

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

*Конспект лекций*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО»

---

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

*Конспект лекций*

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД  
2017

УДК 621.316  
ББК  
Т34

Печатантся по решению  
кафедры Радиосистем  
НовГУ

**Р е ц е н з е н т**

кандидат технических наук **А. В. Кузнецов**

**Т34**      **Теоретические** основы электротехники. Конспект лекций /  
сост. Социлин А.В.; НовГУ имени Ярослава Мудрого. – Великий  
Новгород. – 2017. – 230 с.

Конспект лекций содержит основные положения дисциплины  
«Теоретические основы электротехники».

Предназначен студентам, обучающимся по направлению  
11.03.04 – Электроника и нанoeлектроника.

УДК 621.316  
ББК

© Новгородский государственный  
университет, 2017

© А. В. Социлин, составление,  
2017

## Содержание

<b>Введение</b> .....	5
<b>Лекция 1.</b> Краткий исторический очерк развития науки об электрических и магнитных явлениях и их практическом применении. Основные этапы развития электротехники и ее теоретических основ.....	6
<b>Лекция 2.</b> Основные термины и определения. Режимы работы электрических цепей. Основные законы электрических цепей .....	10
<b>Лекция 3.</b> Эквивалентные преобразования схем .....	29
<b>Лекция 4.</b> Анализ электрических цепей постоянного тока с одним источником энергии .....	37
<b>Лекция 5.</b> Анализ сложных электрических цепей с несколькими источниками энергии .....	41
<b>Лекция 6.</b> Нелинейные электрические цепи постоянного тока .....	55
<b>Лекция 7.</b> Электрические цепи однофазного переменного тока .....	65
<b>Лекция 8.</b> Трехфазные цепи .....	102
<b>Лекция 9.</b> Переходные процессы в линейных электрических цепях ...	114
<b>Лекция 10.</b> Магнитные цепи .....	136
<b>Лекция 11.</b> Трансформаторы .....	142
<b>Лекция 12.</b> Четырехполюсники .....	156
<b>Лекция 13.</b> Периодические сигналы несинусоидальной формы .....	164
<b>Заключение</b> .....	176
<b>Литература</b> .....	256

## Введение

Пособие содержит в краткой форме основные положения по дисциплине «Теоретические основы электротехники». Методика преподавания курса ориентирована на широкое применение средств вычислительной техники, проекционной аппаратуры и программных продуктов по моделированию электрических цепей, таких как **Circuit Simulator, Beginnings of ELECTRONICS** и **NI Multisim 12**.

## Лекция 1

### Краткий исторический очерк развития науки об электрических и магнитных явлениях и их практическом применении. Основные этапы развития электротехники и ее теоретических основ

*Электротехника* - наука о практическом применении электрических и магнитных явлениях природы и законов, их описывающих.

Начала электротехники заложили ученые XVIII и XIX столетий, когда был сделан ряд важных открытий в области изучения электромагнетизма и изобретений, связанных с его применением.

Во второй половине XVIII в. были проведены замечательные работы в области изучения электрических явлений академиками Петербургской Академии наук **М. В. Ломоносовым**, **Г. В. Рихманом** и **Ф. У. Т. Эпинусом**.



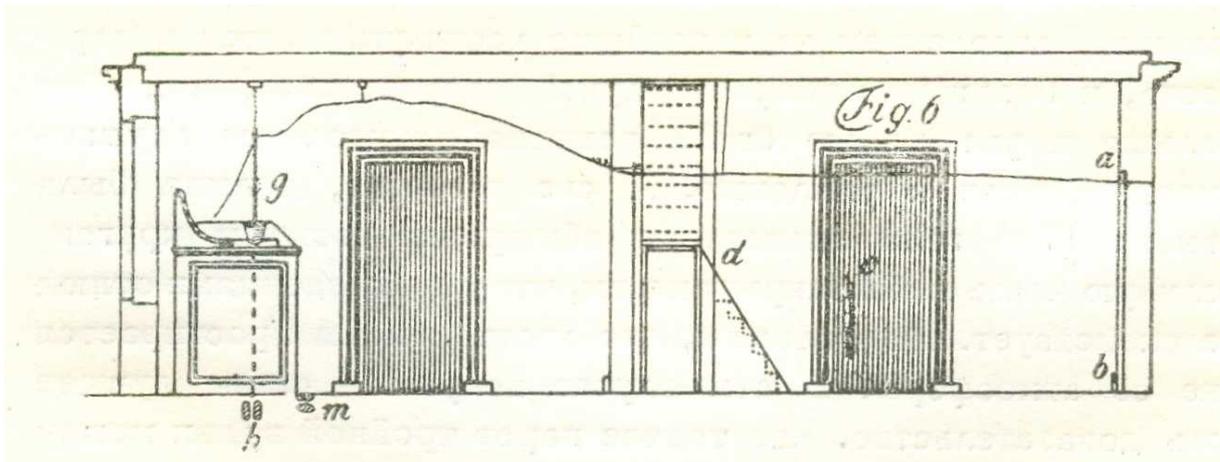
М.В.Ломоносов [15]

Примечание. Список источников иллюстраций помещен в конце лекции.

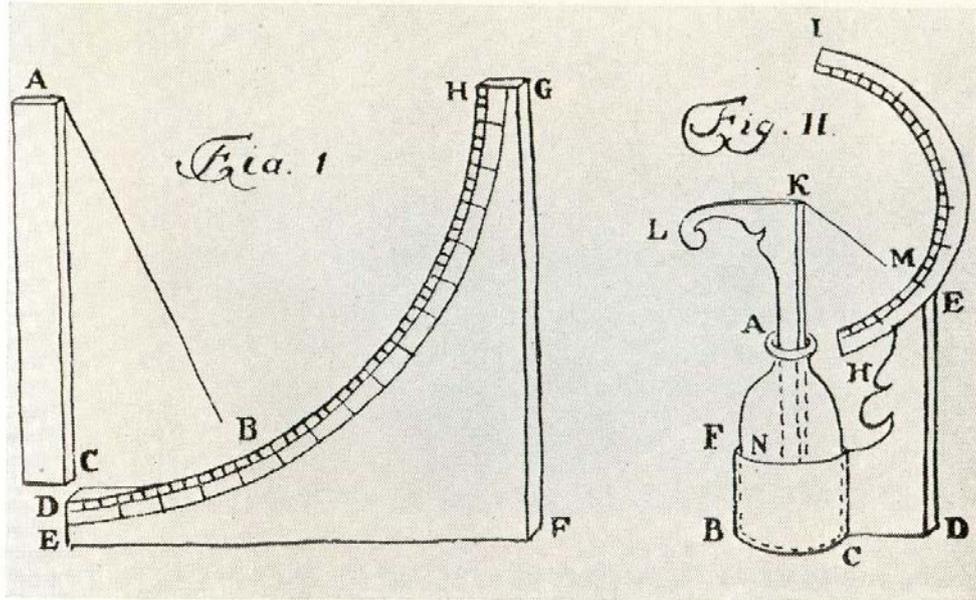


Г. В. Рихман [1]

**Г. В. Рихман** начал работу по изучению электрических явлений в 1744 г., стремясь получить возможность количественно измерять электричество. Для этого им был построен прибор, явившийся первым в мировой практике электрометром.

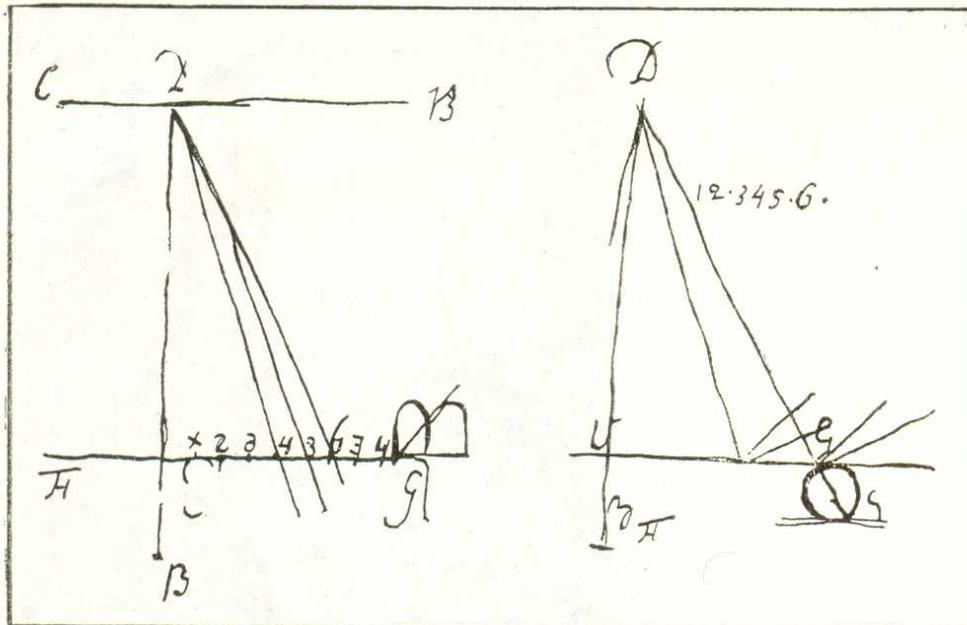


"Грозовая машина" Г. В. Рихмана [1]



Чертежи электрометра Г. В. Рихмана.

