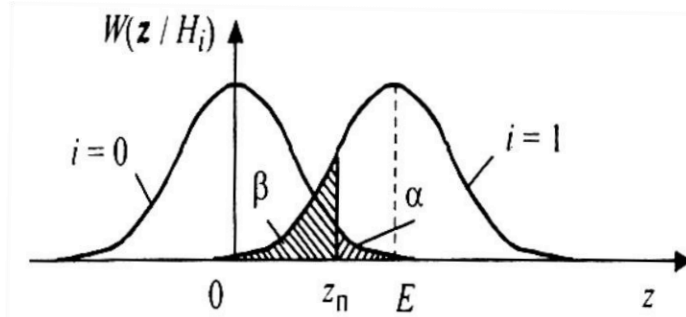


Рис. 4.3. Распределение решающих статистик при обнаружении сигнала.

Так как z есть линейное преобразование нормального случайного процесса, то $W(z/H_i)$, где $i = 0, 1$ – одномерные нормальные ПВ. Остается найти лишь их параметры: среднее $\bar{z}$ и дисперсию D_z .

При отсутствии сигнала имеем $\bar{z} = \int_0^T \overline{y(t)} \cdot s(t) dt = \int_0^T \overline{n(t)} \cdot s(t) dt = 0$, так как $\overline{n(t)} = 0$. Появление сигнала на входе приводит к тому, что среднее $\bar{z}$

$$\bar{z} = \int_0^T \overline{y(t)} \cdot s(t) dt = \int_0^T (s(t) + \overline{n(t)}) \cdot s(t) dt = \int_0^T s^2(t) dt = E.$$

Из физических соображений ясно, что дисперсия z , совпадающая с дисперсией шума $\sigma_{\text{ш}}^2 = N_0 E/2$ на выходе СФ, не зависит от присутствия на входе сигнала. С учетом мощности шума, получаем

$$p_{\text{лт}} = \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot N_0 E/2}} \exp\left(\frac{-z^2}{2 \cdot N_0 E/2}\right) dz, \quad (4.10)$$

$$p_{\text{пс}} = \int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot N_0 E/2}} \exp\left(\frac{-(z - E)^2}{2 \cdot N_0 E/2}\right) dz. \quad (4.11)$$

Введя параметр обнаружения $q = \sqrt{2E / N_0}$ равный отношению сигнал/шум на выходе фильтра и нормированный пороговый уровень $h = z_{\text{п}} / \sqrt{N_0 E / 2}$, получим

$$p_{\text{лт}} = 1 - \Phi(h); \quad (4.12)$$

$$p_{\text{пс}} = \Phi(h - q). \quad (4.13)$$

где: $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ – интеграл вероятности.

С учетом того, что $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, выражение для $p_{\text{пс}}$ можно представить в виде

$$p_{\text{пс}} = 1 - \Phi(q - h).$$

С помощью соотношений (4.10)–(4.13) осуществляется расчет обнаружителя в соответствии с принятым критерием оптимальности.

При использовании критерия Неймана–Пирсона требуется минимизировать $p_{\text{пс}}$ при фиксированном значении $p_{\text{лт}}$. При этом из уравнения (4.12) следует найти нормированный порог $h = \Phi^{-1}(1 - p_{\text{лт}})$ и подставить полученное значение h в формулу (4.13).

Зависимости

$$p_{\text{по}} = 1 - p_{\text{пс}} = \Phi(q - h) = \Phi(q - \Phi^{-1}(1 - p_{\text{лт}})) \quad (4.14)$$

от q при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги называют *характеристиками обнаружения*. Характеристики обнаружения детерминированного сигнала приведены на рис. 4.4 (сплошные линии). Опираясь на свойства интеграла вероятности Φx , легко установить, что зависимость $p_{\text{по}}$ от q является монотонно возрастающей, асимптотически стремящейся к единице при $q \rightarrow \infty$. При $q = 0$ получаем $p_{\text{по}} = \Phi \left[\Phi^{-1} 1 - p_{\text{лт}} \right] = p_{\text{лт}}$.

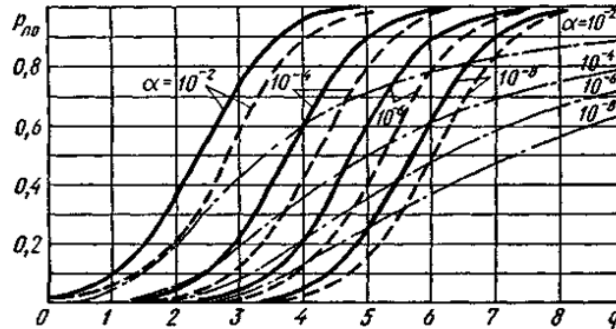


Рис. 4.4. Характеристики обнаружения сигналов

Часто бывает необходимо рассчитать минимальное значение параметра $q_{\text{мин}}$, при котором достигается требуемая верность обнаружения, т.е. заданные значения $p_{\text{лт}}$ и $p_{\text{пс}}$. Пользуясь соотношениями (4.12)–(4.14), легко установить, что $q_{\text{мин}} = \Phi^{-1} 1 - p_{\text{лт}} + \Phi^{-1} 1 - p_{\text{пс}}$. Это минимальное значение $q = q_{\text{мин}}$ определяет при заданной спектральной плотности мощности шума $N_0/2$ энергию сигнала $E_{\text{мин}}$, называемого иногда пороговым.

4.3. Обнаружение сигналов со случайными параметрами

4.3.1. Функция и отношение правдоподобия сигналов с неизвестными параметрами

Часто наблюдателю заранее не известны значения каких-либо параметров $\theta = \left(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \right)^T$ (амплитуды, частоты, фазы и др.) обнаруживаемого сигнала $s_1 t; \theta$. Сам сигнал $s_1 t; \theta$, при этом уже не является детерминированным, поскольку параметры их не заданы. Соответствующую задачу называют обнаружением сигналов с неизвестными параметрами.

В этом случае предположение о том, что $W_y = W_{y_1, y_2, \dots, y_n}$ принадлежит W_1 , отвечающий гипотезе H_1 , будет содержать не одно распределение, а столько, сколько различных значений может принять вектор параметров $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m^T$.

Рассмотрим далее важный для практики частный случай, когда проверяемые сложные гипотезы удастся заменить простыми. Такое упрощение оказывается осуществимым, если неизвестные параметры сигнала могут интерпретироваться как случайные величины с заданной априорной плотностью вероятности $W_0 \theta$. При истинности гипотезы H_1 ПВ $W_{y|H_1, \theta}$ вектора наблюдений y содержат в качестве параметров θ . Воспользовавшись теоремой умножения вероятностей, запишем

$$W_{y|H_1, \theta} \cdot W_0 \theta = W_{y, \theta|H_1},$$

где правая часть является условной совместной ПВ векторов y и θ .

Интегрируя совместную ПВ $W_{y, \theta|H_1}$ по θ , получим условную ПВ вектора y при истинности H_1 :

$$W_{y|H_1} = \int W_{y, \theta|H_1} d\theta.$$

Полученная ПВ вектора y при истинности H_1 не зависит от неизвестных параметров сигнала.

Перейдя от дискретных наблюдений к непрерывным, т.е. от ПВ вектора y к функционалам ПВ $y(t)$, получим

$$W_{y(t)|H_1} = \int W_{y(t), \theta|H_1} \cdot W_0 \theta d\theta.$$

Таким образом, знание априорной ПВ $W_{y, \theta|H_1}$ случайных параметров θ принимаемых сигналов позволяет трансформировать сложные гипотезы в простые. В итоге при обнаружении сигналов со случайными параметрами оказываются применимыми все рассмотренные оптимальные правила.

Функция правдоподобия при обнаружении сигналов со случайными параметрами, априорные распределения которых заданы $W_0 \theta$, может быть получена усреднением ФП, построенной для детерминированных сигналов. При конкретных значениях неизвестных параметров сигнала становится детерминированным и, согласно (4.8), можно записать

$$W(y|t) | H_1, \theta = c_y \cdot \exp\left(\frac{2z(\theta) - E(\theta)}{N_0}\right).$$

В случае обнаружения сигнала придем к выражению для отношения правдоподобия

$$l = \int \exp\left(\frac{2z(\theta) - E(\theta)}{N_0}\right) \cdot W_0(\theta) d\theta, \quad (4.15)$$

где $z(\theta)$ – корреляция $y(t)$ с обнаруживаемым сигналом $s(t, \theta)$ при фиксированном значении вектора его неизвестных параметров; $E(\theta)$ – энергия сигнала $s(t, \theta)$ с фиксированным и равным значением вектора неизвестных параметров; $W_0(\theta)$ – априорная ПВ вектора случайных параметров θ обнаруживаемого сигнала.

Действия, выполняемые согласно (4.15), соответствуют усреднению ОП для детерминированного сигнала с фиксированными значениями θ по всем возможным значениям θ . Поэтому полученное правило часто называют усредненным ОП.

Изложенные принципы обнаружения сигналов в дальнейшем будут конкретизированы применительно к различным моделям сигналов.

4.3.2. Синтез обнаружителей сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим сигнал, который не может считаться детерминированным, так как содержит случайный параметр – фазу φ . В общем виде модель такого сигнала можно записать как: $s(t, \varphi) = S(t) \cos(2\pi f_0 t + \gamma(t) + \varphi)$, где $S(t)$ и $\gamma(t)$ – известные законы амплитудной и угловой модуляции; f_0 – известная центральная частота; φ – случайная начальная фаза.

В дальнейшем будем полагать, что случайная начальная фаза φ имеет равномерную плотность вероятности $W_0(\varphi) = 1/(2\pi)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

При гипотезе H_0 наблюдаемое колебание $y(t)$ содержит реализацию только нормального белого шума $x(t) = n(t)$ с полностью известным функционалом ПВ, а при гипотезе H_1 – линейную смесь нормального белого шума и сигнала $s(t, \varphi)$.

В рассматриваемом случае оптимальный обнаружитель должен формировать усредненное ОП (4.15) и сравнивать его с порогом

$$l = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W(y, t) |H_1, \varphi| \cdot W_0(\varphi) \cdot d\varphi}{W(y, t) |H_0|} =$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} c \cdot \exp \left[-\frac{1}{N_0} \left(\int_0^T y(t) - S(t) \cos(2\pi f_0 t + \gamma t + \varphi)^2 dt \right) \right] \cdot \frac{1}{2\pi} d\varphi}{c \cdot \exp \left[-\frac{1}{N_0} \left(\int_0^T y(t)^2 dt \right) \right]} \cdot \frac{\hat{H}_1}{\hat{H}_0} l_{\Pi}$$

После несложных преобразований выражение приводится к виду

$$l = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \gamma t + \varphi) dt \right] \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \cdot S(t) \cos(2\pi f_0 t + \gamma t + \varphi) dt \right] d\varphi \cdot \frac{\hat{H}_1}{\hat{H}_0} l_{\Pi}. \quad (4.16)$$

Предположим, что обнаруживаемый сигнал является узкополосным. Тогда его энергия не зависит от начальной фазы φ и закона угловой модуляции γt

$$E(\varphi) = \int_0^T s^2(t, \varphi) dt = \int_0^T S^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \gamma t + \varphi) dt \cong E = \frac{1}{2} \int_0^T S^2(t) dt.$$

Представим узкополосный сигнал в виде двух квадратурных составляющих

$$s(t; \varphi) = S_1(t) \cdot \cos \varphi - S_2(t) \cdot \sin \varphi$$

где

$$S_1(t) = S(t) \cos(2\pi f_0 t + \gamma t)$$

и

$$S_2(t) = S(t) \sin(2\pi f_0 t + \gamma t).$$

Тогда выражение для корреляционного интеграла можно представить в виде двух корреляционных интегралов:

$$z(\varphi) = \int_0^T y(t) \cdot S_1(t) \cos \varphi dt + \int_0^T y(t) \cdot S_2(t) \sin \varphi dt =$$

$$= z_1 \cdot \cos \varphi + z_2 \cdot \sin \varphi = Z \cdot \cos(\varphi - \phi),$$

где $Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $\cos \phi = z_1/Z$, $\sin \phi = z_2/Z$;

z_1 и z_2 – квадратурные корреляционные интегралы.

После чего выражение (4.16) примет вид

$$\begin{aligned} l &= \exp\left(\frac{-E}{N_0}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{2}{N_0} z_1 \cos \varphi - z_2 \sin \varphi\right) d\varphi = \\ &= \exp\left(\frac{-E}{N_0}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{2Z}{N_0} \cos \varphi - \phi\right) d\varphi \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} l_{\Pi}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись интегральным представлением модифицированной функции Бесселя нулевого порядка $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp x \cdot \cos(\varphi - \phi) d\varphi$,

окончательно получим

$$l = \exp\left(\frac{-E}{N_0}\right) \cdot I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} l_{\Pi}. \quad (4.17)$$

Так как $\exp -E/N_0 = \text{const}$, а модифицированная функция Бесселя $I_0 x$ при $x \geq 0$ монотонно зависит от своего аргумента, то соотношение (4.17) позволяет решающее правило записать как

$$Z \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} z_{\Pi} = \frac{N_0}{2} \cdot I_0^{-1}\left(l_{\Pi} \cdot \exp\left(\frac{E}{N_0}\right)\right)$$

где $I_0^{-1} x$ – функция, обратная $I_0 x$.

