МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО»

Н. Е. Быстров, И. Н. Жукова

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Часть 1
Радиотехнические сигналы

Учебное пособие

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2016

УДК 621.396.1(075.8)
ББК 32.811я73
Б95

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор **В. М. Кутузов**
(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет)

доктор физико-математических наук, профессор **М. И. Бичурин**
(Новгородский государственный университет)

Быстров, Н. Е., Жукова, И. Н.

Б95 Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1. Радиотехнические сигналы: учеб. пособие / Н. Е. Быстров, И. Н. Жукова; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2016. – 129 с.

В учебном пособии рассматриваются вопросы общей теории сигналов и их спектральных представлений. В сжатой форме излагаются основы корреляционного анализа детерминированных сигналов. Приводятся элементы спектрального и корреляционного анализа дискретных сигналов. Рассматриваются методы модуляции радиосигналов, и производится анализ узкополосных сигналов. Излагается теория случайных сигналов.

Учебное пособие отвечает новым образовательным стандартам и предназначено для подготовки бакалавров по направлению 11.03.01 – «Радиотехника».

Пособие подготовлено и издано в рамках выполнения Госзадания Минобрнауки России.

УДК 621.396.1(075.8)
ББК 32.811я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Радиотехнические цепи и сигналы» является фундаментальной дисциплиной при подготовке бакалавров по направлению «Радиотехника» и входит в базовую часть профессионального цикла. Формируемые компетенции направления подготовки определены Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению 11.03.01 – «Радиотехника».

Преподавание дисциплины ориентирует студентов в широкой сфере проблем современной радиотехники по профилю подготовки «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов».

Изучение дисциплины должно заложить систему понятий в области радиотехнических цепей и сигналов, а также их преобразованием в радиотехнических системах.

Учебное пособие состоит из двух частей: РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ и РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.

Первая часть знакомит студентов с радиотехническими сигналами, их классификацией, математическим описанием и свойствами. Рассматриваются спектральный и корреляционный анализ детерминированных сигналов, теория модулированных радиосигналов, а также дискретное представление непрерывных сигналов. Излагаются методы описания и характеристики случаных процессов. Производится анализ узкополосных радиосигналов.

Вторая часть знакомит с анализом прохождения сигналов, как детерминированных, так и случайных, через линейные и нелинейные радиотехнические цепи.

В пособии использованы материалы популярных изданий [1–4].

ВВЕДЕНИЕ

Понятие информации, сообщения, сигнала

Под ***информацией*** понимают сведения о каком либо явлении, событии или объекте. Информация, выраженная в определенной форме, представляет собой ***сообщение***. ***Сигнал*** является материальным носителем сообщения.

Во многих случаях сигнал отображает временные процессы, происходящие в некоторой системе, и поэтому описанием конкретного сигнала может быть функция времени: $s(t,\alpha)$, $U(t,x,y)$..., где: α и x, y – некоторые информационные параметры сигнала. Таким образом, под сигналом понимают некоторую информационную функцию, несущую сообщение о физических свойствах, состоянии или поведении какой-либо физической системы, объекта или среды.

Сигналы могут быть объектами теоретических исследований и практического анализа только в том случае, если указан способ их математического описания – математическая модель сигнала. Математическое описание позволяет проводить классификацию сигналов, выполнять их сравнение и моделировать системы обработки сигналов. Выбор математического описания определяется простотой и удобством его использования при анализе и обработке сигналов.

Общая классификация сигналов

Классификация сигналов основана на математических моделях сигнала. Общепринятая классификация сигналов может быть представлена диаграммой, изображенной на рис. 1.

С информационной точки зрения сигналы разделяются на две крупных группы: детерминированные и случайные. Детерминированными называют сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени являются априорно известными или могут быть описаны математическими формулами. Детерминированные сигналы включают в себя гармонические и импульсные сигналы. Среди гармонических сигналов следует выделить полигармонические и модулированные. Полигармонические сигналы описываются линейной суммой гармонических колебаний. Модулированные сигналы представляют собой гармонические колебания, у которых амплитуда, частота или фаза меняется по некоторому закону. Импульсные сигналы подразделяются на апериодические и периодические. К апериодическим, или финитным, сигналам можно отнести импульсные сигналы, которые существуют в пределах конечных временных интервалов. Периодические сигналы повторяются с регулярным периодом повторения, являющимся конечным отрезком независимой переменной времени. Обычно выделяют два класса импульсных сигналов: видеосигналы и радиосигналы.

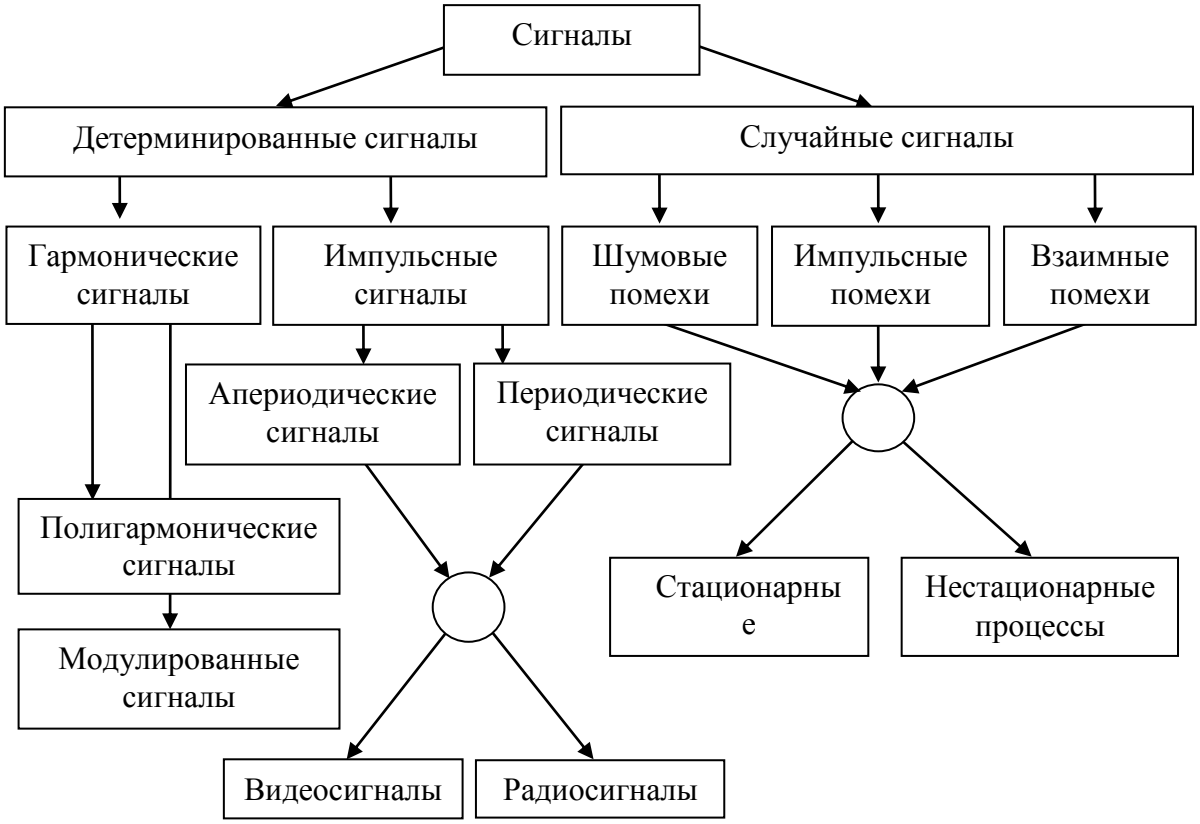


Рис. 1. Классификация сигналов

К случайным относят сигналы, мгновенные значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. Случайные сигналы образуют разнообразные помехи. Типы помех разделяют по источникам их возникновения, по характеру воздействия на сигнал, по вероятностным характеристикам и другим признакам. Случайные сигналы подразделяются на шумовые, импульсные и взаимные помехи. Шумовые помехи или флюктуационные представляют хаотический и беспорядочный во времени процесс, обусловленный внутренними шумами усилительных устройств. Внутренние шумы обусловлены физической природой источников сигналов. Среди источников шумов следует выделить тепловые шумы электронных потоков в электрических цепях и дробовые эффекты в электронных и полупроводниковых приборах. Как правило, шумовые помехи распределены по нормальному закону с нулевым средним и оказывают существенное влияние только на сигналы низкого уровня. Импульсные помехи проявляются в виде последовательности импульсов, форма и параметры которых имеют случайный характер. Причинами импульсных помех являются резкие броски тока и напряжения в промышленных установках, транспортных средствах, а также природные электрические явления. Распределение импульсных помех симметричное с произвольной

плотностью распределения. Взаимные помехи вызваны приемом сигналов от различных радиотехнических систем. Такие мешающие сигналы могут искажать полезный сигнал. В зависимости от характера воздействия на сигнал помехи разделяют на аддитивные и мультипликативные. Аддитивные помехи суммируются с сигналом, не зависят от его значений и формы и не изменяют информативной составляющей самого сигнала. Мультипликативные помехи могут изменять форму информационной части сигнала, иметь зависимость от его значений и от определенных особенностей в сигнале.

Случайные сигналы подразделяют на стационарные и нестационарные. Случайные стационарные сигналы сохраняют свои статистические характеристики во времени. Случайные нестационарные сигналы обладают статистическими характеристиками, зависящими от времени.

Типы сигналов

Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания.

Аналоговый сигнал описывается непрерывной функцией непрерывного аргумента. Пример графического отображения аналогового сигнала приведен на рис. 2.

Аналоговые сигналы непрерывны во времени и принимают произвольные мгновенные значения в определенном интервале амплитуд.

Дискретный сигнал по своим значениям также является непрерывной функцией, но определен только в дискретные моменты времени. Пример дискретного сигнала приведен на рис. 3.

Чаще всего дискретный сигнал получен дискретизацией аналогового сигнала, и его значения в точности равны значениям аналогового сигнала. Величина, обратная шагу дискретизации, называется частотой дискретизации.

Цифровой сигнал квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Пример дискретного сигнала приведен на рис. 4.

По существу цифровой сигнал по своим значениям является разновидностью дискретного сигнала при округлении его значений до определенных квантованных уровней. Процесс преобразования бесконечных по значениям аналоговых отсчетов в конечное число значений, представленных цифровыми кодами, называется квантованием по уровню. Для получения цифрового сигнала из аналогового используют аналого-цифровой преобразователь (АЦП), где осуществляется дискретизация сигнала во времени и представление отсчетов сигнала в виде цифровых кодов. Цифровые коды являются последовательностью чисел, представленных чаще всего в двоичной системе исчисления.

Рис. 2. Аналоговый сигнал

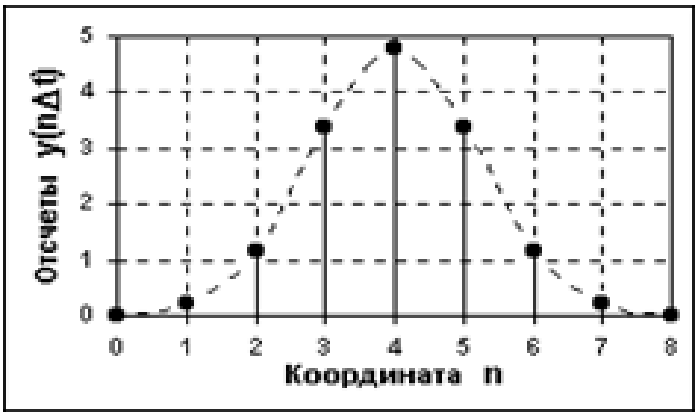


Рис. 3. Дискретный сигнал

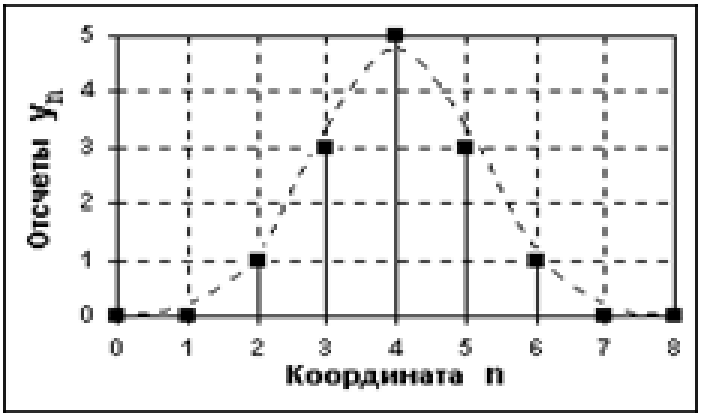


Рис. 4. Цифровой сигнал

Очевидно, что и при квантовании сигнала возникают ошибки округления отсчетов, которые называют шумами или ошибками квантования. В общем случае представление аналогового сигнала набором дискретных отсчетов приводит к определенной потере полезной информации. Однако правильно вы-

бранный интервал дискретизации во времени позволяет свести к минимуму потери информации. Обработка цифровых сигналов выполняется специализированными цифровыми процессорами. Для обратного преобразования, т.е. восстановление непрерывной структуры сигнала на выходе цифровой системы осуществляется с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и сглаживающего фильтра. Основные характеристики ЦАП (разрядность и частота дискретизации) аналогичны характеристикам АЦП.

Понятие системы

Целью обработки сигналов можно считать извлечение определенных информационных сведений, которые отображены в этих сигналах, и преобразование этих сведений в форму, удобную для восприятия и дальнейшего использования. Преобразование и обработка сигналов осуществляется в радиотехнических системах. Понятия сигнала и системы неразрывны, так как любой сигнал существует в пределах какой-либо системы. Радиотехническая система обработки сигналов может быть реализована как в материальной форме в виде специального устройства, так и программно на процессорах обработки сигналов. Форма реализации системы существенного значения не имеет и определяет только ее возможности при анализе и обработке сигналов.

При обработке сигналов, несущих целевую информацию, одновременно присутствуют и мешающие сигналы – шумы и помехи самой различной природы. Выделение полезных сигналов или максимальное подавление шумов и помех в информационном сигнале при сохранении его полезных составляющих является одной из основных задач обработки сигналов.

Общая характеристика цепей и устройств

Радиотехнические системы, предназначенные для обработки сигналов, весьма разнообразны по принципам внутреннего построения и внешним характеристикам. Радиотехнические устройства подразделяются на следующие основные классы:

- активные и пассивные;
- линейные и нелинейные;
- стационарные и не стационарные.

Радиотехнические устройства по составу входящих в них элементов делятся на две группы: активные и пассивные. В состав активных устройств обязательно входят усилительные устройства, которые обеспечивают усиление сигнала по мощности. С помощью пассивных устройств осуществляется фильтрация сигналов, суммирование и деление их мощности, согласование и связь между различными радиотехническими цепями.

Важнейший принцип классификации устройств основан на том, что они по-разному ведут себя при подаче на вход суммы нескольких сигналов. Для линейных устройств справедлив фундаментальный принцип суперпозиции: при действии на линейное устройство нескольких сигналов поведение её можно определить путем наложения решений, найденных для каждого отдельного входного сигнала. Важным свойством линейного устройства является то, что в нем не возникают сигналы с новыми частотами. Устройство является нелинейным, если в его состав входят элементы, характеристики которых зависят от уровня входного сигнала. В нелинейном устройстве, помимо основной частоты сигнала, возникают колебания с другими частотами. Значения частот зависят как от формы, так и от амплитуды сигнала.

Следующим критерием классификации устройств является постоянство их характеристик во времени. Если произвольная задержка подаваемого на вход сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы, то также устройства называются стационарными или с постоянными параметрами. Если свойства устройства не инвариантны относительно начала отсчета времени, то такие устройства называются нестационарными или параметрическими с переменными параметрами.

Изложенные выше основные свойства распространяются также и на устройства цифровой обработки сигналов.

Основные принципы передачи и приема информации

Каналом передачи информации является совокупность технических средств, предназначенных для передачи и приема сигналов. В некоторых приложениях сигнал является низкочастотным колебанием и поэтому он может передаваться с помощью проводных или кабельных каналов связи. Высокочастотные радиосигналы могут распространяться в свободном пространстве. Канал передачи информации с помощью электромагнитных волн называется радиотехническим каналом связи.

В процессе передачи и приема сигналы подвергаются различным преобразованиям. Рассмотрим типовые преобразования сигналов в радиотехническом канале применительно к обобщенной функциональной схеме, представленной на рис. 5.

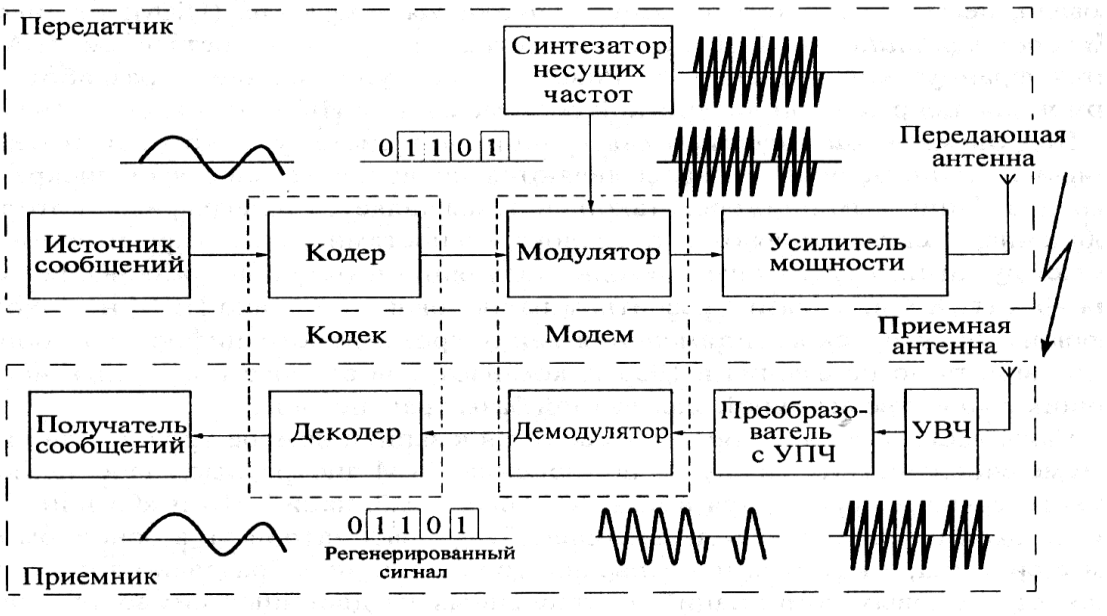


Рис. 5. Обобщенная функциональная схема преобразования сигналов в радиотехническом канале

На передающей стороне канала сообщение преобразуется в сигнал. Преобразователем может служить микрофон при передаче речи или музыки, светочувствительная матрица при передаче изображений и другие преобразователи физических процессов в электрический сигнал. Кодирующее устройство (кодер) выполняет функцию преобразования исходного сигнала сообщения в сигнал другой формы, более пригодной для последующей модуляции и передачи по каналу связи. Чаще всего кодирующее устройство выполняет функцию преобразования аналогового сигнала в цифровой и обеспечивает помехоустойчивое кодирование информации.

Процесс модуляции заключается в изменении одного или нескольких параметров высокочастотного колебания по закону сигнала сообщения. Наиболее распространены амплитудная, частотная и фазовая модуляции, которые имеют ряд разновидностей. Модулированный сигнал поступает в усилитель мощности радиосигнала. В тракте усилителя мощности осуществляется перенос модулированного радиосигнала на несущую частоту излучения. Несущая частота излучения назначается в зависимости от назначения системы передачи информации. Выбор того или иного диапазона волн для каждой конкретной системы связи определяется особенностью распространения электромагнитных волн и характером помех в данном диапазоне частот.

Подразделение радиоволн на диапазоны и области их использования представлены в табл. 1.

Таблица 1

Диапазоны радиоволн и области их использования

Используемые термины	Диапазон радиочастот	Диапазон длин волн	Области использования
Сверхдлинные. Мириаметровые.	< 30 кГц	100–10 км	Телеграфия. Дальняя радионавигация
Длинные. Километровые.	30–300 кГц	10–1 км	Радиовещание
Средние. Гектометровые.	300–3000 кГц	1000–100 м	Радиовещание
Короткие. Декаметровые.	3–30 МГц	100–10 м	Радиовещание, Мобильная радиосвязь
Ультракороткие. Метровые	30–300 МГц	10–1 м	УКВ- ЧМ-вещание, Телевизионное вещание, Мобильная радиосвязь
Дециметровые (L-, S-диапазоны)	0.3–3 ГГц	100–10 см	Телевизионное вещание, Космическая радиосвязь, Сотовая радиосвязь, Радиолокация
Сантиметровые (C-, X-, K-диапазоны)	3–30 ГГц	10–1 см	Космическая радиосвязь, Радиолокация, Радионавигация, Радиоастрономия
Миллиметровые	30–300 ГГц	10–1 мм	Космическая радиосвязь, Радиолокация, Радиоастрономия
Субмиллиметровые	300–3000 ГГц	1–0,1 мм	Радиолокация, Радиоастрономия

Антенна приемника улавливает ничтожную долю энергии излученного сигнала. Поэтому приемный тракт должен обеспечивать необходимое усиление сигналов на несущей частоте (УВЧ) для обеспечения приема достоверной информации. Однако, при приеме полезных сигналов одновременно присутствуют и мешающие сигналы, т.е. помехи самой различной природы, а также собственные шумы приемного тракта. Принимаемый сигнал искажается под воздействием помех. С усилителя высокой частоты сигнал поступает на преобразователь частоты, в котором осуществляется понижение несущей частоты и дальнейшее усиление сигнала на промежуточной частоте (УПЧ) и выделение его из помех. Выделение полезных сигналов или максимальное подавление помех является одной из основных задач обработки сигналов. Поэтому проблема усиления в приемнике неотделима от проблемы выделения сигнала на фоне помех. Усиленный и выделенный из помех сигнал поступает на демодулятор сигналов. На выходе демодулятора получаем закодированный сигнал сообщения, который поступает в декодирующее устройство. Под декодированием понимают извлечение информационных сведений из принимаемых сигналов и преобразование этих сведений в

форму, удобную для восприятия и дальнейшего использования. В ряде радиотехнических каналов кодирование и декодирование не используется.

Разнообразие помеховой обстановки требуют разработки достаточно совершенных радиотехнических систем. Выбор сигнала имеет принципиальное значение, поскольку от их вида зависят многие качественные показатели радиотехнической системы. Оптимальный прием сигналов состоит в наилучшем воспроизведении сообщений, заключенном в сигнале, искаженном помехами. Таким образом, центральной задачей при разработке радиотехнических систем является проблема повышения помехоустойчивости приема сигналов. Под помехоустойчивостью понимают способность радиотехнических систем поддерживать на заданном уровне показатели качества при воздействии различного вида помех.

Помехи радиоизлучения создают и проблему электромагнитной совместимости радиотехнических систем. Под электромагнитной совместимостью понимают совокупность мер, направленных на исключение взаимных помех радиотехническим системам. Взаимные помехи между радиотехническими системами устраняют рациональным распределением частот, улучшением качества работы передатчика за счет снижения внеполосных излучений, применением направленных антенн.

1. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Понятия мощности и энергии сигналов

Мощность и энергия в теории сигналов является количественными характеристиками, отражающими определенные свойства сигналов и динамику изменения их значений во времени. С энергетических позиций сигналы разделяют на два класса: с ограниченной (конечной) энергией и с бесконечной энергией. К сигналам с ограниченной энергией относятся финитные сигналы и сигналы, затухающие по своим значениям в пределах конечной длительности. Любые периодические, полигармонические и почти периодические сигналы относятся к сигналам с бесконечной энергией.

Сигналы могут быть вещественными или комплексными. Произвольный комплексный сигнал $s(t)=a(t)+jb(t)$ задается парой вещественных функций $a(t)$ и $b(t)$. Для произвольного комплексного сигнала мгновенная мощность (плотность распределения энергии) равна квадрату функции его модуля:

$$p(t)=s(t)\cdot s^{*}(t)=a^{2}(t)+b^{2}(t)=\left|s(t)\right|^{2}. \qquad (1.1.1)$$

Для вещественных сигналов мгновенная мощность равна квадрату функции амплитуд:

$$p(t)=s(t)^{2}. \qquad (1.1.2)$$

По существу мгновенная мощность является плотностью мощности сигнала. Выражение

$$P_{cp}=\frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2}\left|s(t)\right|^{2}dt \qquad (1.1.3)$$

имеет смысл средней мощности сигнала на интервале времени $\left[T_1,\ T_2\right]$.

Понятие средней мощности может быть распространено и на периодические сигналы. В этом случае определение средней мощности сигнала производится по формуле:

$$P_{cp}=\lim_{T\Rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}p(t)dt, \qquad (1.1.4)$$

где T – период повторения сигнала $s(t)=s(t+nT),\ n=\pm1,\ \pm2,\ldots$.

Энергия сигнала равна интегралу от мгновенной мощности по всему интервалу $[T_1,\ T_2]$ существования или задания сигнала. Для вещественных сигналов можно записать:

$$E_S=\int_{T_1}^{T_2} p(t)dt=\int_{T_1}^{T_2} s(t)^2 dt. \qquad (1.1.5)$$

Особый интерес в теории сигналов имеет определение энергии суммы сигналов. Пусть некоторый сигнал образован аддитивной суммой двух сигналов $s(t)=u(t)+v(t)$. Вычислим энергию суммы двух произвольных сигналов:

$$E_{uv}=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(t)+v(t)\right]^2 dt=E_u+E_v+2\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot v(t)dt. \qquad (1.1.6)$$

Как следует из этого выражения, энергия сигналов не обладает свойством аддитивности. Энергия суммарного сигнала, кроме суммы энергий составляющих сигналов, содержит в себе и так называемую энергию взаимодействия сигналов, или взаимную энергию:

$$E_{uv}=2\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot v(t)dt. \qquad (1.1.7)$$

Для сигналов, обладающих нулевой взаимной энергией, справедлив принцип аддитивности.

1.2. Геометрические характеристики в теории сигналов

Для анализа сигналов широко используется математика векторов в линейном пространстве. Пусть произвольный сигнал $s(t)$ задан на интервале времени $[0,\ T]$. Произведем дискретизацию исходного сигнала с равномерным шагом Δ и представим его $N=T/\Delta$ последовательными выборками: $s_n=s(t_n),\ t_n=n\cdot\Delta,\ n=1,2\ \ldots\ N$. В таком представлении величина $s=(s_1,\ s_2,\ \ldots\ ,s_N)$ может рассматриваться в виде N-мерного вектора в N-мерном линейном Евклидовом пространстве.

Рассмотрим основные понятия и определения геометрических характеристик в общей теории сигналов.

Норма сигнала. Введем понятие длины сигнала или нормы сигнала. Согласно теореме Пифагора для *N*-мерного векторного пространства норма задается выражением:

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} s_n^2} \qquad (1.2.1)$$

Если устремить шаг дискретизации Δ к нулю, то вектора становятся бесконечной размерности, и мы приходим к определению нормы для непрерывных во времени сигналов:

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt}\,. \qquad (1.2.2)$$

На рис. 1.2.1 приведены изображения сигналов в виде векторов и их нормы при различных размерностях пространства.

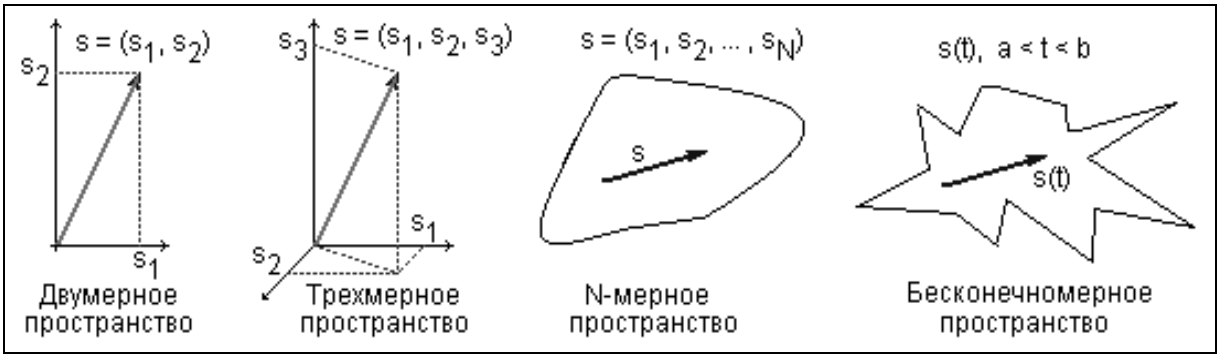


Рис. 1.2.1. Изображения сигналов в виде векторов

Норма сигнала характеризует его расстояние относительно начала координат. Из выражения (1.2.2) следует, что норма и энергия сигналов связана соотношениями:

$$\|s(t)\| = \sqrt{E_s}\,, \qquad E_s = \|s(t)\|^2. \qquad (1.2.3)$$

Метрика сигналов. Теперь введем понятие расстояния, или метрики, между сигналами. Метрика определяется нормой разности двух сигналов:

$$d(s,v) = \|s - v\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left[s_n - v_n\right]^2} \,. \qquad (1.2.4)$$

Для непрерывных во времени сигналов сумма в равенстве (1.2.4) заменяется интегралом:

$$d(s,v) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - v(t)\right]^2 dt} \,. \qquad (1.2.5)$$

Пример метрики для двух векторов в двумерном пространстве приведен на рис. 1.2.2.

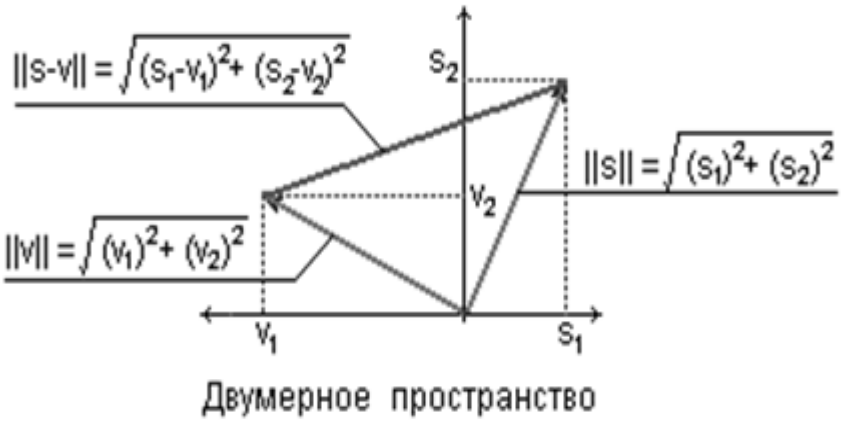


Рис. 1.2.2. Метрика двух векторов
в двумерном пространстве

Скалярное произведение сигналов. Другой важной геометрической характеристикой является скалярное произведение двух сигналов. Если два вектора s и v в N-мерном пространстве расположены под углом φ друг к другу, то их скалярное произведение можно определить выражением

$$(s, v) = \|s\| \cdot \|v\| \cos(\varphi) \,. \qquad (1.2.6)$$

Скалярное произведение сигналов отражает степень их связи или сходства по форме и положению в пространстве сигналов. Физическая сущность скалярного произведения сигналов u(t) и v(t) в двумерном пространстве представлена на рис. 1.2.3. Скалярное произведение – это произведение длины одного вектора на проекцию второго вектора по направлению первого вектора.

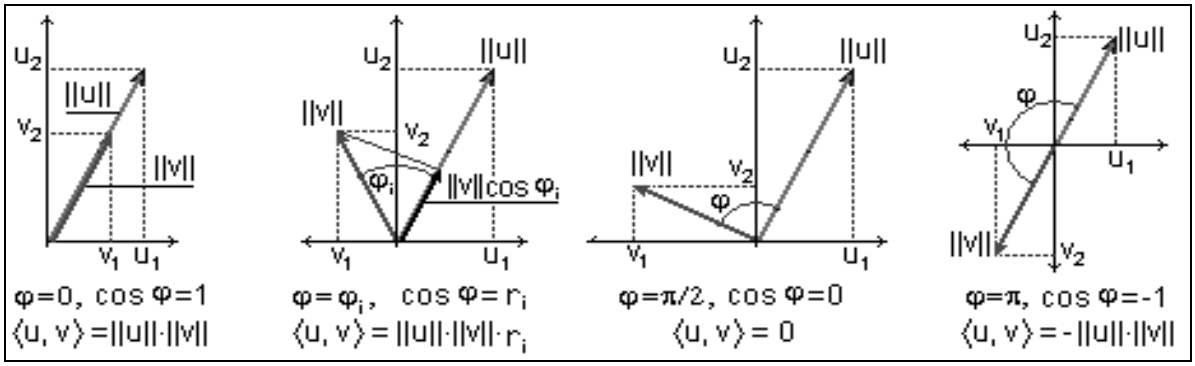


Рис. 1.2.3. Скалярное произведение сигналов в двумерном пространстве

При $\varphi = 0$ $\left(\cos(\varphi) = 1\right)$ сигналы совпадают по направлению, и расстояние между ними минимально. При $\varphi = \pi$ $\left(\cos(\varphi) = -1\right)$ сигналы называются противоположными, и расстояние между сигналами максимально. При $\varphi = \pi/2$ $\left(\cos(\varphi) = 0\right)$ сигналы «перпендикулярны друг другу», и проекции сигналов друг на друга равны 0. Такие сигналы называют ортогональными. Ортогональные сигналы имеют нулевое скалярное произведение.

Представляя выражение (1.2.6) через составляющие вектора, получим

$$(s, v) = \sum_{n=1}^{N} s_n \cdot v_n \,. \qquad (1.2.7)$$

Для скалярного произведения справедливо неравенство Коши – Буняковского :

$$\left|(s, v)\right| \le \|s\| \cdot \|v\|. \qquad (1.2.8)$$

При рассмотрении выражения (1.2.4) квадрата метрики сигналов можно записать:

$$d^2(s,v) = \|s\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \|s\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\varphi). \qquad (1.2.9)$$

Из выражения (1.2.7) следует, что скалярное произведение двух непрерывных сигналов может трактоваться как предельная форма скалярного произведения двух N-мерных векторов:

$$(s, v) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot v(t) dt. \qquad (1.2.10)$$

Следует отметить, что поскольку ортогональные сигналы имеют нулевое значение скалярного произведения, то они обладают нулевой энергией взаимодействия. Это свойство особенно важно в теории сигналов.