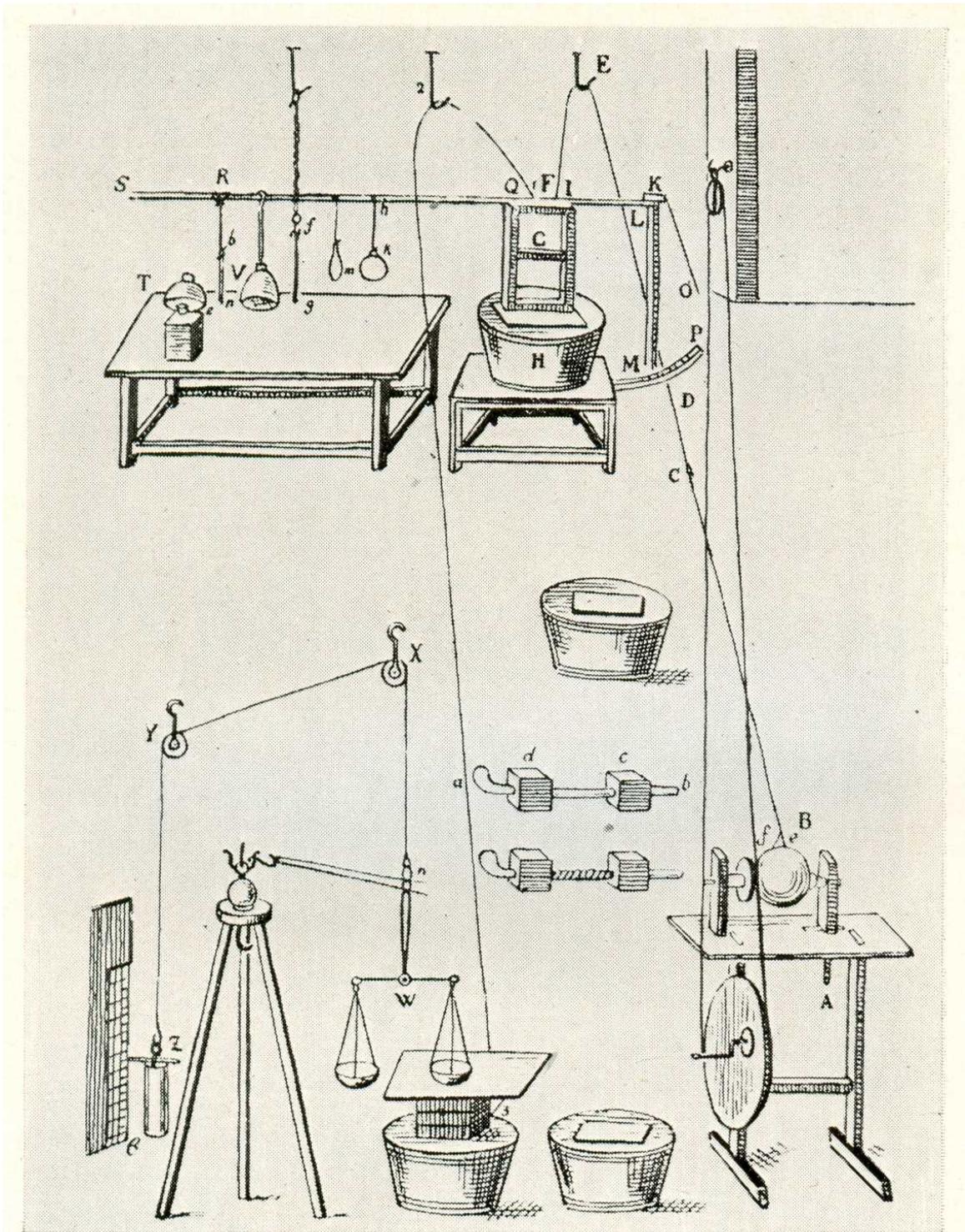
[1]



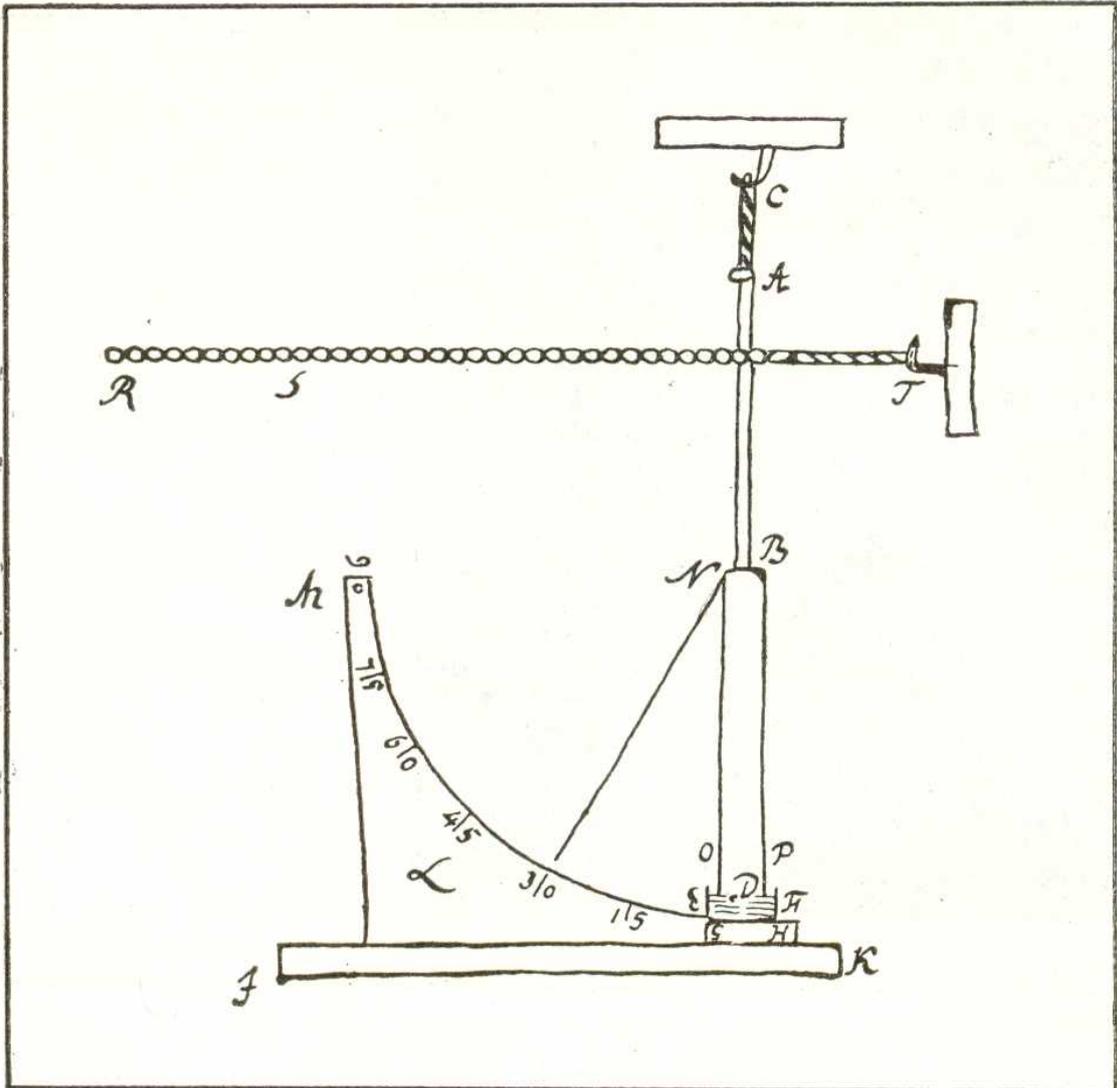
Первый проект электрического указателя.

Рисунки Рихмана.

[1]



Электроизмерительная установка Рихмана. С оригинальной гравюры.

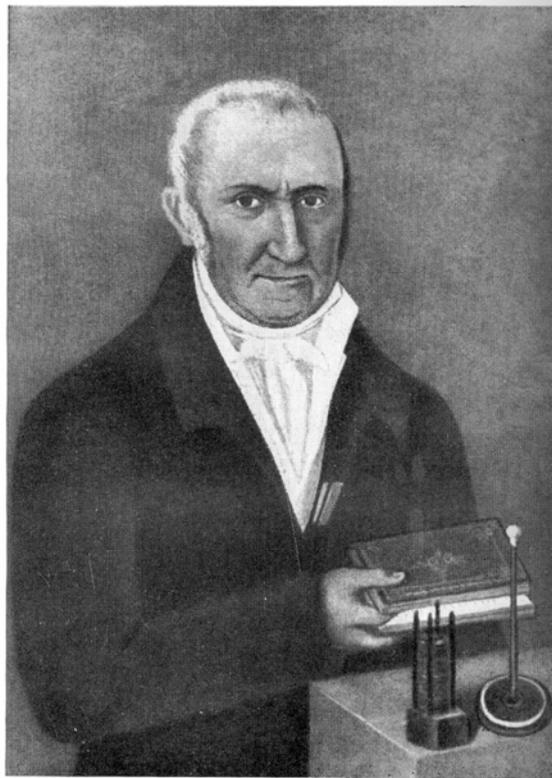


*Электрический указатель, применявшийся при исследовании грозы. Рисунок Рихмана.*

[1]

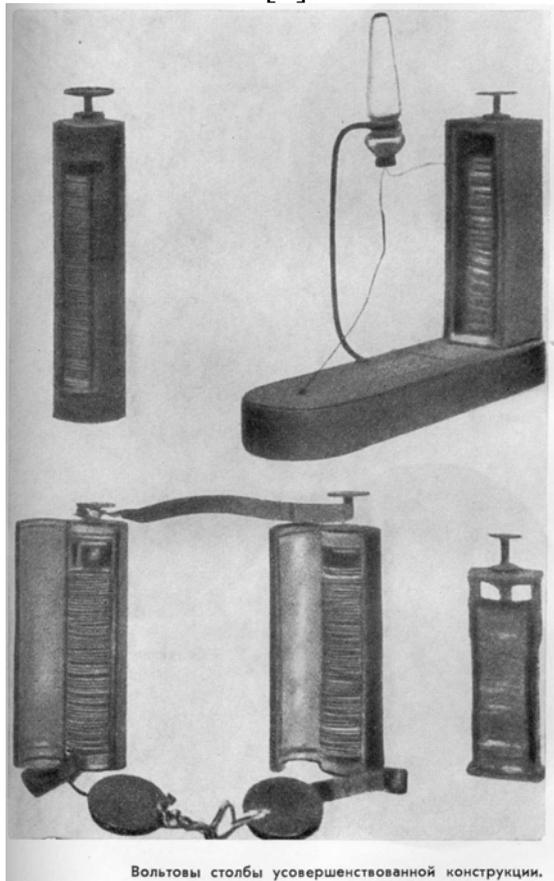
Одним их пионеров идеи о существовании связи между электрическими и магнитными явлениями был российский академик **Ф. У. Т. Эпинус**.