Структура такого обнаружителя показана на рис. 4.5.

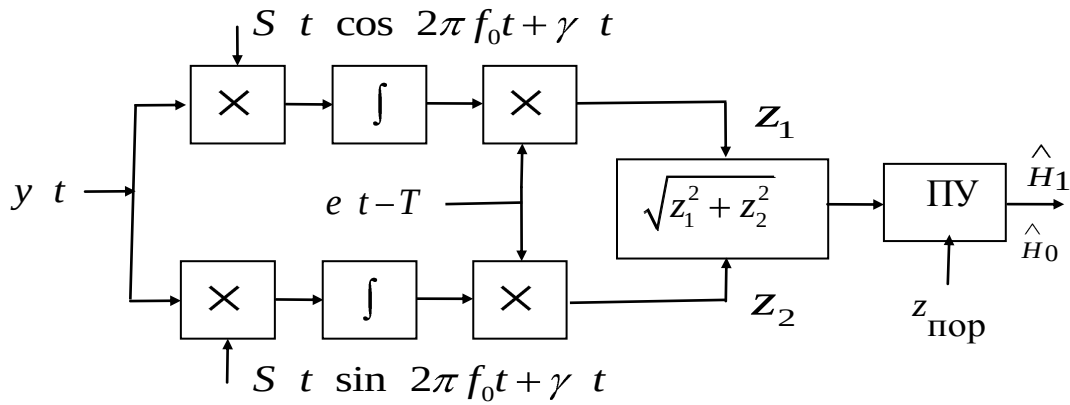


Рис. 4.5. Структура обнаружителя сигнала с неизвестной фазой

Отличие обнаружителя сигнала с неизвестной фазой от обнаружителя детерминированного сигнала, приведенного на рис. 4.1, состоит в наличии второго коррелятора и принятии решения по статистике Z , объединяющей выходные эффекты обоих каналов. Благодаря тому, что опорные сигналы корреляторов находятся в квадратуре, статистика Z не зависит от фазы φ , в результате чего устраняется вредное влияние случайности начальной фазы. Иная реализация оптимального обнаружителя возможна при использовании фильтра, у которого комплексная огибающая импульсной характеристики $\dot{H}(t) = \dot{S}^*(T - t)$.

Огибающую на выходе этого СФ можно найти с помощью комплексного интеграла Дюамеля

$$Y_{\text{ВЫХ}}(t) = \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}(\theta) \dot{H}^*(t - \theta) d\theta \right| = \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}(\theta) \dot{S}^*(\theta - (t - T)) d\theta \right|.$$

При равенстве нулю сигнала за пределами интервала наблюдения $y_{\text{ВЫХ}}(T) = Z$. Таким образом, статистика Z может быть интерпретирована как значение огибающей на выходе СФ в момент времени $t = T$. Структурная схема обнаружителя на основе СФ приведена на рис. 4.6.

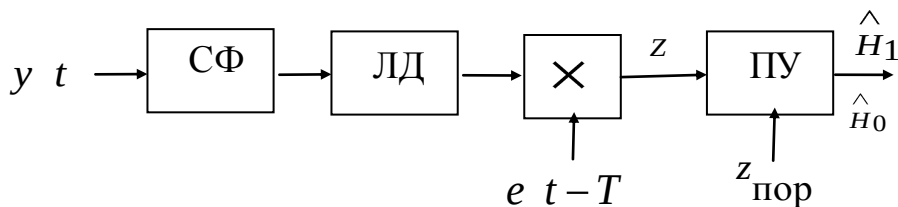


Рис. 4.6. Структурная схема обнаружителя сигнала с неизвестной фазой на основе СФ

Заметим, что вместо линейного детектора (ЛД) можно использовать любой детектор, лишь бы его амплитудная характеристика была монотонной функцией огибающей входного процесса.

Определим вероятности ошибок $P_{\text{ЛТ}}$ и $P_{\text{ПС}}$ в оптимальном обнаружителе сигнала с неизвестной фазой. Для того чтобы рассчитать $P_{\text{ЛТ}}$ и $P_{\text{ПС}}$ в рассматриваемом случае, достаточно вспомнить, что отсчеты огибающей узкополосного нормального шума с дисперсией σ^2 распределены по закону Рэлея:

$$\begin{cases} W(Z/H_0) = Z/\sigma^2 \exp\left[-Z^2/2\sigma^2\right] & \text{при } Z \geq 0 \\ W(Z/H_0) = 0 & \text{при } Z < 0 \end{cases}$$

и подчиняются обобщенному закону Рэлея, если к шуму добавляется сигнал с амплитудой U_m

$$\begin{cases} W(Z/H_1) = Z/\sigma^2 \exp\left[-Z^2 + U_m^2/2\sigma^2\right] \cdot I_0\left[Z \cdot U_m/\sigma^2\right] & \text{при } Z \geq 0 \\ W(Z/H_1) = 0 & \text{при } Z < 0 \end{cases}.$$

Графики ПВ $W(Z/H_0)$ и $W(Z/H_1)$, иллюстрирующие распределение решающих статистических величин для случая обнаружения сигнала с неизвестной фазой, приведены на рис. 4.7.

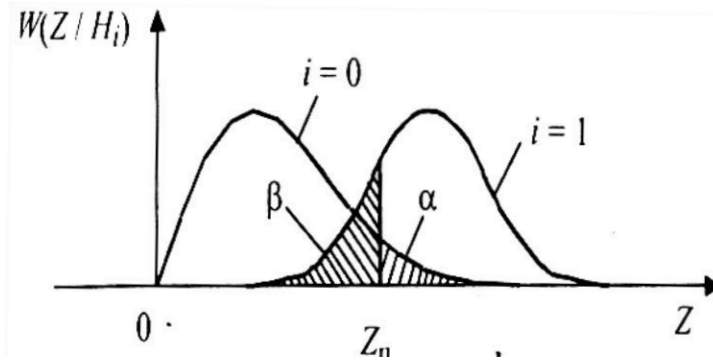


Рис. 4.7. Распределение решающих статистик при обнаружении сигнала с неизвестной фазой.

Как отмечалось ранее, дисперсия шума на выходе СФ равна $\sigma^2 = N_0 E/2$. Поэтому

$$P_{\text{ЛТ}} = \int_{Z_n}^{\infty} W(Z/H_0) dz = \int_{Z_n}^{\infty} \frac{Z}{N_0 E/2} \exp\left(\frac{-Z^2}{2 \cdot N_0 E/2}\right) dz,$$

$$P_{\text{ПС}} = \int_0^{Z_n} W(Z/H_1) dz = \int_0^{Z_n} \frac{Z}{N_0 E/2} \exp\left(\frac{-(Z^2 + E^2)}{2 \cdot N_0 E/2}\right) I_0\left(\frac{Z \cdot E}{N_0 E/2}\right) dz.$$

Перейдя к нормированной переменной $t = Z/\sqrt{N_0 E/2}$, получим

$$p_{\text{лт}} = \exp(-h^2 / 2) ,$$

$$p_{\text{пс}} = Q(h, q)$$
(4.18)

где $h = Z_{\text{п}} / \sqrt{N_0 E / 2}$ – нормированный порог; $q = \sqrt{2E / N_0}$ – параметр обнаружения; $Q(u, v) = \int_0^u t \exp\left(-\frac{t^2 + v^2}{2}\right) I_0(vt) dt$ – табулированная функция Маркума (интегральное распределение Рэлея-Раиса).

Для построения характеристик обнаружения необходимо выразить нормированный порог h через заданную вероятность ложной тревоги $p_{\text{лт}}$. Согласно выражению (4.18), имеем $h = \sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}$. Подставив это в выражение для вероятности правильного обнаружения, придем к результату

$$p_{\text{по}} = 1 - p_{\text{пс}} = 1 - Q(\sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}, q) .$$
(4.19)

Характеристики обнаружения сигнала со случайной начальной фазой даны пунктиром на рис. 4.4.

Для определения порогового сигнала нужно решить уравнение $p_{\text{пс}} = Q(\sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}, q)$ относительно q

$$q_{\text{мин}} = Q_2^{-1}(\sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}, p_{\text{пс}}) ,$$
(4.20)

где $Q_2^{-1}(*, *)$ – функция, обратная Q -функции по второму аргументу.

Полученные соотношения позволяют оценить потери в пороговом сигнале, связанные со случайным характером фазы. Эти потери обычно характеризуют показателем ξ , определяемым отношением

$$\xi = \left[\frac{q_{2\text{мин}}(p_{\text{лт}}, p_{\text{пс}})}{q_{1\text{мин}}(p_{\text{лт}}, p_{\text{пс}})} \right]^2 = \left[\frac{Q_2^{-1}(\sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}, p_{\text{пс}})}{\Phi^{-1}(1 - p_{\text{лт}}) + \Phi^{-1}(1 - p_{\text{пс}})} \right]^2 ,$$

где $q_{1\text{мин}}(p_{\text{лт}}, p_{\text{пс}})$ и $q_{2\text{мин}}(p_{\text{лт}}, p_{\text{пс}})$ – пороговые отношения сигнал/шум, необходимые для обнаружения с верностью $p_{\text{лт}}, p_{\text{пс}}$, соответственно детерминированного сигнала и сигнала со случайной начальной фазой. Величина ξ показывает, во сколько раз следует увеличить энергию сигнала, чтобы компенсировать снижение верности обнаружения, обусловленное случайностью начальной фазы. Обычно величину ξ выражают в децибелах: $\xi_{\text{дб}} = 10 \lg \xi$. Значение

потерь $\xi_{\text{дб}} = F \cdot p_{\text{ПС}}$ зависит от заданных вероятностей ошибок, и снижается с уменьшением значений $p_{\text{ЛТ}}$ и $p_{\text{ПС}}$. Так при значениях $p_{\text{ПС}} = 10^{-1} \dots 10^{-4}$ потери составляют от 0,2 дБ до 1,2 дБ.

4.3.3. Обнаружение сигнала со случайной амплитудой и начальной фазой

В этом случае наряду со случайной начальной фазой φ в модель сигнала вводят дополнительный случайный параметр – амплитуду A :

$$s(t, \varphi, A) = A \cdot S(t) \cos(2\pi f_0 t + \gamma(t) + \varphi),$$

где $S(t)$ и $\gamma(t)$ – известные законы амплитудной и угловой модуляции; f_0 – известная центральная частота; φ – случайная начальная фаза с априорной ПВ $W_0(\varphi)$ и случайная амплитуда A с априорной ПВ $W_0(A)$.

Когда амплитуда и начальная фаза независимы, то совместная априорная ПВ A и φ определяется произведением $W_0(A, \varphi) = W_0(A) \cdot W_0(\varphi)$.

Поэтому отношение правдоподобия будет характеризоваться выражением

$$l = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \exp\left(\frac{2z(A, \varphi) - E(A)}{N_0}\right) \cdot W_0(A) \cdot W_0(\varphi) dA d\varphi, \quad (4.21)$$

где $z(A, \varphi) = A \cdot z(\varphi)$ – представляет собой корреляцию принятого колебания $y(t)$ с сигналом единичной амплитуды $s(t; \varphi) = S(t) \cos[2\pi f_0 t + \gamma(t) + \varphi]$ в функции от фазы φ и энергии $s(t; \varphi)$; $E(A) = A^2 E$ – энергия принимаемого сигнала.

Считая ПВ начальной фазы равномерной $W_0(\varphi) = 1/2\pi$ и выполняя в приведенном выражении (4.21) интегрирование по φ с учетом результатов предыдущего раздела, получим

$$l = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-A^2 E}{N_0}\right) \cdot I_0\left(\frac{2A \cdot Z}{N_0}\right) \cdot W_0(A) dA. \quad (4.22)$$

Так как подынтегральное выражение в (4.22) неотрицательно, а $I_0(x)$ – монотонная функция своего аргумента, то l также монотонная функция статистики Z . Поэтому структура оптимального обнаружителя при любом распределении $W_0(A)$ будет такой же, как и для сигнала со случайной начальной фазой и фиксированной амплитудой (рис. 4.5 и рис. 4.6).

Таким образом, рассмотренные структуры приемников сохраняют свою оптимальность и в том случае, когда у сигнала случайна не только фаза, но и амплитуда. Конкретный вид ПВ $W_0 A$ может влиять только на пороговое значение z_{Π} .

Вероятность ложной тревоги, как и для предыдущего случая, определяется выражением

$$p_{\text{лт}} = \int_{z_{\Pi}}^{\infty} W(Z / H_0) dz = \int_{z_{\Pi}}^{\infty} \frac{Z}{N_0 E/2} \exp\left(\frac{-Z^2}{2 \cdot N_0 E/2}\right) dz. \quad (4.23)$$

Для вычисления вероятности пропуска $P_{\text{пс}}$ необходимо задать вид распределения $W_0 A$, так как $P_{\text{пс}} = \int_0^{\infty} P_{\text{пс}} A \cdot W_0 A dA$, где

$P_{\text{пс}} A$ – вероятность пропуска сигнала с конкретным значением A .