Ортонормированный базис. Множество векторов $\{u_k, k = 1, 2, ..., N\}$ в N-мерном пространстве, для которых скалярное произведение удовлетворяет условию

$$(u_n, u_m) = \begin{cases} 0 & если \ n \neq m \\ 1 & если \ n = m \end{cases}, \qquad (1.2.11)$$

называется ортонормированным базисом N-мерного пространства.

Таким образом, векторное отображение сигналов позволяет наглядно представлять взаимодействия сигналов, степени их различия и подобия.

1.3. Динамическое представление сигналов

Отметим, что радиотехнические сигналы описываются разнообразными по виду функциями времени $s(t)$. Чтобы упростить ряд положений теории сигналов, реальные сигналы аппроксимируют другими, менее сложными элементарными сигналами. Выбор элементарных сигналов определяется простотой и удобством их использования при анализе сигналов. Рассмотрим основные формы представления сигналов.

Пусть некоторый произвольный сигнал $s(t)$. Определим его значения через равные интервалы времени Δ: $s_k = s(k \cdot \Delta)$, $k = 0, 1, 2$ ... и рассмотрим два способа динамического представления сигнала. В первом способе, изображенном на рис. 1.3.1, *а*, в качестве элементарных сигналов используются ступенчатые функции, смещенные на равные промежутки времени Δ. Высота каждой

ступеньки равна приращению сигнала на интервале времени Δ. При втором способе элементарными сигналами служат прямоугольные импульсы, длительностью Δ. Диаграмма динамического представления сигнала представлена на рис. 1.3.1, *б*. Прямоугольные импульсы смещены на равные промежутки времени Δ, примыкают друг к другу и образуют последовательность импульсов, вписанную в форму исходного сигнала.

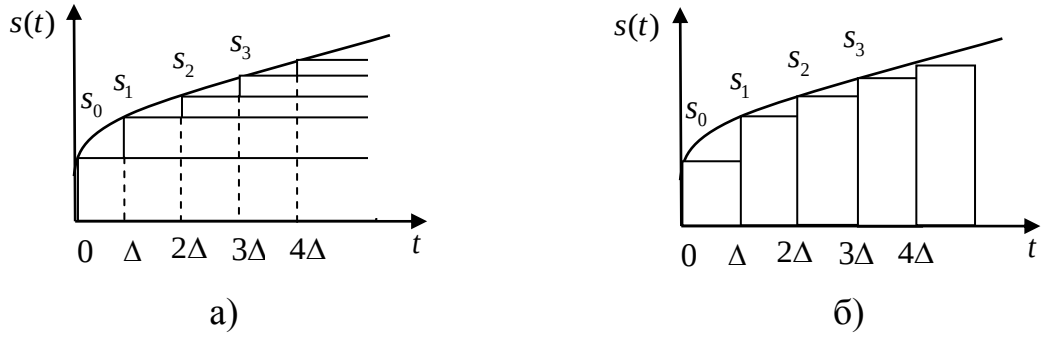


Рис. 1.3.1. Представление сигнала:
а) ступенчатыми функциями; б) прямоугольными импульсами

Остановимся на первом способе динамического представления сигнала, когда элементами разложения служат ступенчатые функции включения, или Хевисайда:

$$\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1/2, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases} \qquad (1.3.1)$$

Текущее значение сигнала приближенно равно сумме ступенчатых функции, задаваемых выражением:

$$s(t)\approx s_0\cdot\sigma(t)+(s_1-s_0)\cdot\sigma(t-\Delta)+(s_2-s_1)\cdot\sigma(t-2\cdot\Delta)+...=$$

$$=s_0\cdot\sigma(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(s_k-s_{k-1})\cdot\sigma(t-k\cdot\Delta) \qquad (1.3.2)$$

Если интервал времени Δ устремить к нулю, то получим первую форму динамического представления сигнала:

$$s(t) = s_0 \cdot \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \cdot \sigma(t-\tau) d\tau . \qquad (1.3.3)$$

Перейдем ко второму способу динамического представления сигнала, когда элементами разложения служат смещенные во времени короткие прямоугольные импульсы, или импульсы Дирака.

Элементарный k-й импульс Дирака можно представить в виде соотношения:

$$\eta_k(t) = s_k \cdot \left[\sigma(t-t_k) - \sigma(t-t_k-\Delta)\right]. \qquad (1.3.4)$$

Тогда исходный сигнал можно описать суммой таких элементарных импульсов:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot \left[\sigma(t-t_k) - \sigma(t-t_k-\Delta)\right]. \qquad (1.3.5)$$

Выражение в квадратных скобках при переходе к пределу при $\Delta \to 0$ преобразуется к виду:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\left[\sigma(t-t_k) - \sigma(t-t_k-\Delta)\right] = \delta(t-\tau). \qquad (1.3.6)$$

Полученная функция называется дельта-функцией.

Математическое описание дельта-функции задается выражением:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}. \qquad (1.3.7)$$

На основании (1.3.6) и свойства (1.3.7), получаем вторую форму динамического представления сигнала:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau . \qquad (1.3.8)$$

Дельта-функция характеризуется уникальным интегральным свойством вида:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}. \qquad (1.3.9)$$

Из (1.3.10) и (1.3.1), можно видеть взаимосвязь функций Хэвисайда и Дирака:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}. \qquad (1.3.10)$$

В завершении сформулируем фильтрующее свойство δ-функции, которое задается выражением:

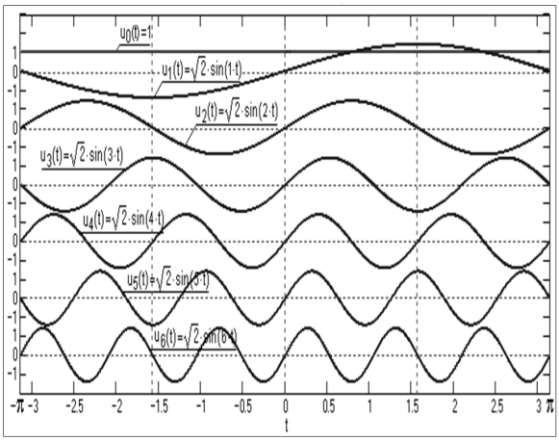
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0)dt = s(t_0). \qquad (1.3.11)$$

Если непрерывный сигнал $s(t)$ умножить на дельта-функцию $\delta(t - t_0)$, заданную в момент времени t_0, и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывного сигнала в той точке, где сосредоточен дельта-импульс.

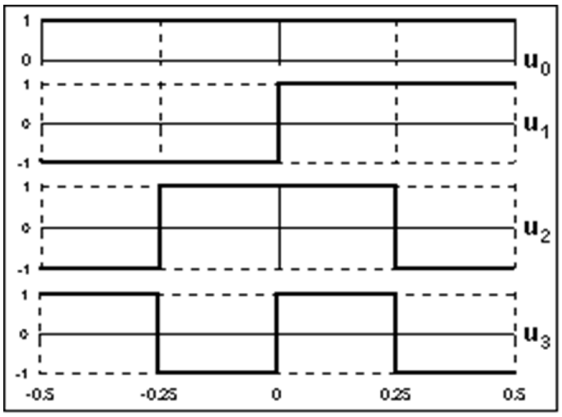
1.4. Разложение сигнала в системе ортогональных базисных функций

Рассмотрим еще один способ приведения разнообразных сигналов $s(t)$, заданных на интервале времени $[-T/2,\ T/2]$, к единому виду, позволяющему выразить произвольный сигнал в виде ряда суммы определенных элементарных базисных функций. Для этого обратимся к бесконечномерному пространству и рассмотрим некоторое множество функций (семейство функций), которые можно обозначить как $\{u_n(t), n = 0,1,2,...\}$.

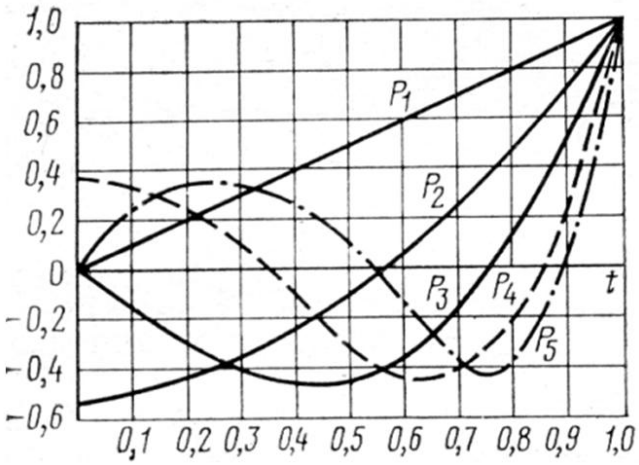
Будем считать, что любые две функции из этого семейства функций на интервале $[a,b]$ ортогональны. Для примера система нескольких первых ортогональных гармонических функций, функций Уолша и Лежандра изображена на рис. 1.4.1, *а*, *б* и *в* соответственно.



а)



б)



в)

Рис. 1.4.1. Системы ортогональных функций:
а) гармонические функции;
б) функции Уолша;
в) функции Лежандра

Система ортогональных функций всегда может быть превращена в ортонормированную систему путем нормировки, т.е. деления всех функций на их норму. Тогда скалярное произведение ортонормированной системы функций определяется условием

$$\left(u_n(t), u_m(t)\right) = \int_a^b u_n(t) \cdot u_m(t) dt = \begin{cases} 0 & если\ n \neq m \\ 1 & если\ n = m \end{cases}. \qquad (1.4.1)$$

Произвольный сигнал $s(t)$ может быть разложен в ряд по упорядоченной системе ортогональных базисных функций $u_n(t)$:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot u_n(t), \qquad (1.4.2)$$

где c_n – совокупность коэффициентов ряда Фурье. Приведенное выражение (1.4.2) называется обобщенным рядом Фурье сигнала в выбранном базисе ортонормированной системе функций.

Для нахождения значений коэффициентов c_n умножим обе части выражения (1.4.2) на базисную функцию $u_m(t)$ с произвольным номером m и проинтегрируем результаты по переменной t, при этом получим:

$$\int_a^b s(t) \cdot u_m(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b u_n(t) \cdot u_m(t) dt. \qquad (1.4.3)$$

Ввиду ортонормированности функций $u_n(t)$ и $u_m(t)$, в правой части этого равенства остается только один член суммы с номером $n = m$. Поэтому из (1.4.3) следует важная формула, определяющее вычисление коэффициентов ряда Фурье :

$$c_n = \int_a^b s(t) \cdot u_n(t) dt. \qquad (1.4.4)$$

Совокупность коэффициентов Фурье c_n носит название спектра сигнала $s(t)$.

К системам базисных функций $u_n(t)$, которые используются при разложении сигналов, предъявляют следующие основные требования:

– базисные функции должны иметь достаточно простую аналитическую форму;

– коэффициенты разложения должны вычисляться относительно просто;

– для любого сигнала ряды разложения должны сходиться.

Энергия сигнала, представленная в форме обобщенного ряда Фурье

Допустим, что сигнал $s(t)$ разложен в обобщенный ряд Фурье. Тогда энергию сигнала можно определить в соответствии с преобразованием:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n u_m u_n dt = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \int_{-\infty}^{\infty} u_m u_n dt . \quad (1.4.5)$$

В этом выражении в силу ортонормированности базисной системы отличны от нуля только члены с номерами $n = m$. Отсюда получаем важное соотношение:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 . \quad (1.4.6)$$

Таким образом, энергия сигнала может быть определена через сумму энергий спектральных составляющих обобщенного ряда Фурье. Это соотношение называют ***<u>равенством Парсеваля</u>***.

Оптимальность представления сигналов по ортогональному базису

Бесконечный обобщенный ряд Фурье абсолютно точно описывает сигнал $s(t)$. При практическом использовании количество членов обобщенного ряда Фурье ограничивается определенным значением N и сигнал восстанавливается с некоторой погрешностью:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(t) . \quad (1.4.7)$$

Можно показать, что для любого значения N совокупность коэффициентов c_n ряда Фурье обеспечивает наименьшую среднеквадратическую погрешность приближения к заданному сигналу:

$$\sigma^2 = \left\| s(t) - \tilde{s}(t) \right\|^2 = \int_a^b \left(s(t) - \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(t) \right)^2 dt \Rightarrow \min \quad (1.4.8)$$

Выразим величину среднеквадратической ошибки аппроксимации в зависимости от числа членов ряда Фурье. Применив равенство Парсеваля, получим

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 - \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 . \quad (1.4.9)$$

Так как $|c_n|^2 \geq 0$, то из выражения (1.4.9) вытекает ***<u>неравенство Бесселя</u>***

$$E_s \geq \sum_{n=0}^{N} c_n^2 , \quad (1.4.10)$$

которое означает, что энергия приближенной копии сигнала $\tilde{s}(t)$ меньше или равна энергии исходного $s(t)$. Из неравенства Бесселя следует, что с увеличением числа N членов ряда Фурье ошибка аппроксимации уменьшается. Выбирая значения N достаточно большим, всегда можно снизить среднеквадратическую ошибку до любой приемлемо малой величины.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Возможность разложения сигналов в обобщенные ряды Фурье по различным системам ортогональных функций имеет большое значение в теории радиотехники. Среди многообразных систем ортогональных функций особое место занимают гармонические функции. Рассмотрим особенности и различные формы спектрального разложения периодических сигналов.

2.1. Синусно-косинусная форма спектрального представления сигналов

Как отмечалось ранее, произвольный сигнал может быть представлен обобщенным рядом Фурье

$$s(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot u_k(t), \qquad (2.1.1)$$

где $u_k(t)$ – некоторая система ортонормированных функций, а коэффициенты разложения c_k определяются по формуле

$$c_k = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot u_k(t)dt. \qquad (2.1.2)$$

Произвольный периодический сигнал $s(t)$, заданный на бесконечном интервале времени, описывается выражением:

$$s(t)=s(t\pm nT)\ ,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (2.1.3)$$

где T – период повторения сигнала.

Зададим на отрезке времени $[-T/2,\ T/2]$ ортонормированный базис, образованный гармоническими функциями

$$u_0=1/\sqrt{T},\ u_1=\sqrt{2/T}\sin(2\pi/T\cdot t),\quad u_2=\sqrt{2/T}\cos(2\pi/T\cdot t),$$
$$u_3=\sqrt{2/T}\sin(4\pi/T\cdot t),\quad u_4=\sqrt{2/T}\cos(4\pi/T\cdot t), \qquad (2.1.4)$$
$$u_5=\sqrt{2/T}\sin(6\pi/T\cdot t),\quad u_6=\sqrt{2/T}\cos(6\pi/T\cdot t),$$

с основной частотой $\omega_1 = 2\pi/T$ и с кратными частотами $\omega_k = k \cdot \omega_1,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Найдем спектральное разложение периодического сигнала (2.1.3) в базисе ортогональных периодических гармонических функций u_k вида (2.1.4).

С учетом рассматриваемого гармонического базиса (2.1.4) коэффициенты разложения (2.1.2) можно представить в виде:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt; \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\cos(k\cdot\omega_1 t)\,dt; \qquad (2.1.5)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\sin(k\cdot\omega_1 t)\,dt.$$

Совокупность коэффициентов a_k и b_k для соответствующих значений частот $\omega_k = k \cdot \omega_1,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ образует спектр сигнала $s(t)$. Спектр сигнала содержит постоянную составляющую и бесконечный набор гармоник с частотами, кратными основной частоте. Можно отметить, что четный сигнал имеет только косинусоидальные, а нечетный сигнал – только синусоидальные компоненты спектра.

Таким образом, в соответствии с представлением (2.1.1), тригонометрическая ***синусно-косинусная форма*** ряда Фурье будет описываться выражением:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\cdot\omega_1 t) + b_k\sin(k\cdot\omega_1 t)\right]. \qquad (2.1.6)$$

Для примера рассмотрим спектральное разложение сигнала, представляющего собой последовательность периодических прямоугольных видеоимпульсов. Временная диаграмма смещенного во времени сигнала представлена на рис. 2.1.1.

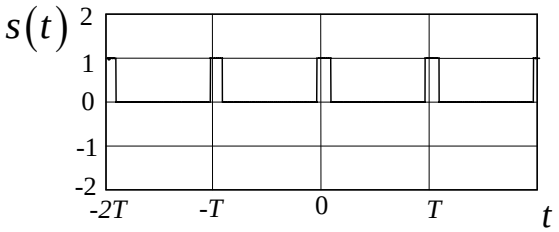


Рис. 2.1.1. Последовательность периодических прямоугольных видеоимпульсов

Значения первых 20 коэффициентов a_k и b_k в разложении (2.1.6) для анализируемого сигнала изображены на рис. 2.1.2, *а* и *б* соответственно.

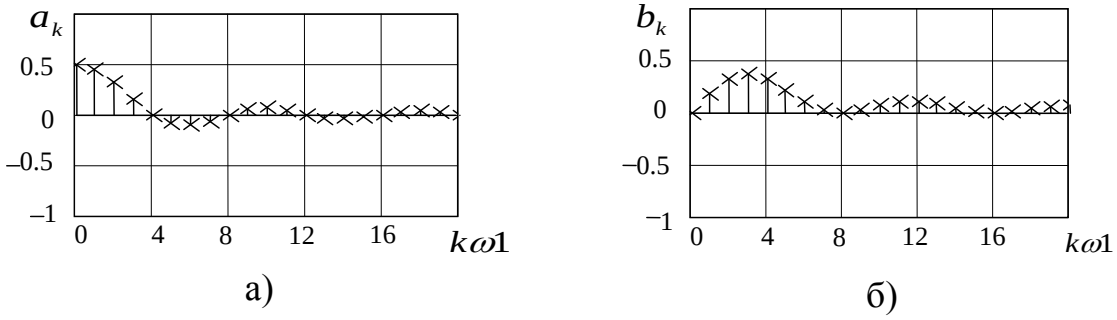


Рис. 2.1.2. Коэффициенты разложения в ряд Фурье последовательности прямоугольных видеоимпульсов

Спектр сигнала изображается в виде пары дискретных зависимостей. Он состоит из отдельных линий, отражающих амплитудные значения косинусных и синусных гармоник на соответствующих дискретных частотах $\omega_k = k \cdot \omega_1,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

2.2. Вещественная форма спектрального представления сигналов

Рассмотрим вторую форму ряда Фурье. Каждую гармонику спектра можно описать ее амплитудой A_k и начальной фазой φ_k:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \varphi_k = -arctg\left(b_k / a_k\right). \qquad (2.2.1)$$

Это позволяет коэффициенты ряда Фурье записать в виде:

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k) \quad \text{и} \quad b_k = A_k \sin(\varphi_k). \qquad (2.2.2)$$

Подставив эти выражения в (2.1.6), получим ***вещественную форму*** ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \cdot \omega_1 t + \varphi_k). \qquad (2.2.3)$$

Спектр амплитуд косинусных гармоник называется амплитудно-частотным составом сигнала, а спектр фазовых углов гармоник – фазовым спектром сигнала.

Вид амплитудного и фазового спектра последовательности периодических прямоугольных видеоимпульсов представлен на рис. 2.4.1, *а* и *б* соответственно.

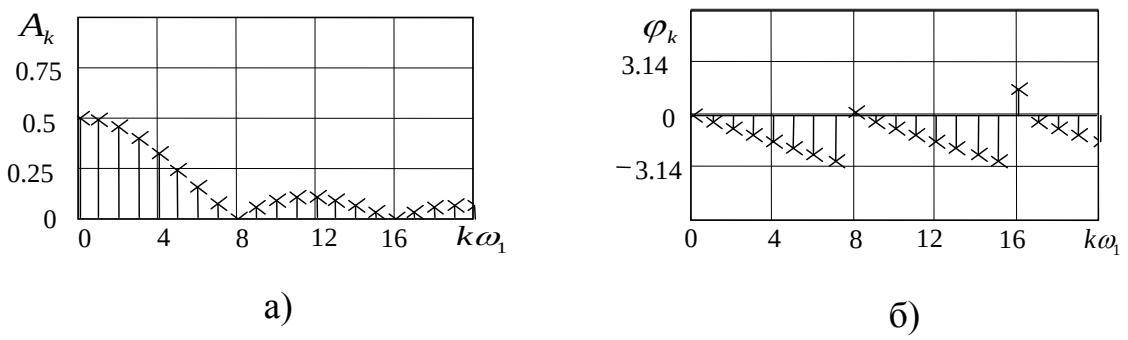


Рис. 2.2.1. Амплитудный и фазовый спектры последовательности периодических прямоугольных видеоимпульсов

Спектр периодического сигнала является линейчатым. Расстояние между спектральными компонентами (гармониками) равно частоте повторения импульсов. Совокупность амплитудных значений этих гармоник образует односторонний (только для положительных частот) спектр сигнала. Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, то фазы ϕ_k могут принимать только значения $0, \pi$, а если $s(t)$- функция нечетная, то возможные значения для фазы равны $\pm\pi/2$.

2.3. Комплексная форма спектрального представления сигналов

Спектральное разложение периодического сигнала можно выполнить, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(-jk \cdot \omega_1 t\right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cos(k \cdot \omega_1 t) - j \sin(k \cdot \omega_1 t) \right\}, k = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.3.1)$$

Функции этой системы периодичны с периодом T и ортонормированны на отрезке времени $\left[-T/2,\ T/2\right]$. В этом случае коэффициенты ряда Фурье определяются по выражению:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \exp\left(-jk \cdot \omega_1 t\right) dt\,. \quad (2.3.2)$$

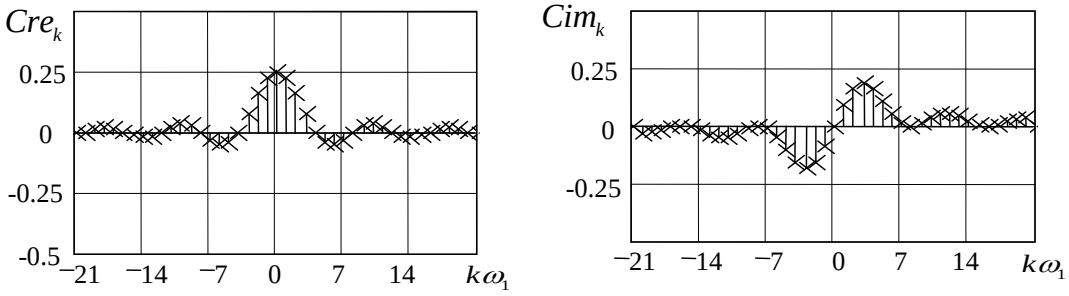
Тогда ряд Фурье периодического сигнала ***в комплексной форме*** принимает вид:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \exp\left(jk \cdot \omega_1 t\right). \quad (2.3.3)$$

Подынтегральную функцию экспоненты в выражении (2.3.2) можно разложить на косинусную и синусную составляющие и выразить комплексный спектр в виде действительной и мнимой части:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \left[\cos\left(k\omega_1 t\right) - j \sin\left(k\omega_1 t\right)\right] dt = Cre_k - jCim_k\,. \quad (2.3.4)$$

Форма действительной и мнимой части спектра анализируемой последовательности прямоугольных импульсов приведена на рис. 2.3.1, *а* и *б* соответственно.



а) б)

Рис. 2.3.1. Действительная и мнимая части спектра последовательности прямоугольных импульсов

Спектр сигнала содержит компоненты на положительной и отрицательной полуоси частот. Действительная часть спектра $Cre_k = \mathrm{Re}(C_k)$ является четной функцией, а мнимая часть спектра $Cim_k = -\mathrm{Im}(C_k)$ является нечетной функцией. Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, то все значения $Cim_k = -\mathrm{Im}(C_k)$ равны нулю, т.к. четные функции ортогональны синусным гармоникам. Следовательно, спектр функции будет представлен только вещественными коэффициентами. Напротив, при нечетности функции $s(t)$ обнуляются все значения коэффициентов $Cre_k = \mathrm{Re}(C_k)$, т.к. нечетные функции ортогональным косинусным гармоникам. В этом случае спектр является чисто мнимым.

Комплексный спектр может быть также представлен в виде модуля и аргумента комплексной экспоненты:

$$|C_k| = \sqrt{Cre_k^2 + Cim_k^2}\,,$$

$$\varphi_k = -arctg\left(Cim_k / Cre_k\right), \qquad (2.3.5)$$

$$C_k = |C_k| \cdot \exp\left(j\varphi_k\right).$$

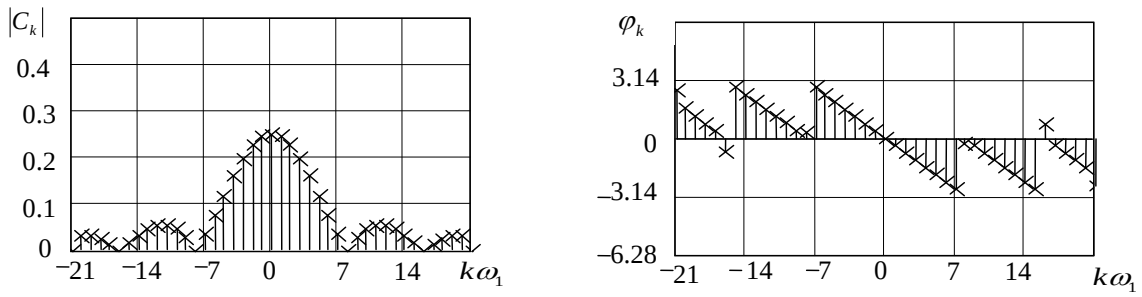
Слагаемые в комплексном ряде Фурье (2.3.3) с положительными и отрицательными частотами являются комплексно-сопряженными и объединяются в пары вида:

$$C_k \exp\left(jk\omega_1 \cdot t\right) + C_{-k} \exp\left(-jk\omega_1 \cdot t\right) = 2 \cdot |C_k| \cdot \cos\left(k\omega_1 \cdot t + \varphi_k\right). \quad (2.3.6)$$

С учетом свойства (2.3.6) получаем вторую форму записи комплексного ряда Фурье:

$$s(t) = C_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cdot \cos(k\omega_1 \cdot t + \varphi_k)\,. \qquad (2.3.7)$$

Вид спектра последовательности прямоугольных импульсов в амплитудном и фазовом представлении показан на рис. 2.3.2, *а* и *б* соответственно.



а) б)

Рис. 2.3.2. Спектр последовательности прямоугольных импульсов в амплитудном и фазовом представлении

Модуль спектра $|C_k|$ называют двусторонним спектром амплитуд, а аргумент спектра φ_k – двусторонним спектром фаз. Спектр амплитуд всегда представляет собой четную функцию, а спектр фаз – нечетную. Для четных сигналов отсчеты фазового спектра могут принимать только значения 0 или π, для нечетных соответственно ±π/2. Очевидно, что форма спектра сигнала зависит как от вида сигнала, так и его параметров (длительности, скважности). При задержке сигналов изменяется только фазовый спектр, а амплитудный спектр сохраняет свою форму.

2.4. Общая характеристика спектра периодического сигнала

Ряд Фурье в комплексной форме можно получить из тригонометрического ряда, если воспользоваться формулой Эйлера для преобразования косинусоидальных составляющих ряда. Комплексные коэффициенты C_k ряда Фурье связаны с амплитудами A_k и фазами φ_k, фигурирующими в вещественной форме ряда Фурье, следующими соотношениями:

$$C_k = 1/2\, A_k \exp(j\varphi_k),\ |C_k| = 1/2 \cdot |A_k|; \qquad (2.4.1)$$

$$A_k = 2|C_k|,\ \varphi_k = \arg(C_k). \qquad (2.4.2)$$

Несложно получить и взаимосвязь комплексных коэффициентов C_k с коэффициентами a_k и b_k синусно-косинусной формы ряда Фурье:

$$C_k = 1/2 \cdot (a_k - jb_k),\ \ C_{-k} = 1/2 \cdot (a_k + jb_k); \qquad (2.4.3)$$

$$a_k = 2\mathrm{Re}(C_k),\ b_k = -2\cdot\mathrm{Im}(C_k). \qquad (2.4.4)$$

Таким образом, рассмотренные формы рядов Фурье взаимосвязаны, и их можно рассматривать как три способа эквивалентного представления спектра одного и того же сигнала.

Рассмотрим особенности спектральных характеристик периодических сигналов на примере последовательности прямоугольных видеоимпульсов $s(t,\{A,\tau,T\})$, модуль спектра которых приведен на рис. 2.4.1.

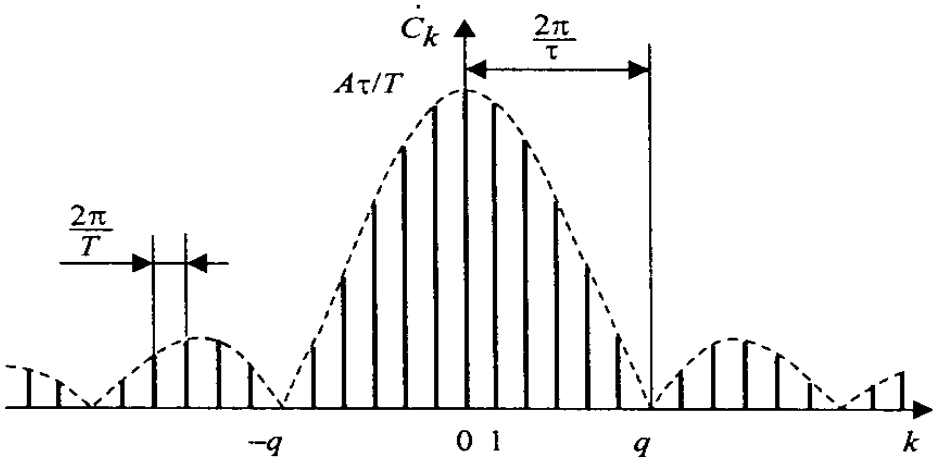


Рис. 2.4.1. Модуль спектра последовательности прямоугольных видеоимпульсов

Принято говорить, что спектр периодических сигналов является дискретным. Спектральные гармоники следуют через интервал частот $\omega_1 = 2\pi/T$. С увеличением периода T основная частота уменьшается и спектр становится плотнее. Форма огибающей частотного спектра остается неизменной. Принято говорить, что форма огибающей спектра сигналов имеет лепестковую структуру. Различают главный лепесток и боковые лепестки спектра. Ширина главного лепестка спектра определяется видом импульса и зависит от его длительности. Амплитудный спектр прямоугольного импульса обращается в нуль на частотах $\omega_m = 2\pi\cdot m/\tau$. Следовательно, чем меньше длительность импульса, тем шире главный лепесток спектра. В области главного лепестка число спектральных гармоник определяется скважностью импульса $q = T/\tau$. Разные сигналы различаются, прежде всего, шириной главного лепестка спектра и скоростью спадания боковых лепестков. Компоненты спектра в области боковых лепестков называют высшими гармониками.

При восстановлении периодических сигналов часто ограничиваются суммированием конечного количества слагаемых ряда Фурье. При ограничении ряда Фурье появляются пульсации в форме восстановленного сигнала. Этот эффект носит название эффекта Гиббса. В качестве примера на рис. 2.4.2 приведены диаграммы восстановления сигнала типа меандр при увеличении количества членов ряда.

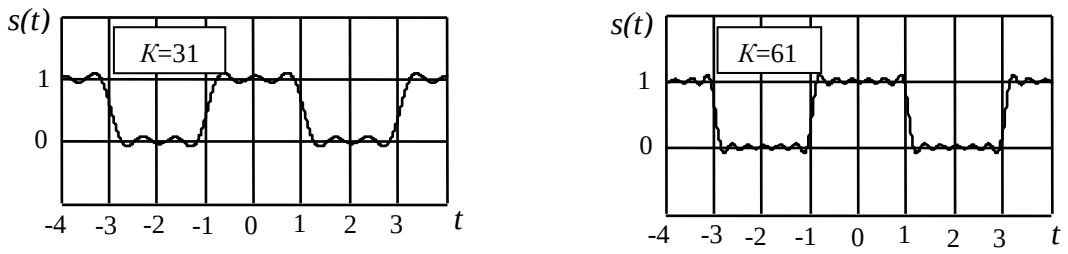


Рис. 2.4.2. Диаграммы восстановления меандра

Из приведенных графиков нетрудно заметить, как с увеличением числа суммируемых гармоник все точнее восстанавливается сигнал везде, кроме резких переходов. В окрестности резкого изменения сигнала суммирование ряда Фурье дает наклонный участок, причем крутизна наклона возрастает с ростом числа суммируемых гармоник. На примыкающих к перепадам участках возникают заметные пульсации.

Погрешность восстановления сигнала зависит и от формы его спектра. При заданном числе гармоник спектра погрешность тем больше, чем шире главный лепесток спектра. Чем выше скорость спадания боковых лепестков спектра, тем меньше погрешность восстановления сигнала.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Одиночный сигнал $s(t)$ конечной длительности τ, определенный на некотором временном интервале $t \in [-T_s/2 ... T_s/2]$, называется непериодическим или финитным сигналом. Рассмотрим особенности спектрального представления непериодических сигналов.

3.1. Спектральное представление непериодических сигналов

Спектры непериодических сигналов могут быть получены из рядов Фурье при увеличении периода T до бесконечности. Пусть $s(t)$ – одиночный импульсный сигнал конечной длительности τ. Дополним его мысленно такими же импульсами, периодически следующими через некоторый интервал времени $T = T_1$. В результате получим периодический сигнал $s_{пер}(t)$, который можно представить в виде ряда Фурье

$$s_{пер}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \exp(j\omega_k \cdot t) \qquad (3.1.1)$$

с коэффициентами, определяемыми выражением

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \exp(-j\omega_k \cdot t) dt, \qquad (3.1.2)$$

где $\omega_k = k \cdot \omega_1 = k \cdot 2\pi/T$ – дискретные значения частот.