В 1800 г. **А. Вольт** изобрел устройство, названное в его честь **вольтовым столбом**.



Вольт на склоне лет.

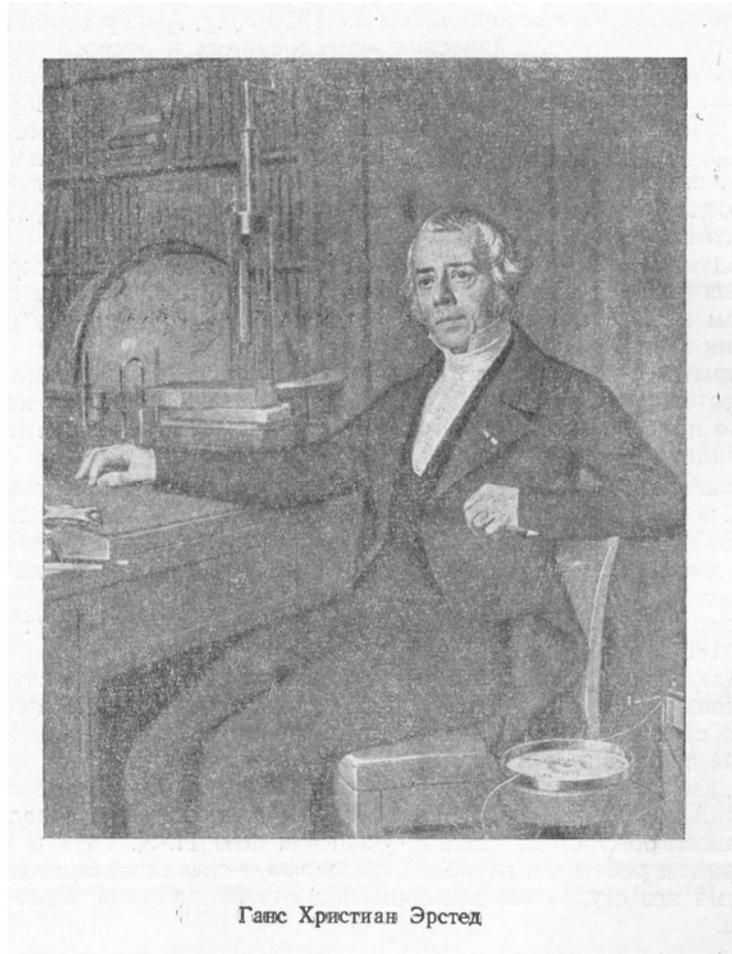
[7]



Вольты столбы усовершенствованной конструкции.

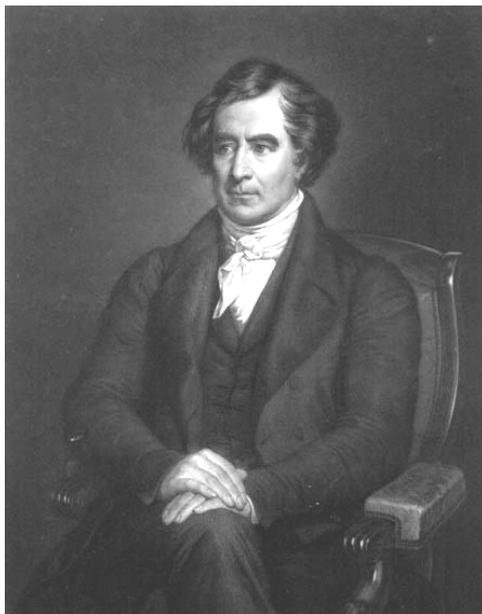
[7]

Серия важнейших работ появилась начиная с 1820 г., после открытия датским ученым **Х. Эрстедом** влияния электрического тока на магнитную стрелку. Он установил, что ток, проходя по проводнику, оказывает механические воздействия на находящуюся вблизи его магнитную стрелку, стремясь повернуть ее перпендикулярно проводнику. Таким образом, впервые был установлен факт существования магнитного поля вокруг проводника с током.



[2]

Французский ученый **Д. Ф. Араго** с помощью создаваемого электрическим током магнитного поля намагнитил кусок стали, создав первый электромагнит со стальным сердечником (1824).



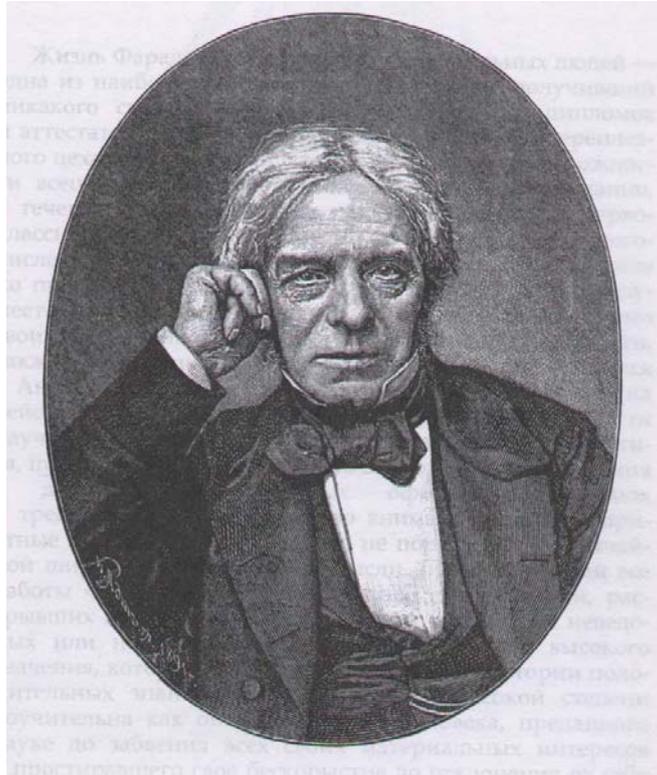
Д.Ф.Араго [22]

Его соотечественник **А. М. Ампер** открыл явление механического взаимодействия токов и установил закон этого взаимодействия, положив, таким образом, начало электродинамике (1826).

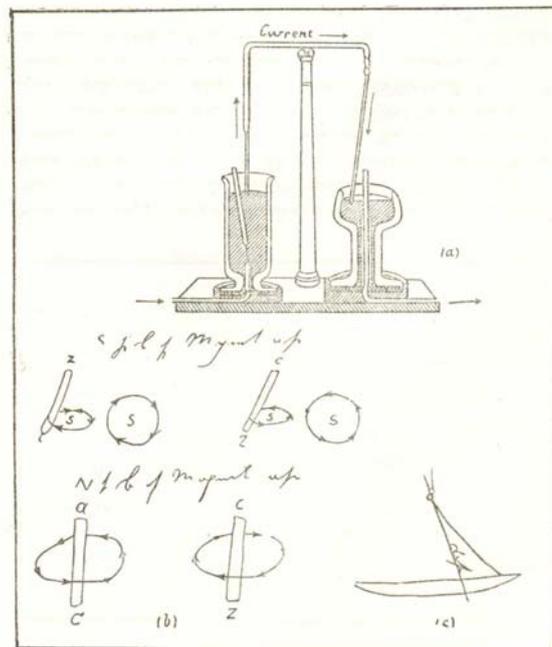


А.М.Ампер [9]

В 1821 г. английский ученый **М. Фарадей** показал, что проводник с током вращается вокруг магнитного полюса. Это в дальнейшем было использовано для создания электродвигателей.



М.Фарадей [6]



Электромагнитное вращение. Рисунок Фарадея.

[1]