Чаще других на практике встречается рэлеевская модель флуктуаций амплитуды

$$\begin{cases} W_0 A = A/\sigma_A^2 \exp\left[-A^2/2\sigma_A^2\right] & \text{при } A \geq 0 \\ W_0 A = 0 & \text{при } A < 0 \end{cases}. \quad (4.24)$$

Так как для рэлеевской случайной величины $\overline{A^2} = 2\sigma_A^2$, то для выполнения условия $\overline{A^2} = 1$ необходимо, чтобы $\sigma_A^2 = 1/2$.

Отметим, что мгновенные значения радиосигнала с начальной фазой, распределенной равномерно, и с амплитудой, флуктуирующей по закону Рэлея, являются нормальными с нулевым средним. Следовательно, при истинности гипотезы H_1 , на выходе СФ наблюдается сумма независимых нормальных процессов, один из которых (шум) имеет дисперсию $N_0 E/2$, а другой (сигнал) – $\sigma_A^2 E_A = E^2/2$. Поскольку эта сумма нормальна и имеет нулевое среднее, ПВ при гипотезе H_1 является рэлеевской (вместо обобщенной рэлеевской), причем фигурирующий в (4.24) параметр σ_A^2 теперь равен $N_0 E/2 + E^2/2$.

С учетом этого можно определить вероятность пропуска сигнала

$$p_{\text{пс}} = \int_0^{z_{\Pi}} \frac{Z}{N_0 \cdot E/2 + E^2/2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2N_0 E/2 + E^2/2}\right) dz. \quad (4.26)$$

Введя нормированную переменную $t = \frac{Z}{N_0 \cdot E/2 + E^2/2}$ можно получить окончательное выражение для вероятности пропуска сигнала

$$p_{\text{ПС}} = 1 - \exp \left[-\frac{h^2}{2(1 + q^2/2)} \right] \quad (4.27)$$

где $h = Z_{\text{П}} / \sqrt{N_0 E / 2}$ – нормированный порог, а параметр обнаружения $q = \sqrt{2\bar{E} / N_0}$ соответствует среднему значению сигнала $s(t, \varphi, A)$ при флуктуациях амплитуды по рэлеевскому закону.

На рис. 4.8 приведены графики ПВ $W(Z|H_0)$ и $W(Z|H_1)$, иллюстрирующие распределение решающих статистических величин для случая обнаружения сигнала со случайной амплитудой и начальной фазой.

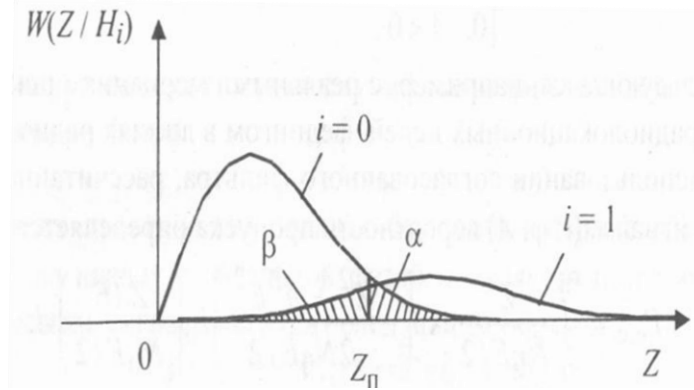


Рис. 4.8. Распределение решающих статистик при обнаружении сигнала со случайной фазой и амплитудой.

Для построения характеристик обнаружения служит равенство, следующее из (4.27) и формулы для $p_{\text{ЛТ}}$ в выражении (4.23):

$$p_{\text{ПО}} = p_{\text{ЛТ}} \frac{1}{1 + q^2/2}. \quad (4.28)$$

Характеристики обнаружения сигнала со случайной фазой и рэлеевскими флуктуациями амплитуды на рис. 4.4 нанесены штрихпунктиром. Их особенность состоит в том, что они пересекают аналогичные кривые для сигнала фиксированной амплитуды, соответствующие тем же значениям $p_{\text{ЛТ}}$. Объясняется это тем, что эпизодические большие выбросы флуктуирующей амплитуды увеличивают вероятность обнаружения сигнала с малым значением q , в

области же больших q провалы интенсивности флуктуирующего сигнала (замирания) резко замедляют рост $p_{\text{ПО}}$ как функции q .

5. РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

5.1. Оптимальное различение сигналов

Пусть на интервале времени $0, T$ наблюдается аддитивная смесь полезного сигнала $s(t)$ и шума $x(t)$. При различении M сигналов выполняется анализ принятого колебания $y(t) = x(t) + s_i(t)$, $i \in 0, 1, \dots, M-1$, заканчивающийся принятием решения о том, какой именно сигнал $s_i(t)$, принадлежащий множеству сигналов $S = \{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$, присутствует в реализации $y(t)$.

Если наблюдаемое колебание протекает в дискретном времени и нам доступны дискретные отсчеты $y_j = y(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, то мы имеем вектор наблюдения $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Выборочные значения принятого колебания описываются n -мерной плотностью вероятности $W_y = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Пусть $W_i = W(y | s_i)$ – условная ПВ вектора y при условии, что в реализации $y(t)$ содержится $s_i(t)$ сигнал. Необходимо пронаблюдав реализацию $y(t)$ решить, какому из M непересекающихся классов W_i , $i \in 0, 1, \dots, M-1$ принадлежит W_y . Предположение о том, что W_y принадлежит W_i называют гипотезой H_i . Решения, являющиеся результатом проверки гипотез, будем далее обозначать $\hat{H}_i$.

В дальнейшем будем рассматривать различение сигналов одинаковой энергии. При этом за основу будет принято правило *максимального правдоподобия* (МП). Правило МП будет оптимально в том случае, когда критерием качества служит сумма условных вероятностей ошибок, либо полная вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ при равных априорных вероятностях всех сигналов $p_i = 1/M$, либо средний риск при равновероятности сигналов и равной опасности всех ошибок $\Pi = \Pi_{ik}$, $i \neq k$.

5.2. Различение двух детерминированных сигналов

Действующий по правилу МП различитель двух детерминированных сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$ равной энергии $E_0 = E_1 = E$ должен принимать решение о

присутствии в колебании $y(t)$ сигнала, имеющего с $y(t)$ большую корреля-

$$\text{цию } z_i = \int_0^T y(t) \cdot s_i(t) dt, \quad i = 0, 1:$$

$$z_1 \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} z_0,$$

Перепишем это правило в следующем виде:

$$z = z_1 - z_0 = \int_0^T y(t) \cdot s(t) dt \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} 0,$$

где $s(t) = s_1(t) - s_0(t)$ – разностный сигнал.

Таким образом, чтобы различить два детерминированных сигнала, достаточно вычислить единственную корреляцию $z = \int_0^T y(t) \cdot s(t) dt$ с разностным сигналом $s(t)$, причем какое из решений будет принято, зависит только от знака z . Структура, реализующая данное правило и использующая коррелятор, показана на рис. 5.1. Как всегда, коррелятор можно заменить фильтром, который должен быть согласованным с разностным сигналом $s(t)$.

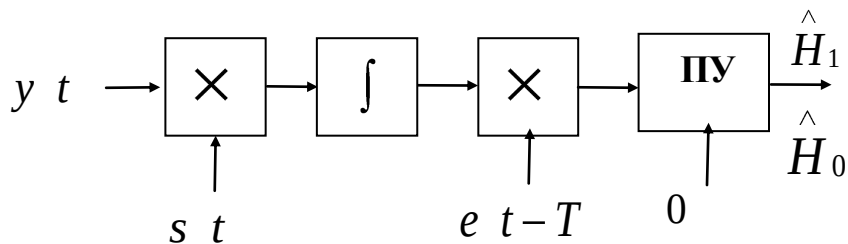


Рис. 5.1. Структурная схема различителя двух сигналов

Рассмотрим геометрическое толкование процедуры различения, проясняющее вопросы о вероятностях ошибок и о том, как лучше выбрать сами различаемые сигналы. Будем интерпретировать $s_0(t)$ и $s_1(t)$ как векторы в неко-

тором евклидовом пространстве, учтя, что длины последних $\sqrt{E_i} = \sqrt{\int s_i^2 t dt}$, $i = 0, 1$, в силу равенства энергий одинаковы: $\sqrt{E_i} = \sqrt{E}$.

Так как в любом пространстве через два вектора с общим началом всегда проходит плоскость, векторы $s_0 t$ и $s_1 t$ можно считать расположенными на плоскости P , как это изображено на рис. 5.2.

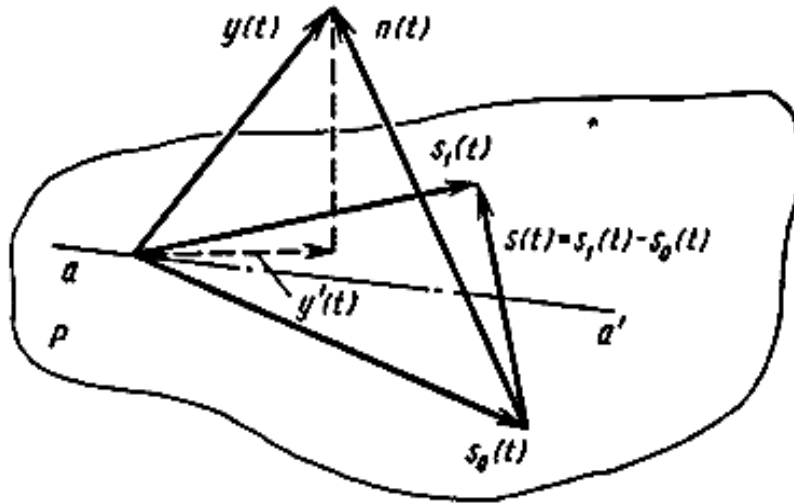


Рис. 5.2. Векторная диаграмма различения двух сигналов

Допустим, что к присутствующему на входе различителя сигналу $s_0 t$ добавилась помеха $n t$, которую можно также интерпретировать как вектор, но уже не обязательно лежащий в плоскости P . Тогда результирующий вектор $y t = s_0 t + n t$ и решение будет выноситься в пользу сигнального вектора, ближайшего к $y t$, т.е. имеющего от $y t$ меньшее евклидово расстояние

$$d_{yi} = \sqrt{\int [y t - s_i t]^2 dt}.$$

Очевидно, что вектор $y t$ ближе к тому из векторов $s_0 t$, $s_1 t$, к которому ближе его проекция $y t'$ на плоскость P . Таким образом, если через середину вектора $s t = s_1 t - s_0 t$ провести перпендикуляр (aa' на рис. 5.2), разделяющий P на две полуплоскости, то получится следующая модель принятия решения: считается, что в $y t$ присутствует тот сигнал, который лежит в той же полуплоскости, что и проекция $y t$ на плоскость P .

Теперь уже нетрудно прийти к выражениям для вероятностей перепутывания сигналов. Действительно, как видно из рис. 5.2, сигнал $s_0 t$ будет ошибочно принят за сигнал $s_1 t$ тогда и только тогда, когда проекция шумового вектора $n t$ на направление $s t$ окажется больше половины длины d_{01} разностного вектора $s t = s_1 t - s_0 t$.

Так как проекция $n t$ на направление $s t$ равна $z_{\text{ш}}/d_{01}$, где $z_{\text{ш}} = \int n t \cdot s t dt$ – скалярное произведение (корреляция) $n t$ и $s t$, то для вероятности перепутывания $s_0 t$ с $s_1 t$ получаем выражение

$$p_{01} = P\left(\hat{H}_1 | H_0\right) = P\left(z_{\text{ш}}/d_{01} > d_{01}/2\right) = \int_{d_{01}/2}^{\infty} W_{z_{\text{ш}}} dz_{\text{ш}}. \quad (5.1)$$

Воспользовавшись нормальностью $z_{\text{ш}}$ как линейного преобразования $n t$ и тем, что среднее $z_{\text{ш}} = 0$, а дисперсия $D z_{\text{ш}} = N_0 E_s / 2$, где E_s – энергия разностного сигнала, причем $d_{01} \sqrt{E_s}$, получим

$$p_{01} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 d_{01}^2/2}} \int_{d_{01}/2}^{\infty} \exp\left(-\frac{z_{\text{ш}}^2}{2N_0 d_{01}^2/2}\right) dz_{\text{ш}} = 1 - \Phi\left(\frac{d_{01}}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (5.2)$$

Вероятность перепутывания уменьшается с ростом длины разностного вектора $s t$, т. е. с увеличением евклидова расстояния между $s_0 t$ и $s_1 t$

$$d_{01} = \sqrt{\int [s_1 t - s_0 t]^2 dt} = \sqrt{2E - 2 \int s_1 t \cdot s_0 t dt} = \sqrt{2E \cdot 1 - \rho},$$

в котором

$$\rho = \frac{1}{E} \int_0^T s_0 t \cdot s_1 t dt$$

(5.3)

– коэффициент корреляции сигналов $s_0 t$ и $s_1 t$.

Теперь выражение (5.2) можно представить в традиционном виде:

$$p_{01} = 1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right), \quad (5.4)$$

где $q = \sqrt{2E/N_0}$ – уже известный параметр обнаружения, равный отношению сигнал/шум на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s_i t$.