Вид периодического сигнала и его спектр изображен на рис. 3.1.1, *а*. Увеличение периода повторения импульсов в два раза $T = T_2 = 2T_1$ не влияет на результаты вычисления функции (3.1.2), т.к. длительность импульса не изменилась. Однако спектральные составляющие дискретного спектра пойдут в два раза чаще и, за счет множителя $1/T$, в 2 раза уменьшаются значения спектра. Новые гармоники располагаются в интервалах между гармониками первого ряда. Пример изменения спектра при увеличении периода T в 2 раза приведен на рис. 3.1.1, *б*. Если устремить к бесконечности период повторения T, то периодическая последовательность импульсов $s_{пер}(t)$ станет одиночным импульсом $s(t)$, а в спектре частоты соседних гармоник окажутся сколь угодно близкими.

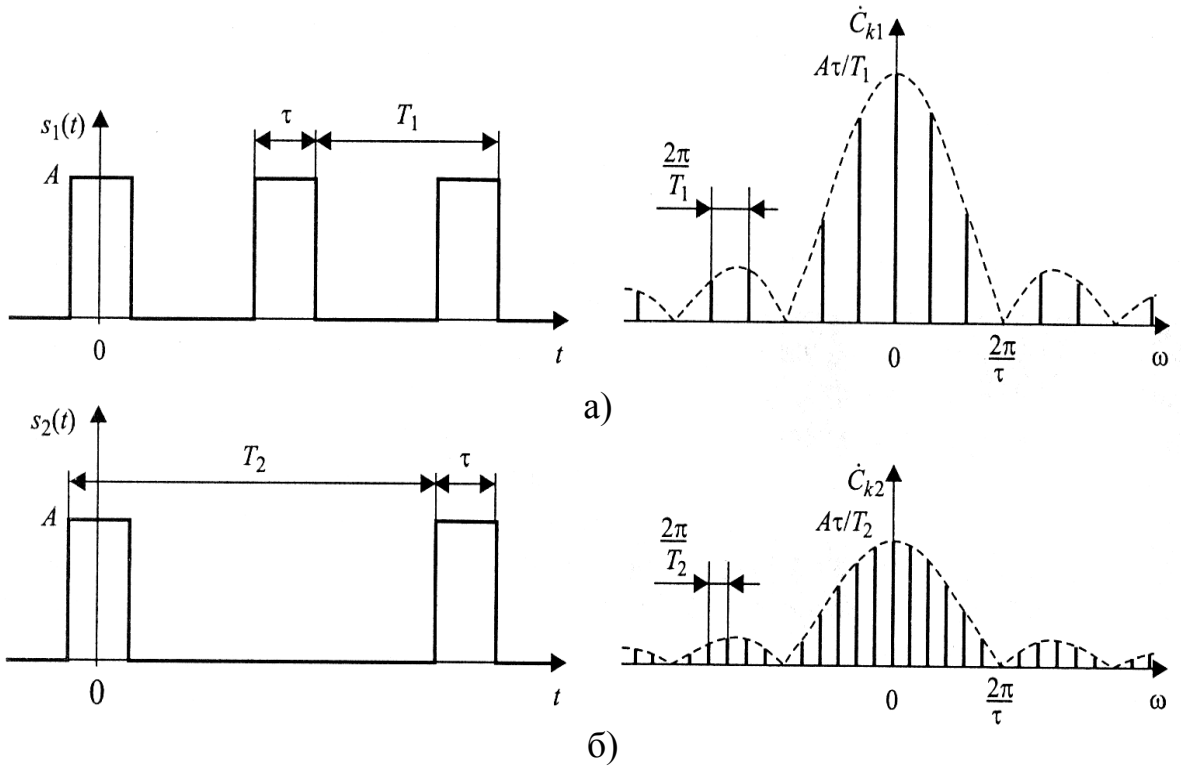


Рис. 3.1.1. Спектры периодического сигнала

Подставив соотношение (3.1.2) в формулу (3.1.1) и заменив $T = 2\pi/\omega_1$, получим

$$s_{пер}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \exp(-j\omega_k \cdot t) dt \right] \cdot \exp(j\omega_k \cdot t) \cdot \omega_1 . \qquad (3.1.3)$$

В пределе, при значении $T \to \infty$, частота следования импульсов $\omega_1 = 2\pi/T \to 0$ и превращается в $d\omega$, а дискретную переменную ω_k можно представить непрерывной переменной ω – текущей частотой. В результате этого суммирование амплитудных значений заменятся интегрированием, а выражение (3.1.3) запишется в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp(-j\omega \cdot t) dt \right] \exp(j\omega \cdot t) d\omega . \qquad (3.1.4)$$

Интеграл в скобках есть комплексная функция частоты

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp(-j\omega \cdot t) dt . \qquad (3.1.5)$$

Поскольку интеграл (3.1.5) отражает непрерывную последовательность спектральных составляющих с бесконечно малыми амплитудами, то функцию $S(\omega)$ называют спектральной плотностью сигнала или просто спектром непериодического сигнала (последнее название не совсем корректно). Используя (3.1.5) в выражении (3.1.4), получаем интегральное преобразование:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega, \qquad (3.1.6)$$

Полученные соотношения носят фундаментальный характер в теории сигналов. Формулу (3.1.5) называют прямым интегральным преобразованием Фурье, а формулу (3.1.6) – обратным интегральным преобразованием Фурье. В общем случае спектральная плотность сигнала является комплексной функцией частоты и может быть представлена выражением:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)dt - j\cdot\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)dt = A(\omega)-j\cdot B(\omega). \qquad (3.1.7)$$

Вещественные четные сигналы имеют вещественную четную спектральную плотность, представленную только спектральной функцией $A(\omega)$, а вещественные нечетные сигналы имеют нечетную и только мнимую спектральную плотность, представленную спектральной функцией $B(\omega)$.

Пример спектральной плотности прямоугольного импульса, заданной в виде вещественной $A(\omega)$ и мнимой $B(\omega)$ части, приведен на рис. 3.1.2, *а* и *б* соответственно.

Спектральная плотность $S(\omega)$ может быть описана в виде модуля и аргумента спектральной функции:

$$S(\omega)=|S(\omega)|\cdot\exp\left[j\varphi(\omega)\right], \qquad (3.1.8)$$

где амплитудный и фазовый спектр задается выражениями:

$$|S(\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}, \qquad (3.1.9)$$

$$\varphi(\omega)=arctg\left(-B(\omega)/A(\omega)\right). \qquad (3.1.10)$$

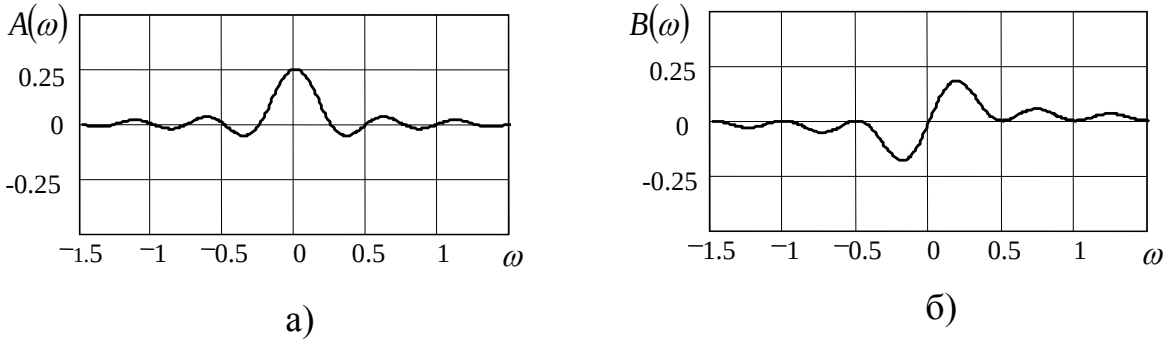


Рис. 3.1.2. Спектральная плотность прямоугольного импульса:
а) вещественная часть б) мнимая часть

Пример графического изображения спектральной плотности прямоугольного импульса в виде модуля и аргумента спектральной функции приведен на рис. 3.1.3.

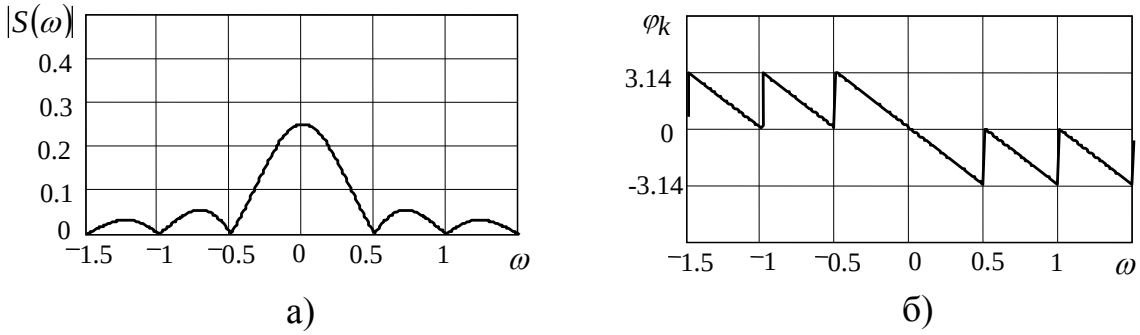


Рис. 3.1.3. Модуль и аргумент спектральной плотности прямоугольного импульса

<u>Физический смысл понятия спектральной плотности.</u> Рассмотрим малый интервал частот $\pm\Delta\omega$, образующий окрестность выбранного значения частоты $\Delta\omega$. В пределах этого интервала будут содержаться спектральные составляющие, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому можно найти комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала:

$$A_{\omega_0} = S(\omega_0)\cdot\Delta\omega. \qquad (3.1.11)$$

Как следует из выражения (3.1.11), спектральная плотность есть коэффициент пропорциональности между шириной малого интервала частот $\Delta\omega$ и отвечающей ему комплексной амплитудой A_{ω_0} эквивалентного гармонического сигнала с частотой ω_0. Следовательно, спектральная плотность $S(\omega)$ характеризует интенсивность сплошного распределения амплитуд гармоник неперио-

дического сигнала вдоль оси частот. Дискретный спектр периодического сигнала и спектральная плотность непериодического сигнала имеют разные размерности. Размерность амплитудного спектра периодического сигнала совпадает с размерностью самого сигнала [В], а размерность спектральной плотности определяется отношением размерности сигнала к размерности частоты [В/Гц].

Равенство Парсеваля. Зная спектральную плотность сигнала, можно определить и его энергию:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \qquad (3.1.12)$$

Выражение (3.1.12) называют ***равенством Парсеваля*** – значения энергии сигнала, вычисленные во временной и частотной области, равны между собой. Можно определить и энергию сигнала в ограниченном диапазоне частот:

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} |S(\omega)|^2 d\omega. \qquad (3.1.13)$$

Таким образом, спектральная плотность характеризует распределение энергии сигнала по частоте. Практическая ширина спектра определяется как интервал частот, в пределах которого сосредоточена большая (например 90%) часть энергии.

3.2. Основные свойства преобразования Фурье

1. Линейность. Спектр суммы сигналов равен сумме спектров этих сигналов:

$$\sum_k a_k s_k(t) \Leftrightarrow \sum_k a_k S_k(\omega). \qquad (3.2.1)$$

2. Масштабирование сигнала во времени. Если $s(t) \Leftrightarrow S(\omega)$, то при изменении длительности сигнала получаем:

$$s(a \cdot t) \Leftrightarrow 1/|a| \cdot S(\omega/a). \qquad (3.2.2)$$

3. Теорема запаздывания. Запаздывание сигнала на время τ_0 приводит к изменению фазочастотной функции спектра на величину $\omega \cdot \tau_0$ без изменения модуля спектра:

$$s(t-\tau_0) \Leftrightarrow S(\omega) \cdot \exp(-j\omega\tau_0). \qquad (3.2.3)$$

4. Свойства четности. Определяются подобием прямого и обратного преобразований Фурье:

Таблица 3.1.1

Состав спектра сигнала в зависимости от свойства четности

Сигнал *s(t)*	Спектр *S(ω)*
Четный	Вещественный, четный
Нечетный	Мнимый, нечетный
Произвольный	Действительная часть – четная. Мнимая часть – нечетная

5. Дифференцирование сигнала в частотной области.

$$s(t) = \frac{d\left[y(t)\right]}{dt} = d\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\exp(j\omega t)d\omega\right] \Big/ dt = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\ \left[d\left(\exp(j\omega t)\right)/dt\right]d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \cdot Y(\omega)\exp(j\omega t)d\omega. \qquad (3.2.4)$$

Таким образом, дифференцирование сигнала отображается в спектральной области простым умножением спектра сигнала на оператор дифференцирования сигнала в частотной области $(j\omega)$:

$$S(\omega) = j\omega \cdot Y(\omega). \qquad (3.2.5)$$

Умножение на $(j\omega)$ приводит к обогащению спектра производной сигнала высокочастотными составляющими и ослаблению составляющих с низкой частотой.

6. Интегрирование сигнала в частотной области. Если имеет место выражение (3.2.4), то должна выполняться и обратная операция вида:

$$s(t) = \int y(t)dt \Leftrightarrow S(\omega) = Y(\omega)/(j\omega). \qquad (3.2.6)$$

Множитель $(1/j\omega)$ называется оператором интегрирования в частотной области. При интегрировании исходного сигнала в амплитудном спектре высокие частоты ослабляются и усиливаются низкие.

7. Спектр произведения сигналов. Вычислим спектральную плотность произведения двух сигналов $s(t)=x(t)\cdot y(t)$:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot y(t)\exp(-j\omega t)dt. \qquad (3.2.7)$$

Выразим сигнал $y(t)$ через его спектральную плотность $Y(\varpi)$. В результате получим:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\varpi)\exp(j\varpi t)d\varpi\right]\exp(-j\omega t)dt. \qquad (3.2.8)$$

Изменив в (3.2.8) порядок интегрирования, будем иметь:

$$\begin{aligned} S(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\varpi)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j(\omega-\varpi)t)dt\right]d\varpi= \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\varpi)\cdot X(\omega-\varpi)d\varpi \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

Интеграл, стоящий в правой части, называют сверткой функций $Y(\omega)$ и $X(\omega)$. Будем в дальнейшем символически обозначать операцию свертки выражением:

$$S(\omega)\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi}Y(\omega)*X(\omega). \qquad (3.2.10)$$

8. Спектр свертки сигналов. Если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения

$$S(\omega)=X(\omega)\cdot Y(\omega), \qquad (3.2.11)$$

то сигнал соответствующий $S(\omega)$ является сверткой исходных сигналов:

$$S(\omega) \Leftrightarrow s(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\xi) \cdot y(\xi) d\xi . \qquad (3.2.12)$$

Таким образом, свертка временных функций отображается в частотном представлении произведением Фурье-образов этих функций.

3.3. Спектральные плотности основных сигналов

<u>Прямоугольный импульс.</u> Временная диаграмма прямоугольного импульса с амплитудой A и длительностью τ, центрированного относительно начала отсчета времени, приведена на рис. 3.3.1.

В этом случае математическое описание сигнала имеет вид:

$$s(t) = A, \ |t| \le \tau/2 . \qquad (3.3.1)$$

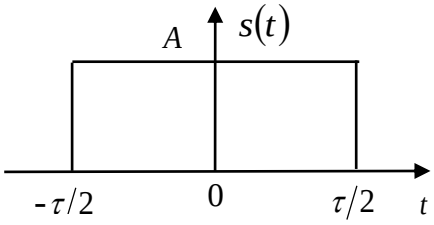


Рис. 3.3.1. Прямоугольный импульс

По выражению (3.1.4) вычисляем спектральную плотность. После несложных преобразований получаем аналитическое описание спектральной плотности:

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot \exp(-j\omega t) dt = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} . \qquad (3.3.2)$$

Амплитудный и фазовый спектр прямоугольного импульса приведен на рис. 3.3.2, *а* и *б* соответственно.

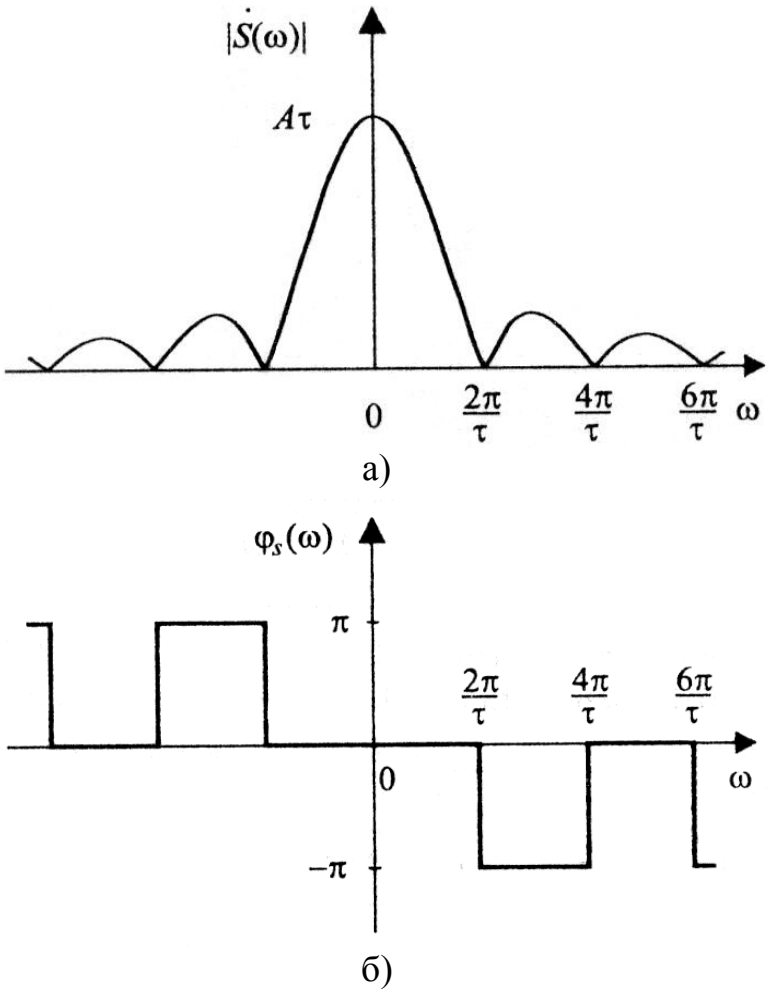


Рис. 3.3.2. Спектр прямоугольного импульса:
а) амплитудный; б) фазовый

Спектральная функция является вещественной, поэтому фазовый спектр принимает лишь значения 0, $\pm\pi$ в зависимости от знака функции $\sin(x)/x$. Амплитудный спектр имеет лепестковый характер. Значение спектральной функции на нулевой частоте равно площади импульса $A\cdot\tau$, а ширина лепестков равна $2\pi/\tau$, то есть обратно пропорциональна длительности импульса. Уровень боковых лепестков спектра прямоугольного импульса убывает пропорционально значению $1/\omega$.

<u>Смещенный прямоугольный импульс.</u> Рассмотрим теперь прямоугольный импульс, задержанный на время $\tau_0 = \tau/2$, как это изображено на рис. 3.3.3:

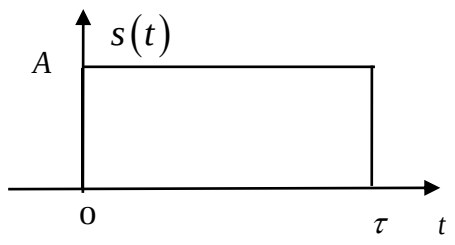


Рис. 3.3.3. Смещенный прямоугольный импульс

Преобразование Фурье сдвинутого во времени импульса будет определяться выражением:

$$S(\omega)=\int_0^{\tau} A\cdot\exp(-j\omega t)\,dt=\frac{2A}{j\omega}\left(1-\exp(-j\omega\tau)\right)= \\ =A\cdot\tau\cdot\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\exp\left(-j\frac{\omega\tau}{2}\right) \qquad (3.3.3)$$

Графики амплитудного и фазового спектров приобретают вид, показанный на рис. 3.3.4, *а* и *б* соответственно.

Из формулы (3.3.3) и приведенных графиков видно, что после сдвига импульса во времени его амплитудный спектр не изменился, а фазовый приобрел сдвиг линейно зависящей от частоты.

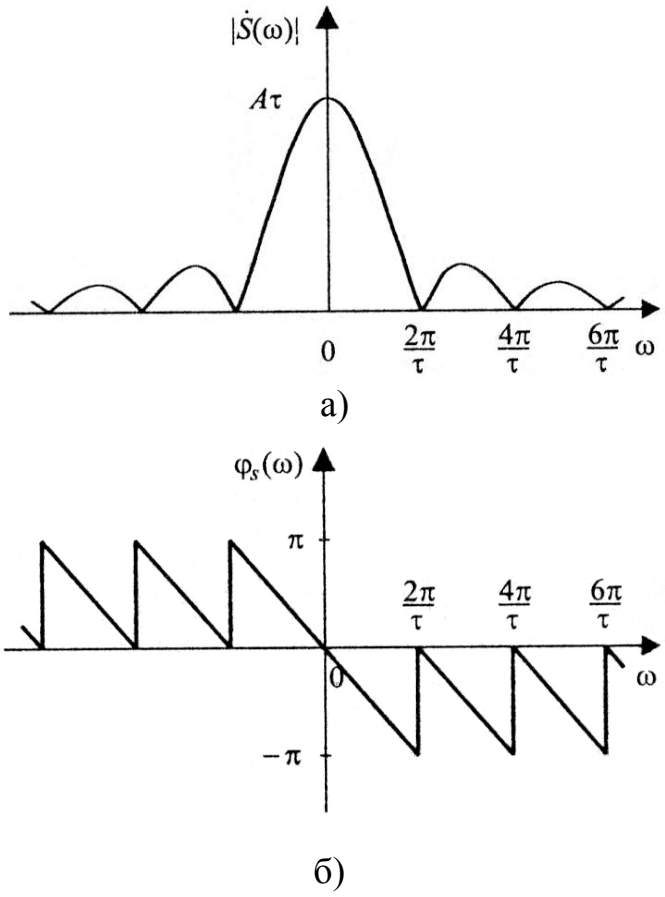


Рис. 3.3.4. Спектр смещенного прямоугольного импульса:
а) амплитудный; б) фазовый

<u>Симметричный треугольный импульс.</u> Описание сигнала задается выражением:

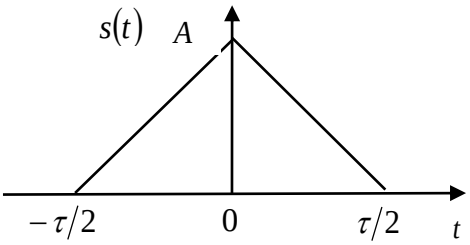
$$s(t) = A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\tau/2}\right), \ |t| \le \tau/2 . \qquad (3.3.4)$$

В соответствии с общим выражением преобразования Фурье рассчитываем спектральную плотность:

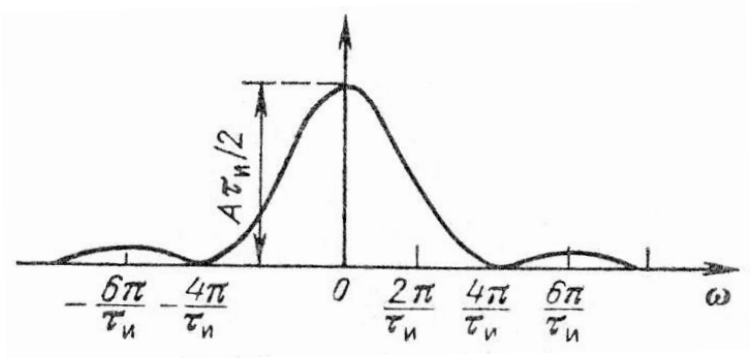
$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\tau/2}\right) \exp(-j\omega t)\, dt = \frac{A \cdot \tau}{2} \left(\frac{\sin(\omega \cdot \tau/4)}{(\omega \cdot \tau/4)}\right)^2 . \qquad (3.3.5)$$

В этом случае спектральная плотность оказывается не только вещественной (это следует из четности сигнала), но и неотрицательной. Поэтому фазовый

спектр в данном случае чисто нулевой. Диаграмма симметричного треугольного импульса приведена на рис. 3.3.5, *а*, а график амплитудного спектра изображен на рис. 3.3.5, *б*.



а)



б)

Рис. 3.3.5.
а) диаграмма симметричного треугольного импульса;
б) график амплитудного спектра симметричного треугольного импульса

Из графика видно, что спектр также имеет лепестковую структуру. Величина главного пика спектральной плотности определяется площадью импульса и равна $S(0) = A \cdot \tau/2$, а ширина главного лепестка составляет $4\pi/\tau$. Отметим, что уровень боковых лепестков спектра треугольного импульса убывает пропорционально значению $1/\omega^2$, а не $1/\omega$, как в случае прямоугольного импульса.

<u>Гауссов импульс.</u> Гауссов импульс имеет бесконечную протяженность во времени и описывается выражением вида:

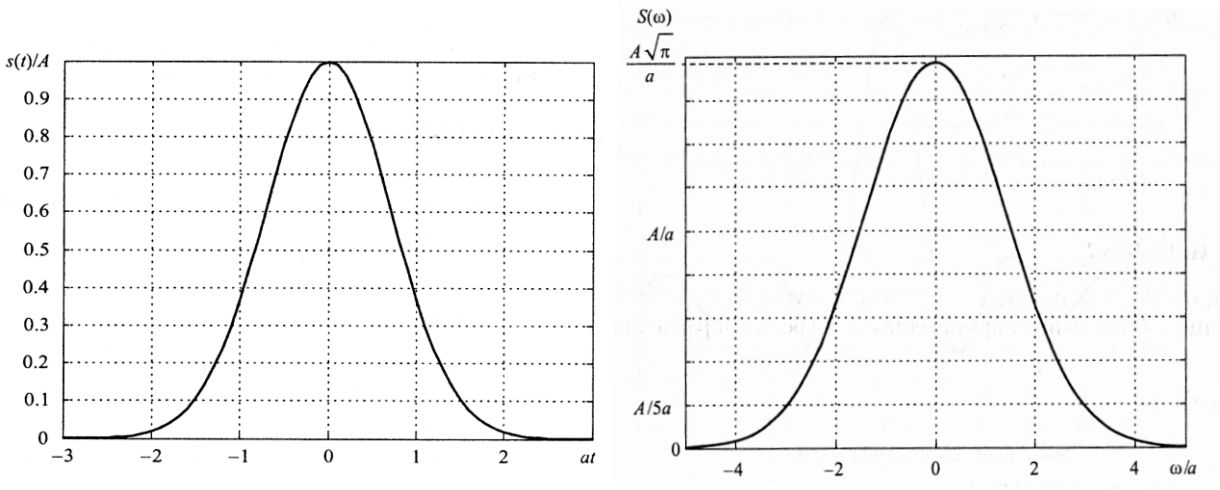
$$s(t) = A \cdot \exp\left(-\alpha \cdot t^2\right). \qquad (3.3.6)$$

Длительность гауссова импульса равна $\tau = 3.035/\sqrt{\alpha}$ по уровню 0.1 от его амплитуды.

Вычисление спектральной плотности гауссова импульса представлено выражением:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A\cdot\exp\left(-\alpha\cdot t^2\right)\exp(-j\omega t)\,dt=\frac{A\sqrt{\pi}}{\alpha}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right). \qquad (3.3.7)$$

Временная диаграмма анализируемого сигнала приведена на рис. 3.3.6, *а*. Поскольку сигнал является четной функцией, то его вещественная. График спектральной плотности приведен на рис 3.3.6, *б*.



а) б)

Рис. 3.3.6.
а) гауссов импульс;
б) спектральная плотность гауссова импульса

Важным свойством гауссова импульса является то, что его спектральная плотность также описывается гауссовой функцией. Спектральная плотность имеет бесконечную протяженность по частоте.

<u>Экспоненциальный импульс.</u> Экспоненциальный импульс также характеризуется бесконечной протяженностью во времени и описывается выражением:

$$s(t)=\begin{cases} A\cdot\exp(-\alpha\cdot t), & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}. \qquad (3.3.8)$$

Условие $\alpha>0$ обеспечивает достаточно быстрое уменьшение мгновенного значения с ростом времени. Длительность такого импульса равна $\tau=2.3026/\alpha$. Вид анализируемого импульса изображен на рис. 3.3.7.

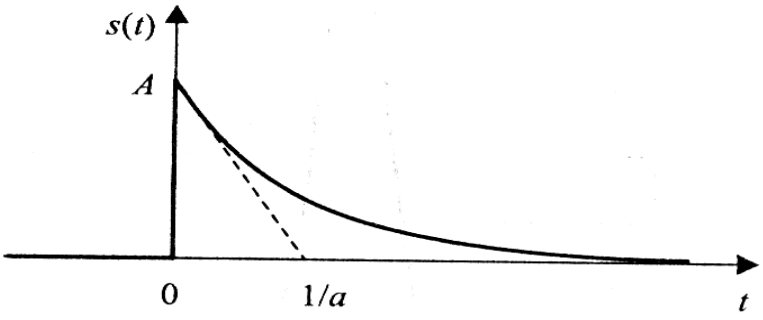


Рис. 3.3.7. Экспоненциальный импульс

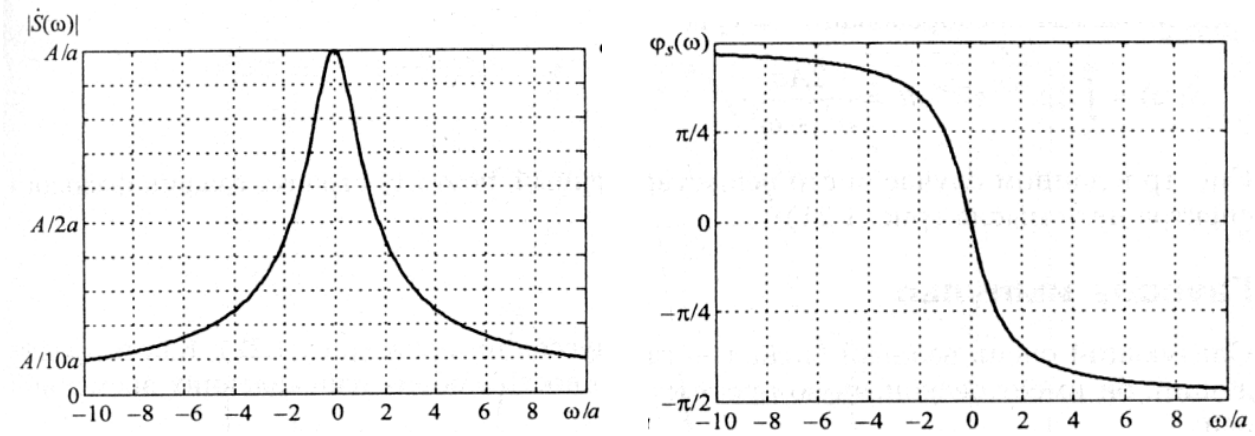
Спектральная плотность экспоненциального импульса является комплексной функцией:

$$S(\omega)=\int_0^{\infty} A\cdot\exp(-\alpha\cdot t)\exp(-j\omega t)dt=\frac{A}{\alpha+j\omega}. \qquad (3.3.9)$$

Модуль и аргумент спектральной плотности описываются выражениями:

$$|S(\omega)|=A\Big/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}\ ; \qquad \varphi(\omega)=-arctg(\omega/\alpha). \qquad (3.3.10)$$

Графики амплитудного и фазового спектров изображены на рис. 3.3.8, *а* и *б* соответственно.



а) б)

Рис. 3.3.8. Спектр экспоненциального импульса:
а) амплитудный; б) фазовый

<u>Интегральный синус – sinc(x).</u> Временной сигнал интегрального синуса определяется выражением:

$$s(t) = A \cdot \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T}, \qquad (3.3.11)$$

где параметр T обозначает полупериод функции $\sin(x)$.

Рассчитываем спектральную плотность анализируемого сигнала:

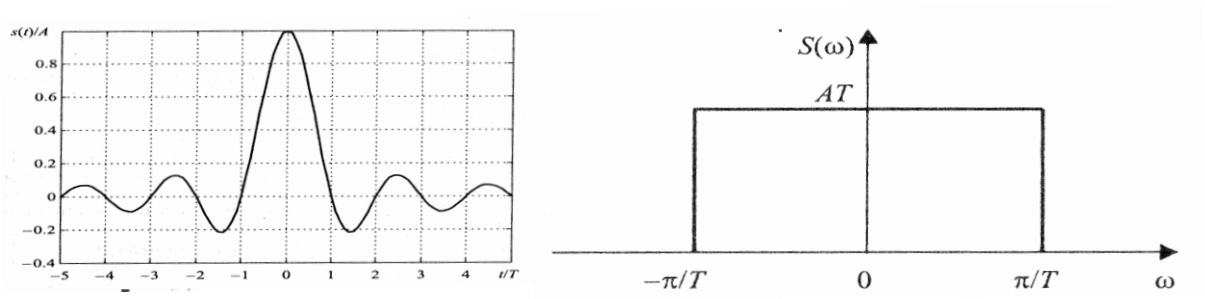
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T} \exp(-j\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega + \pi/T)t}{t} dt + \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega - \pi/T)t}{t} dt. \qquad (3.3.12)$$

Значения каждого из двух интегралов равно $\pm\pi$ в зависимости от знака множителя $(\omega \pm \pi/t)$. Поэтому результат суммирования интегралов зависит от частоты следующим образом:

$$S(\omega) = \begin{cases} A \cdot T, & |\omega| \le \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases}. \qquad (3.3.13)$$

Временная диаграмма сигнала приведена на рис. 3.3.9, *а*, а вид спектральной плотности приведен на рис. 3.3.9, *б*.



а) б)

Рис. 3.3.9.
а) диаграмма интегрального синуса;
б) график спектральной плотности интегрального синуса

В начале этого раздела мы установили, что прямоугольному импульсу соответствует спектральная функция вида $\sin(\omega)/\omega$. В то же время сигнал вида $\sin(t)/t$ имеет спектральную функцию прямоугольной формы. Это демонстрирует дуальность (симметрию) преобразования Фурье.

<u>Пачка видеоимпульсов.</u> Временная диаграмма пачки одинаковых и равностоящих видеоимпульсов изображена на рис. 3.3.10.