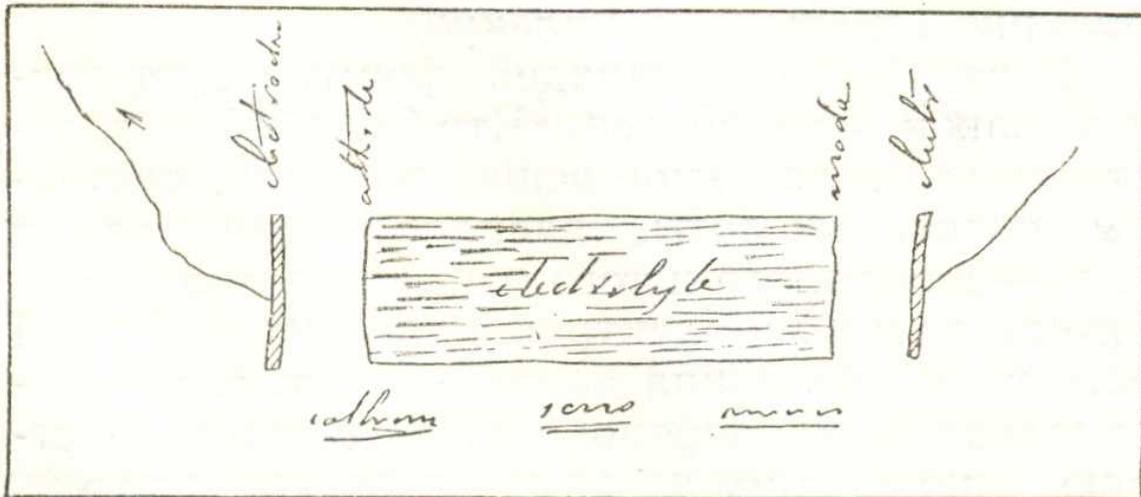
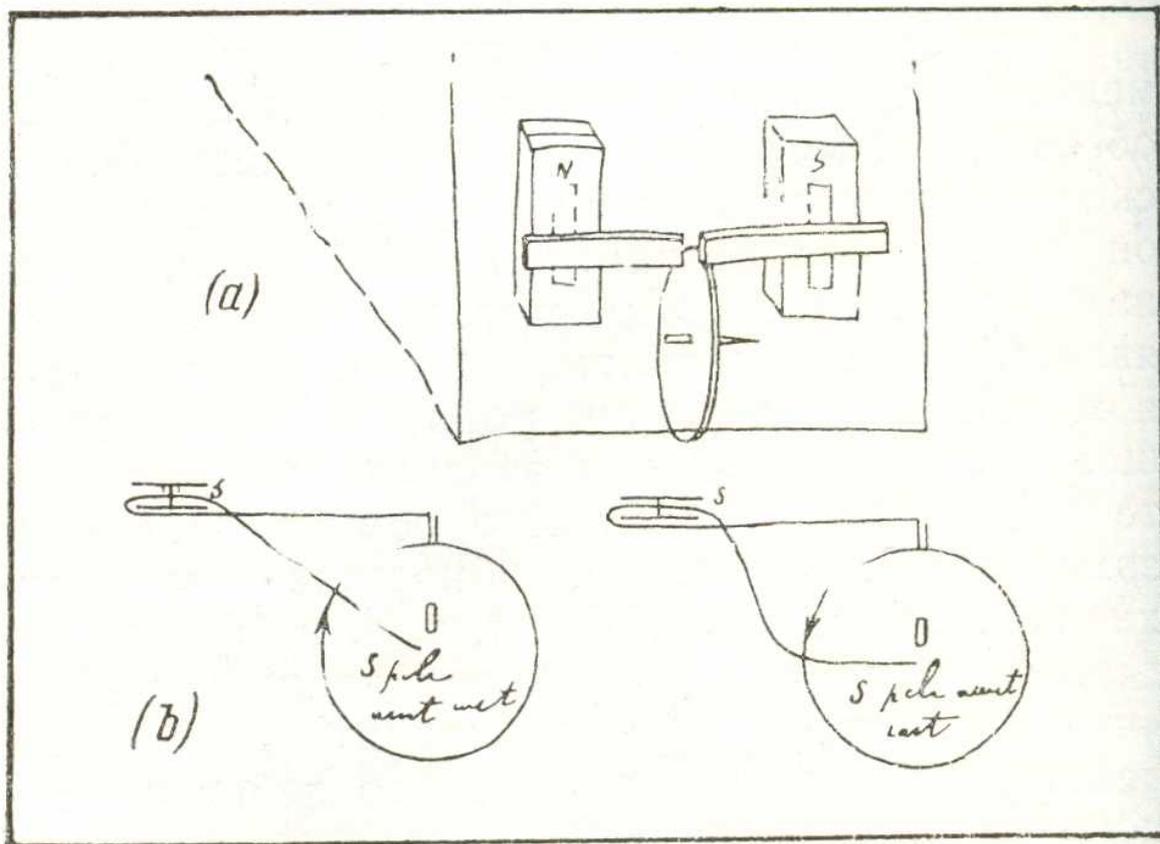


Рисунок Фарадея по электролизу.

[1]



Униполярная машина. Рисунок Фарадея.

[1]

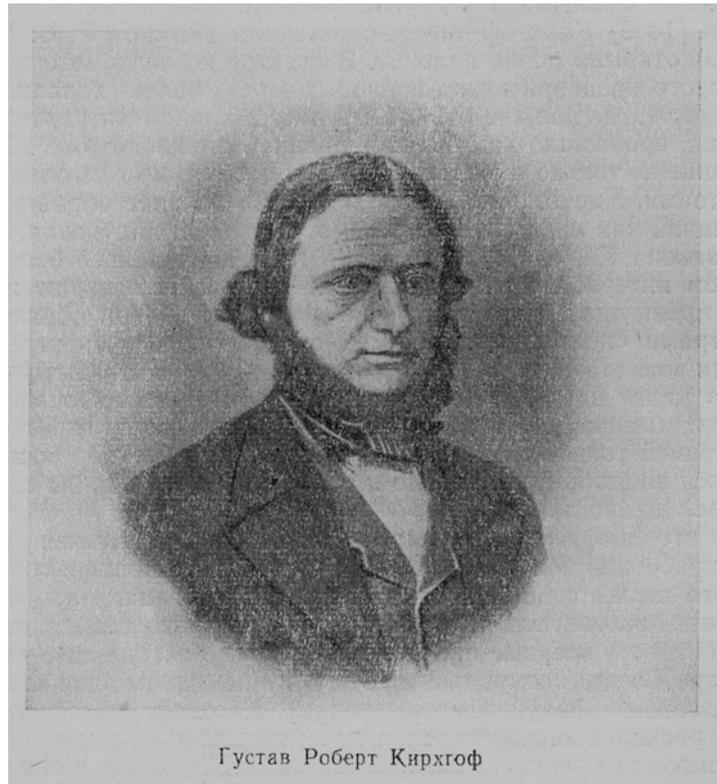
В 1821 г. **Т. И. Зеебеком** было открыто явление термоэлектричества, позволившее непосредственно превращать тепловую энергию в электрическую.

В 1827 г. немецким ученым **Г.С. Омом** было найдено соотношение между силой тока, ЭДС источника энергии и сопротивлением проводника, по которому проходит ток, т.е. был открыт **закон Ома**.

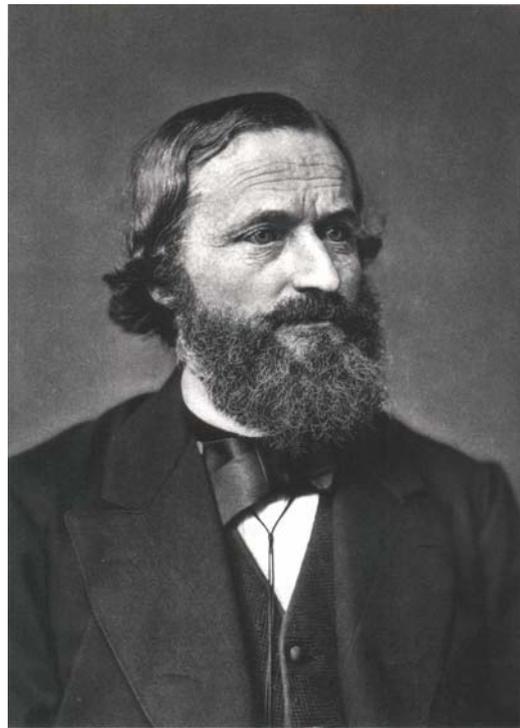


[1]

Последовавшее затем установление **правил Кирхгофа** для разветвленных цепей позволило облегчить расчеты сложных электрических цепей и понимание процессов, протекающих в них.



[2]



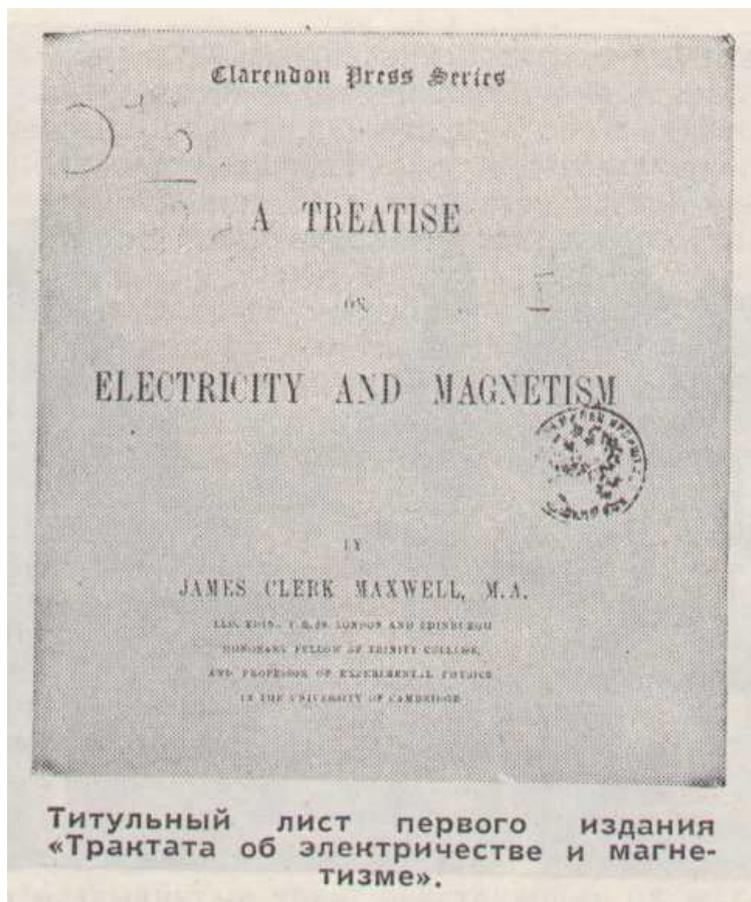
Г.Р.Кирхгоф [20]

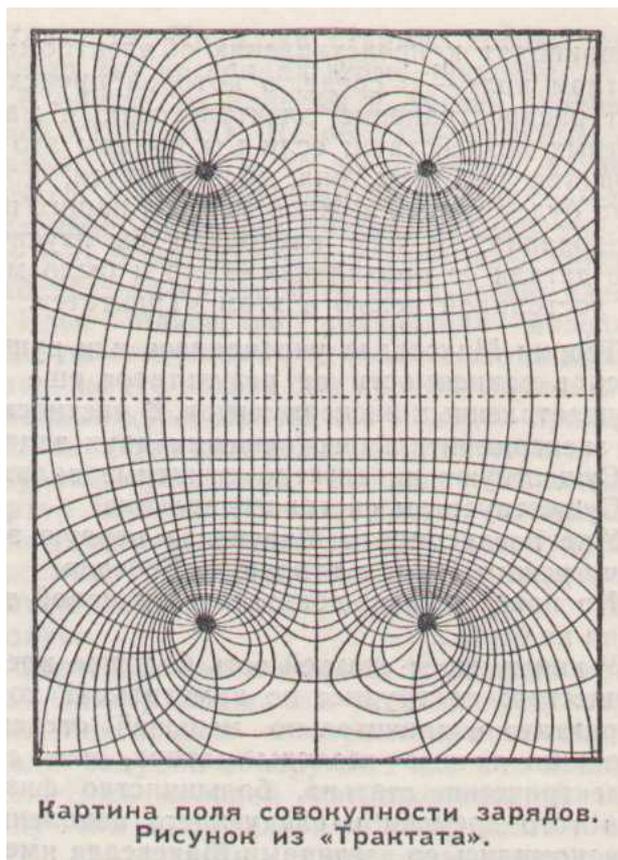
Теоретическим фундаментом для развития электротехники послужили открытие Фарадеем *закона электромагнитной индукции* (1831) и работы **Д. К. Максвелла** и **Э. Х. Ленца**.