В силу симметрии векторов $s_0 t$ и $s_1 t$ относительно aa' на рис. 5.2 вероятности перепутывания p_{01} и p_{10} одинаковы, и полная вероятность ошибки при равновероятных сигналах $p_0 = p_1 = 1/2$ будет равна

$$P_{\text{ош}} = \frac{p_{01} + p_{10}}{2} = 1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right). \quad (5.5)$$

Выражение (5.5), как и рис. 5.2, отвечают на вопрос о наилучшей в смысле минимума $P_{\text{ош}}$ паре сигналов фиксированной энергии E .

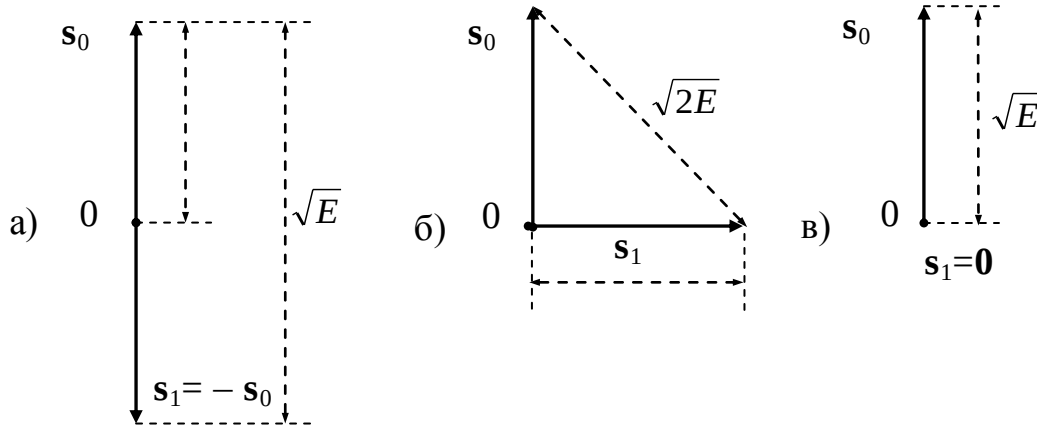


Рис. 5.3 Геометрическая трактовка коэффициентов корреляции двух сигналов

Действительно, коэффициент корреляции (5.3) как частное от деления скалярного произведения $s_0 t$ и $s_1 t$ на произведение длин есть косинус угла между векторами $s_0 t$ и $s_1 t$ будет минимален $\rho = -1$, когда эти векторы противоположны, как это показано на рис. 5.3, а. Таким образом, вероятность

ошибки (5.5) минимальна и равна

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi \ q . \quad (5.6)$$

Таким образом, оптимальной сигнальной парой служат противоположные сигналы вида $s_1(t) = -s_0(t)$.

Тем не менее, на практике по разным причинам нередко используют и неоптимальные, например ортогональные, сигналы, для которых $\cos \alpha = \rho_{01} = 0$, $d(s_0, s_1) = \sqrt{2E}$ (см. рис. 5.3, б) и вероятность ошибки равна

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi \ q / \sqrt{2} . \quad (5.7)$$

Существует еще один, достаточно старый, способ передачи двоичной информации, до сих пор использующийся на практике: *амплитудная модуляция* (ASK), при которой символ данных «1» передается сигналом $s_1(t) = s(t)$ с энергией $E_1 = E$, а символ «0» – паузой, т.е. $s_0(t) = 0$, $E_0 = 0$. В этом случае (см. рис. 5.3, в) $d(s_0, s_1) = \sqrt{E}$.

Сравнивая выражение (5.5) с (5.6), нетрудно видеть, что применение ортогональных сигналов вместо противоположных требует для сохранения значения $P_{\text{ош}}$ в $\sqrt{2}$ раз большего значения q , т.е. двукратного увеличения энергии сигналов E . Поэтому в классе детерминированных сигналов ортогональная пара имеет энергетические потери по отношению к противоположной $\xi_{\text{дб}} = 3$ дБ

5.3. Различение М-детерминированных сигналов

При произвольном M различитель, придерживающийся правила МП, по-прежнему считает присутствующим в $y(t)$ сигнал, наименее удаленный от $y(t)$ в смысле евклидова расстояния

$$d_{yi} = \sqrt{\int_0^T [y(t) - s_i(t)]^2 dt}$$

или, что при одинаковых энергиях сигналов равносильно, имеющий с $y(t)$ максимальную корреляцию z_i . В силу этого алгоритм МП можно записать в виде:

$$\hat{H}_k \quad z_k \geq z_i, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (5.8)$$

Структура, в основу которой положено правило (5.8), изображена на рис. 5.4.

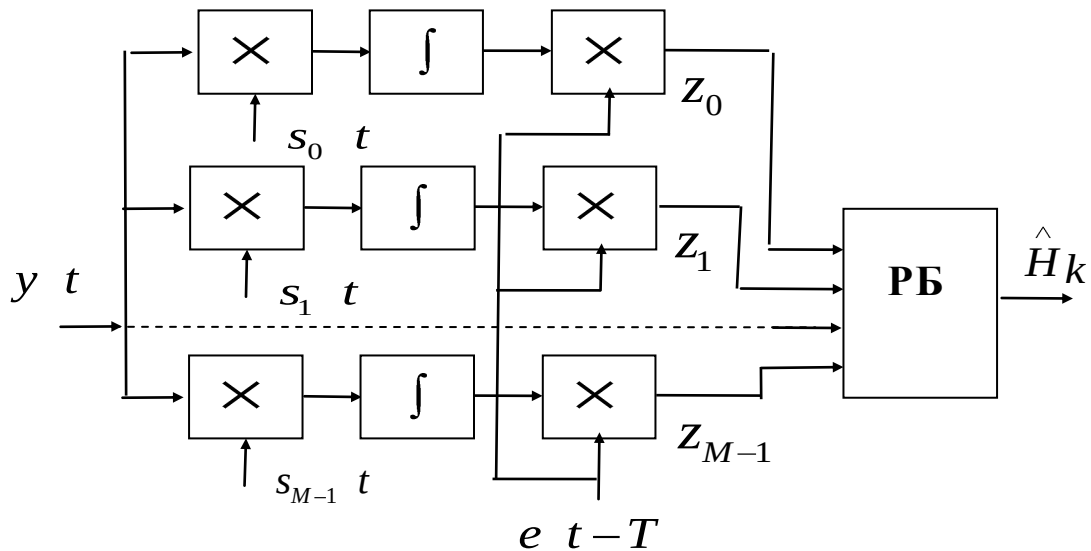


Рис. 5.4. Схема различителя М-детерминированных сигналов

Она содержит M каналов (по числу сигналов), вычисляющих корреляции наблюдаемой реализации $y(t)$ со всеми сигналами. Решающий блок (РБ) отыскивает наибольшую из корреляций. Следовательно, сигнал, поданный в качестве опорного на коррелятор, на выходе которого зафиксирован максимум z_i , объявляется присутствующим в принятой реализации $y(t)$.

Вместо корреляторов можно использовать M фильтров, каждый из которых согласован со своим сигналом $s_i(t)$.

Геометрические образы, использованные ранее, можно распространить и на случай $M \geq 2$, только теперь пучок сигнальных векторов $s_i(t)$ расположится не на плоскости, а в M -мерном пространстве, как показано на рис. 5.5.

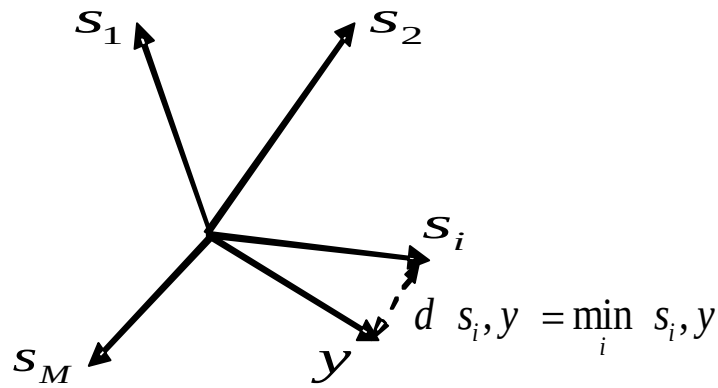


Рис. 5.5. Геометрическая трактовка различения М-сигналов
 для того чтобы по возможности уменьшить вероятность перепутыва-
 ния i -го сигнала с k -м, следует максимально «раздвинуть» i -й и k -й векто-
 ры. Однако если $M \geq 2$, то, раздвигая два вектора, необходимо следить, что-
 бы каждый из них не приближался к какому-то третьему, поскольку все сиг-
 налы равноправны и каждый из них может с равной вероятностью присут-
 ствовать в реализации $y(t)$. Таким образом, оптимальный выбор M deter-
 минированных сигналов сводится к поиску такой конфигурации пучка M
 векторов, в которой минимальное евклидово расстояние между парой векто-
 ров было бы максимальным:

$$\min d_{ik} = \max .$$

Так как при равенстве энергий, т.е. длин векторов

$$d_{ik} = \sqrt{\int [s_i(t) - s_k(t)]^2 dt} = \sqrt{2E(1 - \rho_{ik})} ,$$

где ρ_{ik} – коэффициент корреляции i -го и k -го сигналов; то правило максиму-
 ма минимального расстояния тождественно условию минимума максимального
 коэффициента корреляции в множестве (ансамбле) сигналов

$$\max_{i \neq k} \rho_{ik} = \min .$$

Предельно достижимый минимум максимального коэффициента корреляции устанавливается довольно легко. Просуммировав коэффициенты корреляции ρ_{ik} по всем i и k , получим

$$\sum_{i,k} \rho_{ik} = \frac{1}{E} \int \sum_{i,k} s_i(t) s_k(t) dt = \frac{1}{E} \int \left[\sum_{i=0}^{M-1} s_i(t) \right]^2 dt \geq 0,$$

где неравенство следует из неотрицательности квадрата под интегралом. Кроме того, в сумме слева M слагаемых при $i=k$ равны единице, а остальные $M(M-1)$ не больше $\rho_{\max}$, где $\rho_{\max} = \max_{i \neq k} \rho_{ik}$. Поэтому имеем $M + M(M-1) \cdot \rho_{\max} \geq 0$ и минимум максимального коэффициента корреляции равен

$$\rho_{\max} \geq -1/(M-1).$$

Конфигурацию из M векторов, в которой косинус угла между любой парой векторов равен $-1/(M-1)$, называют правильным симплексом. Если эти векторы взять в качестве M сигналов, то полученный детерминированный ансамбль (симплексный код) при равновероятности всех сигналов $s_i(t)$ обеспечит минимум полной вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$, что и решает вопрос об оптимальном выборе M сигналов.

Примерами правильных симплексов служат при $M=2$ два противоположных вектора; при $M=3$ — три вектора, лежащих в одной плоскости и разбивающих ее на три равных угла по 120° ; при $M=4$ — четыре вектора. При $M=4$ симплексные вектора образуют простейший правильный многогранник (тетраэдр), что объясняет наименование сигналов: «симплекс» на латинском означает «простой». Для простейших множеств из $M=2, 3, 4$ симплексных сигналов, представленных на рис. 5.6, величина коэффициента корреляции принимает значения, равные $-1, -1/2$ и $-1/3$ соответственно, что в свою очередь отвечает углам в $180^\circ, 120^\circ$ и примерно 110° .

Вывод точного выражения для вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ различения M сигналов с произвольными ρ_{ik} является достаточно сложным. Для равноудаленных и равновероятных сигналов можно привести так называемую аддитивную границу полной вероятности ошибки:

$$P_{\text{ош}} \leq M-1 \left[1 - \Phi \left(q \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \right) \right]. \quad (5.9)$$

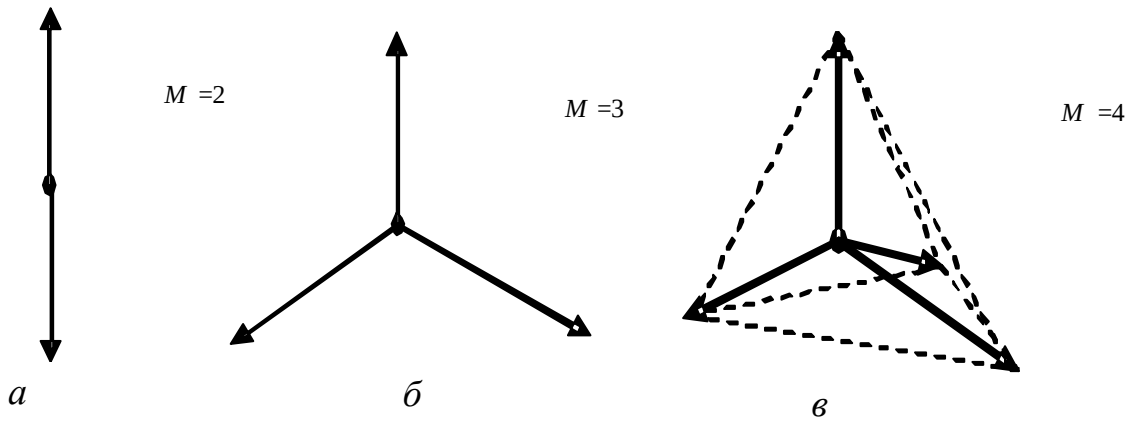


Рис. 5.6. Векторные диаграммы простейших симплексных сигналов

Понятно, что при большом числе различаемых сигналов ортогональный ансамбль, в котором $\rho_{ik} = 0$, $i \neq k$, практически не проигрывает симплексному ансамблю в значении полной ошибки $P_{\text{ош}}$.