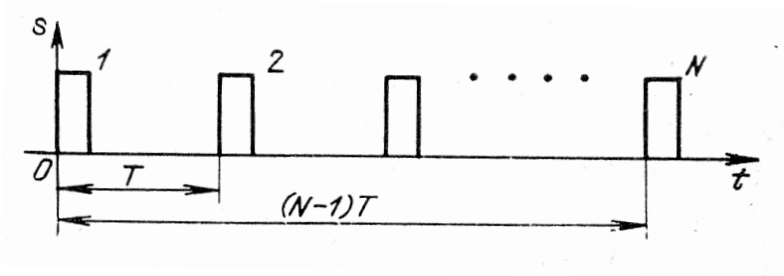


Рис. 3.3.10. Пачка видеоимпульсов

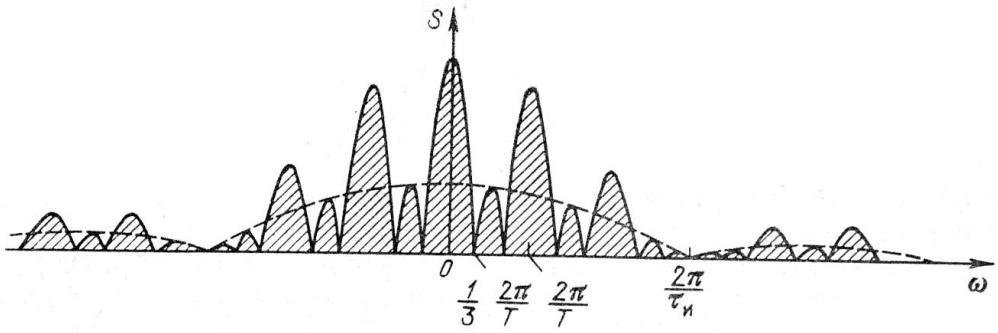
Обозначим через $S_1(\omega)$ спектральную плотность первого импульса в пачке. Тогда для n-го импульса, задержанного относительно первого на время $n \cdot T$, спектральную плотность можно представить выражением:

$$S_n(\omega) = S_1(\omega) \cdot \exp(-j\omega \cdot n \cdot T). \qquad (3.3.14)$$

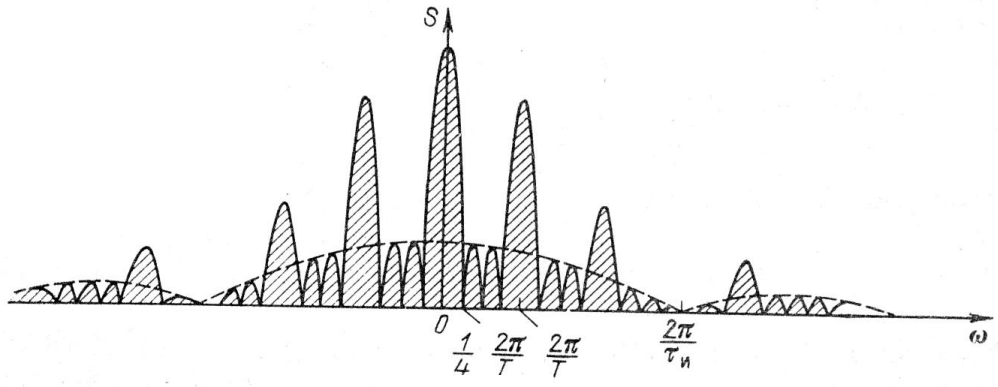
В соответствии с принципом линейного суммирования спектров спектральная плотность пачки импульсов будет определяться выражением:

$$S\ (\omega) = S_1(\omega) \cdot \begin{bmatrix} 1 + \exp(-j\omega \cdot T) + ... + \exp(-jn \cdot \omega \cdot T) + \\ +...\exp(-j(N-1) \cdot \omega \cdot T) \end{bmatrix}. \qquad (3.3.15)$$

Таким образом, спектральная плотность определяется как геометрическая сумма спектральных плотностей отдельных импульсов. В качестве иллюстрации на рис. 3.3.11, *а* изображен модуль спектральной плотности пачки из 3-х прямоугольных импульсов, а на рис. 3.3.11, *б* – из 4-х импульсов при интервале между соседними импульсами $T = 3 \cdot \tau_и$. Штриховыми линиями показана спектральная плотность одиночного импульса, ширина главного пика которой определяется длительностью импульса.



а)



б)

Рис. 3.3.11. Модуль спектральной плотности пачки:
а) 3-х прямоугольных импульсов; б) 4-х прямоугольных импульсов

Отметим характерные особенности спектральной плотности пачки импульсов. На частотах, отвечающих условию $\omega = k \cdot 2\pi/T$, каждое из слагаемых в квадратных скобках равно единице и, следовательно, справедливо соотношение:

$$S\left[k \cdot 2\pi/T\right] = N \cdot S_1\left[k \cdot 2\pi/T\right]. \qquad (3.3.16)$$

Таким образом, при частотах $\omega = k \cdot 2\pi/T$ модуль спектральной плотности в N раз больше модуля спектральной плотности одиночного импульса. Выбросы в спектральной плотности объясняются тем, что спектральные составляющие различных импульсов с указанными выше частотами складываются с фазовыми сдвигами кратными 2π. Расстояние между выбросами в спектральной плотности $\Delta\omega = 2\pi/T$ определяются интервалом следования импульсов. Количество пиков в спектральной плотности равно скважности следования импульсов. На частотах $\omega = 2\pi/\left(N \cdot T\right)$ спектральная плотность пачки импульсов обращается в ноль. При некоторых других частотах, для которых сумма векторов $\exp\left(-jn \cdot \omega \cdot T\right)$ равна нулю, суммарная спектральная плотность также обращается в ноль. Ширина выбросов в спектральной плотности $\Delta\omega_B = 2\pi/\left(\left(N-1\right) \cdot T\right)$ определяется длительностью пачки. С увеличением чис-

ла импульсов в пачке спектральная плотность все более расщепляется и в пределе при значении $N \to \infty$ принимает линейчатую структуру спектра периодического сигнала.

3.4. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

В математике доказано, что преобразование Фурье существует, если функция $s(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Однако в ряде случаев можно найти спектральные плотности сигналов, этим условиям не удовлетворяющим.

Дельта-импульс. Используя фильтрующее свойство дельта-импульса, можно показать:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt = \exp(-j\omega \cdot 0) = 1. \qquad (3.4.1)$$

Спектр дельта-импульса представляет собой константу, то есть является равномерным в бесконечной полосе частот. Из полученного результата следует, что дельта-импульс можно записать в виде обратного преобразования Фурье:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega \cdot t)\, d\omega. \qquad (3.4.2)$$

Постоянный во времени сигнал. Поскольку спектром дельта-импульса является константа, то благодаря дуальности преобразования Фурье можно сказать, что спектром постоянного во времени сигнала $s(t) = A$ будет дельта-функция частоты:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \exp(-j\omega t)\, dt = 2\pi \cdot A \cdot \delta(\omega). \qquad (3.4.3)$$

Преобразования Фурье имеет спектральную компоненту только на нулевой частоте.

Комплексная экспонента. Сигнал этого вида не является вещественным и описывается выражением:

$$s(t) = A \cdot \exp(j\omega_0 t). \qquad (3.4.4)$$

В силу свойства (3.4.2) спектром комплексной экспоненты является дельта-функция:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A\cdot\exp(j\omega_0 t)\cdot\exp(-j\omega t)dt=2A\cdot\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0). \qquad (3.4.5)$$

Поскольку сигнал не является вещественным, его спектр теряет свойство симметрии.

<u>Гармонический сигнал.</u> Рассмотрим спектр гармонического сигнала:

$$s(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi). \qquad (3.4.6)$$

Для расчета спектральной функции представим косинус в виде полусуммы комплексных экспонент и воспользуемся свойством (3.4.5). В результате приходим к следующему выражению:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)\cdot\exp(-j\omega t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} A\cdot\frac{\exp(j\omega_0 t+j\varphi)+\exp(-j\omega_0 t-j\varphi)}{2}\exp(-j\omega t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{2}\cdot\exp(j\varphi)\cdot\exp\left[-j(\omega-\omega_0)t\right]dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{2}\cdot\exp(-j\varphi)\cdot\exp\left[-j(\omega+\omega_0)t\right]dt=$$

$$=\pi\cdot A\exp(j\varphi)\cdot\delta(\omega-\omega_0)+\pi\cdot A\exp(-j\varphi)\cdot\delta(\omega+\omega_0) \qquad (3.4.7)$$

Результат представляет собой пару дельта-функций, расположенных на частотах $\pm\omega_0$. Множители при них отражают амплитуду и начальную фазу гармонического сигнала.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Корреляционный анализ является методом анализа сигналов и дает возможность установить в сигналах наличие определенной связи. В функциональном пространстве сигналов степень связи может выражаться в нормированных единицах коэффициента корреляции, которые могут принимать значения от 1 (полное совпадение сигналов) до –1 (полная противоположность).

4.1. Автокорреляционная функция сигналов

Для количественного определения степени отличия сигнала и его смещенной во времени копии принято вводить автокорреляционную функцию (АКФ). Автокорреляционная функция сигнала определяется скалярным произведением сигнала $s(t)$ и сдвинутой его копии $s(t-\tau)$ на время τ:

$$R_s(\tau)=\left(s,s_\tau^*\right)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot s^*(t-\tau)dt\,. \qquad (4.1.1)$$

Установим основные свойства автокорреляционной функции сигнала.

При замене переменной $t=t-\tau$ в формуле (4.1.1) получаем:

$$R_s(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot s^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)\cdot s^*(t)dt=R_s(-\tau)\,. \qquad (4.1.2)$$

Следовательно, АКФ относится к четным функциям.

В качестве примера на рис. 4.1.1, *а* и *б* на верхних диаграммах изображены соответственно два сигнала: $u(t)$ – прямоугольный импульс и $v(t)$ – односторонний треугольный импульс. На нижних диаграммах приведены формы их АКФ.

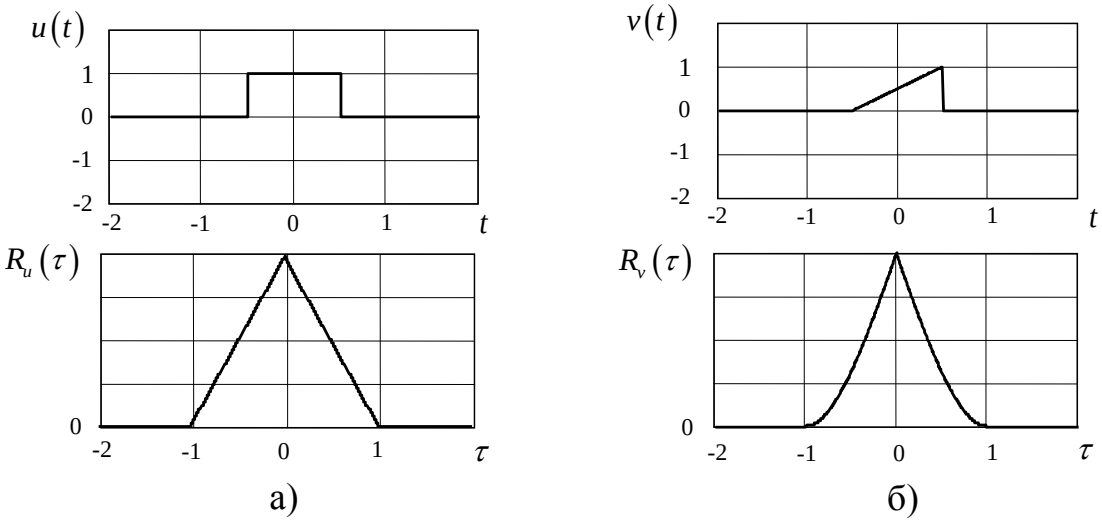


Рис. 4.1.1. Диаграмма и АКФ импульса:
а) прямоугольного; б) одностороннего треугольного

Как следует из выражения (4.1.1), при задержке $\tau = 0$ значение АКФ непосредственно равно энергии сигнала:

$$R_S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt = E_S . \qquad (4.1.3)$$

Следовательно, АКФ сигнала имеет физическую размерность энергии.

Модуль АКФ при любом значении временного сдвига не превосходит энергии сигнала:

$$|R_S(\tau)| \le R_S(0) = E_S . \qquad (4.1.4)$$

Приведенное соотношение называется ***неравенством Коши – Буняковского***.

Коэффициентом автокорреляции сигнала называют значения АКФ, нормированные к значению энергии сигнала:

$$\rho_S(\tau) = R_S(\tau)/E_S . \qquad (4.1.5)$$

Значение корреляционных коэффициентов может изменяться от 1 (полная корреляция) до –1 (полная обратная корреляция).

Интервал корреляции сигнала является числовым параметром оценки эффективной ширины центрального пика АКФ:

$$\tau_K = \frac{1}{R_s(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| R_s(\tau) \right| d\tau . \qquad (4.1.6)$$

4.2. Связь автокорреляционной функции с энергетическим спектром сигнала

Пусть $S(\omega)$ – спектральная плотность некоторого сигнал $s(t)$. Функция вида

$$W_s(\omega) = S(\omega) \cdot S^*(\omega) = \left| S(\omega) \right|^2 \qquad (4.2.1)$$

называется энергетическим спектром сигнала или спектральной плотностью мощности сигнала. Спектральная плотность мощности позволяет определить полную энергию сигнала по выражению:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) d\omega . \qquad (4.2.2)$$

Выражение (4.2.2) называют равенством Парсеваля.

Представление сигналов посредством их спектральных плотностей позволяет значительно упростить корреляционный анализ. Для этого представим сигнал $s(t)$ своей спектральной плотностью $S(\omega)$:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega \ . \qquad (4.2.3)$$

При задержке сигнала на время τ его спектральная плотность определяется выражением:

$$s(t-\tau) \Rightarrow S_\tau(\omega) = S(\omega) \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) . \qquad (4.2.4)$$

Используя соотношения (4.2.3) и (4.2.4) в формуле (4.1.1), получим выражение вида:

$$R_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t-\tau)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) \cdot \exp(-j\omega t) d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \right] d\omega. \qquad (4.2.5)$$

Как видно, внутренний интеграл представляет собой спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала. Следовательно, автокорреляционная функция связана с энергетическим спектром сигнала обратным преобразованием Фурье:

$$R_S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_S(\omega) \cdot \exp(j\omega \cdot \tau) d\omega. \qquad (4.2.6)$$

Зная АКФ сигнала, можно определить спектральную плотность мощности сигнала с помощью прямого преобразования Фурье:

$$W_S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_S(\tau) \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) d\tau. \qquad (4.2.7)$$

Приведенные выражения (4.2.6) и (4.2.7) известны как ***соотношения Винера – Хинчина***.

Следует отметить, что чем уже пик АКФ сигнала, тем шире его спектральная плотность, и наоборот, чем шире спектральная плотность сигнала, тем меньше интервал корреляции. Поскольку спектры мощности сигналов не имеют фазовой характеристики, то и АКФ сигналов также не несёт информации о фазовых характеристиках сигналов и, следовательно, восстановление сигналов по АКФ невозможно.

4.3. Взаимная корреляционная функция сигналов

Для оценки степени сходства двух сигналов при различном взаимном расположении друг относительно друга вводят взаимную корреляционную функцию (ВКФ). Обобщая формулу (4.1.1) функции корреляции на два различных сигнала $u(t)$ и $v(t)$, получаем выражение, определяющее ВКФ этих сигналов:

$$R_{u,v}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot v^{*}(t-\tau)dt. \qquad (4.3.1)$$

При замене переменной $t=t-\tau$ в формуле (4.3.1) получаем:

$$R_{u,v}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t+\tau)\cdot v^{*}(t)dt=R_{v,u}(-\tau). \qquad (4.3.2)$$

Отсюда следует, что в общем случае для ВКФ двух сигналов не выполняется условие четности, $R_{u,v}(\tau)\neq R_{u,v}(-\tau)$.

Неравенство Коши – Буняковского задается в виде соотношения:

$$\left|R_{u,v}(\tau)\right|\leq\sqrt{E_u\cdot E_v}\,. \qquad (4.3.3)$$

<u>Коэффициент взаимной корреляции сигналов.</u> Коэффициент взаимной корреляции сигналов нормируется к произведению значений дисперсий сигналов:

$$\rho_{uv}(\tau)=R_{uv}(\tau)/(\sigma_u\cdot\sigma_v)=R_{uv}(\tau)\Big/\left(\sqrt{E_u\cdot E_v}\right). \qquad (4.3.4)$$

Значение взаимных корреляционных коэффициентов может изменяться от 1 (полная корреляция) до –1 (полная обратная корреляция).

На рис. 4.3.1 приведены примеры ВКФ прямоугольного импульса $u(t)$ и одностороннего треугольного импульса $v(t)$. Сигналы имеют одинаковую длительность τ_u и центрированы относительно нулевого момента времени.

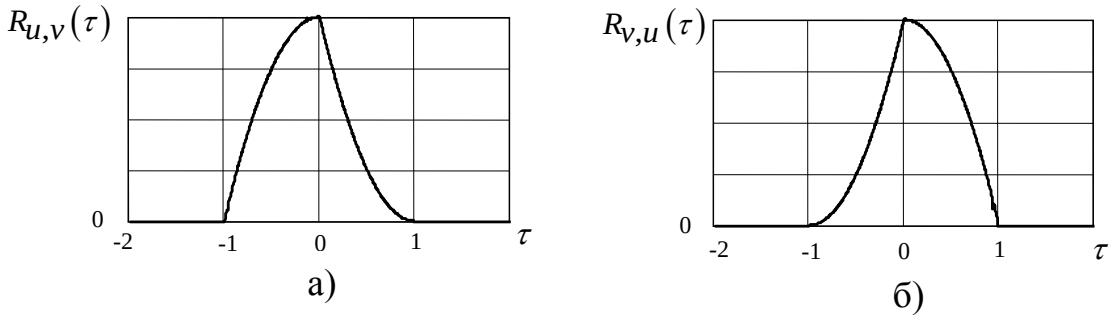


Рис. 4.3.1. ВКФ прямоугольного импульса
и одностороннего треугольного импульса

При задержке одностороннего треугольного импульса $v(t)$ относительно прямоугольного импульса $u(t)$ диаграмма их ВКФ приведена на рис. 4.3.1, *а*. Как видно, форма ВКФ этих сигналов асимметрична. Если поменять местами сигналы и рассматривать задержку сигнала $u(t)$ относительно сигнала $v(t)$, то форма такой ВКФ изображена на рис. 4.3.1, *б* и является зеркальной копией, повернутой относительно $\tau = 0$.

Если оба сигнала описываются четными или нечетными функциями, то ВКФ будет четной функцией задержки и иметь максимум при $\tau = 0$. Все ортогональные сигналы при $\tau = 0$ имеют нулевой уровень ВКФ. В общем случае форма ВКФ зависит от свойств сигналов, и максимум ВКФ может быть расположен в любом месте оси задержек.

4.4. Связь взаимной функции корреляции с взаимным энергетическим спектром

Рассмотрим спектральные плотности двух сигналов $u(t)$ и $v(t)$

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp(-j\omega t)\,dt, \qquad V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cdot \exp(-j\omega t)\,dt. \qquad (4.4.1)$$

Введем взаимные энергетические спектры двух сигналов, которые определяются выражениями (4.4.2)

$$W_{vu}(\omega) = U(\omega) \cdot V^*(\omega), \qquad W_{vu}(\omega) = V(\omega) \cdot U^*(\omega). \qquad (4.4.2)$$

Энергетические спектры являются функциями распределения энергии взаимодействия сигналов по частоте. Поэтому можно установить взаимосвязь между энергией взаимодействия сигналов и их спектральными плотностями:

$$E_{uv} = (u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot V^*(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}(U,V). \qquad (4.4.3)$$

В соответствии с полученным выражением можно записать и обратное соотношение:

$$(U,V) = 2\pi(u,v). \qquad (4.4.4)$$

Выражения (4.4.3) и (4.4.4) представляют собой обобщенные формулы Рэлея: скалярное произведение двух сигналов пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей, и наоборот.

Связь взаимной функции корреляции с взаимной спектральной плотностью может быть получена на основании тех же соображений, что и связь автокорреляционной функции со спектральной плотностью сигнала.

Непосредственно из формулы (4.2.6) заменой спектральных плотностей различных сигналов можно получить:

$$R_{u,v}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)\cdot V^{*}(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot\tau)dv=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_{uv}(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot\tau)d\omega \qquad (4.4.5)$$

Следовательно, взаимные корреляционные функции выражаются через обратное преобразование Фурье спектральной плотности взаимной мощности сигналов. При смене порядка сигналов меняется сопряженность спектральных плотностей в выражении (4.4.4).

Спектральная плотность взаимной мощности сигналов может быть получена прямым преобразованием Фурье их взаимной функции корреляции:

$$W_{u,v}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{u,v}(\tau)\cdot\exp(-j\omega\cdot\tau)d\tau\,. \qquad (4.4.6)$$

В общем случае взаимные энергетические спектры являются комплексными функциями и содержат определенную фазовую характеристику. Представим спектральные плотности сигналов (4.4.1) в показательной форме:

$$U(\omega)=|U(\omega)|\cdot\exp\left[j\varphi_U(\omega)\right],\quad V(\omega)=|V(\omega)|\cdot\exp\left[j\varphi_V(\omega)\right]. \qquad (4.4.7)$$

Тогда, подставляя соотношения (4.4.7) в выражения (4.4.2), получаем, что аргумент взаимного энергетического спектра определяется разностью аргументов спектральных плотностей сигналов:

$$W_{uv}(\omega)=|U(\omega)|\cdot|V(\omega)|\cdot\exp\left[j\left(\varphi_U(\omega)-\varphi_V(\omega)\right)\right]. \qquad (4.4.8)$$

Таким образом, взаимный энергетический спектр содержит информацию о фазе спектральных компонент на различных частотах. Поэтому при полном совмещении сигналов на временной оси центр функции взаимной корреляции располагается на значении нулевой задержки. При смещении одного из сигналов на временной оси вправо или влево фазовая характеристика вызывает и сдвиг ВКФ по оси задержек влево или вправо соответственно. Однако форма их ВКФ остается без изменения.

5. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Дискретными называются сигналы $s(t_n)$, заданные лишь на конечном множестве точек временной оси $t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2 \ldots N-1$, где Δt – интервал дискретизации. В дискретных точках $t_n = n \cdot \Delta t$ значения дискретного $s(t_n)$ и непрерывного сигнала $s_a(t_n)$ совпадают. Рассмотрим спектральную плотность дискретного сигнала и установим её взаимосвязь со спектральной плотностью непрерывного сигнала.

5.1. Преобразование Фурье при дискретизации сигналов

Для описания дискретного сигнала введем так называемую решетчатую функцию

$$g(t) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n \cdot \Delta t), \tag{5.1.1}$$

представляющую собой периодическую последовательность дельта-импульсов. Тогда при равномерной дискретизации непрерывного сигнала дискретный сигнал можно описать выражением:

$$s(t) = s_a(t) \cdot g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t). \tag{5.1.2}$$

Дискретный сигнал есть взвешенная сумма сдвинутых во времени дельта-импульсов. Вес каждого сдвинутого дельта-импульса определяется значением отсчета непрерывного сигнала $s_n = s_a(t_n), \quad t_n = n \cdot \Delta t.$

Прямое преобразование Фурье дискретных сигналов может быть получено непосредственно из интегрального преобразования при дискретизации времени. Учитывая математическое описание дискретного сигнала (5.1.2) и используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем:

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \int_0^{\mathrm{T}} s(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt = \int_0^{\mathrm{T}} \left[\sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) \right] \cdot \exp(-j\omega t)\, dt = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} s_n \int_0^{\mathrm{T}} \delta(t - n \cdot \Delta t) \exp(-j\omega t)\, dt = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp(-j\omega \cdot t_n) \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Из выражения (5.1.3) следует, что спектральная плотность дискретного сигнала представляет собой непрерывную периодическую функцию частоты с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_D = 2\pi F_D = 2\pi / \Delta t$.

Установим теперь взаимосвязь спектральной плотности дискретного и непрерывного сигнала. Для этого представим периодическую решетчатую функцию в виде комплексного ряда Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j \cdot m \cdot \omega_D). \tag{5.1.4}$$

Тогда на основании выражения (5.1.4) преобразование Фурье можно привести к виду:

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\mathrm{T}} s_a(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j \cdot m \cdot \omega_D) \cdot \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\mathrm{T}} s_a(t) \cdot \exp(-j(\omega - m \cdot \omega_D)t) dt = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_a(\omega - m \cdot \omega_D) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Таким образом, спектральная плотность дискретного сигнала представляет собой сумму бесконечного числа сдвинутых копий спектральных плотностей непрерывного сигнала. Копии спектральных плотностей располагаются на оси частот через промежутки, равные частоте дискретизации. Ширина спектральных копий зависит от длительности импульса. Пример дискретного сигнала изображен на рис. 5.1.1, а его спектральная плотность приведена на рис. 5.1.2. Центральную часть спектральной плотности $s(\omega)$ называют главным пиком, а границы его частотного диапазона $\omega_N = \omega_D / 2 = \pi / \Delta t$ называют частотой Найквиста.

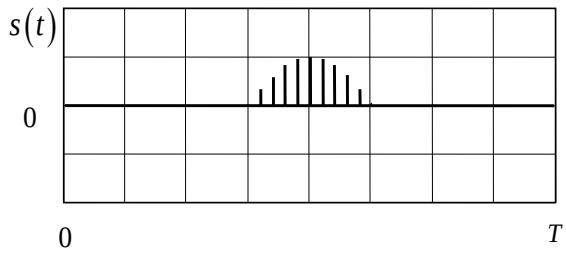


Рис. 5.1.1. Дискретный сигнал

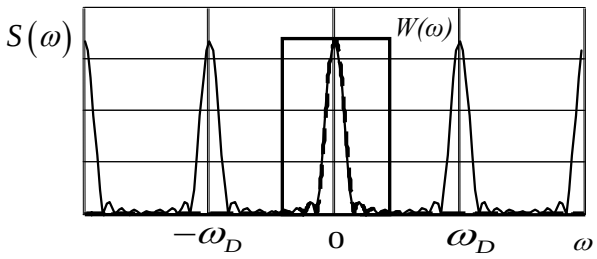


Рис. 5.1.2. Спектр дискретного сигнала

Если временные выборки $s_n = s_a(t_n), \quad t_n = n \cdot \Delta t.$ взяты через недостаточный интервал, то будет эффект наложения копий спектральных плотностей. Необходимое значение частоты дискретизации сигнала $F_D = 1/\Delta t$ определяется ***теоремой Котельникова:*** произвольный непрерывный сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен некоторой частотой $F_{\max}$, может быть полностью восстановлен по последовательности своих отсчетных значений, если интервал дискретизации удовлетворяет условию:

$$\Delta t \le 1(2F_{\max}). \tag{5.1.6}$$

Все реальные сигналы имеют конечную длительность, и, следовательно, бесконечно протяженный спектр. Однако в практических случаях всегда можно выделить интервал частот $[0, F_{\max}]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала.

Рассмотрим теперь процесс восстановления непрерывного сигнала в частотной области. Непрерывный сигнал с некоторой точностью можно восстановить по центральной части спектра дискретного сигнала. Для выделения центральной части необходимо спектр $s(\omega)$ умножить на прямоугольную частотную весовую функцию вида:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \omega_N \\ 0, |\omega| > \omega_N \end{cases}. \tag{5.1.7}$$

Вид спектральной плотности дискретного сигнала и частотной весовой функции наглядно представлен на рис. 5.1.2. Выделение центральной части определяет спектральную плотность аналогового сигнала в ограниченном диапазоне частот.

Выполнив обратное интегральное преобразование Фурье, получим с некоторой точностью непрерывный сигнал:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot W(\omega) \cdot \exp(j\omega \cdot t) d\omega. \tag{5.1.8}$$

При выделении центральной части спектра осуществляется отбрасывание спектральных компонент боковых лепестков, а также на центральную часть спектра накладываются хвосты от соседних спектральных составляющих. По-

грешность восстановления определяется как энергией отброшенной части спектра сигнала, так и энергией боковых лепестков копий спектра, входящих в зону Найквиста. Погрешность восстановления зависит и от ширины главного лепестка спектра и скорости спадания боковых лепестков спектральной плотности аналогового сигнала.

Рассмотрим теперь процесс восстановления непрерывного сигнала во временной области. Обратное преобразование Фурье от весовой частотной функции дает сигнал вида интегрального синуса:

$$W(\omega) \Leftrightarrow \sin c(\omega_N t) = \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N t}. \qquad (5.1.9)$$

Поскольку умножение спектральных плотностей двух сигналов (5.1.7) приводит к свертке этих сигналов во временной области, то получим:

$$S(\omega) \cdot W(\omega) \Leftrightarrow s_B(t)^* \sin c(\omega_N t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin\left[\omega_N \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right]}{\omega_N \cdot (t - n \cdot \Delta t)}. \qquad (5.1.10)$$

Таким образом, выходной сигнал представляет собой сумму сдвинутых весовых функций вида интегрального синуса, где значение веса определяется отсчетами дискретного сигнала. Эта формула носит название интерполяционного ряда Котельникова. Значение функции отсчетов интегрального синуса в каждой точке равно самому отсчету и нулю во всех остальных точках дискретного сигнала. Аналоговый сигнал в интервалах между отсчетами образуются суперпозицией значений функций отсчетов во всех точках. На рис. 5.1.3 приведен дискретный сигнал, а на рис. 5.1.4 представлен принцип восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам.

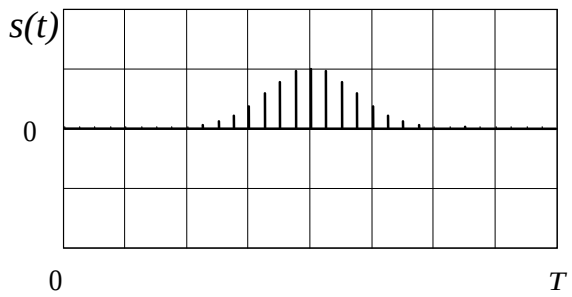


Рис. 5.1.3. Дискретный сигнал

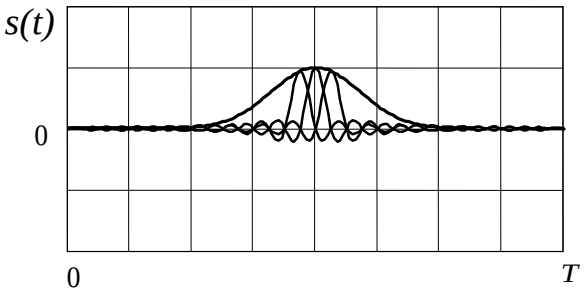


Рис. 5.1.4. Принцип восстановления непрерывного сигнала

Полученную формулу (5.1.10) можно рассматривать как разложение сигнала $s(t)$ по системе ортогональных функций вида

$$u_n(t) = \frac{\sin\left[\omega_N \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right]}{\omega_N \cdot (t - n \cdot \Delta t)}, \qquad (5.1.11)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $s(t_n)$ в дискретные моменты времени $t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2 \ldots N - 1$

5.2. Преобразование Фурье при дискретизации спектра

Пусть $s(\omega)$ – спектральная плотность некоторого сигнала $s(t)$, заданного на интервале времени $\lfloor 0, \mathrm{T} \rfloor$. Применив обратное интегральное преобразование Фурье, можно получить $s(t)$ сигнал. Однако сигнал можно восстановить и по дискретным отсчетам его спектральной плотности $S_k = S(\omega_k), \quad \omega_k = k \cdot 2\pi \cdot \Delta f$, где $\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f$ – шаг дискретизации по частоте.

Обратное преобразование Фурье может быть получено непосредственно из интегрального преобразования при дискретизации частоты:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(j\omega \cdot t) d\omega \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} S_k \cdot \exp(j\omega_k \cdot t) \cdot \qquad (5.2.1)$$

Следует отметить, что при дискретизации спектра с шагом $\Delta\omega$ восстановленный сигнал $s(t)$ становится периодическим с периодом $T_П = 2\pi / \Delta\omega$. Если частотные выборки взять через недостаточный интервал, то будет эффект наложения восстановленных сигналов во временной области. Таким образом, дискретизация сигнала по времени приводит к периодизации спектра, а дискретизация спектра по частоте – к периодизации сигнала. В качестве иллюстрации на рис. 5.2.1, *а* изображены дискретные значения спектральной плотности и восстановленный видеоимпульс без искажений формы, а на рис. 5.2.1, *б* приведены аналогичные графики, иллюстрирующие эффект наложения восстановленных сигналов.

Для точного восстановления сигнала шаг дискретизации по частоте должен удовлетворять условию ***теоремы Котельникова:*** если сигнал ограничен-

ной длительности T имеет спектральную плотность $S(\omega)$, то по частотным выборкам $S_k = S(k \cdot \Delta\omega)$, взятым через интервал частот

$$\Delta\omega \le 2\pi/T, \tag{5.2.2}$$

можно восстановить сигнал.