Д. К. Максвелл в молодости [11]





[11]

На основании теоретических и экспериментальных исследований этими учеными уже в XIX веке появились первые образцы электрических машин, трансформаторов, электрических ламп.

Особенно большие заслуги в этой области принадлежат русским ученым и изобретателям.

В 1833 г. академиком Петербургской Академии наук **Э. Х. Ленцем** было установлено правило, названное его именем; затем экспериментально обоснован *закон Джоуля - Ленца* (1842).



*Э. Х. Ленц*

[1]

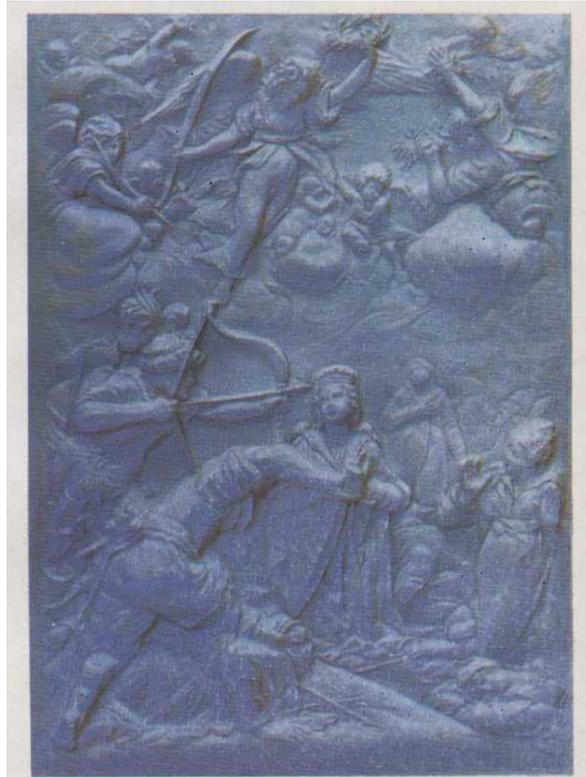
Им же совместно с академиком **Б. С. Якоби** были разработаны методы расчетов электромагнитов и открыта обратимость электрических машин.

**Б. С. Якоби** построил первый в мире электродвигатель (1834-1838), он же является создателем гальванопластики (1838), изобретателем первого буквопечатающего телеграфного аппарата (1850).



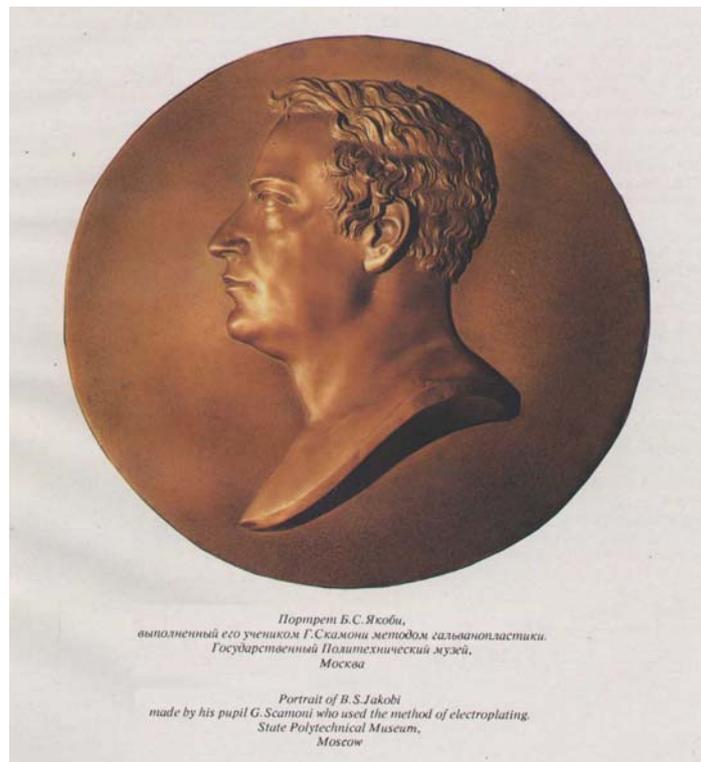
*Б. С. Якоби*

[1]



Барельеф  
«Святая Екатерина-  
Великомученица»  
работы Б.С.Якоби.  
Государственный  
Политехнический музей,  
Москва

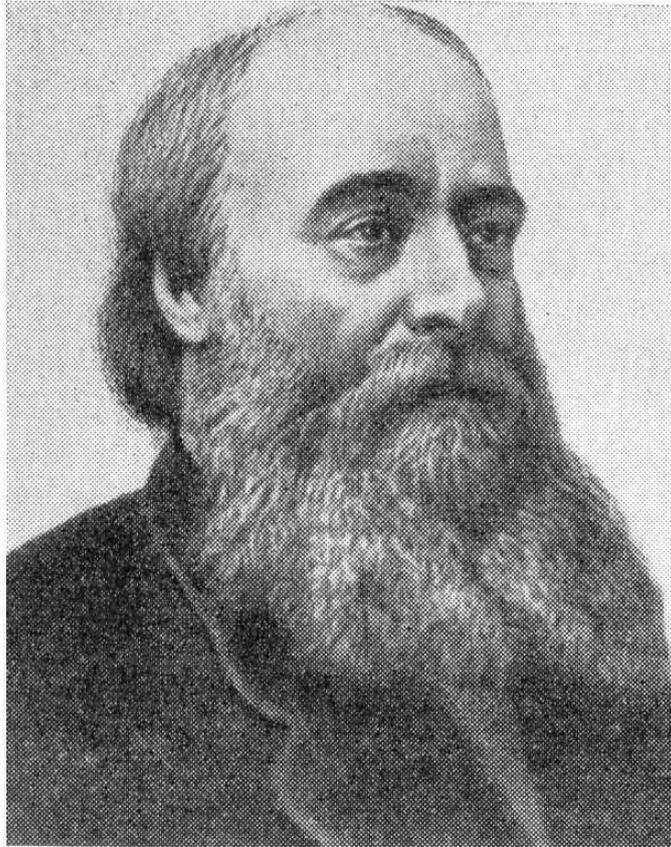
[5]



Портрет Б.С.Якоби,  
выполненный его учеником Г.Скамони методом гальванопластики.  
Государственный Политехнический музей,  
Москва

Portrait of B. S. Yakobi  
made by his pupil G. Scamoni who used the method of electroplating.  
State Polytechnical Museum,  
Moscow

[5]

*Д. Джоуль*

[1]

В 1802 г. русским ученым **В. В. Петровым** была открыта электрическая дуга.

**ИЗВѢСТІЕ**

о

**ГАЛЬВАНИ - ВОЛЬТОВСКИХЪ****ОПЫТАХЪ,**

которыя производилъ

*Профессоръ Физики Василій Петровъ.*

посредствомъ огромной наипаче бат-  
терей, состоявшей иногда изъ 4200  
мѣдныхъ и цинковыхъ кружковъ, и на-  
ходящейся при Санкт - Петербургской  
Медико - Хирургической Академіи

---

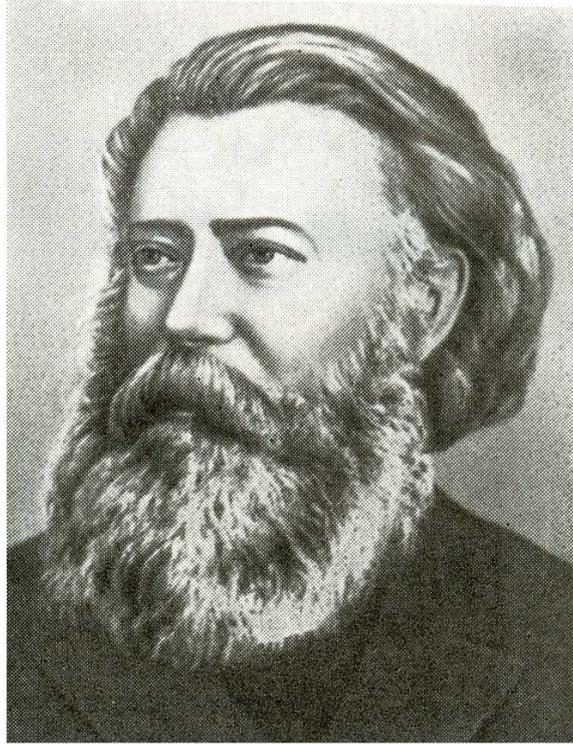
**ВЪ САНКТ-ПЕТЕРБУРГѢ**

Въ Типографіи Государственной Ме-  
дицинской Коллегіи, 1803 года.

*Титульный листъ книги В. В. Петрова.*

[1]

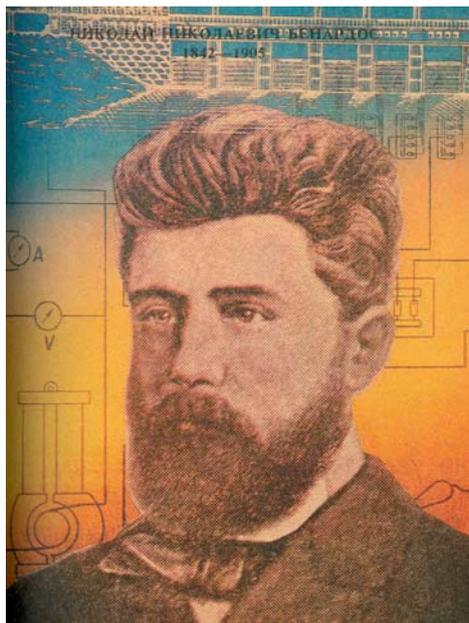
Первое ее практическое применение для освещения было осуществлено **П. Н. Яблочковым** с помощью изобретенной им электрической "свечи" (1875).