5.4. Различение сигналов со случайными начальными фазами

Если различаемые сигналы известны, за исключением начальной фазы φ , т.е. описываются моделью

$$s_i(t, \varphi) = \operatorname{Re} \left[\tilde{S}_i(t) \exp \left[j 2\pi f_0 t + \varphi \right] \right],$$

то применению правила максимума правдоподобия должно предшествовать вычисление функции $W(y, t | H_i)$, получаемой в результате усреднения функции правдоподобия $W(y, t | H_i, \varphi)$, построенной для детерминированных сигналов с фиксированной фазой φ по всем ее возможным значениям $-\pi, \pi$ с учетом их априорной ПВ $W_0(\varphi)$.

При равномерной ПВ фазы $W_0(\varphi) = 1/2\pi$ и с учетом равенства энергий всех различаемых сигналов можно записать:

$$W(y, t | H_i) = c \cdot I_0 \left(\frac{2Z_i}{N_0} \right), \quad (5.10)$$

где c – коэффициент, содержащий сомножители, не зависящие от значения i , а корреляция равна

$$Z_i = \left| \frac{1}{2} \int_0^T \dot{Y}_t \cdot \dot{S}_i^* dt \right|$$

и отражает модуль корреляции комплексных огибающих принятого колебания $y(t)$ и i -го сигнала.

Моноотонность функции I_0 на положительной полуоси позволяет перейти к достаточной статистике Z_i и записать правило МП в виде

$$\hat{H}_k \geq Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (5.11)$$

Таким образом, оптимальный различитель M сигналов равной энергии со случайными начальными фазами должен вычислить все величины (5.11) и, если максимальной из них является Z_k , принять решение о присутствии в $y(t)$ k -то сигнала. Это означает, что содержащимся в наблюдаемом колебании $y(t)$ считается тот сигнал, комплексная огибающая которого имеет наибольшую по модулю корреляцию с комплексной огибающей наблюдения $y(t)$. Стандартные способы нахождения Z_i рассматривались выше. Один из них состоит в вычислении Z_i как длины двумерного вектора, компонентами которого служат корреляции колебания $y(t)$ с квадратурными составляющими $s_{i,t}$ и $s_{\text{кв } i,t}$ i -го сигнала $s(t, \varphi)$.

Техническим воплощением этого варианта было бы M -канальное устройство, каждый канал которого состоял бы из двух корреляторов и схемы объединения z_{1i} и z_{2i} по правилу вычисления $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$.

Другая возможность использована в схеме различителя на рис. 5.7, в которой Z_i находится как огибающая на выходе фильтра, согласованного с i -м сигналом $s(t, \varphi)$ при некотором фиксированном значении φ . Вместо линейных детекторов ЛД в этой схеме можно применить детекторы огибающей с любыми монотонными характеристиками, так как логика работы решающего блока РБ

сводится к отбору максимальной из величин Z_i и вынесению решения о присутствии на входе того сигнала, с которым согласован фильтр, заметнее других прореагировавший на $y(t)$.

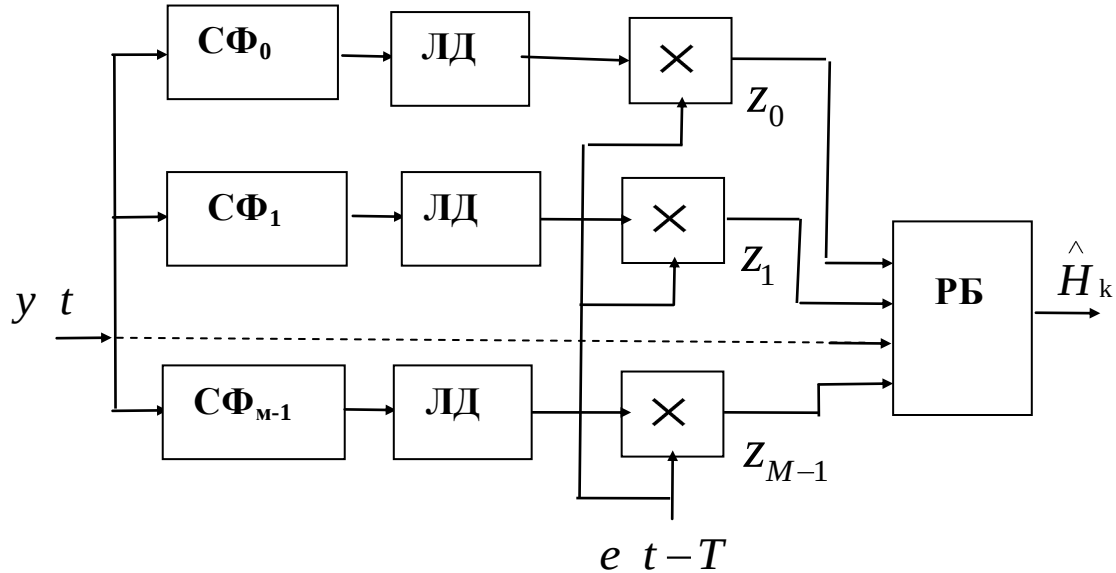


Рис. 5.7. Схема различителя M -сигналов с неизвестной фазой на согласованных фильтрах

Точные формулы для вероятностей ошибок различения M произвольных сигналов достаточно громоздки даже при $M = 2$, однако в приложениях чаще других встречаются ансамбли сигналов, ортогональных в усиленном смысле. Последнее означает, что любые два несовпадающих сигнала $s_i(t, \varphi_i)$, $s_k(t, \varphi_k)$ ортогональны в усиленном смысле, если ортогональны комплексные огибающие этих сигналов:

$$\int \dot{S}_i(t) \cdot \dot{S}_k^*(t) dt = 0, \quad i \neq k.$$

Для оценки вероятности ошибки, если число равновероятных ортогональных в усиленном смысле сигналов $M \geq 2$, можно пользоваться аддитивной границей

$$P_{\text{ош}} \leq \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{q^2}{4}\right). \quad (5.12)$$

6. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Пусть на интервале времени $0, T$ присутствует колебание $y(t) = s(t; \lambda) + x(t)$, содержащее помехи $x(t)$ и полезный сигнала $s(t; \lambda)$, который несет информацию, содержащуюся в значениях тех или иных параметров λ : амплитуды, частоты, фазы, времени запаздывания и др. При этом параметр λ в пределах интервала наблюдения $0, T$ предполагается неизменным. Наблюдатель, основываясь на анализе принятого колебания $y(t)$, должен принять решение о том, какое значение, из диапазона возможных, принял параметр сигнала. Это решение принято называть оценкой и обозначать как $\hat{\lambda}$.

Если оцениванию подлежат несколько параметров сигнала, то говорят об оценивании вектора параметров $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r)^T$. В качестве примера оценивания вектора параметров можно назвать задачу совместного измерения времени задержки сигнала τ и доплеровского сдвига частоты F . В этом случае $\lambda = [\tau, F]^T$.

Поскольку в принятом колебании $y(t)$ всегда присутствует шум, то при каждом сеансе приема оценка $\hat{\lambda}$ отличается от неизвестного истинного значения параметра λ . Измеритель должен придерживаться такой стратегии, при которой негативные последствия, обусловленные случайной природой ошибок, были бы по возможности минимизированы. Таким образом, необходимо сформулировать оптимальные в некотором смысле правила измерения параметров сигналов.

6.1. Байесовские оценки случайных параметров сигналов

Пусть постоянный в течение времени наблюдения информационный параметр является векторной случайной величиной $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r)^T$ априорная r -мерная ПВ которой $W_0(\lambda)$ известна. Отметим, что эта ПВ не связана с наблюдаемой реализацией $y(t)$ и показывает лишь, с какой частотой следует ожидать появления сигнала $s(t; \lambda)$ с теми или иными значениями параметра λ .

Введем функцию потерь $P(\lambda, \hat{\lambda})$, показывающую, какой платой оборачивается несовпадение оценки $\hat{\lambda}$ с истинным значением параметра λ .

Функция потерь обычно задается в виде одного из следующих трех выражений:

- квадратичная функцию потерь $P_1(\lambda, \hat{\lambda}) = (\lambda - \hat{\lambda})^2$;
- модульная функция потерь $P_2(\lambda, \hat{\lambda}) = |\lambda - \hat{\lambda}|$;
- прямоугольная функцию потерь $P_3(\lambda, \hat{\lambda}) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\lambda - \hat{\lambda}| < \varepsilon \\ 1 & \text{при } |\lambda - \hat{\lambda}| \geq \varepsilon \end{cases},$

где ε – пороговое значение ошибки оценивания.

Пусть также $W(\hat{\lambda} | \lambda)$ – условная ПВ оценки $\hat{\lambda}$ при условии, что истинным является значение оцениваемого параметра, равное λ . Тогда выражение для среднего риска можно представить в виде:

$$\bar{P} = \int \int P(\lambda, \hat{\lambda}) \cdot W_0(\lambda) \cdot W(\hat{\lambda} | \lambda) d\hat{\lambda} d\lambda. \quad (6.1)$$

Согласно теореме умножения вероятностей для случайных величин, $W_0(\lambda) \cdot W(\hat{\lambda} | \lambda) = W(\hat{\lambda}) \cdot W(\lambda | \hat{\lambda})$, где $W(\hat{\lambda})$ – безусловная ПВ оценки $\hat{\lambda}$; $W(\lambda | \hat{\lambda})$ – условная ПВ случайной величины λ при условии, что оценкой является значение $\hat{\lambda}$. Тогда в соответствии с (6.1) получаем:

$$\bar{P} = \int W(\hat{\lambda}) \left(\int P(\lambda, \hat{\lambda}) \cdot W(\lambda | \hat{\lambda}) d\lambda \right) d\hat{\lambda}. \quad (6.2)$$

Поскольку соотношение $\hat{\lambda} = F[y, t]$ связывает оценку $\hat{\lambda}$ с видом наблюдаемого колебания y, t , то справедливо равенство условных ПВ:

$$W(\lambda | \lambda) = W(\lambda | y, t) .$$

Следовательно внутренний интеграл в (6.2) можно записать и как

$$\bar{\Pi}(y(t)) = \int \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) \cdot W(\lambda | y, t) d\lambda . \quad (6.3)$$

Величина $\bar{\Pi}(y(t))$ является условным математическим ожиданием функции потерь $\Pi(\lambda | \hat{\lambda})$, вычисленным для фиксированной реализации y, t усреднением по всем возможным значениям случайного параметра λ и ее называют *условным средним риском*. Как видно, оценка, для которой условный средний риск (6.3) минимален для любой заданной реализации y, t , минимизирует и безусловный средний риск (6.2). Поэтому байесовские оценки можно отыскивать из условия минимума выражения (6.3). Входящую в выражение (6.3) условную ПВ $W(\lambda | y, t)$, характеризующую частоту выпадения тех или иных значений λ для заданной реализации y, t , называют *апостериорной*. Отличие *апостериорной* ПВ от *априорной* характеризует тот прирост информации о параметре λ , который обусловлен наблюдением y, t . При высокой точности измерений кривая $W(\lambda | y, t)$ почти для всех реализаций y, t имеет острый пик, расположенный в окрестности истинного значения λ .

Минимизация выражения (6.3) по $\hat{\lambda}$ для приведенных функций потерь дает следующие результаты:

1) При квадратичной функции потерь оптимальная оценка $\hat{\lambda}_{\text{опт 1}}$ соответствует математическому ожиданию апостериорной ПВ, т.е.

$$\hat{\lambda}_{\text{опт 1}} = \bar{\lambda}_{ps} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot W(\lambda / y(t)) d\lambda ,$$

где $\bar{\lambda}_{ps}$ – апостериорное математическое ожидание параметра λ . Байесовскую оценку $\bar{\lambda}_{ps}$ называют также оценкой по центру тяжести апостериорного распределения $W(\lambda_i / y(t))$.

2) При модульной функции потерь $\hat{\lambda}_{\text{опт 2}}$ соответствует медиане апостериорной плотности вероятности, т.е. находится из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\hat{\lambda}_{\text{опт}}} W(\lambda/y(t))d\lambda = \int_{\hat{\lambda}_{\text{опт}}}^{\infty} W(\lambda/y(t))d\lambda;$$

3) При прямоугольной функции потерь байесовской оценкой окажется оценка по максимуму (моду) апостериорной ПВ $W(\lambda / y(t))$ (МАП):

$$\hat{\lambda}_{\text{опт}} = \bar{\lambda}_{ps}^M,$$

где $\bar{\lambda}_{ps}^M$ – значение вектора λ , при котором апостериорная ПВ достигает максимума.

Когда помеха $x(t)$ статистически задана, т.е. известны ее многомерные ПВ (при непрерывном наблюдении функционал ПВ), и когда задана априорная ПВ λ , построение апостериорной ПВ можно получить из выражения

$$W(\lambda | y(t)) = k_y \cdot W(\lambda) \cdot W(y(t) | \lambda),$$

где $k_y = 1/W(y(t))$ – коэффициент, не зависящий от λ .