Далее рассмотрим процесс восстановления непрерывного спектра. По частотным выборкам $S_k = S(k \cdot \Delta\omega)$, взятым через интервал частот $\Delta\omega \le 2\pi/T$, можно восстановить непрерывный спектр сигнала. Восстановление спектра описывается рядом Котельникова:

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k \cdot \frac{\sin\left[\frac{T}{2} \cdot (\omega - k \cdot \Delta\omega)\right]}{\frac{T}{2} \cdot (\omega - k \cdot \Delta\omega)}. \tag{5.2.3}$$

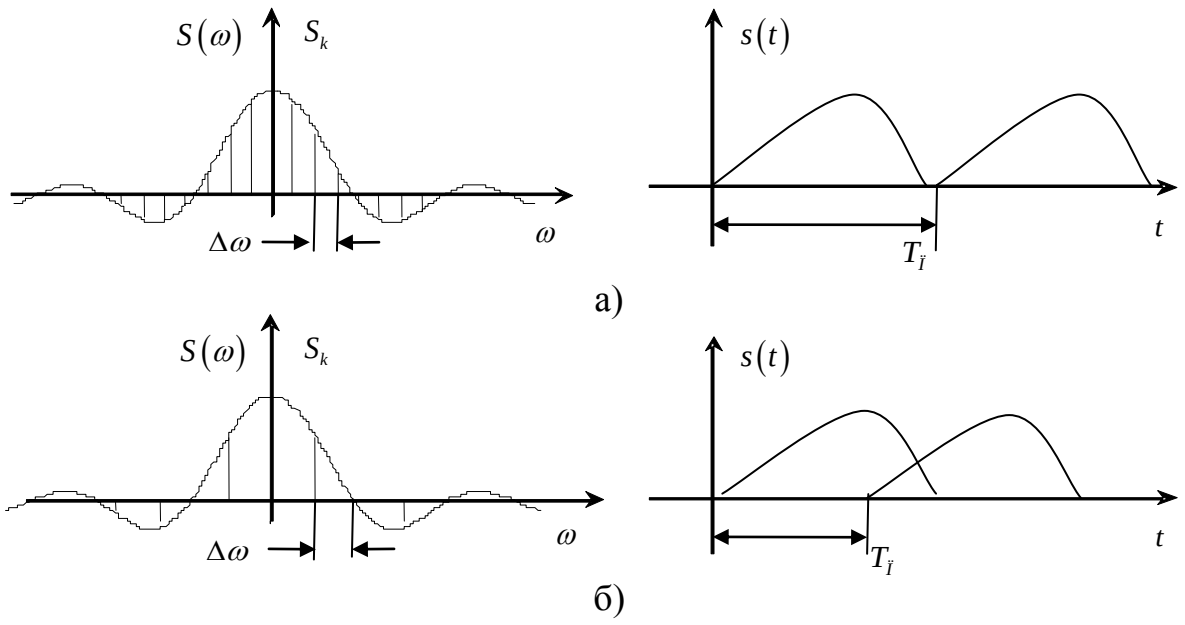


Рис. 5.2.1. Дискретные значения спектральной плотности
и восстановленный видеоимпульс:
а) без искажений формы; б) с наложением

Как следует из приведенного выражения (5.2.3), восстановленная непрерывная спектральная плотность образуется суммой взвешенных сдвинутых частотных функций вида интегрального синуса, где веса определяются отсчетами дискретного спектра. Значения восстановленной спектральной плотности на

дискретных частотах равно самому отсчету дискретного спектра. На других частотах значения восстановленной спектральной плотности образуются суперпозицией значений взвешенных частотных функций во всех точках.

5.3. Дискретное преобразование Фурье

При дискретизации сигнала с интервалом $\Delta t = 1/(2F_{\max})$ общее число выборок будет равно $N = \mathrm{T}/\Delta t = 2\mathrm{T} \cdot F_{\max}$. При дискретизации спектра с шагом $\Delta f = 1/\mathrm{T} = 1/(N \cdot \Delta t)$ общее число спектральных отсчетов будет равно $N = 2F_{\max}/\Delta f = 2\mathrm{T} \cdot F_{\max}$, т.е. совпадает с числом выборочных значений при дискретизации сигнала во временной области. Число выборочных значений, которыми полностью описывается сигнал, называют ***числом степеней свободы сигнала***. Число степеней свободы сигнала при дискретизации во временной области и в частотной области одно и то же. Это свидетельствует о равноценности временной и частотной форм представления дискретных сигналов.

Если исходный сигнал $s(t)$, заданный на интервале времени $\lfloor 0, \mathrm{T} \rfloor$, и его спектральная плотность $S(\omega)$ дискретизированы оптимально, то произведение дискретных временных и частотных отсчетов будут соответствовать соотношению $\omega_k \cdot t = \left[k \cdot 2\pi/(N \cdot \Delta t)\right] \cdot (n \cdot \Delta t) = 2\pi \cdot k \cdot n/N$. Используя это соотношения в выражениях (5.1.3) и (5.2.1), получаем дискретные преобразования Фурье (ДПФ):

$$S_k \equiv S(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \exp(-j2\pi \cdot k \cdot n/N), \tag{5.3.1}$$

$$S_n \equiv S(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \exp(j2\pi \cdot k \cdot n/N). \tag{5.3.2}$$

Прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) (5.3.1) позволяет по дискретным значениям сигнала вычислять дискретные значения частотных выборок в спектре сигнала. Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) (5.3.2) позволяет по частотным выборкам в спектре сигнала получить отсчеты дискретного сигнала.

Для ДПФ справедливы все свойства интегральных преобразований Фурье, однако при этом следует учитывать периодичность дискретных функций и спектров.

5.4. Функции корреляции дискретных сигналов

Пусть дискретный сигнал $s_n = s(t_n)$ задан на конечном множестве точек временной оси $t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2 \ldots N-1$, где Δt – интервал дискретизации, N – количество отсчетов дискретного сигнала. Вычисление функций корреляции, как правило, выполняется по дискретным задержкам $\tau_m = m \cdot \Delta t, \quad \mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Описание АКФ дискретного сигнала можно получить из интегрального выражения при дискретизации времени:

$$Rs(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t-\tau)\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Rs(\tau_m) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) s^*(t_n - \tau_m) \Rightarrow Rs_m = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot s^*_{n-m} \quad . \qquad (5.4.1)$$

Выразим АКФ дискретного сигнала через дискретное преобразование Фурье (5.3.1).

Для этого определим текущие значения отсчетов сигнала через ОДПФ от соответствующих спектров:

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \exp\left(j 2\pi k \cdot n / N\right),$$
$$s^*_{n-m} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} S_l \cdot \exp\left(-j 2\pi l \cdot (n-m)/N\right) \quad . \qquad (5.4.2)$$

Подставив эти формулы в (5.4.1), получим:

$$Rs_m = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k \cdot \exp\left(\frac{j 2\pi k n}{N} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} S_l \cdot \exp\left(\frac{-j 2\pi l (n-m)}{N} \right) \right]. \qquad (5.4.3)$$

Изменив в (5.4.3) порядок суммирования, придем к выражению:

$$Rs_m = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} S_k \cdot S_l^* \cdot \exp\left(j2\pi \cdot l \cdot m / N \right) \cdot$$
$$\cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j2\pi n\left(k-l\right) / N \right) \qquad (5.4.4)$$

Принимая во внимание свойство (5.4.5)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi n\left(k-l\right)}{N} \right) = \begin{cases} N, \text{если } k = l \\ 0, \text{если } k \neq l \end{cases}, \qquad (5.4.5)$$

выражение (5.4.4) можно представить в виде:

$$Rs_m = \sum_{k=0}^{N-1} S_k \cdot S_k^* \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left|S_k\right|^2 \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right). \qquad (5.4.6)$$

Полученное выражение (5.4.6) позволяет по частотным выборкам в спектре сигнала получить дискретные значения автокорреляционной функции сигнала.

Зная дискретные значения АКФ сигнала, можно определить и дискретные значения спектральной плотности мощности сигнала с помощью прямого дискретного преобразования Фурье:

$$Ws_k = \left|S_k\right|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} Rs_m \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right). \qquad (5.4.7)$$

Пусть два сигнала $u(t)$ и $\upsilon(t)$ $v(t)$ конечной длительности заданы временными дискретными отсчетами $u_n = u(t_n)$ и $\upsilon_n = \upsilon(t_n)$, $t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2 \ldots N-1$. Взаимная корреляционная функция двух дискретных сигналов получается из интегрального выражения и задается формулой:

$$Ru\upsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \upsilon^*(t-\tau)dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ru\upsilon(\tau_m) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u(t_n)\upsilon^*(t_n - \tau_m) \Rightarrow Ru\upsilon_m = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cdot \upsilon_{n-m}^* \cdot \qquad (5.4.8)$$

Дискретные значения ВКФ могут быть выражены также и через дискретные значения спектральной плотности этих сигналов:

$$Ru\upsilon_m = \sum_{k=0}^{N-1} U_k \cdot V_k^* \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} Uu\upsilon_k \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right) \quad (5.4.9)$$

При смене порядка сигналов меняется комплексная сопряженность спектральных плотностей этих сигналов:

$$R\upsilon u_m = \sum_{k=0}^{N-1} V_k \cdot U_k^* \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} W\upsilon u_k \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right) \quad (5.4.10)$$

Таким образом, дискретную функцию взаимной корреляции двух сигналов можно получить, выполнив ОДПФ от произведения коэффициентов ДПФ исходных сигналов.

Дискретные значения спектральной плотности взаимной мощности сигналов могут быть получены прямым дискретным преобразованием Фурье над отсчетами взаимной функции корреляции сигналов:

$$Wu\upsilon_k = \sum_{m=0}^{N-1} Ru\upsilon_m \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right), \quad (5.4.11)$$

$$W\upsilon u_k = \sum_{m=0}^{N-1} R\upsilon u_m \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N} \right). \quad (5.4.12)$$

Следовательно, как и АКФ, взаимно корреляционная функция и спектральная плотность взаимной мощности дискретных сигналов связаны между собой дискретными преобразованиями Фурье.

6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

В отличие от детерминированных сигналов значения случайных сигналов в произвольные моменты времени не могут быть определены достоверно. Они могут быть только предсказаны с определенной вероятностью.

6.1. Основные понятия и характеристики случайных процессов

С теоретических позиций случайный процесс $X(t)$ следует рассматривать как бесконечную совокупность временных функций $x_k(t)$ $k=1,\ 2,\ldots\infty$, имеющих общую статистическую закономерность. Некоторая отдельная реализация $x_k(t)$ называется выборочной функцией случайного процесса или случайным сигналом. Примеры четырех выборочных функций $x_k(t), k=1\ldots4$ случайного процесса $X(t)$ приведены на рис. 6.1.1.

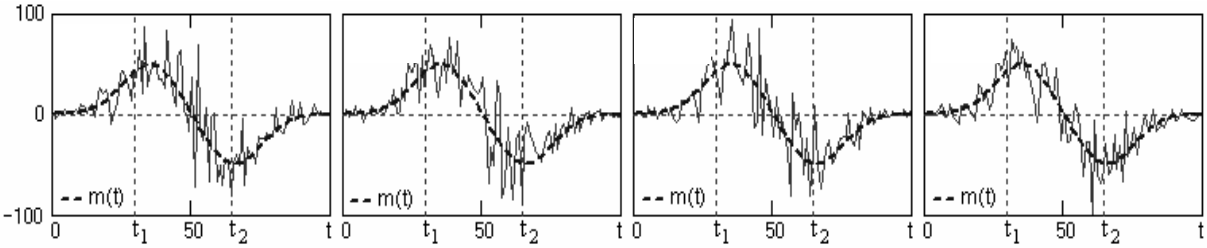


Рис. 6.1.1. Выборочные функции случайного процесса

6.1.1. Функциональные характеристики случайного процесса

Одномерная плотность вероятности. Зафиксируем на всех реализациях (рис. 6.1.1) в произвольный момент времени t_1 их мгновенные значения $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_N(t_1)\}$. Выделим из общего количества N те n значений реализаций случайного процесса $X(t_1)$, которые заключены в достаточно малом интервале $(x, x+\Delta x)$. Относительная доля n/N значений, попавших в этот интервал, с ростом N стремится к определенной величине, пропорциональной Δx, и оценивается соотношением:

$$\lim_{N\to\infty}(n/N) = p(x, \mathrm{t}_1)\Delta x. \qquad (6.1.1)$$

Функцию $p(x,\mathrm{t}_1)$ называют одномерной плотностью вероятности. Если устремить $\Delta x \to 0$, то получим выражения (6.1.2)

$$dP = p(x,t_1)\cdot dx = P\left\{\left|X(t_1)-x\right| \le dx/2\right\}, \qquad (6.1.2)$$

которое характеризует вероятность того, что реализации случайного процесса $X(t_1)$ в момент времени t_1 примут значения, лежащие в бесконечно малом интервале dx в окрестности значения x.

Одномерная функция распределения вероятности $F(x,t_1)$ определяет вероятность того, что реализации случайного процесса $X(t_1)$ в момент времени t_1 не превысят значение x:

$$F(x,t_1) = P\left\{X(t_1) \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} p(\xi,t_1)d\xi. \qquad (6.1.3)$$

Производная от функции распределения вероятности представляет собой одномерную плотность вероятности:

$$p(x,t_1) = dF(x,t_1)/dx. \qquad (6.1.4)$$

Вероятность того, что случайная величина $X(t_1)$ попадёт в определенный интервал $[a,b]$, определяется выражением:

$$P\left\{a < X(t_1) \le b\right\} = \int_{a}^{b} p(\mathrm{x},t_1)dx = F(b,t_1) - F(a,t_1). \qquad (6.1.5)$$

Функция распределения вероятности $F(x,t_1)$ является неубывающей с предельными значениями $F(-\infty,t_1)=0$ и $F(\infty,t_1)=1$.

6.1.2. Числовые характеристики случайного процесса

Математическое ожидание представляет собой статистическое усреднение значений реализаций случайного процесса $X(t)$ в фиксированном сечении времени t_1:

$$m(t)=\overline{x(t)}=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x,t)dx\ . \qquad (6.1.6)$$

На рис. 6.1.1 функция $m(t)$ случайного процесса $X(t)$ выделена пунктиром. Математическое ожидание $m(t)$ характеризует среднее значение или постоянную составляющую случайного процесса $X(t)$.

Дисперсия случайного процесса является теоретической оценкой среднего значения флуктуационной составляющей процесса:

$$D(t)=\overline{\left[x(t)-m(t)\right]^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)-m(t)\right]^2\cdot p(x,t)dx\,. \qquad (6.1.7)$$

Среднее квадратическое отклонение служит амплитудной мерой разброса значений случайного процесса относительно математического ожидания процесса:

$$\sigma(t)=\sqrt{D(t)}\,. \qquad (6.1.8)$$

6.1.3. Функция корреляции случайного процесса

Больше сведений можно получить, располагая двумя сечениями случайного процесса в произвольные моменты времени t_1 и t_2. В этом случае образуется двумерная плотность вероятности $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$. Произведение $p(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1dx_2$ представляет собой вероятность того, что в момент времени t_1 случайная величина $X(t_1)$ попадет в бесконечно малый интервал dx_1 в окрестности x_1 при условии, что в момент времени t_2 случайная величина $X(t_2)$ будет располагаться в бесконечно малом интервале dx_2 в окрестностях x_2:

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1dx_2=P\left\{\left|X(t_2)-x_2\right|\le dx_2/2, \left|X(t_1)-x_1\right|\le dx_1/2\right\}. \quad (6.1.9)$$

Характеристикой динамики изменения двумерной случайной величины $\left\{X(t_1), X(t_2)\right\}$ является корреляционная функция:

$$R(t_1, t_2) = \overline{\left[x(t_1) - m(t_1)\right] \cdot \left[x(t_2) - m(t_2)\right]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t_1) - m(t_1)\right] \cdot \left[x(t_2) - m(t_2)\right] \cdot p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 . \quad (6.1.10)$$

Сравнивая формулы (6.1.10) и (6.1.7), заметим, что при совмещении сечений $t_1 = t_2 = t$ функция автокорреляции численно равна дисперсии:

$$R(t_1, t_2) = D(t) = \sigma^2(t) \quad (6.1.11)$$

6.1.4. Классификация случайных процессов

Нестационарные процессы. Если значения функций математического ожидания, дисперсии и корреляции зависят от момента времени, то такие случайные процессы называют нестационарными.

Стационарные процессы. Случайный процесс называют стационарным, если математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов.

Эргодические процессы. Строго характеристики случайных процессов оцениваются путем усреднения по ансамблю реализаций в определенные моменты времени. Но большинство стационарных случайных процессов обладает эргодическим свойством. Сущность его заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить обо всех его статистических свойствах так же, как по любому количеству реализаций. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же, как по сечению для ансамбля реализаций, так и по времени развития.

В дальнейшем остановимся на рассмотрении только стационарных эргодических случайных процессах. Для эргодических процессов имеет место:

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{T}^{1} x(t) dt, \quad (6.1.12)$$

$$D = \left\langle \left[x(t) - m\right]^2 \right\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left[x(t) - m\right]^2 dt , \quad (6.1.13)$$

$$R(\tau) = \left\langle \left[x(t) - m\right] \cdot \left[x(t+\tau) - m\right] \right\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) \cdot x(t+\tau) dm - m^2 . \quad (6.1.14)$$

6.2. Характеристики основных случайных процессов

6.2.1. Случайный процесс с равномерным законом распределения

В качестве иллюстрации отдельная реализация $x(t)$ случайного процесса с равномерным законом распределения приведена на рис. 6.2.1.

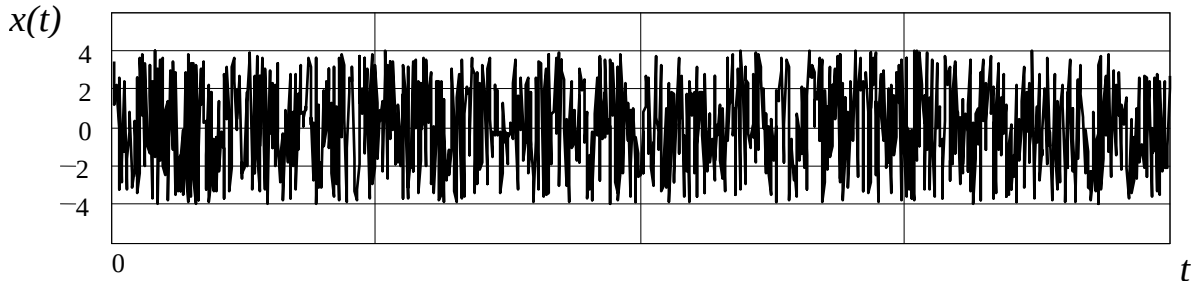


Рис. 6.2.1. Реализация случайного процесса с равномерным законом

Как можно заметить, в приведенной реализации все значения случайного сигнала на заданном интервале $[-4,4]$ встречаются с практически одинаковой вероятностью. Как уже отмечалось, такую характеристику дает одномерная плотность вероятности**.** Плотность вероятности равномерного закона распределения является константой на некотором интервале $[a,\mathrm{b}]$ и определяется выражением:

$$p(x)=\begin{cases}0,\ если \quad x<a\\ \dfrac{1}{(b-a)},\ если\ \ a\le x\le b\\ 0,\ если \quad x>a\end{cases}\ . \qquad (6.2.1)$$

Вероятность того, что значения случайного сигнала не превысят некоторой величины, x описывается функцией распределения. Функция распределения определяется путем интегрирования выражения (6.2.1) и описывается выражением:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\varsigma)d\xi\begin{cases}0,\ если \quad x<a\\ \dfrac{1}{(b-a)},\ если\ \ a\le x\le b\\ 1,\ если \quad x>a\end{cases}\ . \qquad (6.2.2)$$

Графики плотности вероятности и функции распределения случайного сигнала представлены на рис. 6.2.2, *а* и *б* соответственно.

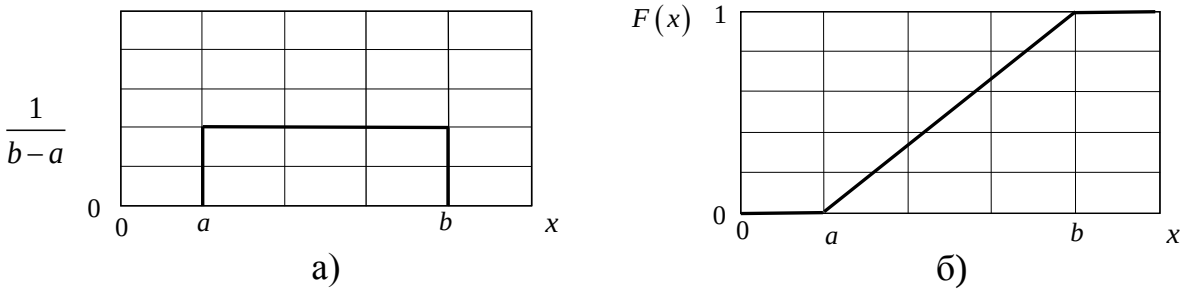


Рис. 6.2.2. Характеристики процесса
с равномерным законом распределения:
а) плотность вероятности; б) функция распределения

Математическое ожидание случайного сигнала будет определяться выражением:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} \ . \qquad (6.2.3)$$

Дисперсия случайного сигнала с равномерным законом распределения примет вид

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m) \cdot p(x) dx = \int_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12} . \qquad (6.2.4)$$

6.1.3. Случайный процесс с нормальным законом распределения

Отдельная реализация $x(t)$ случайного процесса с нормальным законом распределения приведена на рис. 6.2.3.

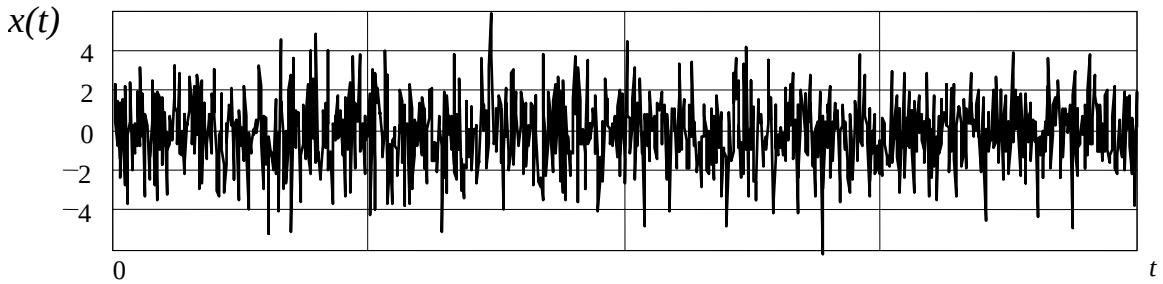


Рис. 6.2.3. Реализация случайного процесса
с нормальным законом распределения

Можно заметить, что в приведенной реализации значения случайного сигнала встречаются с различной вероятностью. Максимальные и минимальные значения случайного сигнала встречаются очень редко. В то же время значения случайного сигнала в окрестности нуля появляются с большой вероятностью. Одномерная плотность вероятности нормального закона распределения определяется выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right), \qquad (6.2.5)$$

где m и σ соответствуют математическому ожиданию и дисперсии.

Интегральное преобразование (6.2.5) даёт функцию распределения случайного процесса:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2} \right) \mathrm{d}\xi. \qquad (6.2.6)$$

Графики гауссовой плотности распределения и интегральной функции распределения при $m=1$ и $\sigma=1$ приведены на рис. 6.2.2, *а* и *б* соответственно:

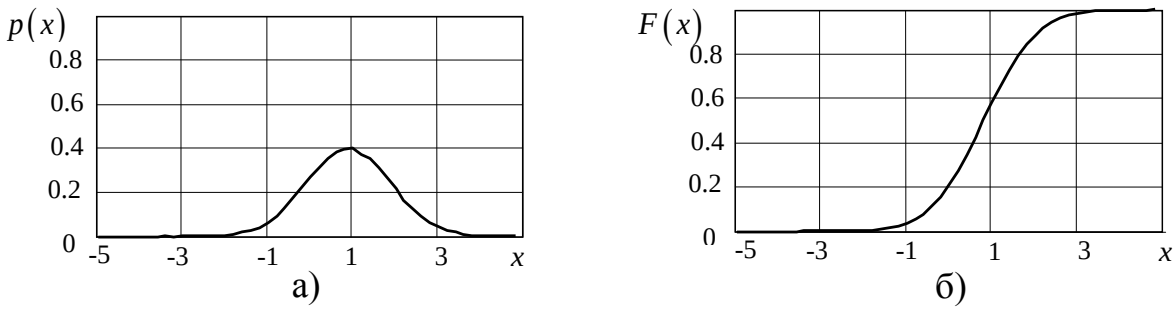


Рис. 6.2.4. Характеристики процесса
с нормальным законом распределения:
а) плотность вероятности; б) функция распределения

Интегральная функция распределения имеет вид монотонной кривой, изменяющейся от нуля до единицы.

6.1.4. Случайный процесс с законом распределения Рэлея

Рассмотренные выше законы распределения лежат в основе формирования случайных процессов с другими распределениями плотности вероятности. Метод формирования случайных величин $\{x\}$ с законом распределения Рэлея

основан на нелинейном преобразовании двух нормально распределенных величин $\{z_1, z_2\}$ с параметрами $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_z$ и задается выражением

$$x = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \ . \qquad (6.2.7)$$

Отдельная реализация $x(t)$ случайного процесса с законом распределения Рэлея приведена на рис. 6.2.5.

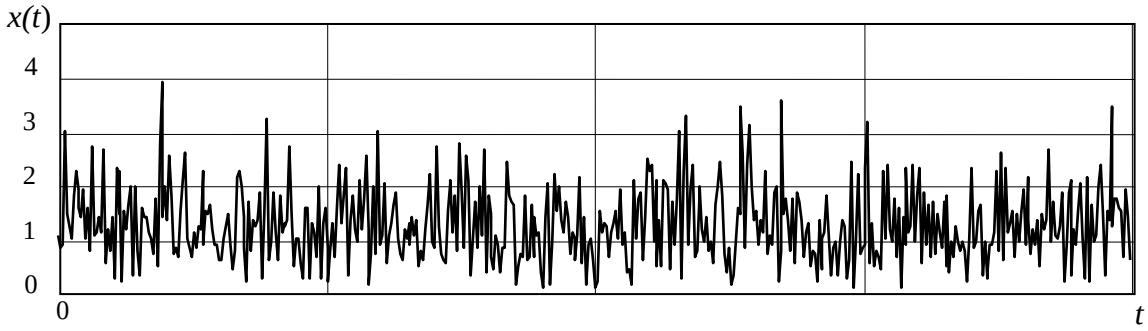


Рис. 6.2.5. Реализация случайного процесса с распределением Рэлея

Как видно, в приведенной реализации значения случайного сигнала встречаются с различной вероятностью, но в отличие от случайного сигнала с нормальным распределением принимают только положительные значения. Максимальные и нулевые значения случайного сигнала встречаются очень редко. Одномерная плотность вероятности закона распределения Рэлея определяется выражением

$$p(x) = \frac{x}{\sigma_z^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right). \qquad (6.2.8)$$

где σ_z соответствует дисперсии нормально распределенных величин.

Математическое ожидание случайного сигнала определяется соотношением:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx = \sqrt{\pi / 2} \cdot \sigma_z \ . \qquad (6.2.9)$$

Дисперсия случайного сигнала примет вид:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot p(x)\,dx = (2 - \pi / 2) \cdot \sigma_z^2 . \qquad (6.2.10)$$

Интегрированием плотности вероятности (6.2.10) можно получить функцию распределения случайного процесса с законом распределения Рэлея:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right). \qquad (6.2.11)$$

Графики рэлеевской плотности распределения и интегральной функцию распределения случайного процесса с законом распределения Рэлея приведены на рис. 6.2.6.

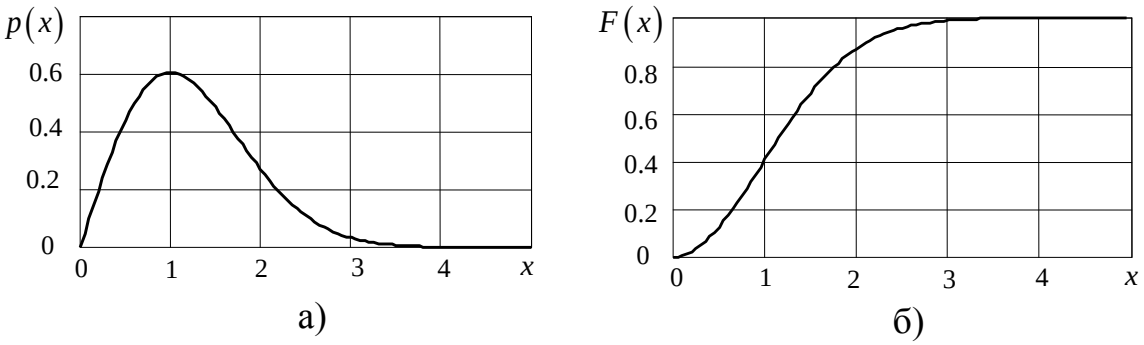


Рис. 6.2.6. Характеристики процесса
с законом распределения Рэлея:
а) плотность вероятности; б) функция распределения

6.3. Взаимосвязь спектральных и корреляционных характеристик случайного процесса

К каждой отдельно взятой реализации случайного процесса можно применить преобразование Фурье. При этом различные реализации будут иметь различные спектральные плотности. Поэтому плотность мощности случайного процесса необходимо усреднять по множеству реализаций. Для эргодических процессов допустимо усреднение по одной достаточно длительной реализации.

Пусть $X_T(\omega)$ – спектральная плотность некоторой реализации случайного процесса, определенного на интервале времени $\lfloor 0, T \rfloor$. Тогда функция

$$W(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T}. \qquad (6.3.1)$$

представляет собой спектральную плотность мощности данной реализации случайного процесса. Плотность мощности является вещественной, неотрицательной и четной функцией частоты.

Как известно, корреляционная функция детерминированного сигнала связана преобразованием Фурье с его энергетическим спектром. Применим это свойство к отрезку реализации случайного процесса длительностью T и запишем равенство:

$$R(\tau)=\int_0^T x(t)\cdot x(t-\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_T(\omega)\right|^2\exp(j\omega\tau)d\omega. \qquad (6.3.2)$$

Поделим обе части данного равенства на T и перейдем к пределу при $T\to\infty$. В результате выражение (6.3.2) примет вид:

$$\begin{aligned} R(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\left|X_T(\omega)\right|^2}{T}\exp(j\omega\tau)d\omega=\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \end{aligned} \qquad (6.3.3)$$

Таким образом, корреляционная функция случайного стационарного эргодического процесса представляет собой обратное преобразование Фурье его спектра плотности мощности. Так как и корреляционная функция $R(t)$, и спектр мощности $W(\omega)$ являются четными вещественными функциями, то можно отказаться от комплексной формы записи преобразования Фурье и перейти к полубесконечным пределам интегрирования:

$$R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}W(\omega)\cdot\cos(\omega\cdot\tau)d\omega. \qquad (6.3.4)$$

В свою очередь спектр плотности мощности определяется прямым преобразованием Фурье от корреляционной функции:

$$W(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau=2\int_0^{\infty}R(\tau)\cdot\cos(\omega\cdot\tau)d\tau. \qquad (6.3.5)$$

Приведенные выражения (6.3.4) и (6.3.5) установлены теоремами ***Винера – Хинчина.***

С уменьшением эффективной ширины спектра плотности мощности увеличивается интервал корреляции случайного процесса, и наоборот. Чем быстрее убывает функция $R(\tau)$, тем слабее оказывается статистическая связь между мгновенными значениями случайного сигнала.

6.4. Корреляционные характеристики случайных процессов с типовыми энергетическими спектрами

6.4.1. Случайный процесс с гауссовским энергетическим спектром

Пусть случайный процесс характеризуется спектром мощности гауссовского вида:

$$W(\omega) = W_0 \cdot \exp\left(-\beta \cdot \omega^2\right). \qquad (6.4.1)$$

Применив формулу Винера-Хинчина, получим функцию корреляции:

$$R(\tau) = \frac{W_0}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\beta \cdot \omega^2\right) \cdot \cos(\omega\tau)\, d\omega = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi\beta}} \exp\left[-\tau^2 / (4\beta)\right]. \qquad (6.4.2)$$

Как видно, гауссов характер спектра мощности приводит к функции корреляции также гауссовского вида. Дисперсия данного случайного процесса равна

$$\sigma^2 = R(0) = W_0 \Big/ \left(2\sqrt{\pi\beta}\right). \qquad (6.4.3)$$

6.4.2. Случайный процесс с равномерным энергетическим спектром

Пусть случайный процесс характеризуется равномерным спектром мощности в некоторой полосе частот и описывается выражением:

$$W(\omega) = \begin{cases} W_0, при\ -\omega_в \le \omega \le \omega_в \\ 0, вне\ полосы\left[-\omega_в, \omega_в\right] \end{cases}. \qquad (6.4.4)$$

Согласно теореме Винера – Хинчина, найдем функцию корреляции:

$$R(\tau)=\frac{W_0}{\pi}\int_0^{\omega_в}\cos(\omega\tau)d\omega=\frac{W_0\cdot\omega_в}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega_в\tau)}{\omega_в\tau}=\sigma_x^2\cdot\rho(\tau). \qquad (6.4.5)$$

Из (6.4.5) следует, что дисперсия случайного процесса равна

$$\sigma_x^2=R(0)=W_0\omega_в/\pi. \qquad (6.4.6)$$

6.4.3. «Белый» шум

«Белым» шумом называют идеализированную модель случайного процесса, спектральная плотность мощности которого постоянна на всех частотах. Если перейти в выражении (6.2.10) к пределу $|\omega_в|\to\infty$. Тогда корреляционная функция «белого» шума будет описываться выражением:

$$R(\tau)=W_0\cdot\delta(t)\ . \qquad (6.4.7)$$

Значение корреляции «белого» шума равно нулю всюду, кроме точки $\tau=0$.

7. МЕТОДЫ МОДУЛЯЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ

Как правило, информационные сигналы обладают спектром, локализованным в окрестности нулевой частоты, и поэтому их передача возможно лишь по проводным и кабельным каналам. Для передачи информационного сигнала по радиоканалам связи необходимо осуществить перенос спектра информационного сигнала из низкочастотной области в выделенную область высоких частот. С этой целью в передающем устройстве формируется несущий высокочастотный сигнал $u(t)$. Если сделать значение несущего сигнала пропорционально зависимым от значения информационного сигнала $s(t)$, то форма несущего сигнала $u(t)$ будет нести информацию, тождественную информации в сигнале $s(t)$. Физический процесс переноса информации на параметры несущего сигнала называется модуляцией. Исходный информационный сигнал $s(t)$ называют модулирующим, а результат модуляции – модулированным сигналом. В зависимости от того, на какой из параметров несущего сигнала переносится информация, различают амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) или фазовую (ФМ) модуляцию. Частотная и фазовая модуляция тесно взаимосвязаны, и их обычно объединяют под общим названием – угловая модуляция.

7.1. Амплитудная модуляция сигналов

При амплитудной модуляции в соответствии с модулирующим сигналом $s(t)$ изменяется амплитуда несущего колебания при постоянных значениях параметров несущей частоты и фазы. Закон амплитудной модуляции сигнала задается выражением:

$$u(t) = U(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ , \qquad (7.1.1)$$

где $U(t) = f\left[s(t)\right]$ – закон изменения амплитуды несущего колебания модулированного информационным сигналом $s(t)$. Как правило, информационный сигнал является двуполярным (знакопеременным) и поэтому к модулирующему сигналу предварительно добавляют постоянный уровень U_m, чтобы сделать его однополярным:

$$U(t) = U_m + \mu \cdot s(t) \ , \qquad (7.1.2)$$

где μ – коэффициент пропорциональности.