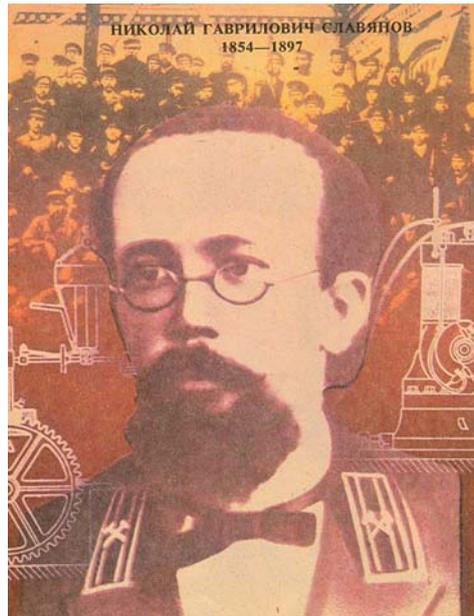
П. Н. Яблочков.

[3]

Затем электрическую дугу использовали для сварки и резания металлов, что было сделано также русскими изобретателями **Н. Н. Бенардосом** и **Н. Г. Славяновым**.



[3]



[3]

**П.Н. Яблочков** предложил оригинальные конструкции машин постоянного и переменного токов.

Создателем техники трехфазного тока является русский ученый **М. О. Доливо-Добровольский**.



М. О. Доливо-Добровольский [14]

Им создан первый асинхронный двигатель с ротором типа "беличье колесо" (1889), первый трехфазный генератор переменного тока (1888).

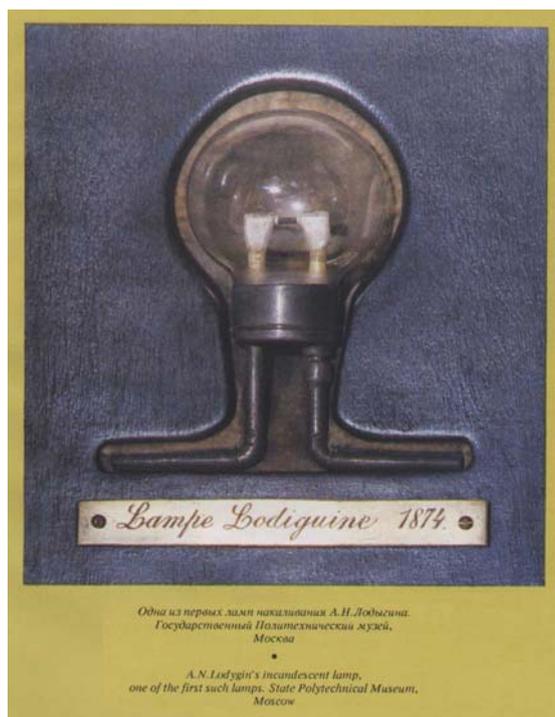
В 1891 г. на Всемирной электротехнической выставке во Франкфурте - на - Майне. М. О. Доливо-Добровольский демонстрировал первую в мире систему электропередачи трехфазного тока на расстояние около 170 км.

Им же были разработаны все элементы трехфазных цепей переменного тока, трансформаторы трехфазного тока, пусковые реостаты, измерительные приборы.

Первую в мире лампу накаливания (1872) изобрел **А. Н. Лодыгин**



*А.Н.Лодыгин —  
известный русский  
изобретатель  
(1870)*



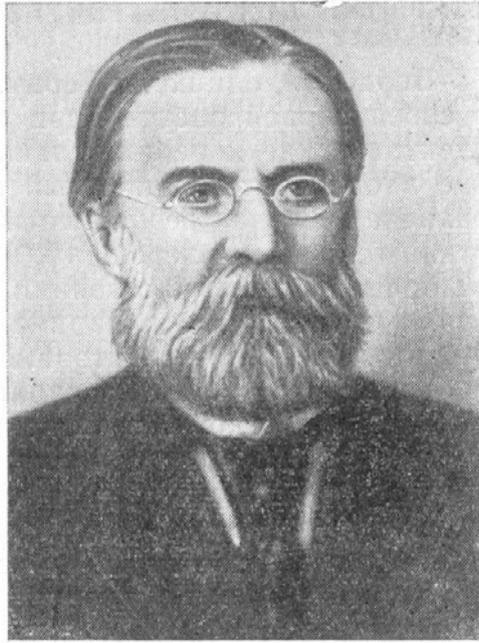
Лампа Лодыгина [5]

Советский ученый **С. Н. Вавилов** разработал теорию, связанную с явлением люминесценции, и под его руководством была разработана технология производства ламп "дневного света"



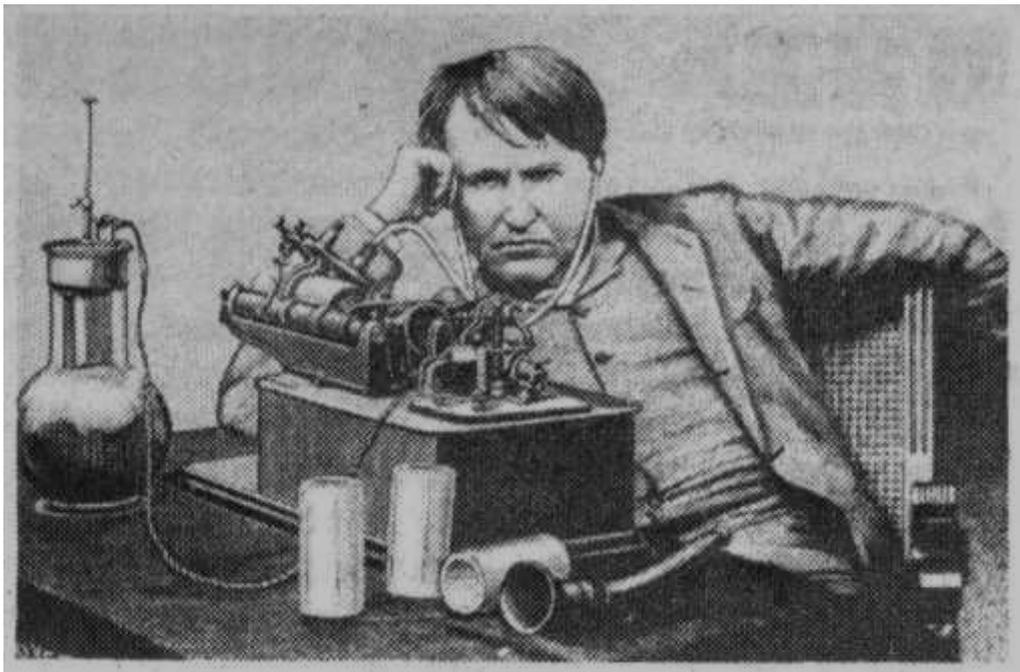
С. И. Вавилов. Рисунок. Я. И. Френкеля [12]

Работы **А. Н. Лодыгина**, **А. Г. Столетова**, **Т. А. Эдиссона**, **Дж. А. Флеминга** и других исследователей привели к созданию в 1904 г. двухэлектродной лампы- диода.



А. Г. Столетов

[1]



Т.А.Эдисон [13]



Дж.А.Флеминг [21]

Первые радиолампы в России были изготовлены **Н. Д. Папалекси**, а первые электровакуумные приемно-усилительные лампы – **М. А. Бонч-Бруевичем**.



*Н. Д. Папалекси*

[8]



[16]

Большой вклад в полупроводниковую технику внесли ученые советской школы академика **А. Ф. Иоффе**, кристаллический (полупроводниковый) усилитель и генератор были созданы **О.В. Лосевым**.



А.Ф. Иоффе [17]



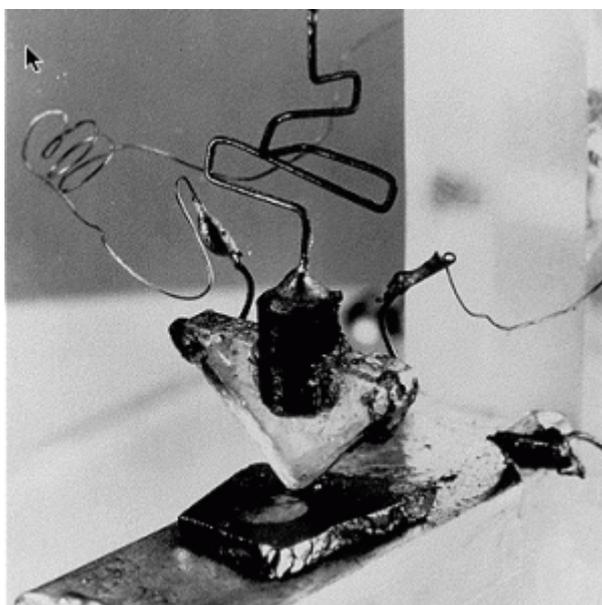
О. В. Лосев [3]

Бурное развитие радиотехники (особенно радиолокации) в период второй мировой войны дало новый толчок исследованиям в области полупроводников.

Новым этапом в развитии элементной базы электроники было изобретение американских ученых **Шокли, Бардина и Браттейна** – германиевый точечный транзистор (позднее были разработаны кремниевый точечный транзистор, плоскостные транзисторы и другие полупроводниковые приборы).



В.Шокли (сидит), Д. Бардин (слева), У.Браттейн [19]



Первый транзистор [18]

По сравнению с лампами транзисторы той же мощности имеют значительно меньшие размеры, практически неограниченный срок работы, высокую механическую, невысокое питающее напряжение и другие преимущества.

Следующий этап повышения технического уровня развития элементной базы электронной аппаратуры обусловлен переходом на интегральные микросхемы (ИМС).