Третий сомножитель, рассматриваемый как функционал от $y(t)$, является условным функционалом ПВ принятой реализации при фиксированном значении параметра. Если $y(t)$ принято, то зависимость $W(y(t)/\lambda)$ от значения параметра λ есть ФП и характеризует степень правдоподобности тех или иных значений параметра λ при данной реализации $y(t)$. Таким образом, чтобы построить апостериорную ПВ, достаточно перемножить априорную ПВ и функцию правдоподобия. Это делает оправданным ориентацию на метод МП, при котором в качестве оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ выдается значение аргумента $W(y(t)/\lambda)$, соответствующее максимуму этой функции по λ при фиксированном $y(t)$:

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \arg \max_{\lambda} W(y(t)/\lambda).$$

6.2. Критерии оценки неслучайных параметров сигналов и граница Крамера – Рао

В байесовской теории оценок основным является допущение о том, что оцениваемые параметры – случайные величины и их априорная ПВ известна. Часто наблюдатель не обладает надежной априорной информацией об оцениваемом параметре λ . Следовательно, отсутствие об априорных данных влечет полный отказ от интерпретации измеряемых параметров как случайных величин. Поэтому в этом случае формулируется критерий, который базируется на требованиях несмещенности и минимума условной дисперсии оценки. Введенные условия в совокупности можно трактовать как единый критерий качества, предписывающий считать оптимальной ту оценку, для которой одновременно выполнены условия:

$$\overline{\hat{\lambda} - \lambda} = 0 \quad (6.4)$$

и

$$D \hat{\lambda} / \lambda = \overline{(\hat{\lambda} - \hat{\lambda})^2} = \overline{(\hat{\lambda} - \lambda)^2} = \min.$$

В теории оценивания фундаментальная граница Крамера–Рао устанавливает нижний предел величины дисперсии любой несмещенной оценки. В качестве оптимальной оценки $\hat{\lambda}_{\text{ОПТ}}$ берут значение λ , максимизирующее функционал правдоподобия $W(y, t | \lambda)$ для наблюдаемой реализации y, t .

Такой метод измерения называется методом *максимума правдоподобия* (МП), а получаемая при этом методе оценка измеряемого параметра – *оценкой максимального правдоподобия* (ОМП).

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \max_{\lambda} W(y, t | \lambda).$$

Поскольку максимум ФП достигается на тех же λ , что и максимум логарифма ФП, правило ОМП можно записать в виде

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \max_{\lambda} [\ln W(y, t | \lambda)].$$

Поэтому равенство $\frac{d \ln W(y, t | \lambda)}{d \lambda} = 0$ обеспечивает оптимальную про-

цедуру нахождения $\hat{\lambda}$. Если положить, что ФП $W(y, t | \lambda)$ дважды дифференцируема по λ , то для условной дисперсий несмещенной оценки справедливо неравенство

$$D \hat{\lambda} | \lambda \geq \left\{ \left[\frac{d \ln W(y(t) | \lambda)}{d \lambda} \right]^2 \right\}^{-1}.$$

Нижний предел условной дисперсии несмещенной оценки примет вид:

$$D \hat{\lambda} | \lambda = \left\{ M \left[\frac{d \ln W(y(t) | \lambda)}{d \lambda} \right]^2 \right\}^{-1} = - \left[\frac{d^2 \ln W(y(t) | \lambda)}{d \lambda^2} \right]^{-1}. \quad (6.5)$$

Это выражение и определяет *границу Крамера-Рао*, а величину

$$\Phi = - \frac{d^2 \ln W(y(t) | \lambda)}{d \lambda^2}$$

называют *информацией Фишера*.

Для многомерного случая будем считать оценку векторного параметра λ несмещенной, если несмещенными окажутся оценки $\hat{\lambda}_i$ всех индивидуальных параметров λ_i (компонентов вектора λ): $\overline{\hat{\lambda}_i} = \lambda_i$ при любом значении λ .

Для условных дисперсий несмещенных оценок

$$D \hat{\lambda}_i | \lambda = \overline{(\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2},$$

вычисленных путем усреднения по y, t при фиксированном значении λ , справедлива многомерная граница Крамера–Рао, являющаяся системой r -неравенств:

$$D \hat{\lambda}_i | \lambda \geq \Phi_{ii}^{-1}, \quad i=1,2,\dots,r, \quad (6.6)$$

где Φ_{ii}^{-1} -й диагональный элемент матрицы Φ обратной информационной

матрице Фишера, т.е. $r \times r$ -матрице $\Phi = \|\Phi_{ik}\|$ с элементами

$$\Phi_{ik} = \frac{\overline{\frac{\partial \ln W(y, t | \lambda)}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \ln W(y, t | \lambda)}{\partial \lambda_k}}}{\overline{\frac{\partial^2 \ln W(y, t | \lambda)}{\partial \lambda_i \cdot \partial \lambda_k}}},$$

усреднение в которых производят по реализациям $y(t)$ при $\lambda = \text{const}$.

Оценки, для которых все неравенства приведенной системы одновременно обращаются в равенства, называют *совместно эффективными*.

Таким образом, при большом времени наблюдения или большой энергии сигнала наблюдатель, заинтересованный в надежных измерениях, может принять в качестве оптимальной стратегию формирования оценки по максимуму правдоподобия, причем уверенность в том, что эта оценка наилучшая, будет тем более обоснованной, чем больше время наблюдений или энергия сигнала. Изложенное позволяет рассматривать правило ОМП как универсальную и безотказную методику оценки параметров сигналов.

6.3. Измерение параметров сигнала при воздействии аддитивного нормального шума

Пусть помехой $n(t)$ является аддитивный нормальный шум с двухсторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Тогда для функционала ПВ наблюдаемого процесса $y(t) = s(t; \lambda) + n(t)$ при условии наличия в нем сигнала $s(t; \lambda)$ можно записать

$$W(y(t) | s(t; \lambda)) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t; \lambda)]^2 dt \right\},$$

где c – некоторая константа. После раскрытия скобок получим

$$W(y(t) | \lambda) = c_y \cdot \exp \left\{ \frac{2z(\lambda) - E(\lambda)}{N_0} \right\}, \quad (6.7)$$

где $z(\lambda) = \int_0^T y(t) \cdot s(t; \lambda) dt$ – корреляционный интеграл принятой реализации

$y(t)$ с сигналом $s(t; \lambda)$; $E(\lambda) = \int_0^T s^2(t; \lambda) dt$ – энергия сигнала.

Из выражения (6.7) следует, что ОМП параметра λ есть значение $\hat{\lambda}$, максимизирующее величину:

$$z(\hat{\lambda}) - E(\hat{\lambda})/2 = \max_{\lambda} [z(\lambda) - E(\lambda)/2]. \quad (6.8)$$

При измерении не энергетических параметров $E \lambda = E = \text{const}$, правило (6.8) упрощается и можно записать

$$z(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} [z \lambda]. \quad (6.9)$$

Таким образом, ОМП $\hat{\lambda}$ неэнергетического параметра есть такое его значение, при котором принятая реализация $y(t)$ обладает наибольшей корреляцией с сигналом $s(t; \lambda)$.

Оценку неэнергетического параметра сигнала можно сформировать согласно рис. 6.1, располагая набором M корреляторов K , на которые параллельно подается входная реализация $y(t)$, в то время как опорные колебания во всех корреляторах различны и являются копиями сигнала $s(t; \lambda)$ с различными значениями $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, M$ параметра λ . Число каналов M в такой схеме может быть равно числу различных значений λ .

Решающий блок РБ выдает в качестве оценки значение λ в опорном колебании канала с максимальным выходным эффектом.

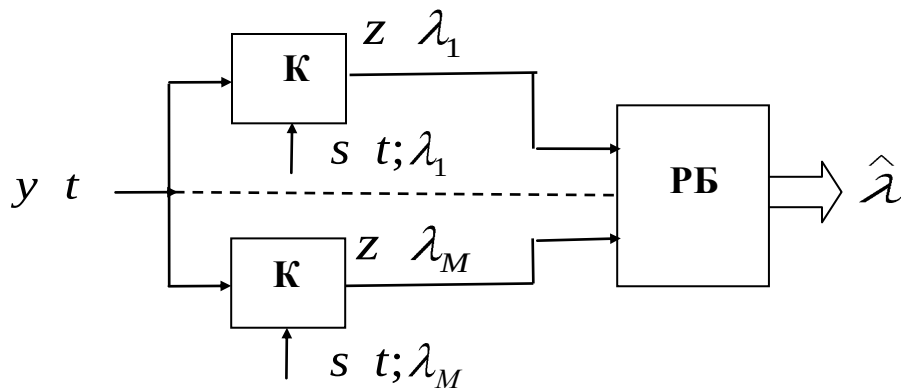


Рис. 6.1. Корреляционная схема оценки неэнергетического параметра

Далее рассмотрим вычисление дисперсий оценок при условии, что одиночный оцениваемый параметр λ не содержит энергетических составляющих и $E \lambda = E$. При стационарной ФН элементы матрицы Фишера определяются выражением

$$\Phi_{ik} = -q^2 \cdot \frac{d^2}{d\lambda_i d\lambda_k} \psi(\lambda) \Big|_{\lambda=0}. \quad (6.10)$$

Если измеряется единственный неэнергетический параметр сигнала λ , то нижний предел дисперсии ошибки оцениваемого параметра равен

$$D \hat{\lambda} / \lambda = -1 / \left[q^2 \cdot \psi''(0) \right]. \quad (6.11)$$

Таким образом, повышению точности ОМП параметра λ способствует, с одной стороны, увеличение энергии сигнала, т.е. величины q , а с другой – применение таких сигналов, у которых ФН имеет по возможности острый пик (большую по абсолютному значению отрицательную вторую производную) в точке $\lambda = 0$.

Пусть среди оцениваемых параметров наряду с λ входит начальная фаза сигнала φ с априорной плотностью $W_0(\varphi) = 1/2\pi$. Примем во внимание, что энергия сигнала не зависит от начальной фазы φ и $E(\lambda; \varphi) = E(\lambda)$. В этом случае ФП параметров λ и φ можно привести к виду

$$W(y, t | \lambda) = c_y \cdot \exp \left\{ \frac{2Z(\lambda) \cos \left[\varphi - \arg \left(\dot{z}(\lambda) \right) \right] - E(\lambda)}{N_0} \right\}, \quad (6.12)$$

где $Z(\lambda) = \left| \dot{z}(\lambda) \right|$ – модуль корреляционного интеграла;

$\dot{z}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{y}(t) \dot{s}^*(t; \lambda) dt$ – корреляционный интеграл;

$\dot{y}(t)$ и $\dot{s}(t, \lambda)$ – аналитические сигналы.

Усредняя ФП (6.12) по неизвестным значениям фазы φ , получим ФП параметра λ

$$W(y, t | \lambda) = c_y \cdot I_0 \left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0} \right] \exp \left\{ \frac{-E(\lambda)}{N_0} \right\}, \quad (6.13)$$

в которой $I_0 x$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В этом случае ОМП $\hat{\lambda}$ можно найти из условия

$$\ln I_0 \left[\frac{2Z(\dot{\lambda})}{N_0} \right] - \frac{E(\dot{\lambda})}{N_0} = \max_{\lambda} \left\{ \ln I_0 \left[\frac{2Z \lambda}{N_0} \right] - \frac{E \lambda}{N_0} \right\}. \quad (6.14)$$

Если параметр λ – неэнергетический, то правило ОМП приводится к виду

$$Z(\dot{\lambda}) = \max_{\lambda} Z \lambda$$

в силу монотонного характера функции $\ln I_0(x)$ при $x \geq 0$. Поэтому для неэнергетического параметра оценка соответствует

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} Z \lambda. \quad (6.15)$$

Следовательно, вновь ОМП $\hat{\lambda}$ есть то значение λ , при котором комплексные огибающие $\dot{Y} t$ и $\dot{S} t; \lambda$ максимально близки, и, следовательно, для формирования λ можно использовать схему, изображенную на рис. 6.2.