Итак, в общем виде амплитудно-модулированный сигнал можно записать в следующем виде:

$$u(t)=\left[U_m+\mu\cdot s(t)\right]\cdot\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (7.1.3)$$

7.1.1. Однотональная амплитудная модуляция

Рассмотрим частный случай, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием:

$$s(t)=A_M\cdot\cos\left(\Omega\cdot t+\theta\right)\ . \qquad (7.1.4)$$

В этом случае амплитудно-модулированный сигнал будет иметь вид:

$$u(t)=\left[U_m+A_M\cdot\cos\left(\Omega\cdot t+\theta\right)\right]\cdot\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (7.1.5)$$

Отношение между амплитудами модулирующего сигнала A_m и несущего колебания U_m называется коэффициентом модуляции

$$M=A_M/U_m\ . \qquad (7.1.6)$$

С учетом (7.1.6) амплитудно-модулированный сигнал можно описать выражением:

$$u(t)=\left[1+M\cdot\cos\left(\Omega\cdot t+\theta\right)\right]\cdot U_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (7.1.7)$$

Если коэффициент модуляции равен нулю, то будет несущее колебание с постоянной амплитудой U_m, частотой ω_0 и фазой φ_0. Максимальное и минимальное значение огибающей сигнала при однотональной AM-модуляции определяется выражениями:

$$U_{\max}=U_m\cdot\left(1+M\right) \qquad и \qquad U_{\min}=U_m\cdot\left(1-M\right). \qquad (7.1.8)$$

Отсюда следует другая форма коэффициента амплитудной модуляции:

$$M=\frac{U_{\max}-U_{\min}}{U_{\max}+U_{\min}}. \qquad (7.1.9)$$

В качестве иллюстрации на рис. 7.1.1 приведены временные диаграммы амплитудно-модулированного сигнала при однотональной модуляции при значениях коэффициента модуляции $M = 0.5, \ldots M = 1 \cdots u \cdots M = 1.5$.

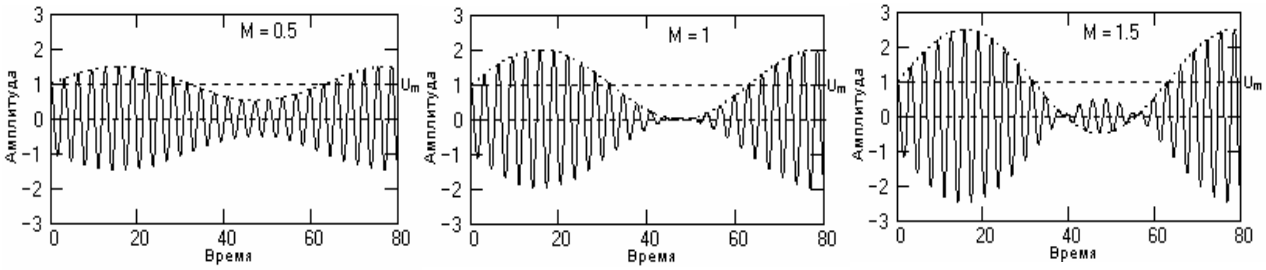


Рис. 7.1.1. Амплитудно-модулированный сигнал при однотональной модуляции

Как видно, при значении $M < 1$ форма огибающей несущего колебания полностью повторяет форму модулирующего сигнала $s(t)$. При значении $M > 1$ возникает так называемая перемодуляция сигнала. Форма огибающей при перемодуляции искажается относительно формы модулирующего сигнала. Значение коэффициента модуляции должно находиться в пределах от 0 до 1 для всех значений модулирующего сигнала.

7.1.2. Спектр сигнала при однотональной модуляции

Простейшая форма спектра модулированного сигнала возникает при однотональной амплитудной модуляции. Раскрывая выражение (7.1.7), получаем спектральное представление амплитудно-модулированного сигнала:

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + U_m \cdot \mathrm{M}/2 \cdot \cos\left[(\omega_0 + \Omega) \cdot t + \varphi_0 + \theta\right] + \\ + U_m \cdot M/2 \cdot \cos\left[(\omega_0 - \Omega) \cdot t + \varphi_0 - \theta\right] \qquad (7.1.10)$$

Из (7.1.10) следует, что спектр сигнала состоит из трех высокочастотных спектральных составляющих. Первое слагаемое представляет собой несущее колебание с частотой ω_0 и амплитудой U_m. Второе и третье слагаемые называют соответственно верхней и нижней боковыми составляющими, которые представляют собой гармонические колебания с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ *и* $(\omega_0 - \Omega)$. Фазы верхней и нижней боковых гармоник противоположны по знаку. Амплитуды колебаний на боковых частотах равны друг другу и составляют $U_m \cdot M/2$. При 100%-ной модуляции они равны половине ампли-

туды несущего сигнала. Вид спектра сигнала при однотональной модуляции приведен на рис. 7.1.2.

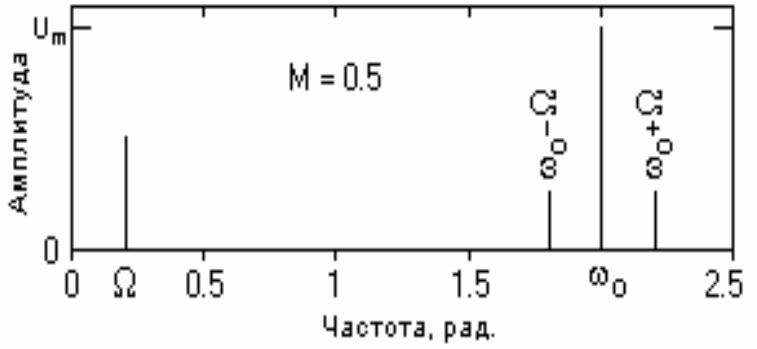


Рис. 7.1.2. Спектр сигнала при однотональной модуляции

Рассмотрим энергетические характеристики AM-сигнала. Средняя мощность AM-сигнала равна сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний:

$$\langle p_{AM} \rangle = \langle p_{НЧ} \rangle + \left[\langle p_{ВБ} \rangle + \langle p_{НБ} \rangle \right] = \frac{U_m^2}{2} + \frac{U_m^2 \cdot M^2}{4} \quad . \qquad (7.1.11)$$

Коэффициент полезного действия данного типа модуляции определяется отношением мощности боковых частот к общей средней мощности модулированного сигнала:

$$\eta = \left[\langle p_{ВБ} \rangle + \langle p_{НБ} \rangle \right] / \langle P_{AM} \rangle = M^2 / \left(M^2 + 2 \right) \qquad (7.1.12)$$

Зависимость КПД от глубины модуляции сигнала приведена на рис. 7.1.3.

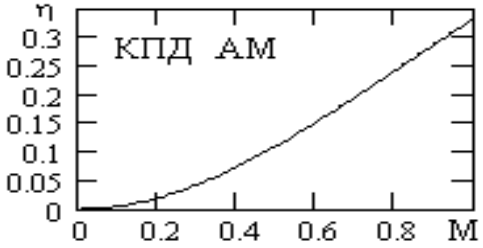


Рис. 7.1.3. Зависимость КПД от глубины модуляции сигнала

Как можно видеть, даже при $M = 1$ КПД амплитудной модуляции составляет только 33%, а при практическом использовании обычно меньше 20%.

7.1.3. Многотональная амплитудная модуляция

Пусть модулирующий сигнал имеет произвольный спектральный состав и описывается выражением:

$$s(t)=\sum_{n=1}^{N} A_n \cdot \cos(\Omega_n \cdot t+\theta_n)\ . \qquad (7.1.13)$$

Подставляя формулу (7.1.13) в выражение (7.1.3), получаем:

$$u(t)=U_m\left[1+\sum_{n=1}^{N} M_n \cdot \cos(\Omega_n \cdot t+\theta_n)\right]\cdot \cos(\omega_0 t+\varphi_0). \qquad (7.1.14)$$

где $M_n = A_n/U_m$ – парциальные коэффициенты модуляции. Раскрывая выражение (7.1.14), получим спектральное разложение для многотонального AM-сигнала:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cdot \cos(\omega_0 t+\varphi_0)+ \\ &+\sum_{n=0}^{N} \frac{U_m \cdot M_n}{2}\cos\left[(\omega_0+\Omega_n)\cdot t+\varphi_0+\theta_n\right]+. \\ &+\sum_{n=0}^{N} \frac{U_m \cdot M_n}{2}\cos\left[(\omega_0-\Omega_n)\cdot t+\varphi_0-\theta_n\right] \end{aligned} \qquad (7.1.15)$$

Диаграмма многотонального АМ-сигнала приведена на рис. 7.1.4, *а*, а спектральные характеристики модулирующего и модулированного сигналов представлены на рис. 7.1.4, *б*.

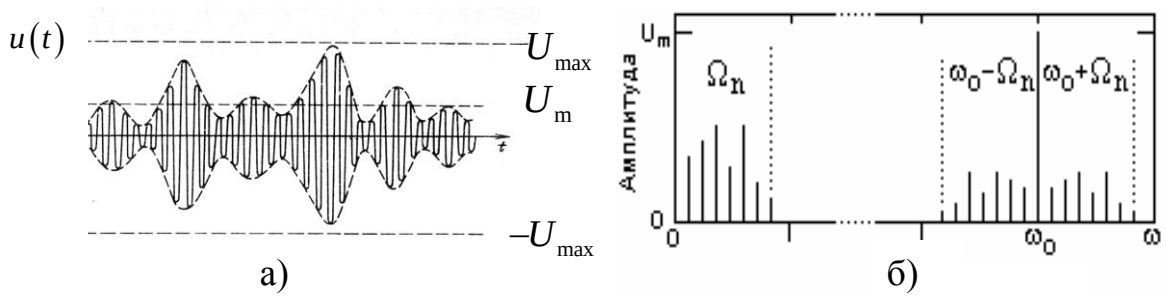


Рис. 7.1.4.
а) многотональный AM-сигнал;
б) спектральные характеристики модулирующего
и модулированного сигналов

Каждая спектральная составляющая многотонального модулирующего сигнала создает две боковые компоненты частоты в спектре модулированного сигнала. В результате образуются спектральные полосы верхних и нижних боковых частот относительно несущей частоты. Полосы верхних и нижних боковых частот являются прямой и зеркальной масштабными копиями спектра модулирующего сигнала. Полная ширина спектра AM-сигнала равна удвоенной ширине спектра модулирующего сигнала.

7.1.4. Разновидности амплитудной модуляции

<u>Балансная амплитудная модуляция</u> – ($БАМ$). Пусть модулирующий сигнал является гармоническим колебанием:

$$s(t) = A_M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta) \ . \qquad (7.1.16)$$

При балансной амплитудной модуляции производится перемножение двух сигналов – модулирующего и несущего. Для однотонального сигнала получаем

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m\left[M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)\right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= (U_m \cdot M / 2) \cdot \left\{\cos\left[(\omega_0 + \Omega) \cdot t + \varphi_0 + \theta\right] + \cos\left[(\omega_0 - \Omega) \cdot t + \varphi_0 - \theta\right]\right\} \end{aligned}, \qquad (7.1.17)$$

где $M = A_M / U_m$ – коэффициент модуляции. Пример сигнала с балансной амплитудной модуляцией приведен на рис. 7.1.5.

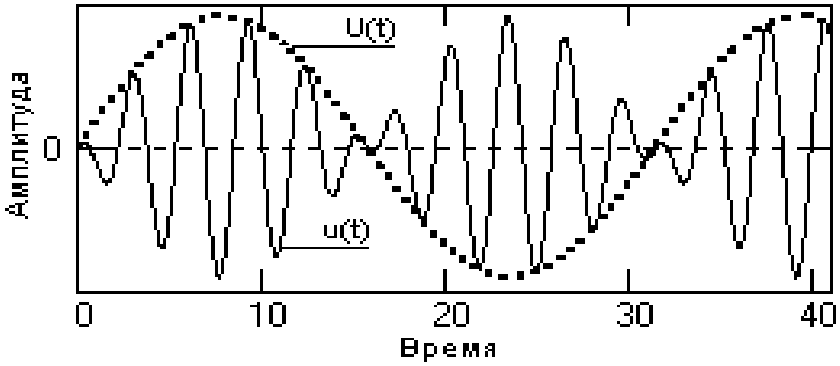


Рис. 7.1.5. Сигнал с балансной амплитудной модуляцией

При переходе огибающей модулирующего сигнала *s(t)* через нуль фаза несущей частоты изменяется скачком на 180°. Поэтому амплитудный спектр сигнала подобен спектру, приведенному на рис. 7.1.2, но с подавленной несущей частотой. Спектральные компоненты на боковых частотах равны друг другу и также составляют $(U_m \cdot M/2)$.

Поскольку при балансной амплитудной модуляции происходит подавление несущего колебания, то КПД становится равным 100%.

<u>Однополосная амплитудная модуляция</u> – ($ОАМ$). При амплитудной модуляции передаваемая информация заложена как в верхней, так и в нижней боковых частотах и поэтому нет никакой необходимости в их одновременной передаче. Одна из них может быть удалена, чем достигается двукратное сокращение полосы занимаемых сигналом частот. Уравнение сигнала при однотональной модуляции с одной боковой полосой записывается в виде:

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + (U_m \cdot M / 2) \cdot \cos\left[(\omega_0 \pm \Omega) \cdot t + \varphi_0 \pm \theta\right]. \quad (7.1.18)$$

Знаки $''+''$ или $''-''$ во втором слагаемом отражают соответственно верхнюю или нижнюю боковые полосы. Следует отметить, что, огибающая сигнала при однополосной амплитудной модуляции сопровождается незначительными искажениями.

<u>Однополосная балансная амплитудная модуляция</u> – ($ОБМ$). При однополосной модуляции возможно также подавление несущей частоты, что позволяет полнее использовать мощность передатчика. Уравнение сигнала при однотональной однополосной балансной амплитудной модуляции записывается в виде:

$$u(t) = (U_m \cdot M/2) \cdot \cos\left[(\omega_0 \pm \Omega) \cdot t + \varphi_0 \pm \theta\right]. \quad (7.1.19)$$

При гармонической модуляции синусоида с частотой Ω превращается в синусоиду с частотой $\omega_0 \pm \Omega$. Однако при многотональной модуляции амплитудная огибающая сигнала приобретает более сложный вид.

7.2. Угловая модуляция радиосигналов

При угловой модуляции информация переносится либо на частоту, либо на фазу несущего гармонического колебания, а значение амплитуды остается постоянным.

Фазовая модуляция – (ФМ).

Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ задает закон изменения фазы несущей частоты сигнала:

$$\theta(t) = \mu \cdot s(t) \quad (7.2.1)$$

где μ – коэффициент пропорциональности. Для характеристики глубины фазового сдвига $\Delta\theta$ вводят значения девиации фазы вверх $\Delta\theta_{\max} = \mu \cdot s_{\max}(t)$, или

вниз $\Delta\theta_{\min} = \mu \cdot s_{\min}(t)$ с учетом знака экстремальных значений модулирующего сигнала $s(t)$.

В соответствии с (7.2.1) уравнение *ФМ* -сигнала с несущей частотой ω_0 будет определяться выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \theta(t)\right] = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \mu \cdot s(t)\right]. \qquad (7.2.2)$$

Аргумент функции cos называется полной фазой:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \mu \cdot s(t) \qquad (7.2.3)$$

В случае фазовой модуляции изменяется и мгновенная частота сигнала, под которой понимают производную от полной фазы по времени:

$$\omega(t) = d\left[\psi(t)\right]/dt = \omega_0 + \mu \cdot d\left[s(t)\right]/dt \ . \qquad (7.2.4)$$

Как видно, при фазовой модуляции мгновенная частота сигнала изменяется пропорционально производной от модулирующего сигнала.

Частотная модуляция – (ЧМ).

Частотная модуляция характеризуется линейной связью модулирующего сигнала $s(t)$ с мгновенной частотой колебаний:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu \cdot s(t) \ . \qquad (7.2.5)$$

Мгновенная частота колебаний $\omega(t)$ образуется сложением частоты несущего колебания со значением амплитуды модулирующего сигнала. Для характеристики глубины частотной модуляции используются понятия девиации частоты вверх $\Delta\omega_{\max} = \mu \cdot s_{\max}(t)$ или вниз $\Delta\omega_{\min} = \mu \cdot s_{\min}(t)$.

Полная фаза колебаний в произвольный момент времени может быть определена интегрированием мгновенной частоты:

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t)\,dt + \theta_0 = \omega_0 t + \mu \cdot \int_0^t s(t')\,dt' + \theta_0 \ . \qquad (7.2.6)$$

С учетом (7.2.6) уравнение *ЧМ* -сигнала будет описываться выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\psi(t)\right] = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \mu \cdot \int_0^t s(t')\,dt' + \theta_0\right]. \qquad (7.2.7)$$

Как видно, при частотной модуляции изменяется и фаза пропорционально интегралу от модулирующего сигнала:

$$\theta(t) = \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0 \ . \qquad (7.2.8)$$

Таким образом, частотная и фазовая модуляция взаимосвязаны между собой. Если изменяется фаза колебания, то изменяется и мгновенная частота, и наоборот. По этой причине их и объединяют под общим названием угловой модуляции (*УМ*).

В таблице 7.2.1 приведены выражения, показывающие взаимосвязь вида модулирующего сигнала с различными параметрами сигналов при фазовой и частотной модуляции.

Таблица 7.2.1.

Взаимосвязь параметров сигнала при фазовой и частотной модуляции

Параметры	ФМ-сигнал	ЧМ-сигнал
Мгновенная фаза	$\theta(t) = \mu \cdot s(t)$	$\theta(t) = \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0$
Мгновенная частота	$\omega(t) = \omega_0 + \mu \cdot d\left[s(t)\right]/dt$	$\omega(t) = \omega_0 + \mu \cdot s(t)$
Полная фаза	$\psi(t) = \omega_0 t + \mu \cdot s(t)$	$\psi(t) = \omega_0 t + \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0$

Вид модуляции *ФМ* или *ЧМ* можно установить непосредственно по характеру изменения частоты и фазы во времени. Покажем это на примере пилообразного модулирующего сигнала $s(t)$, приведенного на рис. 7.2.1, *а* и *б*.

Ниже на рис. 7.2.2 приведены диаграммы функций изменения частоты $\omega(t)$ и фазы $\theta(t)$ при *ЧМ* и *ФМ*.

При *ЧМ* пилообразное изменение частоты $\omega(t)$ (рис. 7.2.2, *б*) по форме совпадает с модулирующим сигналом $s(t)$, а закон изменения фазы $\theta(t)$ является интегральным по отношению к модулирующему сигналу (рис. 7.2.2, *в*). При *ФМ* закон изменения фазы $\theta(t)$ (рис. 7.2.2, *д*) по форме совпадает с моду-

лирующим сигналом $s(t)$, а скачкообразное изменение частоты $\omega(t)$ совпадает по форме с производной модулирующего сигнала $s(t)$ (рис. 7.2.2, *е*).

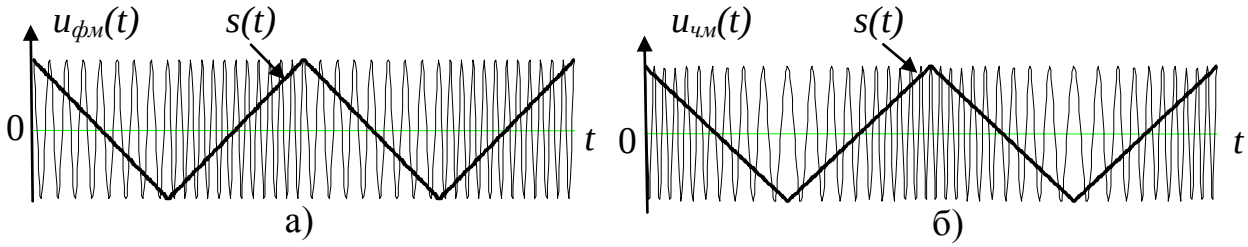


Рис. 7.2.1. Модулированный сигнал
для пилообразного модулирующего сигнала:
а) при фазовой модуляции; б) при частотной модуляции

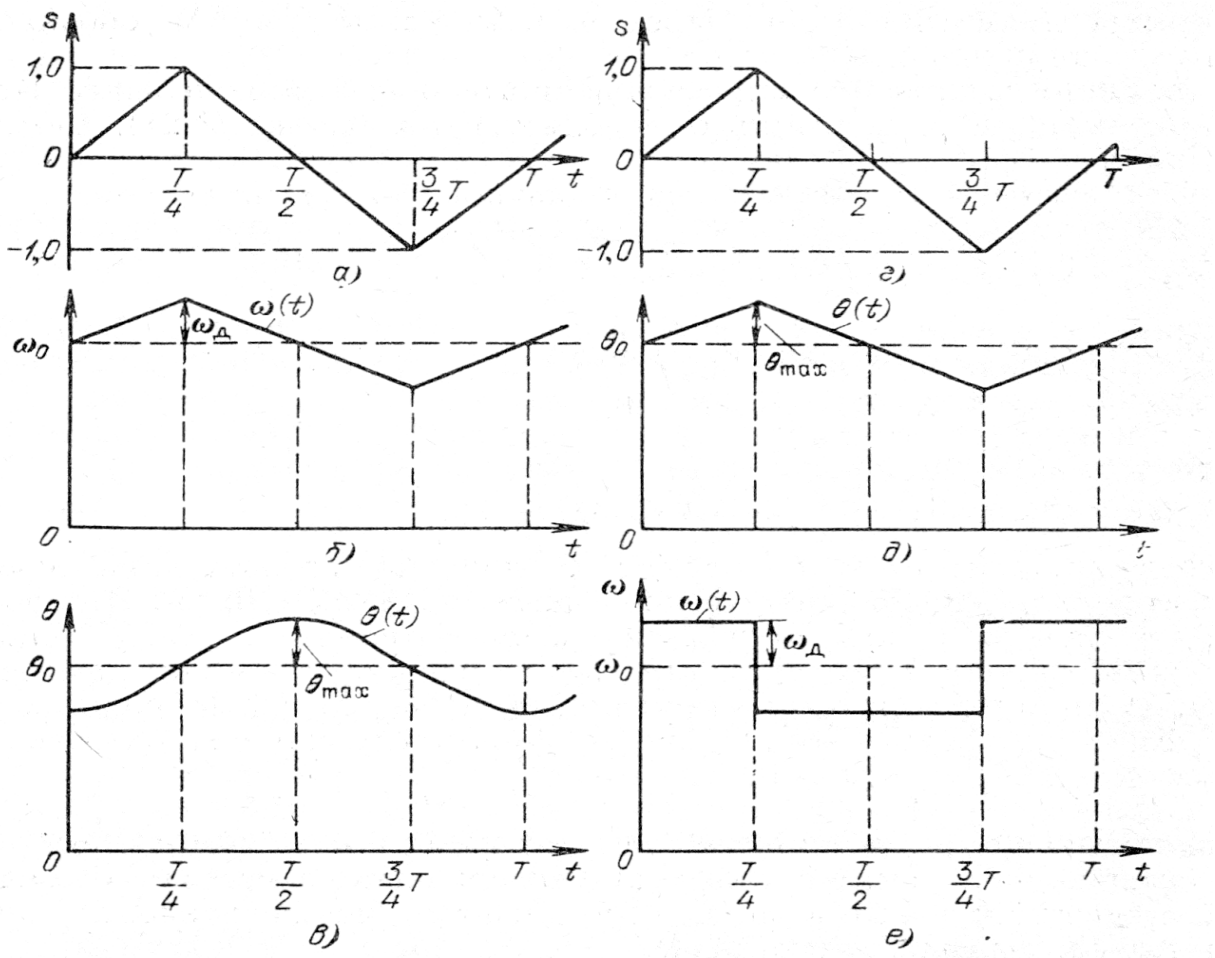


Рис. 7.2.2.

Для частотной модуляции:
а) модулирующий сигнал;
б) частота;
в) фаза;

Для фазовой модуляции:
г) модулирующий сигнал;
д) частоты;
е) фаза

7.2.1. Однотональная угловая модуляция

Рассмотрим *ЧМ* -сигнал, модулированный гармоническим сигналом. В этом случае мгновенная частота колебаний определяется выражением:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu \cdot U_0 \cos(\Omega \cdot t) = \omega_0 + \omega_Д \cdot \cos(\Omega \cdot t) \ , \qquad (7.2.9)$$

где $\omega_Д = \mu \cdot U_0$ – представляет собой девиацию частоты. Подставляя соотношения (7.2.9) в (7.2.6), получаем выражения полной фазы модулированного сигнала:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^T \left[\omega_0 + \omega_Д \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right] dt + \theta_0 = \\ &= \omega_0 t + \left(\omega_Д / \Omega \right) \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0 \end{aligned} . \qquad (7.2.10)$$

Как видно, полная фаза сигнала наряду с линейно-возрастающим слагаемым $\omega_0 t$ содержит периодическое слагаемое вида $\left(\omega_Д / \Omega\right) \cdot \left(\Omega \cdot t\right)$. Величину $\theta_{\max} = \omega_Д / \Omega = m$ называют индексом угловой модуляции. Индекс угловой модуляции определяется исключительно девиацией частоты $\omega_Д$ и частотой модулирующего сигнала Ω. Таким образом, *ЧМ* -сигнал при тональной модуляции описывается выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 + m \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0 \right] \ . \qquad (7.2.11)$$

Рассмотрим теперь *ФМ* -сигнал, у которого фазовая модуляция производится по гармоническому закону:

$$\theta(t) = \mu U_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0 . \qquad (7.2.12)$$

В этом случае *ФМ* -сигнал будет описываться в ыражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + m \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0 \right], \qquad (7.2.13)$$

где $m = \mu \cdot U_0$ – представляет собой индекс угловой модуляции.

Используя выражение (7.2.4), находим мгновенную частоту колебаний:

$$\omega(t) = d\left[\psi(t)\right]/dt = \omega_0 + m \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t) \ . \qquad (7.2.14)$$

Таким образом, гармоническая модуляция фазы эквивалентна частотной модуляции с девиацией частоты $\omega_Д = m \cdot \Omega$. Зависимости девиации частоты $\omega_Д$ и индекса модуляции m от частоты модулирующего сигнала Ω в случае *ФМ* и *ЧМ* представлены на рис. 7.2.3, *а* и *б* соответственно.

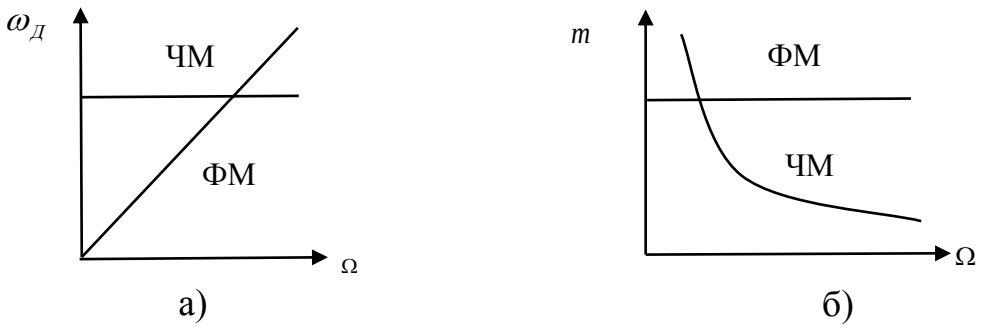


Рис. 7.2.3. Зависимости от частоты модулирующего сигнала:
а) девиации частоты; б) индекса модуляции

При *ФМ* индекс угловой модуляции m зависит только от амплитуды модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω, а частота девиации $\omega_Д$ изменяется прямо пропорционально частоте модуляции Ω:

$$m = \mu \cdot U_0 = const; \qquad \omega_d = m \cdot \Omega. \qquad (7.2.15)$$

При *ЧМ* девиация частоты $\omega_Д$ пропорционально амплитуде модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω, а индекс модуляции m с увеличением частоты будет убывать:

$$\omega_d = \mu \cdot U_0 = const; \qquad m = \omega_d / \Omega. \qquad (7.2.16)$$

7.2.2. Спектр сигнала при однотональной угловой модуляции

В данном разделе произведем анализ для спектра радиосигнала с гармонической *УМ* , а затем для сигнала с многотональной угловой модуляцией. Для этого формулы сигналов (7.2.11) и (7.2.13) при частотной и фазовой модуляции можно представить в виде:

$$u(t)=U_m\cdot\cos\left[m\cdot\sin(\Omega t)\right]\cdot\cos(\omega t)-$$
$$-U_m\cdot\sin\left[m\cdot\sin(\Omega t)\right]\cdot\sin(\omega t) \qquad (7.2.17)$$

При малых значениях индекса угловой модуляции ($m<<1$, узкополосная модуляция) имеют место приближенные равенства:

$$\cos\left[m\cdot\sin(\Omega t)\right]\approx 1 \;\; u \;\; \sin\left[m\cdot\sin(\Omega t)\right]\approx m\cdot\sin(\Omega t)\ . \qquad (7.2.18)$$

При их использовании в (7.2.17), получаем:

$$u(t)=U_m\cdot\cos(\omega_0 t)+(m\cdot U_m/2)\cdot\cos\left[(\omega_0+\Omega)\cdot t\right]+$$
$$+(-m\cdot U_m/2)\cdot\cos\left[(\omega_0-\Omega)\cdot t\right]\ . \qquad (7.2.19)$$

Как видно, амплитудные спектры однотональных *ФМ* - и *ЧМ* -сигналов при малом индексе модуляции практически аналогичны спектрам *АМ* -сигналов и также содержат верхнюю и нижнюю боковые частоты $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$. Различие заключается только в смене знака амплитуды нижней боковой частоты на минус, т.е. в дополнительном фазовом сдвиге нижней боковой частоты на 180° относительно верхней боковой частоты.

Рассмотрим теперь спектры сигналов при больших индексах угловой модуляции.

Математическая модель однотональных *ЧМ* - и *ФМ* -сигналов с любым значением индекса угловой модуляции *m* в общем случае получается разложением функции (7.2.17) в ряд вида:

$$u(t)=U_m\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(m)\cdot\cos\left[(\omega_0+k\cdot\Omega)\cdot t\right], \qquad (7.2.20)$$

где $J_k(m)$ – функция Бесселя k-го порядка. Из этого уравнения следует, что спектр сигнала содержит бесконечное число составляющих – нижних и верхних боковых колебаний с частотами $\omega_0\pm k\cdot\Omega$ и с амплитудами, пропорциональными значениям $J_k(m)$, зависящим от индекса модуляции *m*. Для функций Бесселя k-го порядка справедливо соотношение:

$$J_{-k}(m)=(-1)^k\cdot J_k(m)\ . \qquad (7.2.21)$$

Это означает, что начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 \pm k \cdot \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ совпадают при четных k и отличаются на 180° при нечетных k. Амплитуды первых пяти гармоник в зависимости от индекса модуляции приведены на рис. 7.2.4.

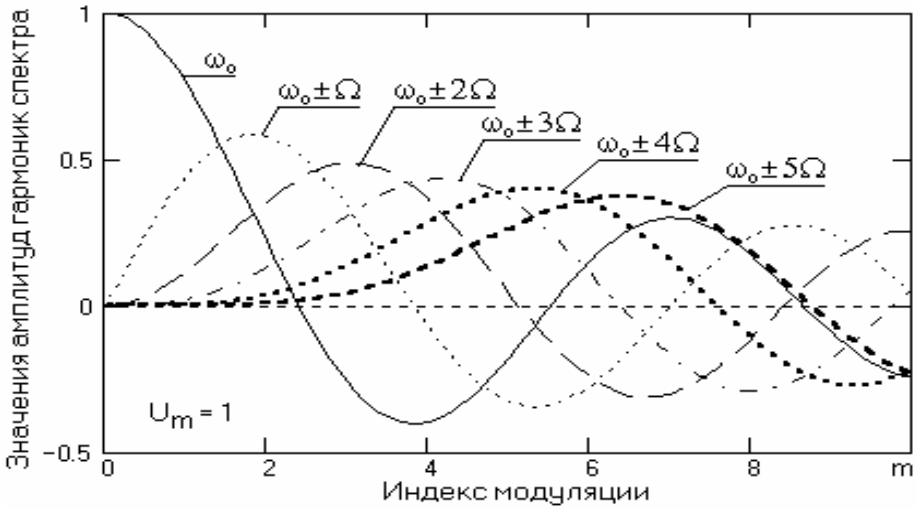


Рис. 7.2.4. Функции Бесселя

При малой величине индекса модуляции m значимые амплитудные значения имеют только первые гармоники. Форма амплитудных спектров модулированных сигналов при разных индексах модуляции приведена на рис. 7.2.5. С ростом величины m количество значимых боковых составляющих увеличивается, а энергия сигнала перераспределяется на боковые составляющие. С ростом индекса модуляции полоса частот, занимаемая сигналом, расширяется. Однако амплитуды боковых частот быстро убывают с увеличением номера гармоники k. При $k > m$ составляющие спектра малы и ими можно пренебречь.