Интегральная технология оказала глубокое влияние на все этапы разработки, изготовления и эксплуатации современной электронной аппаратуры. Электроника стала основой электронно-вычислительной техники, автоматических систем других устройств.

В СССР первую электронную ЦВМ построенную по руководством **С. А. Лебедева**, построили в 1950 г.



С. А. Лебедев [10]

## Источники иллюстраций

1. Кудрявцев П.С. Курс истории физики. Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: «Просвещение», 1974. – 312 с. с ил.
2. Выдающиеся физики мира. Рекомендательный указатель. – М., 1974. – 435 с.
3. От махин до роботов (в 2-х книгах. Кн.2). Очерки о знаменитых изобретателях, отрывки документов, научных статей, воспоминаний, тексты патентов / Сост. М.Н.Ишаков; Худож. Б.А.Лавров. – М.: Современник, 1990. – 414с.: ил.
4. Болховитинов В.Н. Столетов. – М.: «Молодая гвардия», 1965. – 512 с. с 23 л. илл. («Жизнь замечательных людей». Серия биографий. Вып. 17(414).).
5. Памятники науки и техники в музеях России. Вып.1. – М.: Государственный политехнический музей, 1992.
6. Лавуазье. Фарадей. Чарльз Дарвин. Карл Бэр: Биогр. повествования / Сост., общ. ред. Н.Ф.Болдырева; Послесл. Евгения Дымова. – Челябинск: «Урал LTD», 1998. – 415 с.: портр.; 8 л. ил. – (Жизнь замечательных людей. Биогр. б-ка Ф.Павленкова; Т.30).
7. Околотин В.С. Вольта. – М.: «Молодая гвардия», 1986. – 320 с., ил. – («Жизнь замечательных людей». Серия биографий. Вып. 10 (669).).
8. Папалекси Н.Д. Собрание трудов / Под ред. С. М. Рытова–М.: Издательство АН СССР, 1948. – 428 с.
9. Ампер А.М. Электродинамика. – М.: Издательство АН СССР, 1954. – 492 с.
10. Частиков А.П. От калькулятора до супер-ЭВМ / Вычислительная техника и ее применение, 1988 № 1.
11. Наука и жизнь, 1973, № 10, С. 109-119.
12. Наука и жизнь, 1972, № 4, С.80-86.
13. Наука и жизнь, 1977, № 8, С.83-87.
14. [http://history.minot.ru/history/html/portrets/port\\_d.htm](http://history.minot.ru/history/html/portrets/port_d.htm)
15. <http://history.minot.ru/history/graph/pictures/portrets/lomon.jpg>
16. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Бонч-Бруевич,\\_Михаил\\_Александрович](https://ru.wikipedia.org/wiki/Бонч-Бруевич,_Михаил_Александрович)
17. <http://physiclib.ru/books/item/f00/s00/z0000058/st074.shtml>
18. <https://yudamasputra.wordpress.com/2011/09/page/2/>
19. <https://picutv.com/news/201-ot-1947-goda-do-nashih-dney-kuda-dvigaetsya-robototehnika.html>
20. <http://start.school655.ru/page/fizika/17/1.htm>
21. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Флеминг,\\_Джон\\_Амброз](https://ru.wikipedia.org/wiki/Флеминг,_Джон_Амброз)
22. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Араго,\\_Франсуа#/media/File:Arago\\_Franco\\_is\\_portrait.jpg](https://ru.wikipedia.org/wiki/Араго,_Франсуа#/media/File:Arago_Franco_is_portrait.jpg)

## Лекция 2

### Основные термины и определения Режимы работы электрических цепей.

### Основные законы электрических цепей

#### Основные пояснения и термины

*Электротехника* - это область науки и техники, изучающая электрические и магнитные явления и их использование в практических целях.

Каждая наука имеет свою терминологию.

*Электрическая цепь* - это совокупность устройств, предназначенных для производства, передачи, преобразования и использования электрического тока.

Все электротехнические устройства по назначению, принципу действия и конструктивному оформлению можно разделить на три большие группы.

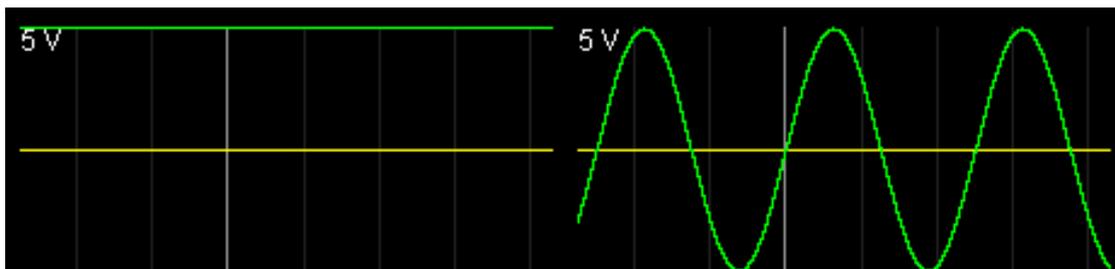
1. Источники энергии, т.е. устройства, вырабатывающие электрический ток (генераторы, термоэлементы, фотоэлементы, химические элементы).
2. Приемники, или нагрузка, т.е. устройства, потребляющие электрический ток (электродвигатели, электролампы, электрические механизмы и т.д.).
3. Проводники, а также различная коммутационная аппаратура (выключатели, реле, контакторы и т.д.).

Направленное движение электрических зарядов называют электрическим током.

Электрический ток может возникать в замкнутой электрической цепи.

Электрический ток, направление и величина которого неизменны, называют *постоянным* током и обозначают прописной буквой I.

Электрический ток, величина и направление которого не остаются постоянными, называется *переменным* током.



### Примеры постоянного и переменного напряжений

Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют мгновенным и обозначают строчной буквой  $i$ .

Для работы электрической цепи необходимо наличие источников энергии.

В любом источнике за счет сторонних сил неэлектрического происхождения создается *электродвижущая сила*.

На зажимах источника возникает разность потенциалов или напряжение, под воздействием которого во внешней, присоединенной к источнику части цепи, возникает электрический ток.

Различают *активные и пассивные цепи, участки и элементы цепей*.

*Активными* называют электрические цепи, содержащие источники энергии, *пассивными* - электрические цепи, не содержащие источников энергии.

Электрическую цепь называют *линейной*, если ни один параметр цепи не зависит от величины или направления тока, или напряжения.

Электрическая цепь является *нелинейной*, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Параметры нелинейных элементов зависят от величины или направления тока, или напряжения.

*Электрическая схема* - это графическое изображение электрической цепи, включающее в себя условные обозначения устройств и показывающее соединение этих устройств.

На рис. 2.1 изображена электрическая схема цепи, состоящей из источника энергии 1, электролампы 2, резистора 3 и резистора 4.