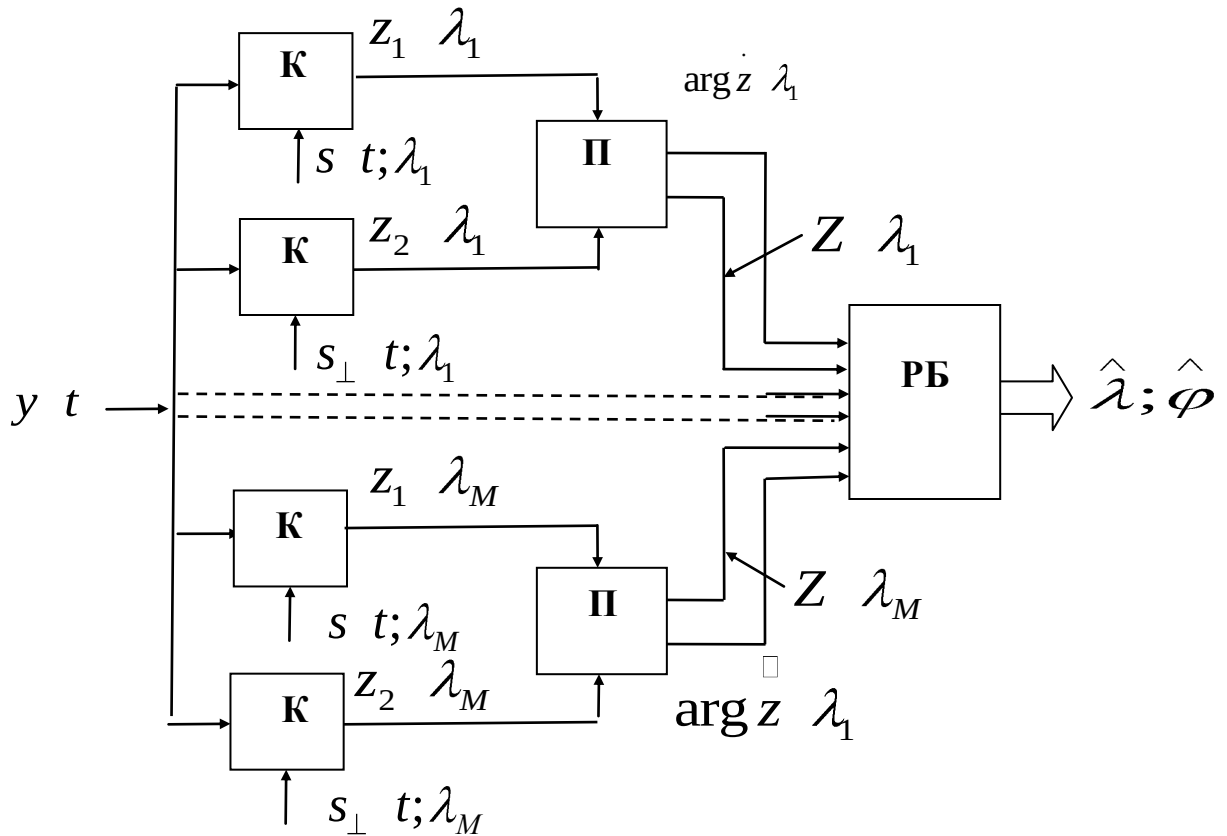


Рис. 6.2. Корреляционная схема оценки параметра сигналов с неизвестной фазой

Можно видеть, что схема оказывается обычным, работающим по правилу МП, различителем M сигналов равной энергии со случайными начальными фазами. Величины $Z \lambda_i$ можно интерпретировать и как отсчеты в момент T огибающих на выходах фильтров, согласованных с сигналами $s_i(t, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$. Поэтому каждую цепочку из пары квадратурных корреляторов и преобразователя Π на рис. 6.2 можно заменить последовательно соединенными согласованным фильтром, детектором огибающей и схемой временной выборки.

В условиях высокоточных измерений ($q \gg 1$) элементы матрицы Фишера будут определяться выражением

$$\Phi_{ik} \cong -\frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \left[\frac{2Z \lambda}{N_0} \right], \quad (6.16)$$

где $\overline{Z(\lambda)} \cong E \cdot \Psi(\lambda_0, \lambda)$; $\Psi(\lambda_0, \lambda) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} S(t, \lambda_0) S^*(t, \lambda) dt \right|$ – ФН сигнала со случайной начальной фазой по параметру λ . Для ФН стационарного типа $\Psi(\lambda) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S^*(t, \lambda) dt \right|$.

Для одного измеряемого параметра λ у сигнала со случайной начальной фазой дисперсия МП оценки

$$D \hat{\lambda} / \lambda = - \frac{1}{q^2 \Psi''(\lambda_0)} . \quad (6.17)$$

Далее рассмотрим применение этих формул к задаче оценивания конкретных параметров сигнала.

6.4. Устройства измерения параметров сигнала

Для радиолокации и навигации типичны проблемы, связанные с получением оценок амплитуды и фазы сигнала, измерением времени задержки между приемником и объектом. Если же требуется также знание скорости цели и параметры ее маневрирования, то необходимым становится измерение доплеровского сдвига частоты сигнала.

6.4.1. Совместная оценка амплитуды и фазы сигнала

Модель принятого сигнала описывается выражением:

$$s(t) = A \cdot S(t) \cos(\omega_0 t + \gamma t + \varphi),$$

где $S(t)$, ω_0 , γt – полностью известная огибающая, центральная частота и закон угловой модуляции, соответственно.

Оценки максимального правдоподобия амплитуды $\hat{A}$ и фазы $\hat{\varphi}$ будут равны соответственно

$$\hat{A} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{E_0};$$

$$\hat{\varphi} = \arctg \frac{z_2}{z_1} + \pi \frac{\text{sign } z_1 - 1}{2},$$

где: E_0 – энергия сигнала при единичной амплитуде;

$$z_{1,2} = \int_0^T y(t) \cdot S(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \omega_0 t + \gamma(t) dt - \text{квадратурные корреляционные со-}$$

ставляющие.

Второе слагаемое в выражении для оценки фазы $\hat{\varphi}$ обусловлено тем, что значения арктангенса лежат в пределах $-\pi/2, \pi/2$, тогда как интервал распределения фазы $-\pi, \pi$.

Матрица Фишера для данной задачи имеет вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2E_0 / N_0 & 0 \\ 0 & 2A^2 E_0 / N_0 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

откуда условные дисперсии оценок амплитуды $\hat{A}$ и фазы $\hat{\varphi}$ равны

$$D \hat{A} / A, \varphi = \frac{N_0}{2E_0} = \frac{1}{q_0^2} \quad (6.19)$$

и

$$D \hat{\varphi} / A, \varphi = \frac{N_0}{2A^2 E_0} = \frac{1}{q^2 A}. \quad (6.20)$$

Таким образом, дисперсия оценки амплитуды определяется отношением сигнал/шум на выходе СФ для сигнала с единичной амплитудой, а дисперсия оценки фазы – фактическим отношением сигнал/шум. Оценки $\hat{A}$ и $\hat{\varphi}$ некоррелированы, а в силу асимптотической нормальности и независимы.

6.4.2. Измерение временной задержки сигнала

Предположим, что информационным параметром сигнала служит время запаздывания τ и других неизвестных параметров сигнал не содержит. Тогда принимаемый сигнал описывается выражением: $s(t); \lambda = s(t - \tau)$.

Пусть также T_c – длительность сигнала, а наблюдения, начинающиеся при $t=0$, для любых $\tau > 0$ имеют продолжительность $T > \tau + T_c$. При этих условиях энергия сигнала не зависит от его задержки $E(\tau) = E$ и, следовательно, время запаздывания оказывается неэнергетическим параметром.

В этом случае оценкой максимума правдоподобия будет

$$\hat{\tau} = \max_{\tau} [z(\tau)],$$

где $z(\tau) = \int_0^T y(t) s(t - \tau) dt$ – корреляционный интеграл принятой реализации

$y(t)$ с сигналом $s(t - \tau)$. Одним из возможных вариантов реализации указанного правила оценивания является использование набора корреляторов, представленных на рис. 6.3.

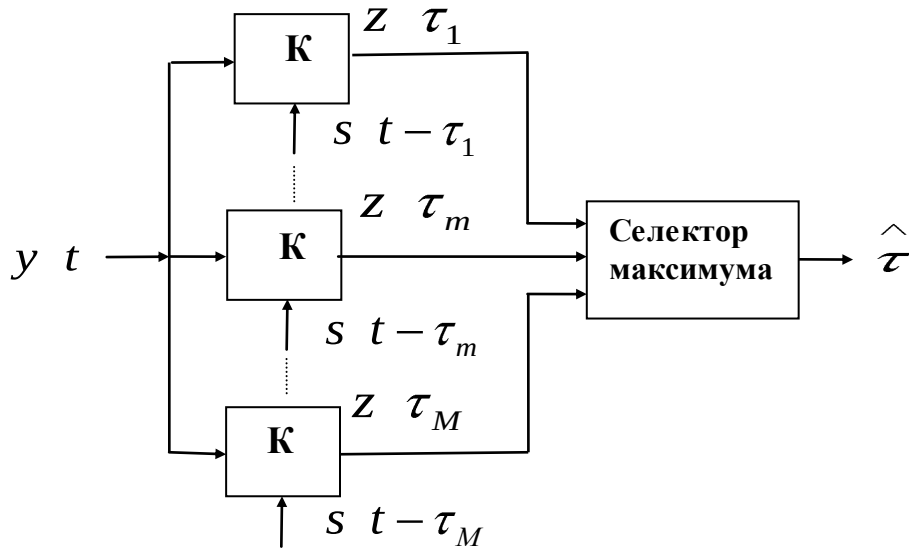


Рис. 6.3. Система корреляторов для оценки задержки сигнала

Наблюдаемое колебание $y(t)$ обрабатывается в M параллельных корреляторах, опорными сигналами которых служат сдвинутые во времени копии сигнала. С выходов корреляторов снимаются значения $z(\tau_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, которые поступают в блок, где производится их сравнение и выбор наибольшего из них. В качестве МП оценки выбирается задержка того опорного сигнала коррелятора, на выходе которого достигается максимальное значение.

Оценку задержки сигнала можно найти, пропустив сначала принятую реализацию $y(t)$ через СФ, а затем зафиксировав момент t_m достижения колебанием на выходе СФ своего максимума на интервале наблюдения T_c .

Далее определим дисперсию ОМП задержки. Так как задержка τ – неэнергетический параметр, то дисперсию его ОМП в асимптотическом случае ($q \gg 1$) можно найти, учитывая, что функция неопределенности

$$\psi(\tau) = \frac{1}{E} \int_0^T s(t) \cdot s(t - \tau) dt$$

является стационарной.

Перейдем к Фурье-спектру $\tilde{s}(f)$ сигнала $s(t)$ и представим ФН в виде:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)|^2 \exp(j2\pi f\tau) df.$$

Откуда вторая производная будет определяться выражением:

$$\psi''(0) = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f^2 |\tilde{s}(f)|^2 df. \quad (6.21)$$

Таким образом, дисперсия ОМП задержки может быть получена на основе оценки второй производной (6.13) и подстановки результата в границу Крамера – Рао:

$$D(\hat{\tau}|\tau) = \frac{1}{2\pi F_{\vartheta}^2 \cdot q^2}, \quad (6.22)$$

где

$$F_{\vartheta} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\tilde{s}(f)|^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)|^2 df \right]^{1/2}. \quad (6.23)$$

Выражение (6.23) характеризует эффективную или среднеквадратическую ширину спектра сигнала $s(t)$. Расширение спектра «обостряет» макси-

мум сигнала на выходе СФ. В этом и заключена физическая природа снижения дисперсии ошибки оцениваемого параметра $\hat{\tau}|\tau$ расширением спектра сигнала. В итоге приходим к следующему важному заключению: точность временного измерения полностью определяется остротой основного пика АКФ сигнала и чем острее АКФ, тем меньше дисперсия оценки времени запаздывания.

6.4.3. Измерение частоты сигнала

На практике типична ситуация, когда необходимо измерить лишь частотное смещение F от номинального значения несущей частоты f_0 .

В этом случае модель сигнала может быть описана выражением

$$s(t; F; \varphi) = \operatorname{Re} \dot{S}(t) \exp[j2\pi(f_0 + F)t + j\varphi] = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t; F) \exp(j2\pi f_0 t) \exp(j\varphi) \right],$$

где $\dot{S}(t; F) = \dot{S}(t) \exp -j2\pi Ft$ – комплексная огибающая сигнала.

Вследствие неэнергетической природы смещения частоты F правило максимума корреляции уместно записать в виде

$$Z(\hat{F}) = \max_F Z(F),$$

где модуль корреляции $Z(F)$ определяется выражением:

$$Z(F) = \left| \int_0^T \dot{Y}(t) \dot{S}^*(t; F) dt \right| = \left| \int_0^T \dot{Y}(t) \dot{S}^*(t) \exp -j2\pi Ft dt \right|.$$

Максимальная амплитуда сигнала на выходе коррелятора, настроенного на частоту F_k , принимает значение $Z(F_k)$ в момент окончания сигнала T_c .

Корреляционное устройство, изображенное на рис. 6.3, может быть применено для реализации данной оптимальной процедуры оценивания, если в качестве опорных сигналов коррелятора использовать частотно-сдвинутые копии комплексной огибающей $\dot{S}(t; F_k) = \dot{S}(t) \exp -j2\pi F_k t$, $F_k = k \cdot \Delta F$, $k = 1, 2, \dots, K$ вместо сдвинутых во времени копий.

Для оценки частоты может быть использована альтернативная структура, содержащая набор из K согласованных фильтров, причем k -й фильтр должен быть настроен на частоту, отличающуюся от номинальной частоты f_0 , на величину ΔF . После амплитудного детектирования и взятия отсчета в момент времени T_c на выходах детекторов имеется множество значений $Z F_k$, наибольшее из которых выбирается для получения МП оценки $\hat{F}$ как значение частотного рассогласования фильтра, отвечающего максимуму $Z F_k$. Ясно, что в случае непрерывного параметра F необходима операция квантования, а число фильтров K определяется допустимой ошибкой квантования.

Определим дисперсию ОМП частоты. Точность измерения частоты определяется не только отношением сигнал/шум, но также и остротой корреляции между сдвинутыми по частоте копиями сигнала в зависимости от их взаимного частотного рассогласования.