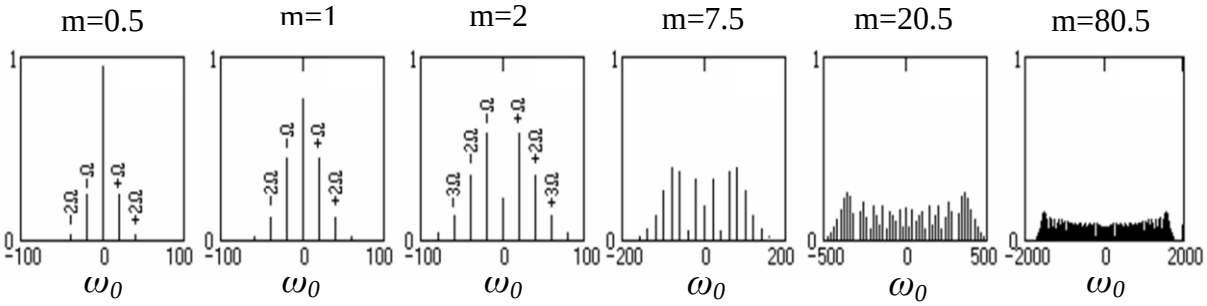


Рис. 7.2.5. Амплитудные спектры модулированных сигналов при разных индексах модуляции

Практическая ширина спектра сигнала с угловой модуляцией оценивается выражением:

$$П \approx 2m \cdot \Omega = 2 \cdot \omega_d \ . \qquad (7.2.22)$$

Отсюда следует, что по сравнению с AM-сигналами, полоса частот которых равна 2Ω, для передачи сигналов с угловой модуляцией требуется полоса частот, в m раз большая. Как можно заметить, при частотной модуляции ширина спектра сигнала практически не зависит от частоты модулирующего сигнала, а при фазовой модуляции ширина спектра сигнала зависит от частоты модулирующего сигнала. В этом и состоит различие в спектральных характеристиках $ЧМ$ и $ФМ$ при однотональном модулирующем сигнале.

7.2.3. Анализ спектра сигнала с многотональной угловой модуляцией

Анализ спектра сигнала при произвольной угловой модуляции не позволяет получить строгих аналитических выражений. Рассмотрим лишь общий анализ спектров сигнала с многотональной угловой модуляцией.

Обратимся к сигналу с угловой модуляцией, представленному выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \theta(t)\right]. \qquad (7.2.23)$$

При фазовой модуляции $\theta(t) = \mu \cdot s(t)$, и поэтому спектры функции $\theta(t)$ с точностью до постоянного коэффициента совпадают со спектром модулирующего сигнала $s(t)$.

При частотной модуляции функция $\theta(t)$ является интегралом от модулирующего сигнала. Так как интегрирование является линейным преобразованием, то спектр функции $\theta(t)$ состоит из тех же компонентов, что и спектр модулирующего сигнала $s(t)$, но с измененными амплитудами и фазами. Считая известным спектр функции $\theta(t)$, произведем анализ спектра модулированного сигнала $u(t)$. Для этого выражение (7.2.23) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cdot \cos\left[\theta(t)\right] \cdot \cos\left[\omega_0 t\right] - U_m \cdot \sin\left[\theta(t)\right] \cdot \sin\left[\omega_0 t\right] = \\ &= U_c(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + U_s(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \end{aligned} . \qquad (7.2.24)$$

Из (7.2.24) следует, что модулированный сигнал можно рассматривать как сумму двух квадратурных AM-колебаний. Закон амплитудной модуляции $U_c(t)$ и $U_s(t)$ определяется медленными функциями $\cos[\theta(t)]$ и $\sin[\theta(t)]$ соответственно.

Для нахождения спектра модулированного сигнала $u(t)$ необходимо найти спектры сигналов $U_C(t)$ и $U_S(t)$. Так как функции $\cos[\theta(t)]$ и $\sin[\theta(t)]$ являются нелинейными, то спектры этих сигналов могут существенно отличаться от спектра известных функций $\theta(t)$. В спектре присутствуют не только боковые частоты с гармониками частот модулирующего сигнала, но и гармоники со всеми возможными комбинациями частот модулирующего сигнала. Поэтому угловую модуляцию иногда называют модуляцией нелинейного типа.

7.3. Квадратурная и полярная модуляция сигналов

<u>Квадратурная модуляция сигналов.</u> Ранее были рассмотрели случаи, когда амплитуда и фаза гармонического колебания подвергались модуляции по отдельности. Однако можно изменять эти два параметра одновременно, получив за счет этого возможность передавать сразу два сигнала:

$$u(t) = U(t)\cdot\cos[\omega_0 t + \theta(t)]. \qquad (7.3.1)$$

Такую модуляцию можно было бы назвать амплитудно-фазовой. Однако два модулирующих сигнала оказываются неравноправными, так как они модулируют разные параметры несущего колебания. Однако можно сделать ситуацию более равноправной. Для этого раскроем косинус суммы:

$$u(t) = U(t)\cdot\cos[\theta(t)]\cdot\cos(\omega_0 t) - U(t)\cdot\sin[\theta(t)]\cdot\sin(\omega_0 t). \qquad (7.3.2)$$

Теперь сигнал оказался представленным в виде суммы двух АМ-колебаний. Их несущие колебания $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$ – сдвинуты по фазе на 90° друг относительно друга, а амплитудные функции равны $U(t)\cdot\cos[\theta(t)]$ и $-U(t)\cdot\sin[\theta(t)]$. Обозначим эти амплитудные функции, как $a(t)$ и $b(t)$, и используем их в качестве новой пары модулирующих сигналов:

$$u(t) = a(t)\cdot\cos(\omega_0 t) + b(t)\cdot\sin(\omega_0 t). \qquad (7.3.3)$$

Такое представление сигнала называется квадратурным, а данный способ модуляции – квадратурной модуляцией. Временная диаграмма сигнала при квадратурной модуляции изображена на рис. 7.3.1.

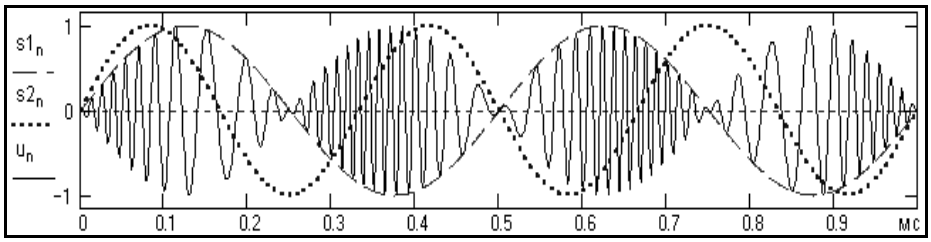


Рис. 7.3.1. Временная диаграмма сигнала при квадратурной модуляции

<u>Полярная модуляция.</u> В системе стереовещания необходимо передавать два сигнала одновременно (левый и правый каналы) при условии совмещения с монофоническими приемниками. Для выполнения этого условия создается специальный модулирующий сигнал. Процесс создания модулирующего сигнала поясняется на рис. 7.3.2.

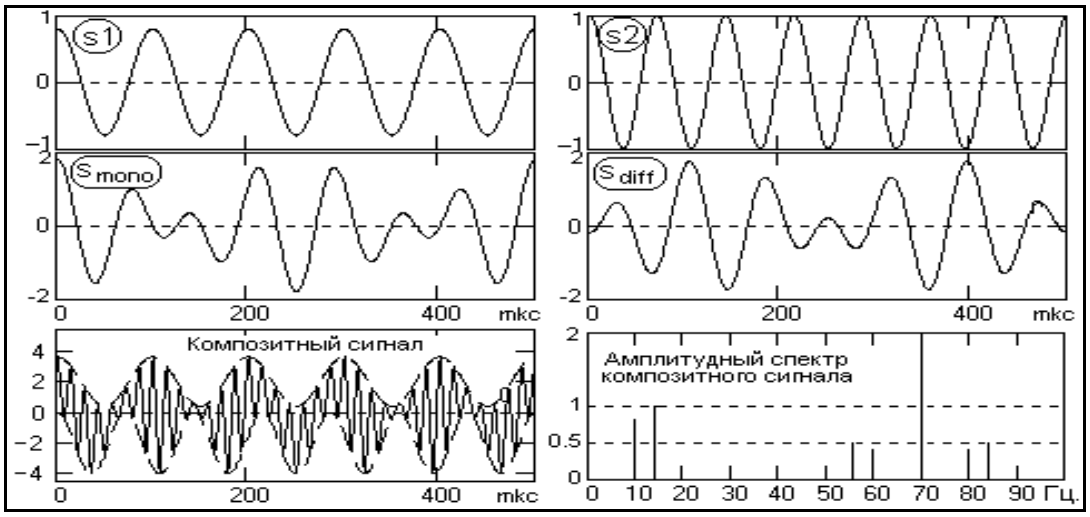


Рис. 7.3.2. Процесс создания модулирующего сигнала

В качестве канальных сигналов приняты моногармонические сигналы $s1(t)$ и $s2(t)$, изображенные в верхней части диаграммы. Специальный модулирующий сигнал формируется из двух сигналов – монофонического и разностного. Эти сигналы представлены диаграммами в средней части рисунка. Монофонический сигнал образуется суммой сигналов в каналах, а разностный – разностью сигналов:

$$s_{mono}(t) = s1(t) + s2(t), \quad s_{diff}(t) = s1(t) - s2(t) \ , \qquad (7.3.4)$$

что позволяет восстанавливать исходные сигналы каналов:

$$s1(t)=\left[s_{mono}(t)+s_{diff}(t)\right]/2,\quad s2(t)=\left[s_{mono}(t)-s_{diff}(t)\right]/2. \quad (7.3.5)$$

Далее формируется композитный сигнал. Чтобы сформировать такой сигнал, следует воспользоваться суммарно-разностным методом. Закон полярной модуляции задается выражением:

$$s_{кс}(t)=s_{mono}(t)+\left[A_{П}+s_{diff}(t)\right]\cdot\cos(\omega_{П}t). \quad (7.3.6)$$

Монофонический сигнал является основным и не изменяется по частоте, что позволяет принимать его монофоническим приемникам. Для одновременной передачи разностного сигнала монофонический сигнал суммируется с сигналом на поднесущей частоте $\omega_{П}$, которая располагается за звуковым диапазоном частот монофонических приемников (в области ультразвука). Этот сигнал модулируется разностным сигналом (с установкой коэффициента модуляции значением смещения $A_{П}$).

Легко проверить, что

$$s_{кс}(t)=\begin{cases}A_{П}+2\cdot s1(t), & если\ \cos(\omega_{П}t)=+1\\ -A_{П}+2\cdot s2(t), & если\ \cos(\omega_{П}t)=-1\end{cases}. \quad (7.3.7)$$

Композитный сигнал и его амплитудный спектр изображены в нижней части рис. 7.3.2. Как видно, верхняя и нижняя огибающие композитного сигнала с точностью до постоянной составляющей соответствуют первому и второму сигналу стереоканалов, что позволяет достаточно просто выделять эти сигналы на приемной стороне. Именно композитный сигнал используется в качестве модулирующего сигнала для любого метода модуляции, в том числе и для угловой модуляции, которая рассматривалась выше.

7.4. Модуляция кодовых данных

В настоящее время информация передается по каналам связи в основном в цифровой форме. Это означает, что передаче подлежит последовательность целых чисел, которые могут принимать значения из некоторого фиксированного конечного множества. Эти числа называются символами и поступают от источника информации с периодом T или символьной скоростью $f_T=1/T$. Каж-

дому из возможных символов устанавливается определенный набор параметров несущего колебания, которые поддерживаются постоянными на интервале T до прихода следующего символа. Такой способ модуляции несущей называется манипуляцией, и может выполняться с использованием всех рассмотренных методов модуляции.

Амплитудно-манипулированные сигналы простейшего типа представляют собой последовательности радиоимпульсов. На рис. 7.4.1. приведен пример формы классического *АМП*-сигнала при передаче нескольких символов, каждому из которых соответствует индивидуальная амплитуда несущей частоты при постоянной длительности интервалов посылки. Модуль спектра сигнала приведен на рис. 7.4.2 и имеет достаточно большую ширину вокруг несущей частоты.

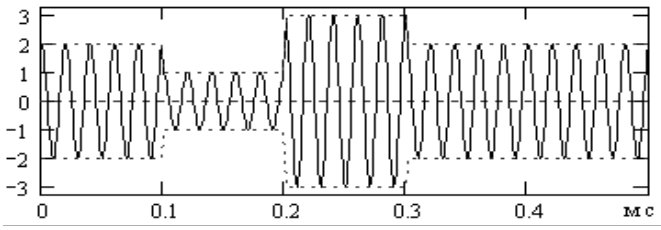


Рис. 7.4.1. *ФМП*-сигнал

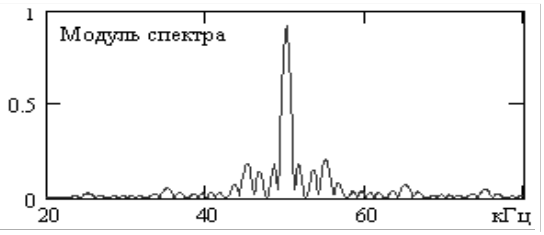


Рис. 7.4.2. Модуль спектра *ФМП*-сигнал

Угловая манипуляция, как правило, использует частотные методы модулирования, в которых каждому возможному значению передаваемого символа сопоставляется индивидуальное значение частоты гармонической несущей. Демодуляция сигналов осуществляется корреляционными методами. Сущность методов – вычисление взаимной корреляции между принимаемым сигналом и набором опорных частот, используемых при модуляции, с идентификацией символов по максимумам взаимной корреляции. Для повышения помехоустойчивости передачи данных желательно, чтобы разносимвольные посылки были некоррелированны. Если для бинарных символов *0* и *1* принять частоты посылок равными

$$s_0(t) = \cos\left[\omega_0(t)\right] \qquad и \qquad s_1(t) = \cos\left[\omega_1(t)\right], \tag{7.4.1}$$

то их ВКФ при нулевом временном сдвиге определится выражением:

$$R_{01}(0) = \int_0^T s_0(t)\cdot s_1(t)\,dt = \frac{\sin\left[(\omega_1+\omega_0)\cdot T\right]}{2(\omega_1+\omega_0)} + \frac{\sin\left[(\omega_1-\omega_0)\cdot T\right]}{2(\omega_1-\omega_0)}\ . \tag{7.4.2}$$

Первым слагаемым можно пренебречь, оно много меньше второго. Второе слагаемое обращается в нуль при

$$\left(\omega_1 + \omega_0\right) \cdot T = k \cdot \pi, \quad k = 1, 2, \ldots \ . \tag{7.4.3}$$

Отсюда, минимальное значение между частотами манипуляции для некоррелированных посылок определяется выражениями:

$$\Delta\omega_{\min} = \pi / T \quad \textit{или} \quad \Delta f_{\min} = f_T / 2 \ . \tag{7.4.4}$$

Фазовая манипуляция применяется значительно реже, в связи со значительными сложностями измерения абсолютных значений начальных фаз в посылках.

8. АНАЛИЗ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ

Узкополосными называются радиосигналы, у которых спектральная плотность $s(\omega)$ локализована в окрестности несущей частоты $\pm\omega_0$. Подобный сигнал называют сигналом с ограниченным спектром.

8.1. Формы математического представления узкополосного сигнала

Узкополосные сигналы представляют собой квазигармоническое колебание, получающееся при одновременной модуляции несущего гармонического сигнала как по амплитуде, так и по фазовому углу:

$$s(t) = U(t) \cdot \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right], \qquad (8.1.1)$$

где $U(t)$ – огибающая сигнала, $\varphi(t)$ – изменяющая во времени мгновенная фаза узкополосного сигнала. Функции времени $U(t)$ и $\varphi(t)$ являются низкочастотными.

Выполнив в выражении (8.1.1) простое преобразование, получим квадратурную форму представления узкополосного радиосигнала:

$$s(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - B(t) \cdot \sin(\omega_0 t), \qquad (8.1.2)$$

где

$$A(t) = U(t) \cdot \cos\left[\varphi(t)\right] \quad и \quad B(t) = U(t) \cdot \sin\left[\varphi(t)\right] \qquad (8.1.3)$$

квадратурные компоненты. Функцию $A(t)$ принято называть синфазной амплитудной огибающей, а функцию $B(t)$ – квадратурной амплитудной огибающей узкополосного сигнала.

Анализ узкополосных сигналов становится значительно проще при введении комплексной формы описания узкополосного сигнала. Для этого введем в рассмотрение комплексную огибающую сигнала, которая задается выражением:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= U(t) \cdot \exp\left[j \cdot \varphi(t)\right] = U(t) \cdot \left[\cos\left[\varphi(t)\right] + j \cdot \sin\left[\varphi(t)\right]\right] = \\ &= A(t) + j \cdot B(t) \end{aligned} \qquad (8.1.4)$$

Комплексная огибающая $\dot{U}(t)$ описывает как амплитудную, так и фазовую модуляцию узкополосного сигнала. Используя комплексную огибающую можно получить наиболее общую математическую модель узкополосного сигнала

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}\left[\varphi(t)\right](t) \cdot \exp(j\omega_0 t)\right]. \qquad (8.1.5)$$

Комплексная огибающая узкополосного сигнала определяется неоднозначно. Если вместо опорной частоты ω_0, входящей в формулу (8.1.5), взять некоторую частоту $\omega_0' = \omega_0 + \omega$, то радиосигнал $s(t)$ можно представить в виде выражения

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t) \cdot \exp(j \cdot \Delta\omega_0 \cdot t) \cdot \exp(j \cdot \Delta\omega_0' \cdot t)\right]. \qquad (8.1.6)$$

В этом случае новое описание комплексной огибающей будет определяться выражением:

$$\dot{U}'(t) = \dot{U}(t) \cdot \exp(j\Delta\omega \cdot t). \qquad (8.1.7)$$

Однако при этом огибающая сигнала, являющаяся модулем комплексной огибающей, остается неизменной, поскольку выражение $\exp(-j\Delta\omega \cdot t)$ имеет единичный модуль. В целом же следует помнить, что понятие комплексной огибающей имеет смысл только при указании опорной частоты ω_0, относительно которой эта комплексная огибающая вычислена.

В качестве примера рассмотрим простой радиоимпульс с прямоугольной амплитудной огибающей U_0, несущей частотой $\omega_н$, фазой φ_0 и длительностью $\tau_и$:

$$s(t) = U_0 \cdot \cos\left[\omega_н t + \varphi_0\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t) \cdot \exp(j\omega_н t)\right], \quad -\frac{\tau_и}{2} \le t \le \frac{\tau_и}{2}. \qquad (8.1.8)$$

Временная диаграмма анализируемого сигнала приведена на рис. 8.1.1, *а*. Если в качестве опорной частоты определено значение $\omega_0 = \omega_н$, то комплексная огибающая будет иметь вид, приведенный на рис. 8.1.1, *б*.

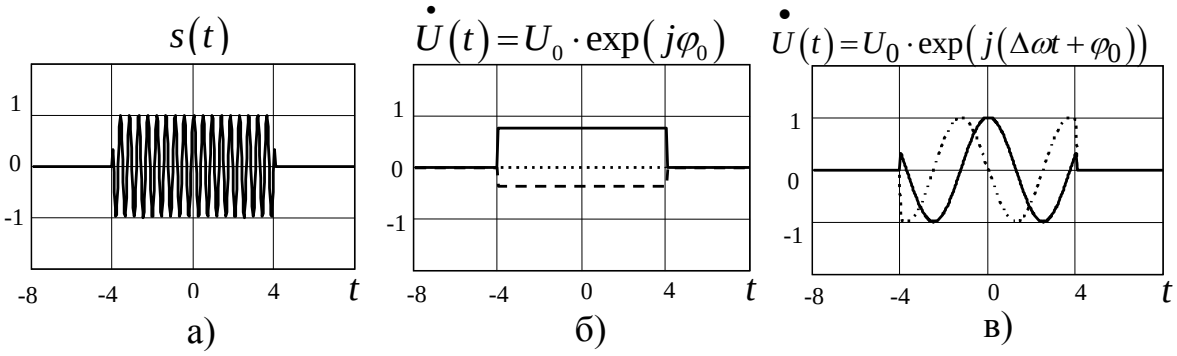


Рис. 8.1.1.
а) прямоугольный радиоимпульс;
б) комплексная огибающая прямоугольного радиоимпульса с частотой $\omega_0=\omega_н$;
в) комплексная огибающая прямоугольного радиоимпульса с частотой $\omega_0'=\omega_н+\Delta\omega$

При смещенной опорной частоте $\omega_0'=\omega_н+\Delta\omega$ вид комплексной огибающей сигнала представлен на рис. 8.1.1, *в*.

Спектральная плотность комплексной огибающей узкополосного радиосигнала

Спектральная плотность $G(\omega)$ комплексной огибающей $\dot{U}(t)$ узкополосного сигнала определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\cdot\exp(-j\omega\cdot t)dt\ . \qquad (8.1.9)$$

Выразим спектральную плотность $s(\omega)$ узкополосного сигнала $s(t)$ через спектральную плотность $G(\omega)$ комплексной огибающей. На основании (8.1.5) получаем:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot\exp(-j\omega\cdot t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot\exp(j\omega_0 t)\right]\cdot\exp(-j\omega\cdot t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\cdot\exp\left[-j(\omega-\omega_0)\cdot t\right]dt+ \qquad (8.1.10)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}^*(t)\cdot\exp\left[-j(\omega-\omega_0)\cdot t\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}G(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}G^*(-\omega-\omega_0)$$

Характерный вид амплитудного спектра узкополосного сигнала и комплексной огибающей представлен на рис. 8.1.2.

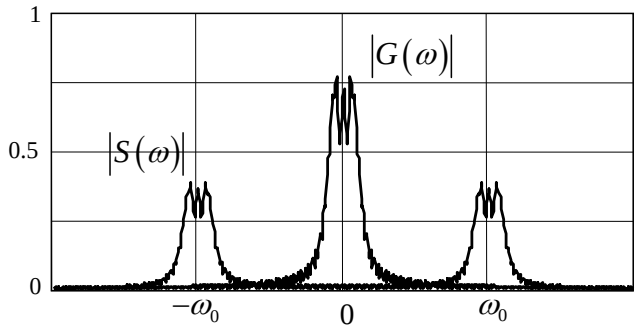


Рис. 8.1.2. Вид амплитудного спектра узкополосного сигнала и комплексной огибающей

Таким образом, спектральная плотность узкополосного сигнала $S(\omega)$ может быть найдена путем переноса спектра комплексной огибающей $G(\omega)$ из окрестности нулевой частоты в окрестность точек $\pm\omega_0$.

Огибающая, полная фаза и мгновенная частота радиосигнала

Комплексная огибающая является низкочастотным эквивалентом узкополосного радиосигнала и позволяет определить основные параметры радиосигнала.

Огибающую радиосигнала $U(t)$ можно выразить через синфазную и квадратурную огибающие узкополосного сигнала:

$$U(t)=\sqrt{A^2(t)+B^2(t)}\ . \qquad (8.1.11)$$

Полную фазу сигнала можно определить в соответствии с выражением:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + arctg\left[B(t)/A(t)\right]. \qquad (8.1.12)$$

Мгновенная частота сигнала определяется производной от полной фазы и связана с синфазной и квадратурной амплитудами узкополосного сигнала соотношением:

$$\omega(t) = \frac{d\left[\psi(t)\right]}{dt} = \omega_0 \frac{d\left[\varphi(t)\right]}{dt} = \omega_0 + \frac{d}{dt}\left[arctg\left(\frac{B(t)}{A(t)}\right)\right]. \qquad (8.1.13)$$

Корреляционная функция узкополосного сигнала

Запишем общее выражение корреляционной функции узкополосного радиосигнала:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t-\tau)dt \ . \qquad (8.1.14)$$

Подставив в (8.1.14) аналитическое описание узкополосного радиосигнала в форме (8.1.5), получим:

$$R_s(\tau) = \exp(-j \cdot \omega_0 \cdot \tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \cdot \dot{U}^*(t-\tau)dt. \qquad (8.1.15)$$

Входящий в выражение (8.1.15) интеграл есть корреляционная функция комплексной огибающей сигнала. Поэтому выражение (8.1.14) можно записать в форме:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\exp(-j \cdot \omega_0 \cdot \tau) \cdot R_U(\tau)\right] = \frac{1}{2} R_U(\tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \ . \qquad (8.1.16)$$

Таким образом, корреляционная функция узкополосного сигнала равна произведению корреляционных функций комплексной огибающей и гармонического косинусоидального колебания.

8.2. Спектрально-корреляционный анализ сложных сигналов

Основной характеристикой сигналов является его база. База сигнала определяется как произведение длительности сигнала на ширину его спектра: $B = \tau_u \cdot \Delta F$.

Если значение базы близко к единице, то такие сигналы называются простыми. Как известно, с уменьшением длительности сигнала расширяется его спектр, но произведение длительности сигнала на ширину его спектра остается неизменной. Однако можно сформировать сигнал большой длительности, одновременно имеющий и широкий спектр. У сложных сигналов значение базы много больше единицы. Рассмотрим наиболее распространенные сложные сигналы.

Сложные сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигналы)

Если закон изменения частоты радиоимпульса линейно возрастает во времени, то такие сигналы носят название сигналов с линейной частотной модуляцией (*ЛЧМ*-сигналы). Примем, что радиоимпульс центрирован относительно точки $t = 0$, а его длительность равна τ_u. Пусть частота радиоимпульса линейно нарастает от начала импульса к его концу со скоростью: $\mu = \Delta\omega / \tau_u = 2\pi \cdot \Delta f / \tau_u$.

Тогда *ЛЧМ*-сигнал может быть описан уравнением:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)\right] = \mathrm{Re}\left[U_0 \cdot \exp\left(j\frac{\mu \cdot t^2}{2}\right) \cdot \exp(j\omega_0 t)\right], \quad (8.2.1)$$

где $\dot{U}(t)$ – комплексная огибающая *ЛЧМ*-сигнала, описываемая выражением

$$\dot{U}(t) = U_0 \cdot \exp\left(j\frac{\mu \cdot t^2}{2}\right) \quad (8.2.2)$$

Временная диаграмма *ЛЧМ*-сигнала и вид его комплексной огибающей приведены на рис. 8.2.1, *а* и *б* соответственно.

Спектральная плотность *ЛЧМ*-сигнала вычисляется через преобразование Фурье. Модуль спектральной плотности имеет вид:

$$\left|S(\omega)\right| = U_0 \cdot \sqrt{\pi/(2\mu)}, \quad \omega_0 - \Delta\omega/2 \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega/2 . \quad (8.2.3)$$

На рис. 8.2.2, *а* приведен вид спектральной плотности ЛЧМ-сигнала при базе $B = 60$, а на рис. 8.2.2, *б* при базе $B = 120$. Здесь же для сравнения пунктирной линией представлены спектральные плотности простого радиоимпульса.

Как видно, при заданной длительности импульса девиация частоты позволила значительно расширить спектральную плотность *ЛЧМ*-сигнала. В пределах полосы частот $\Delta\omega$ модуль спектральной плотности практически постоянен и обращается в нуль вне этой полосы. Увеличение базы сигнала сопровождается расширением полосы спектра.

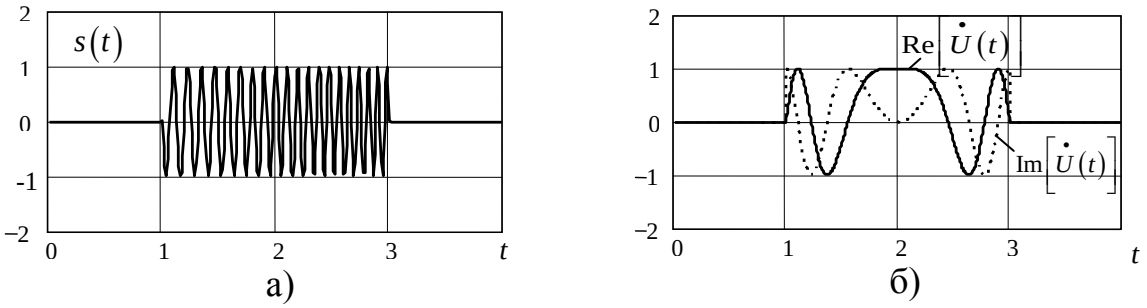


Рис. 8.2.1. ЛЧМ-сигнал:
а) временная диаграмма; б) комплексная огибающая

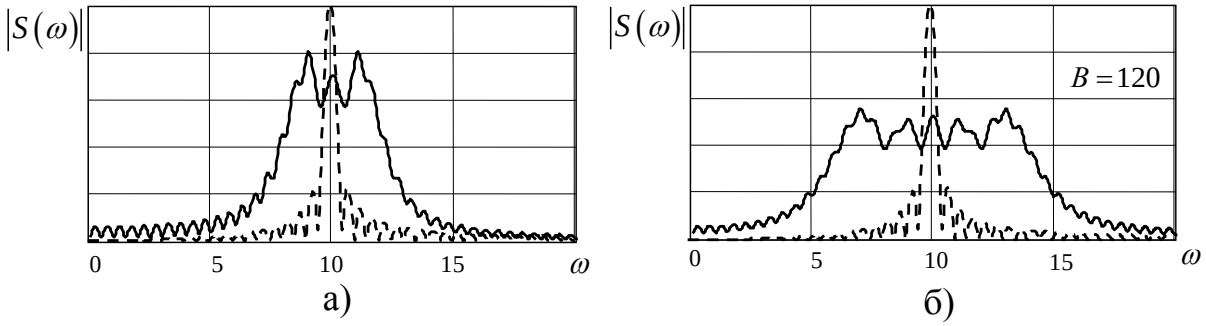


Рис. 8.2.2. Спектральная плотность *ЛЧМ*-сигнала:
а) база сигнала $B = 60$; б) база сигнала $B = 120$

Далее рассмотрим корреляционные характеристики *ЛЧМ*-сигнала. Принимая во внимание описание комплексной огибающей (8.2.2), получим корреляционную функцию комплексной огибающей:

$$R_U(\tau) = U_0^2 \cdot \tau_u \cdot \frac{\sin(\mu \cdot \tau_u \cdot \tau/2)}{\mu \cdot \tau_u \cdot \tau/2}. \qquad (8.2.4)$$

На основании (8.2.4) легко получить корреляционную функцию *ЛЧМ* -сигнала:

$$R_s(\tau) = \frac{U_0^2 \cdot \tau_u}{2} \cdot \frac{\sin(\mu \cdot \tau_u \cdot \tau/2)}{\mu \cdot \tau_u \cdot \tau/2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau). \qquad (8.2.5)$$

Графики автокорреляционной функции комплексной огибающей и *ЛЧМ* -сигнала приведены на рис. 8.2.3, *а* и *б* соответственно.

Огибающая *АКФ* простого радиоимпульса линейно возрастает и спадает с изменением задержки в пределах длительности импульса. Огибающая корреляционной функции *ЛЧМ* -импульса изменяется по закону функции $\sin(x)/x$. Ширина главного лепестка огибающей *АКФ* обратно пропорциональна девиации частоты радиоимпульса и первый раз обращается в нуль при сдвиге сигнала $\tau = 2\pi/(\mu \cdot \tau_u) = 1/\Delta f$. Как видно, изменение частоты радиоимпульса по линейному закону позволило значительно сузить главный лепесток корреляционной функции и тем самым повысить разрешающую способность сигнала по задержке.

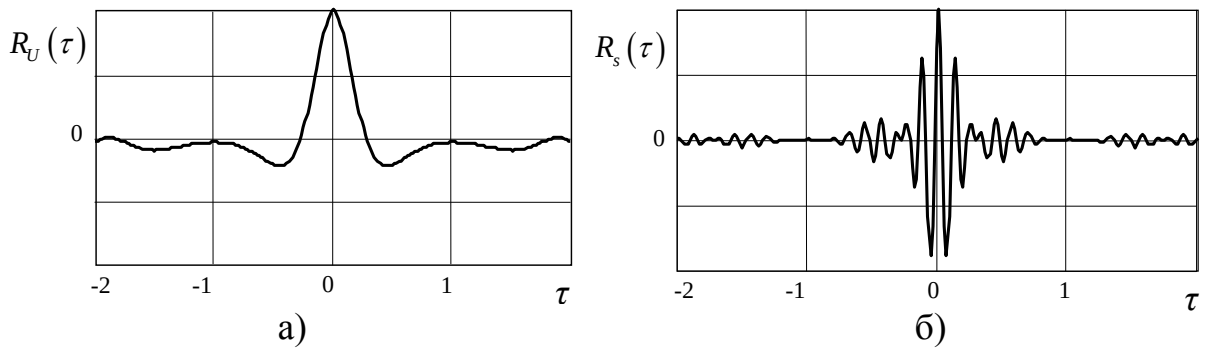


Рис. 8.2.3. Автокорреляционная функция:
а) комплексной огибающей; б) *ЛЧМ* -сигнала

Сложные дискретные фазоманипулированные сигналы

Дискретный фазоманипулированный сигнал представляет собой последовательность элементарных радиоимпульсов, повторяющихся с некоторым фиксированным временным интервалом. Модуляция всего сигнала заключается в манипулировании фазами отдельных радиоимпульсов. Наибольшее распространение получили сигналы, у которых фаза несущей частоты отдельных радиоимпульсов изменяется скачком на π. Такие сигналы называются бинарным фазоманипулированными сигналами. Для сложных бинарных фазоманипулиро-

ванных сигналов закон манипуляции фазы задается кодовой последовательностью $\{z_n\}$ длины N_z, символы которых принимают значения $z_n \in \pm 1$. При заданной длительности импульса τ_u и длине N_z кодовой последовательности длительность элементарных фазоманипулированных импульсов $u_0(t)$ равна $\Delta = \tau_u / N_z$.

Бинарный фазоманипулированный сигнал с несущей частотой ω_0 описывается выражением:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[U_0 \cdot \sum_{n=0}^{N_z-1} z_n \cdot u_0(t - n \cdot \Delta) \cdot \exp(j\omega_0 \cdot t) \right] = \\ = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t) \cdot \exp(j\omega_0 \cdot t) \right]. \qquad (8.2.6)$$

где $\dot{U}(t)$ – комплексная огибающая бинарного фазоманипулированного сигнала, описываемая выражением

$$\dot{U}(t) = U_0 \cdot \sum_{n=0}^{N_z-1} z_n \cdot u_0(t - n \cdot \Delta). \qquad (8.2.7)$$

В качестве примера временная диаграмма комплексной огибающей сигнала, построенной по закону кодовой последовательности Баркера $(1,1,1,-1,-1,1,-1)$ длины $N_z = 7$, и фазоманипулированного сигнала представлены на рис. 8.2.4, *а* и *б*.