В связи со случайностью фазы рассмотрению подлежат комплексные огибающие, и сходство между их частотно-сдвинутыми копиями $\dot{S}(t; 0)$ и $\dot{S}(t; F)$ характеризуется ФН

$$\Psi(F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t; 0) \dot{S}^*(t; F) dt \right| = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 \exp(-j2\pi Ft) dt \right|.$$

Как видно, зависимость коэффициента корреляции как функции частоты повторяет по форме амплитудный спектр квадрата огибающей сигнала. Из свойств преобразования Фурье следует, что, чем длиннее сигнал, тем острее ФН.

На основании приведенного выражения можно выразить вторую производную ФН

$$\Psi''(0) = -2\pi T_g^2, \quad (6.24)$$

где
$$T_g = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 \cdot |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt} \right]^{1/2}. \quad (6.25)$$

Приведенное выражение (6.25) определяет среднеквадратическую длительность, которая характеризует протяженность сигнала во времени.

Параметр
$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt}$$

характеризует положение огибающей сигнала $S(t) = |\dot{S}(t)|$ вдоль оси времени.

Дисперсия ОМП частоты может быть получена на основе оценки второй производной ФН и подстановки результата в границу Крамера – Рао:

$$D \hat{F} | F = \frac{1}{2\pi T_{\text{э}}^2 \cdot q^2}. \quad (6.26)$$

Таким образом, помимо «прямого» способа, т.е. увеличением энергии, можно повысить точность измерения частоты за счет применения сигнала, обладающего большой длительностью $T_{\text{с}}$. Физика роста точности ОМП $\hat{F}$ с увеличением $\Delta t_{\text{СК}}$ очевидна: оценить отличие частоты от номинального значения можно по набегу фазы $\Delta\varphi$ несущей наблюдаемого колебания относительно гармонической опоры частоты f_0 . За эффективную длительность сигнала значение набег составит $\Delta\varphi = 2\pi F \Delta t_{\text{СК}}$, и поэтому оценить F можно делением ОМП значения $\Delta\varphi$ на $2\pi \Delta t_{\text{СК}}$ в силу инвариантности ОМП относительно замены переменных.

6.4.4. Совместное измерение времени запаздывания и частоты сигнала

Пусть как временной τ , так и частотный F сдвиги принятого сигнала являются неизвестными и информативными параметрами, т.е. подлежащими измерению. Соответственно и модель принятого сигнала описывается выражением:

$$s(t; \tau, F; \varphi) = \text{Re} \left[\dot{S}(t; \tau, F) \cdot \exp j2\pi f_0 t \cdot \exp j\varphi \right],$$

где $\dot{S}(t; \tau, F) = \dot{S}(t - \tau) \exp j2\pi Ft$ – комплексная огибающая, включающая в себя как время запаздывания τ , так и частотный сдвиг F ; φ – не информативная начальная фаза.

Теперь правило максимума корреляции для оценки τ, F формулируется с использованием модуля корреляции вида

$$Z(\tau, F) = \left| \int_0^T \dot{Y}(t) \dot{S}^*(t; \tau, F) dt \right| = \left| \int_0^T \dot{Y}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau) \cdot \exp(-j2\pi Ft) dt \right|,$$

которое показывает, насколько близко комплексная огибающая сигнала $\dot{S}(t; \tau, F)$, сдвинутая по времени и частоте, подобна наблюдаемой комплексной огибающей $\dot{Y}(t)$.

Определение τ и F , максимизирующих указанное подобие, обеспечивает получение пары МП оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$, а именно

$$Z(\hat{\tau}, \hat{F}) = \max_{\tau, F} Z(\tau, F).$$

Устройство оценивания параметров τ и F на основе набора корреляторов приведено на рис. 6.4.

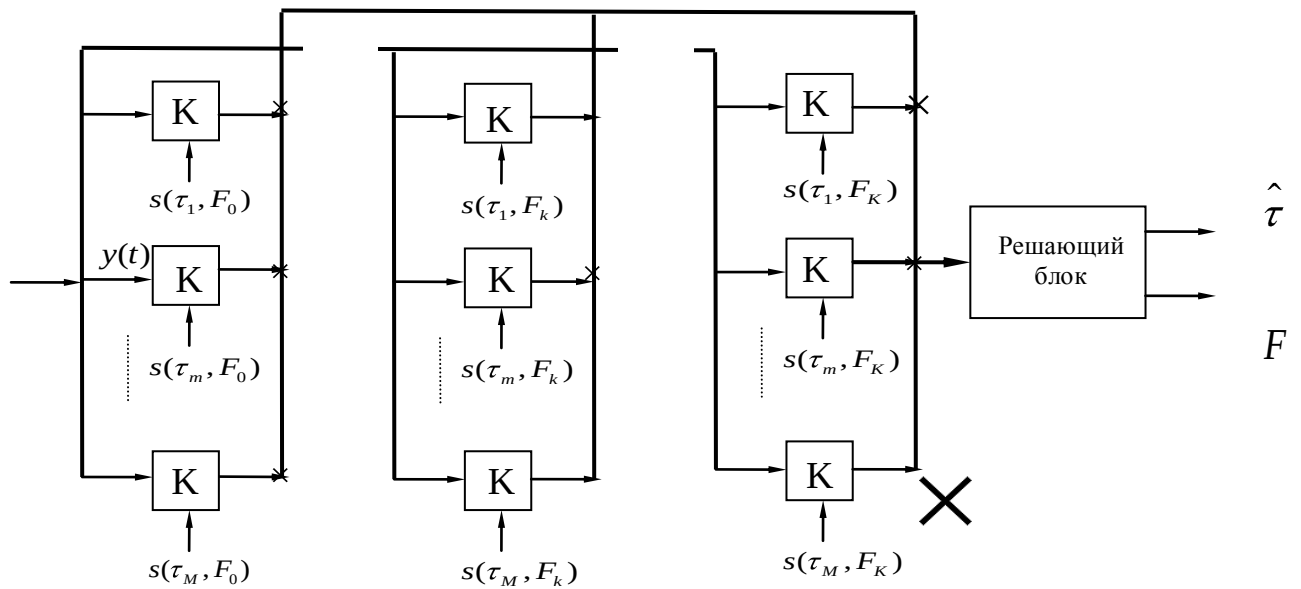


Рис. 6.4. Многоканальное корреляционное устройство оценивания задержки и частоты сигнала

В этой схеме опорными сигналами корреляторов служат копии $\dot{S}(t; \tau_m, F_k) = \dot{S}(t - \tau_m) \exp(j2\pi F_k t)$ с различными значениями задержек $\tau_m = m \cdot \Delta\tau$, $m = 1 \dots M$ и частот $F_k = k \cdot \Delta F$, $k = 1 \dots K$. Сигналы с выходов многоканального корреляционного устройства поступают в решающий блок. В решающем блоке определяются номера каналов $\hat{m}$ и $\hat{k}$, в которых зафиксирован глобальный максимум.

Другой реализацией является схема с использованием согласованных фильтров. В схеме используются K ветвей, содержащих фильтр и детектор. Каждая из ветвей настроена на свою конкретную частоту $F_k = k \cdot \Delta F$, обеспечивая тем самым оценивание частоты F , тогда как оценка задержки τ получается фиксированием точки максимума сигнала с выхода детектора. Блок «Выбор тах» одновременно выполняет обе указанные операции, фиксируя момент достижения глобального максимума среди выходных значений всех ветвей. Это значение времени принимается в качестве оценки $\hat{\tau}$, тогда как частота настройки ветви, на выходе которой регистрируется глобальный максимум, дает оценку $\hat{F}$.

Точность оценки параметров определяется остротой пика модуля частотно-временной функции неопределенности двух переменных τ, F :

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) \exp(-j2\pi Ft) dt \right|. \quad (6.27)$$

При $F = 0$ сигнальные копии рассогласованы только во времени и, в соответствие с этим, функция неопределенности (6.27) превращается в корреляционную функцию, взятую по абсолютной величине: $\Psi(\tau, 0) = \Psi(\tau)$. С другой стороны, в отсутствии временного сдвига сигнальные копии рассогласованы только по частоте, и функция неопределенности (6.27) становится спектром квадрата амплитудного закона модуляции сигнала: $\Psi(0, F) = \Psi(F)$. Другими словами, корреляционная функция сигнала и спектр квадрата огибающей представляют собой сечения функции неопределенности вертикальными плоскостями $\tau = 0$ и $F = 0$. Следовательно, диагональные элементы матрицы Фишера равны:

$$\Phi_{11} = -q^2 \left[d^2 \Psi_{\tau, 0} / d\tau^2 \right]_{\tau=0} = q^2 2\pi F_{\vartheta}^2, \quad (6.28)$$

$$\Phi_{22} = -q^2 \left[d^2 \Psi_{0, F} / dF^2 \right]_{F=0} = q^2 2\pi T_{\vartheta}^2. \quad (6.29)$$

Определим другие элементы матрицы Фишера:

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = -2\pi^2 q^2 F_{\vartheta} T_{\vartheta} \rho_{tf},$$

где

$$\rho_{tf} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot F_0 t \cdot S^2 t dt \right] / \left[F_{\vartheta} T_{\vartheta} \int_{-\infty}^{\infty} S^2 t dt \right]$$

– коэффициент частотно-временной связи; $F_0 t = \frac{1}{2\pi} d\gamma/dt$ – мгновенное отклонение частоты сигнала от f_0 ; $\gamma t = \arg S t$ – закон угловой модуляции сигнала.

В соответствии с правилом обращения матриц, получим

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2\pi F_{\vartheta} T_{\vartheta}^2 (1 - \rho_{tf}^2) q^2} \begin{vmatrix} T_{\vartheta}^2 & \rho_{tf} F_{\vartheta} T_{\vartheta} \\ \rho_{tf} F_{\vartheta} T_{\vartheta} & F_{\vartheta}^2 \end{vmatrix}, \quad (6.30)$$

Таким образом, условные дисперсии совместных ОМП $\tau = 0$ и $F = 0$ в асимптотическом приближении будут определяться выражениями

$$D \hat{\tau} | \tau, F \geq \Phi_{11}^{-1} = \frac{1}{2\pi F_{\vartheta}^2 (1 - \rho_{tf}^2) \cdot q^2}; \quad (6.31)$$

$$D \hat{F} | \tau, F \geq \Phi_{22}^{-1} = \frac{1}{2\pi T_{\vartheta}^2 (1 - \rho_{tf}^2) \cdot q^2}. \quad (6.32)$$

Так как матрица Φ^{-1} является корреляционной матрицей асимптотически совместно нормальных ОМП $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$, то из полученных выражений следует, что коэффициент частотно-временной связи есть не что иное, как коэффициент корреляции случайных величин $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ при $q \gg 1$.

Кроме того, как видно из (6.31) и (6.32), при прочих равных условиях точность совместной оценки $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ выше в том случае, когда $\rho_{tf} = 0$, т.е. $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ не коррелированы. Поэтому, если между параметрами τ и F нет частотно-временной связи $\rho_{tf} = 0$, то условные дисперсии совместных ОМП $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ описываются соотношениями

$$D \hat{\tau} | \tau, F = \frac{1}{2\pi F_{\vartheta}^2 \cdot q^2}; \quad (6.33)$$

$$D \hat{F} | \tau, F = \frac{1}{2 \pi T_{\vartheta}^2 \cdot q^2}, \quad (6.34)$$

Результаты (6.33) и (6.34) показывают, что точность ОМП одного из параметров τ или F не зависит от того, известен ли другой или оценивается наряду с первым. Из проведенного анализа видно, что дисперсии ОМП τ и F при совместных и отдельных измерениях времени запаздывания и частоты одинаковы.

Заключение

Материал настоящего пособия предназначен для изучения его на лекционных занятиях. Углубленное и более детальное изучение основных теоретических разделов выполняется студентами при самостоятельном изучении дисциплины. Выполнение практических заданий и компьютерного моделирования, позволяют студенту оценить степень усвоения теоретического материала. Естественно, что такая структура изучения материала неизбежно приводит к повторению ключевых понятий.

Критерием усвоения материала учебной дисциплины является умение решать различные задачи статистической радиотехники.

Литература

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. книга первая. М.: Сов. радио, 1966.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982.
3. Радиотехнические системы: учебник для студентов высших учебных заведений / Ю. М. Казаринов и др.; под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Издательский центр «Академия», 2008 г.
4. Математический аппарат радиотехники. Часть II. Случайные процессы: учебное пособие / под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006 г.
5. Компьютерный практикум по дисциплинам «Математический аппарат радиотехники» и «Статистическая теория РТС»: учебное пособие / под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011 г.
6. Математическое моделирование случайных процессов: учебное пособие / под общей ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012 г.
7. Преобразование сигналов и помех линейными и нелинейными системами: учебное пособие / под общей ред. проф. В. П. Ипатова и проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013 г.

Учебное издание

Быстров Николай Егорович

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор *Е. В. Ефимова*
Компьютерная верстка *И. В. Шкворова*

Изд. лиц. ЛР № 020815 от 21.09.98.

Подписано в печать. 15.11.2016. Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 5,8. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательско-полиграфический центр Новгородского
государственного университета им. Ярослава Мудрого.

173003, Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.

Отпечатано в ИПЦ НовГУ. 173003, Великий Новгород,
ул. Б. Санкт-Петербургская, 41