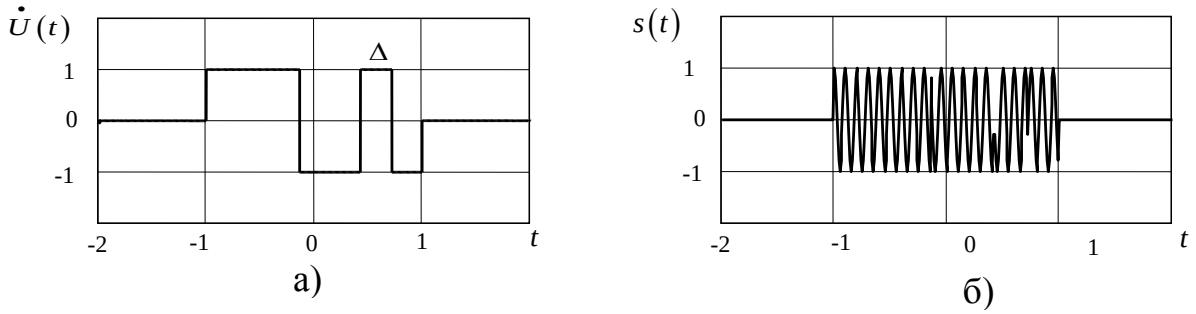


Рис. 8.2.4. Фазоманипулированный сигнал, построенный по закону кодовой последовательности Баркера:
а) комплексная огибающая сигнала;
б) временная диаграмма

Рассмотрим спектральные характеристики сложных дискретных фазоманипулированных сигналов. Спектральную плотность фазоманипулированных сигналов получают через преобразование Фурье. Обозначая через $U_0(\omega)$ спектральную плотность элементарного импульса $u_0(t)$ можно получить:

$$S(\omega)=U_0(\omega)\cdot\sum_{n=0}^{N_z-1} z_n\cdot\exp(-j\omega\cdot n\cdot\Delta)=U_0(\omega)\cdot z(\omega), \qquad (8.2.8)$$

где $z(\omega)$ называют спектром кодовой последовательности.

В качестве иллюстрации на рис. 8.2.5, *а* и *б* приведен вид спектральной плотности дискретного *ФМ*-сигнала при модуляции фазы по закону кодовой последовательности Баркера длиной $N_z=7$ и $N_z=13$ соответственно. Для сравнения на рисунках пунктирной линией представлены спектральные плотности простого радиоимпульса.

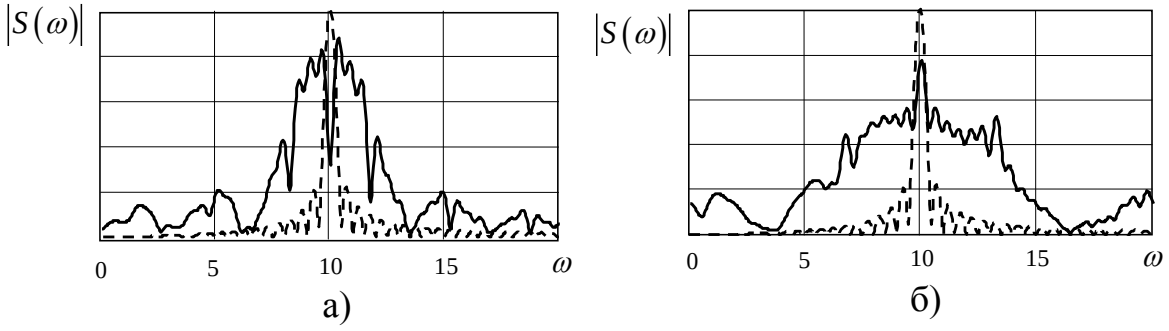


Рис. 8.2.5. Спектральная плотность сигнала, построенного по закону кодовой последовательности Баркера:
а) $N_z=7$; б) $N_z=13$

Можно видеть, что изменение фазы несущей частоты позволило расширить главный лепесток спектральной плотности сложного дискретного *ФМ*-сигнала. Чем больше длина кодовой последовательности и соответственно меньше длительность элементарного импульса, тем шире главный лепесток спектральной плотности фазоманипулированного импульса.

Далее перейдем к анализу корреляционных характеристик сложных дискретных *ФМ*-сигналов. Принимая дискретный характер задержек $\tau_m=m\cdot\Delta$ и описание комплексной огибающей (8.2.7), получим:

$$R_U(\tau_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\cdot\dot{U}^*(t-\tau)dt=k\cdot\sum_{n=0}^{N_z-1} z_n\cdot z_{n-m}^*. \qquad (8.2.9)$$

Таким образом, корреляционная функция комплексной огибающей дискретного *ФМ* -сигнала полностью определяется структурой кодовой последовательности.

Вычислив корреляционную функцию комплексной огибающей можно определить и корреляционную функцию дискретного *ФМ* -сигнала.

В качестве иллюстрации на рис. 8.2.6, *а* приведен вид корреляционной функции комплексной огибающей, модулированной по закону кодовой последовательности Баркера длиной $N_z = 7$, а на рис. 8.2.6, *б* – корреляционная функция дискретного фазоманипулированного сигнала. Ширина главного лепестка автокорреляционной функции определяется длительностью дискрета $\Delta = \tau_u / N_z$ элементарного импульса.

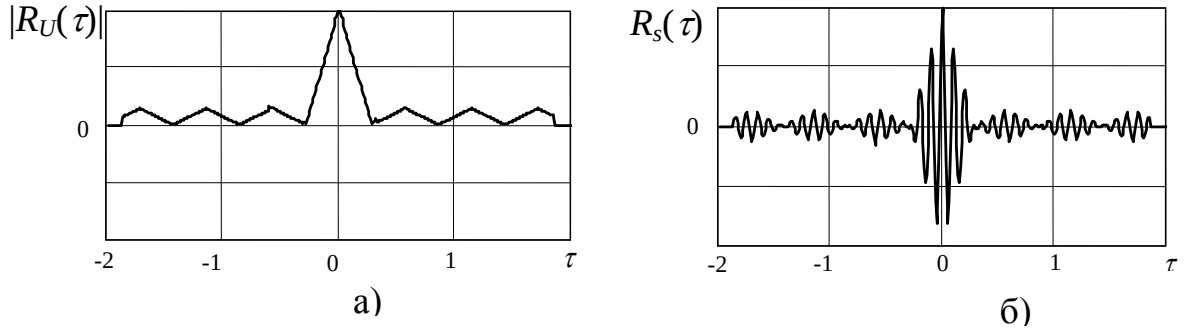


Рис. 8.2.6. Корреляционная функция
а) комплексной огибающей, модулированной
по закону кодовой последовательности Баркера длиной $N_z = 7$,
б) дискретного фазоманипулированного сигнала

Таким образом, рассмотренный метод определения корреляционных функций узкополосных сигналов на основе их комплексных огибающих имеет большую значимость в теории сигналов.

8.3. Аналитический сигнал

В общем случае, узкополосный сигнал $s(t)$ имеет двустороннюю спектральную плотность $S(\omega)$, локализованную в окрестности несущей частоты $\pm\omega_0$. Полную информацию о сигнале $s(t)$ содержит как левая (отрицательные частоты), так и правая (положительные частоты) части спектральной плотности $S(\omega)$, то справедливо выражение:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega. \quad (8.3.1)$$

Сигнал, определенный преобразованием второго интеграла в выражении (8.3.1)

$$z(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega \qquad (8.3.2)$$

называется аналитическим сигналом. Аналитический сигнал всегда является комплексным и может быть представлен в виде суммы исходного синфазного и квадратурного сигналов

$$z(t)=s(t)+j\cdot s_{\perp}(t)\ . \qquad (8.3.3)$$

Аналогичное преобразование первого интеграла выражения (8.3.1) дает комплексно сопряженный аналитический сигнал:

$$z^{*}(t)=s(t)+j\cdot s_{\perp}(t). \qquad (8.3.4)$$

Квадратурный сигнал $s_{\perp}(t)$ представляет собой свертку исходного сигнала $s(t)$ с оператором или функцией Гильберта $hb(t)=1/(\pi\cdot t)$:

$$s_{\perp}(t)=-s(t)^{*}hb(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_{\perp}(t')}{t-t'}dt'\ . \qquad (8.3.5)$$

Аналогично можно выразить исходный сигнал $s(t)$ через квадратурный сигнал $s_{\perp}(t)$:

$$s_{\perp}(t)=-s_{\perp}(t)^{*}hb(t)=-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_{\perp}(t')}{t-t'}dt'. \qquad (8.3.6)$$

Приведенные выражения (8.3.5) и (8.3.6) называются прямым и обратным преобразованиями Гильберта.

Пример преобразования Гильберта прямоугольного радиоимпульса представлен диаграммами на рис. 8.3.1.

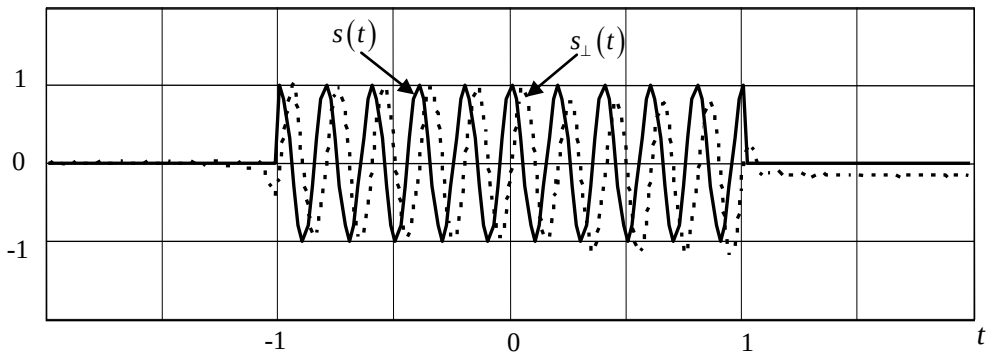


Рис. 8.3.1. Преобразование Гильберта прямоугольного радиоимпульса

Исходный и квадратурный сигналы связаны следующими важными свойствами:

Энергетическая эквивалентность: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_{\perp}(t)\,dt$;

Свойство ортогональности: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\cdot s_{\perp}^2(t)\,dt = 0$.

Зная временную функцию Гильберта, можно определить и частотную характеристику преобразования Гильберта:

$$Hb(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} hb(t)\cdot\exp(-j\omega\cdot t)\,dt = \begin{cases} j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j, & \omega > 0 \end{cases} . \qquad (8.3.7)$$

График частотной функции Гильберта приведен на рис. 8.3.2, *а*, а основной участок формы оператора Гильберта на рис. 8.3.2, *б*.

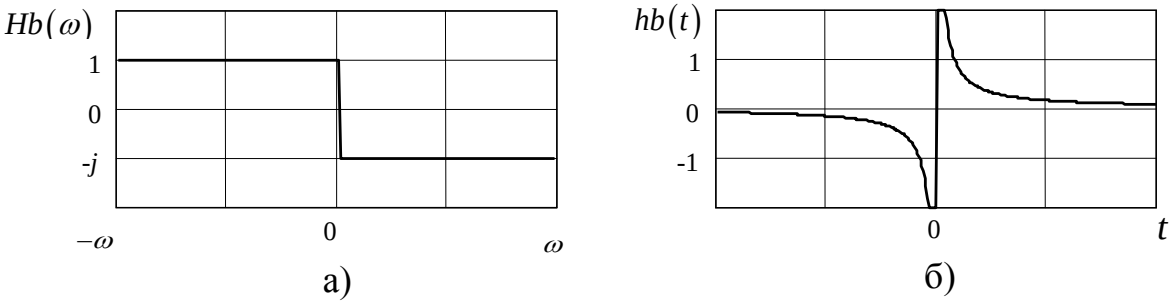


Рис. 8.3.2.
а) частотная функция Гильберта;
б) основной участок формы оператора Гильберта

Модуль частотной характеристики Гильберта $\left|Hb(\omega)\right|$ равен единицы на всех частотах, кроме нулевой частоты. Это означает, что преобразование Гильберта не меняет амплитудных соотношений в спектре сигнала, лишь удаляя из него постоянную составляющую.

Спектральная плотность аналитического сигнала

Как следует из (8.3.7), частотная характеристика преобразования Гильберта $Hb(\omega)$ фазы всех спектральных составляющих уменьшает на угол 90° в области положительных частот и увеличивает на угол 90° в области отрицательных частот. В силу этого спектральные плотности исходного и квадратурного сигналов связаны между собой следующим соотношением:

$$S_\perp(\omega) = Hb(\omega)\cdot S(\omega) = \begin{cases} j\cdot S(\omega), & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j\cdot S(\omega), & \omega > 0 \end{cases}. \qquad (8.3.8)$$

С учетом соотношения (8.3.3) получаем спектральную плотность аналитического сигнала $z(t)$:

$$Z(\omega) = S(\omega) + j\cdot S_\perp(\omega) = \begin{cases} 2\cdot S(\omega) & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}. \qquad (8.3.9)$$

Спектральную плотность аналитического сигнала отлична от нуля только в области положительных частот и ее значение равно удвоенному значению спектральной плотности сигнала $s(t)$. В области отрицательных частот суммирование спектральных плотностей исходного и квадратурного сигналов приводит к их взаимной компенсации.

В качестве иллюстрации на рис. 8.3.3 приведен пример амплитудного спектра узкополосного сигнала и соответствующему ему спектр $\left|Z(\omega)\right|$ аналитического сигнала. Сопоставляя спектральные плотности комплексной огибающей $G(\omega)$ и аналитического сигнала $Z(\omega)$ можно видеть, что они полностью совпадают по форме, но спектральная плотность аналитического сигнала располагается в области положительных частот.

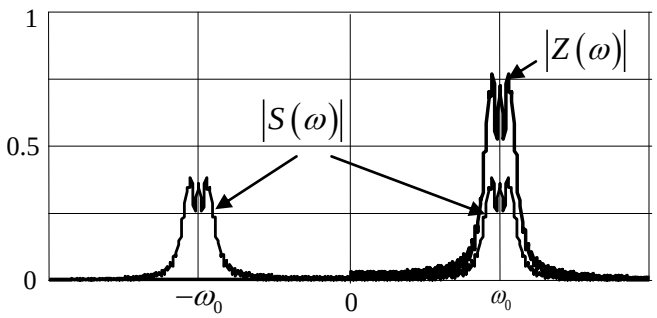


Рис. 8.3.3. Амплитудный спектр $|S(\omega)|$ узкополосного сигнала и соответствующему ему спектр $|Z(\omega)|$ аналитического сигнала

Аналитический сигнал представляет собой новую математическую модель, полезную при исследовании узкополосных сигналов. Он позволяет ввести в анализ понятия огибающей и мгновенной частоты сигнала без той степени неопределенности, которая свойственна методу комплексной огибающей.

<u>Огибающая, полная фаза и мгновенная частота сигнала</u>

Огибающая произвольного сигнала $s(t)$ равна модулю соответствующего аналитического сигнала и определяется выражением:

$$U_s(t) = |z(t)| = \sqrt{s^2(t) + s_\perp^2(t)}. \qquad (8.3.10)$$

Полную фазу сигнала можно выразит через аргумент аналитического сигнала в соответствии с выражением:

$$\psi(t) = \arg\left[z(t)\right] = arctg\left[s_\perp(t)/s(t)\right]. \qquad (8.3.11)$$

Мгновенная частота сигнала определяется по скорости изменения мгновенной фазы:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \approx \frac{s'_\perp(t)\cdot s(t) - s'(t)\cdot s_\perp(t)}{s_\perp^2(t) + s^2(t)}\ . \qquad (8.3.12)$$

Корреляционная функция аналитического сигнала определяется выражением

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \cdot z^*(t-\tau)\, dt. \qquad (8.3.13)$$

Подставив в (8.3.13) выражение аналитического сигнала (8.3.3), получим:

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) + j \cdot \tilde{s}(t) \right] \cdot \left[s(t-\tau) - j \cdot \tilde{s}(t-\tau) \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) \cdot s(t-\tau) \right] dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{s}(t) \cdot \tilde{s}(t-\tau) \right] dt - \\ &- j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) \cdot \tilde{s}(t-\tau) \right] dt + j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{s}(t) \cdot s(t-\tau) \right] dt = \\ &= R_s(\tau) + R_{\tilde{s}}(\tau) + j \cdot \left[R_{s,\tilde{s}}(\tau) - R_{\tilde{s},s}(\tau) \right] \end{aligned} \qquad (8.3.14)$$

Как известно, корреляционная функция узкополосного радиосигнала полностью определяется модулем его спектральной плотности. Так как модули спектральной плотности исходного $s(t)$ и квадратурного $\tilde{s}(t)$ сигналов идентичны, то первые две автокорреляционные функции одинаковы и суммируются. В то же время две взаимно корреляционные функции уничтожаются. Поэтому из (8.3.14) следует соотношение:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[R_z(\tau) \right] . \qquad (8.3.15)$$

Следовательно, корреляционная функция узкополосного сигнала равна с точностью до постоянного множителя реальной части корреляционной функции аналитического сигнала.

8.4. Узкополосные случайные сигналы

Класс случайных процессов $X(t)$, спектр мощности $W_x(\omega)$ которых сосредоточен в относительно узкой полосе вблизи некоторой центральной частоты ω_0, называется узкополосным случайным процессом. Отдельные реализации узкополосного случайного процесса представляют собой квазигармонические колебания, описываемые выражением

$$x(t) = A(t) \cdot \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right] , \qquad (8.4.1)$$

в котором как огибающая $A(t)$, так и фаза $\varphi(t)$ являются случайными функциями, медленно изменяющимися во времени. В качестве иллюстрации на рис. 8.4.1, а) приведена типовая осциллограмма реализации узкополосного случайного сигнала, а на рис. 8.4.1, б) его спектр мощности $W_x(\omega)$.

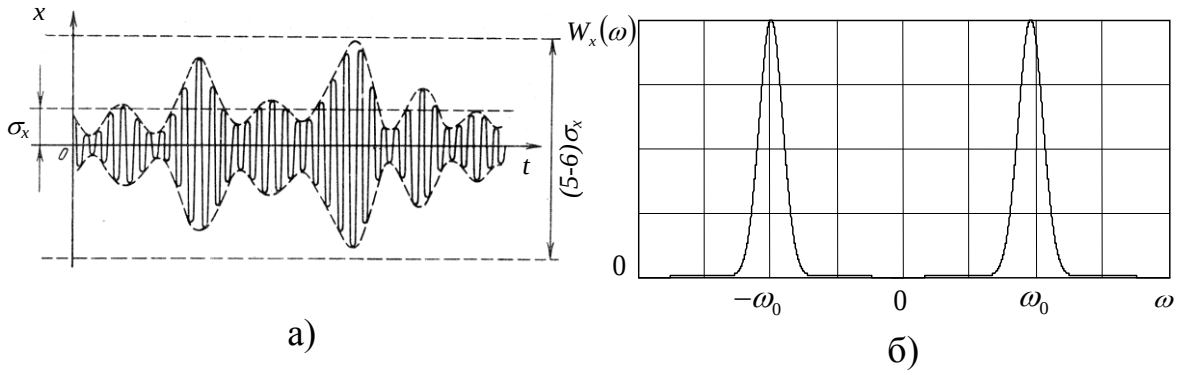


Рис. 8.4.1. Узкополосный случайный сигнал:
а) осциллограмма реализации; б) спектр мощности

Будем полагать, что спектр мощности симметричен относительно центральной частоты. Узкополосный характер спектра $W_x(\omega)$ говорит о том, что корреляционная функция $R_x(\tau)$ случайного сигнала имеет вид, представленный на рис. 8.4.2, и описывается выражением:

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \rho_0(\tau) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \ . \qquad (8.4.2)$$

Функция $\rho_0(\tau)$ играет роль огибающей, которая изменяется медленно по сравнению с множителем $\cos(\omega_0 \tau)$.

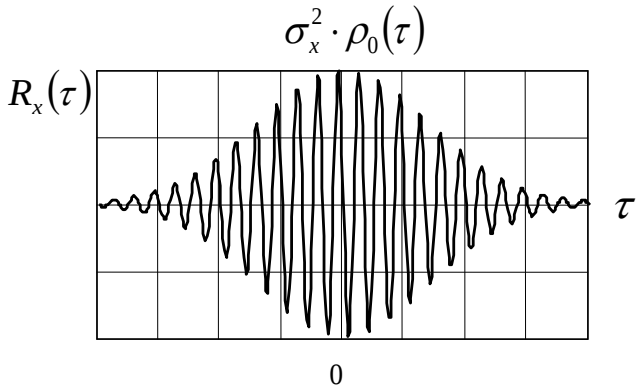


Рис. 8.4.2. Корреляционная функция случайного процесса

<u>Статистические характеристики узкополосного случайного процесса</u>

Будем считать узкополосный случайный процесс стационарным, нормальным и центрированным. Рассмотрим случайный сигнал $x(t)$ и соответствующий ему аналитический сигнал $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t) \ , \qquad (8.4.3)$$

где $\tilde{x}(t)$ – сопряженный случайный сигнал, реализации которого связаны преобразованием Гильберта. С помощью аналитического сигнала можно определить мгновенные значения огибающей и полной фазы узкополосного сигнала:

$$A(t) = |z(t)| = \sqrt{x(t)^2 + \tilde{x}(t)^2}, \qquad \varphi(t) = \arg\left[z(t)\right] \ . \qquad (8.4.4)$$

Установим статистические характеристики огибающей и полной фазы узкополосного случайного процесса. Поскольку преобразование Гильберта является линейным интегральным преобразованием, то и сопряженный сигнал $\tilde{x}(t)$ будет нормальным, а энергетические спектры реализаций $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ совпадают. Корреляционные функции связаны со спектрами плотности мощности обратным преобразованием Фурье, поэтому они тоже равны. Взаимная корреляция случайных сигналов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ равна нулю. Поэтому из некоррелированности случайных процессов следует статистическая их независимость.

Поскольку мгновенные значения сигналов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ статистически независимы и имеют нормальные распределения с одинаковыми дисперсиями и нулевым средним, то совместная плотность вероятности процессов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ равна произведению их одномерных плотностей вероятности и определяется выражением:

$$p(x, \tilde{x}) = p(x) \cdot p(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{x^2 + \tilde{x}^2}{2\sigma_x^2}\right) . \qquad (8.4.5)$$

Чтобы получить двумерную плотность вероятности $p(A, \varphi)$ огибающей и фазы, следует выполнить функциональное преобразование декартовых координат в полярные, которое описывается следующими формулами:

$$x = A_c = A \cdot \cos(\varphi) \quad \text{и} \quad \tilde{x} = A_c = A \cdot \sin(\varphi). \tag{8.4.6}$$

Вероятность попадания в бесконечно малую область в окрестности каждой точки комплексной плоскости при смене системы координат остается не изменой. Площадь такой бесконечно малой области в декартовых координатах равна $dA_c \cdot dA_s$, а в полярных – $A \cdot dA \cdot d\varphi$. Рассматриваемое функциональное преобразование изображено на рис. 8.4.3.

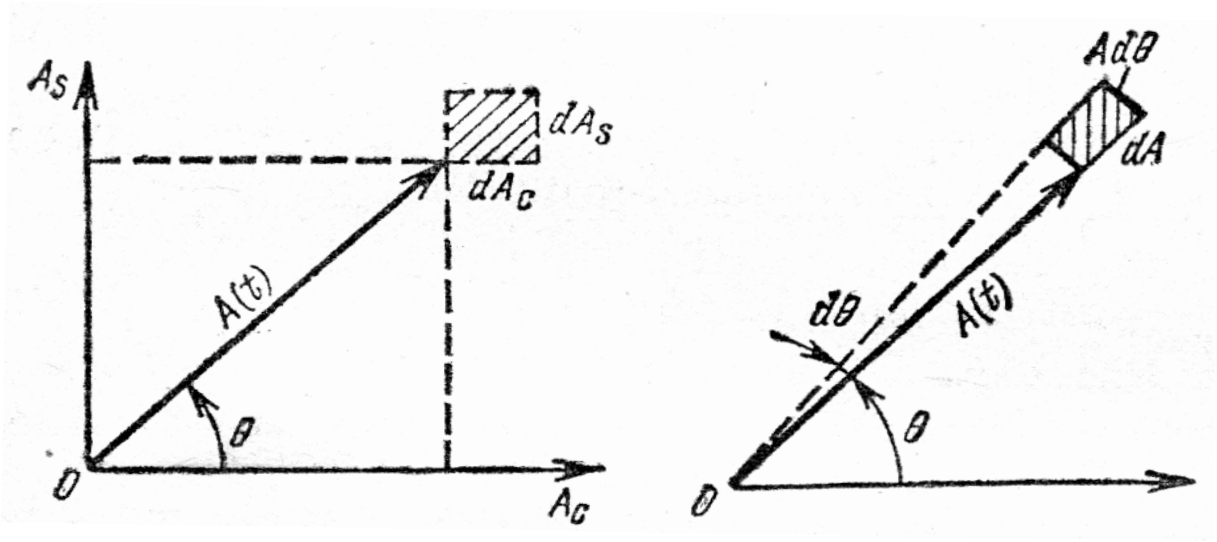


Рис. 8.4.3. Функциональное преобразование
при получении совместную плотность вероятности огибающей и фазы

Таким образом, получаем совместную плотность вероятности огибающей и фазы:

$$p(A,\varphi) = A \cdot p\big(A \cdot \cos(\varphi), A \cdot \sin(\varphi)\big) =$$
$$= \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{\left[A \cdot \cos(\varphi)\right]^2 + \left[A \cdot \sin(\varphi)\right]^2}{2\sigma_x^2} \right) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2} \right). \tag{8.4.7}$$

Чтобы найти одномерные плотности вероятности для огибающей и фазы, отдельно нужно проинтегрировать двумерную плотность по неинформативным параметрам:

$$p(A) = \int_0^{2\pi} p(A,\varphi)\, d\varphi \quad \text{и} \quad p(\varphi) = \int_0^{\infty} p(A,\varphi)\, dA \quad . \tag{8.4.8}$$

Одномерная плотность вероятности амплитуды будут определяться выражением:

$$p(A)=\int_0^{2\pi}\frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)d\varphi=\frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right). \qquad (8.4.9)$$

Полученное распределение огибающей называется ***<u>законом распределения Рэлея</u>***.

Плотность вероятности огибающей изображена на рис.8.4.4.

Наивероятнейшее значение огибающей сигнала $p(A)$ получается при значениях $A=\sigma_x$. Среднее значение огибающей

$$M\{A\}=\int_0^{\infty}A\cdot p(A)\,dA=\sqrt{\pi/2\cdot\sigma_x}\ . \qquad (8.4.10)$$

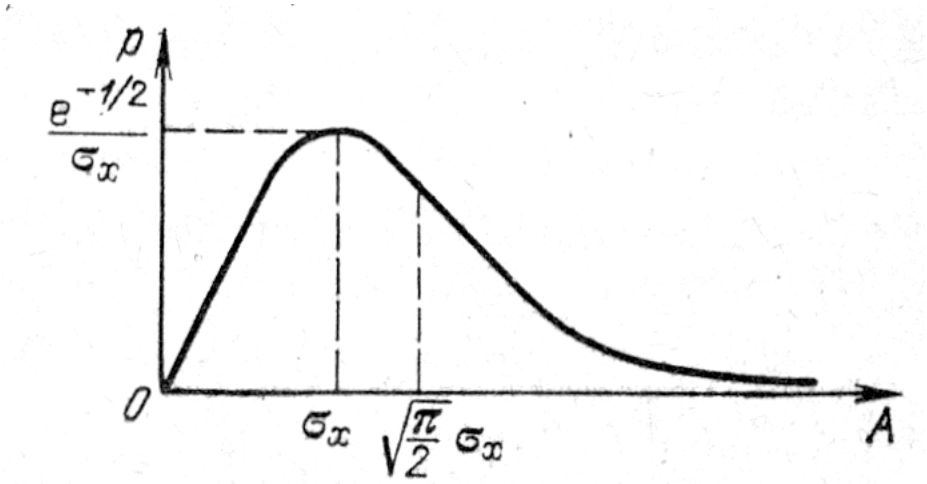


Рис. 8.4.4. Плотность вероятности огибающей случайного процесса

Одномерная плотность вероятности фазы будет определяться выражением:

$$p(\varphi)=\int_0^{\infty}\frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=\frac{1}{2\pi} \qquad (8.4.11)$$

и имеет ***<u>равномерный закон распределения</u>***.

Из полученных выражений (8.4.7), (8.4.9) и (8.4.11) видно, что совместная плотность вероятности огибающей и фазы равна произведению их одномерных плотностей. Поэтому, амплитуда и фаза узкополосного случайного сигнала являются статистически независимыми.

Статистические характеристики аддитивной смеси детерминированного сигнала и узкополосного случайного процесса

Рассмотрим теперь ситуацию, когда на детерминированный сигнал накладывается узкополосный случайный сигнал. Комплексный случайный процесс в данном случае описывается выражением:

$$z(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) + x(t) + j\tilde{x}(t) \ . \qquad (8.4.12)$$

Совместная плотность вероятности вещественной и мнимой частей комплексного процесса (8.4.12) будет отличаться от (8.4.5) наличием смещений для $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$, равных $s(t)$ и $\tilde{s}(t)$ соответственно. Поэтому можно записать:

$$p_{x,\tilde{x}}(x,\tilde{x}) = p_x(x)\, p_{\tilde{x}}(\tilde{x}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{\left(x(t) - s(t)\right)^2 - \left(\tilde{x}(t) - s(t)^2\right)}{2\sigma_x^2} \right). \qquad (8.4.13)$$

Переход от декартовой системе координат к полярной системе дает следующее выражение:

$$p_{A\varphi}(A,\varphi) = A \cdot p_{x\,\hat{x}}\left(A\cos(\varphi), A\sin(\varphi)\right) =$$
$$= \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{\left(A\cos(\varphi) - s(t)\right)^2 - \left(A\sin(\varphi) - \tilde{s}(t)\right)^2}{2\sigma_x^2} \right) . \qquad (8.4.14)$$

Интегрирование этой двумерной плотности по фазе φ дает одномерную плотность вероятности для амплитуды данного случайного процесса:

$$p_A(A) = \int_0^{2\pi} p_{A\varphi}(A)\, d\varphi = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2 + S_m^2}{2\sigma_x^2} \right) \cdot I_0\left(\frac{AS_m}{\sigma_x^2} \right) , \qquad (8.4.14)$$

где $S_m = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$ – огибающая детерминированного сигнала; I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Плотность вероятности (8.4.14) носит название ***закона распределения Рэлея – Райса.*** Графики данной плотности вероятности, соответствующие разным отношениям сигнал/шум, то есть разным значениям S_m/σ_x, показаны на рис. 8.4.5.

При $S_m = 0$ получается плотность вероятности, соответствующая закону Рэлея. При $S_m/\sigma_x >> 3$ распределение огибающей приближается к нормальному закону.

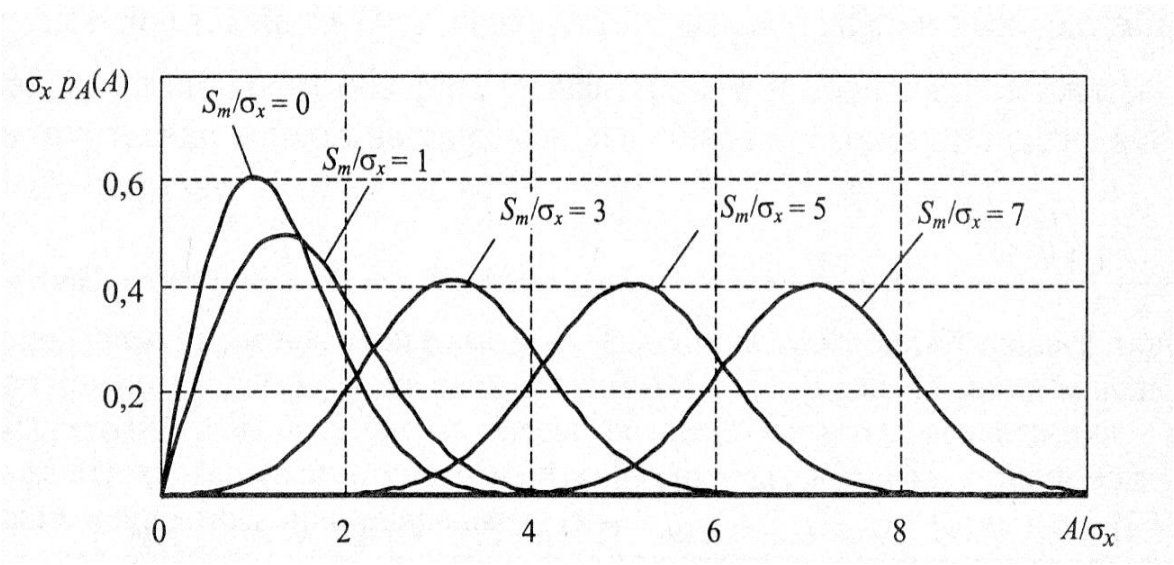


Рис. 8.4.5. Плотность вероятности случайного процесса с с законом распределения Рэлея – Райса для разных отношений сигнал/шум

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал настоящего пособия предназначен для изучения его на лекционных занятиях. Углубленное и более детальное изучение основных теоретических разделов выполняется студентами при выполнении заданий лабораторного цикла в ходе компьютерного моделированиы сигналов и исследования их спектрально-корреляционных свойств, а также при самостоятельном выполнении заданий курсового проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоноровский, И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И. М. Гоноровский. 5-е изд., испр. М.: Дрофа, 2006. 719 с.

2. *Баскаков, С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для студентов вузов по спец. «Радиотехника» / С. И. Баскаков. 5-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2005. 462 с.

3. *Каганов, В. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. Компьютерный курс.: учеб. пособие / В. И. Каганов. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005. 432 с.

4. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения / под ред. В. Н. Ушакова. СПб.: Питер, 2014. 336 с.

Учебное издание

Быстров Николай Егорович
Жукова Ирина Николаевна

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Часть 1
Радиотехнические сигналы

Учебное пособие

Редактор *Е. В. Ефимова*
Компьютерная верстка *И. В. Шкворова*

Подписано в печать. 23.12.2016. Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,8. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 300 экз. Заказ №
Издательско-полиграфический центр Новгородского
государственного университета им. Ярослава Мудрого.
173003, Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.
Отпечатано в ИПЦ НовГУ. 173003, Великий Новгород,
ул. Б. Санкт-Петербургская, 41