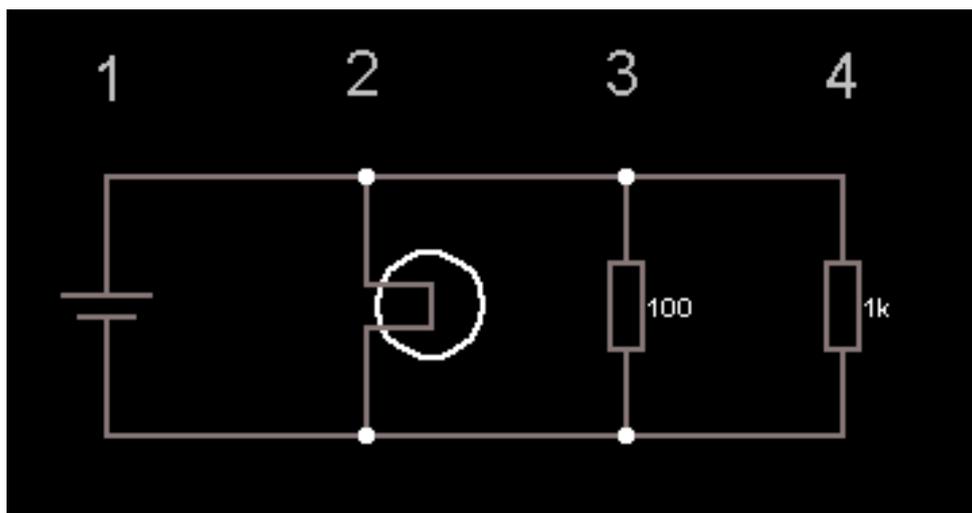


Рисунок 2.1

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
v 176 256 176 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
181 272 160 272 256 0 300.0 100.0 100.0 0.4 0.4
r 368 160 368 256 0 100.0
r 448 160 448 256 0 1000.0
w 448 160 368 160 0
w 368 160 272 160 0
w 272 160 176 160 0
w 176 256 272 256 0
w 272 256 368 256 0
w 368 256 448 256 0
x 171 133 184 139 0 24 1
x 265 131 278 137 0 24 2
x 361 131 374 137 0 24 3
x 442 132 455 138 0 24 4

```

Примечание. Здесь и далее под схемами цепей приводятся коды программ для моделирования в программе Circuit Simulator v1.5j

Для облегчения анализа электрическую цепь заменяют схемой замещения.

**Схема замещения** - это графическое изображение электрической цепи с помощью идеальных элементов, параметрами которых являются параметры замещаемых элементов.

На рисунке 2.2 показана схема замещения

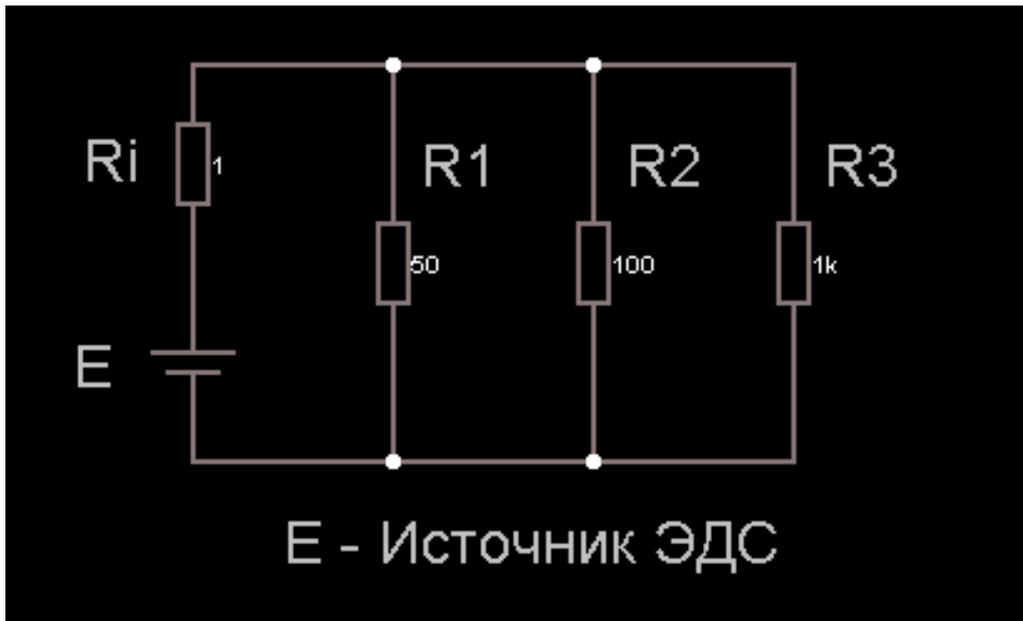


Рис. 2.2

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
v 176 352 176 272 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 176 272 176 192 0 1.0
r 256 192 256 352 0 50.0
r 336 192 336 352 0 100.0
r 416 192 416 352 0 1000.0
w 176 192 256 192 0
w 256 192 336 192 0
w 336 192 416 192 0
w 176 352 256 352 0
w 256 352 336 352 0
w 336 352 416 352 0
x 133 240 155 246 0 24 Ri
x 129 323 145 329 0 24 E
x 213 394 411 400 0 24 E - Источник ЭДС
x 268 242 298 248 0 24 R1
x 350 242 380 248 0 24 R2
x 429 242 459 248 0 24 R3

```

Примечание! Поскольку данный курс лекций ориентирован на использование зарубежного программного продукта Circuit Simulator v1.5j ([www.falstad.com](http://www.falstad.com)), по этой причине обозначение источника ЭДС не совпадает с принятым у нас в стране. Но в любом случае это идеальный источник ЭДС.

### Пассивные элементы схемы замещения

Простейшими пассивными элементами схемы замещения являются **сопротивление, индуктивность и емкость.**

В реальной цепи электрическим сопротивлением обладают не только реостат или резистор, но и проводники, катушки, конденсаторы и т.д.

Общим свойством всех устройств, обладающих сопротивлением, является необратимое преобразование электрической энергии в тепловую.

Тепловая энергия, выделяемая в сопротивлении, полезно используется или рассеивается в пространстве.

В схеме замещения во всех случаях, когда надо учесть необратимое преобразование энергии, включается сопротивление.

Сопротивление проводника определяется по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.1)$$

где  $l$  - длина проводника;

$S$  - сечение;

$\rho$  - удельное сопротивление.

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимость

$$g = \frac{1}{R}.$$

Сопротивление измеряется в омах (Ом), а проводимость - в сименсах (См).

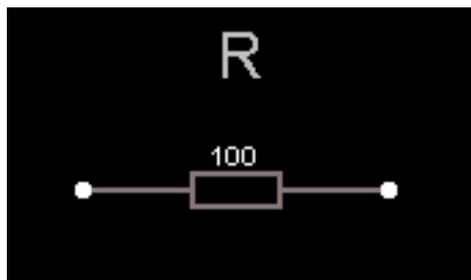
Сопротивление пассивного участка цепи в общем случае определяется по формуле

$$R = \frac{P}{I^2},$$

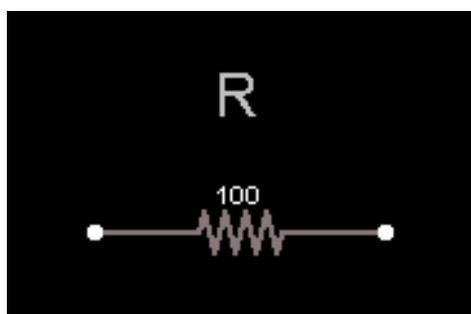
где  $P$  - потребляемая мощность;

$I$  - ток.

Сопротивление в схеме замещения изображается следующим образом:



Необходимо отметить, что приведенное выше, условное графическое обозначение принято не во всех странах, так в США сопротивление (резистор) обозначают так



Индуктивностью называется идеальный элемент схемы замещения, характеризующий способность цепи накапливать магнитное поле.

Полагают, что индуктивностью обладают только индуктивные катушки.

Индуктивностью других элементов электрической цепи пренебрегают.

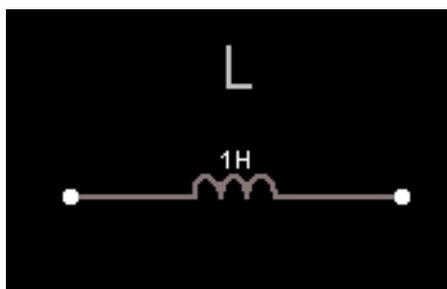
Индуктивность катушки, измеряемая в генри [Гн, международное обозначение - Н], определяется по формуле

$$L = \frac{W\Phi}{i},$$

где  $W$  - число витков катушки;

$\Phi$  - магнитный поток катушки, возбуждаемый током  $i$ .

На рисунке показано изображение индуктивности в схеме замещения.



Емкостью называется идеальный элемент схемы замещения, характеризующий способность участка электрической цепи накапливать электрическое поле.

Полагают, что емкостью обладают только конденсаторы.

Емкостью остальных элементов цепи пренебрегают.

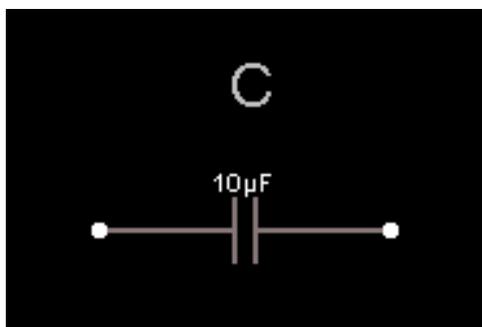
Емкость конденсатора, измеряемая в фарадах (Ф, F), определяется по формуле:

$$C = \frac{q}{U_C}$$

где  $q$  - заряд на обкладках конденсатора;

$U_C$  - напряжение на конденсаторе.

На рисунке показано изображение емкости в схеме замещения.

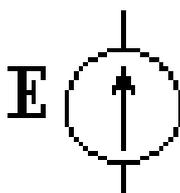


## Активные элементы схемы замещения

Любой источник энергии можно представить в виде **источника ЭДС** или **источника тока**.

Источник ЭДС - это источник, характеризующийся электродвижущей силой и внутренним сопротивлением.

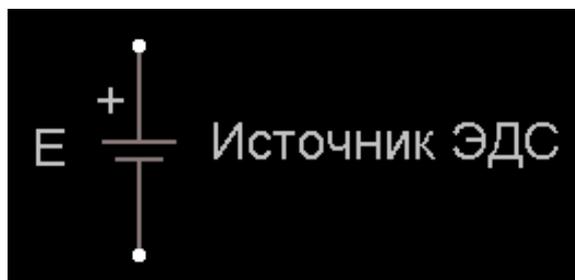
На электрических схемах источник ЭДС обозначается так



Конец стрелки означает положительный полюс (+)

Идеальным называется источник ЭДС, внутреннее сопротивление которого равно нулю.

В программе Circuit Simulator v1.5j имеется элемент – источник ЭДС. Он обозначается символом гальванического элемента:



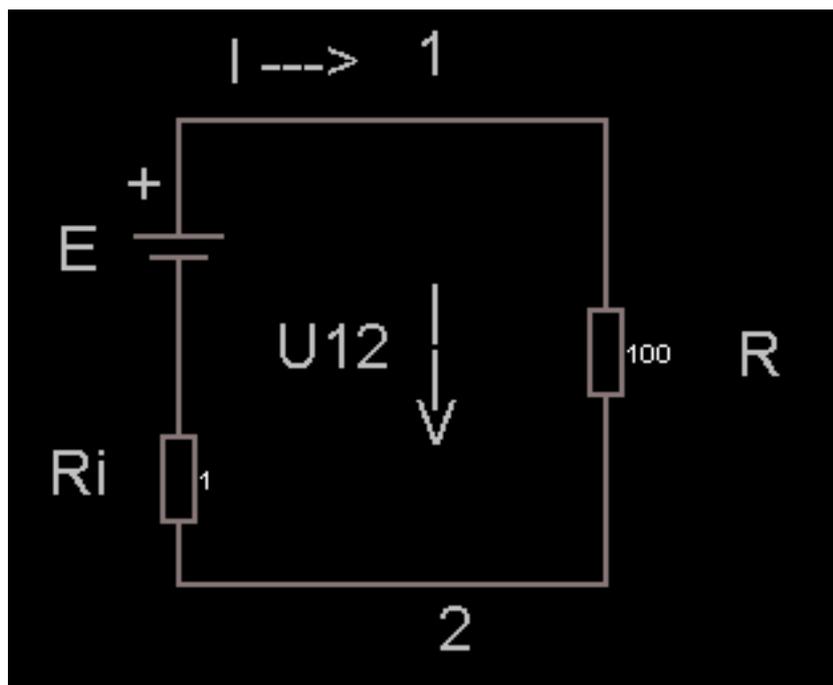


Рисунок 2.3

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
v 224 208 224 112 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 224 208 224 288 0 1.0
w 224 112 304 112 0
w 304 112 384 112 0
w 224 288 304 288 0
w 304 288 384 288 0
r 384 112 384 288 0 100.0
x 434 210 451 216 0 24 R
x 176 255 198 261 0 24 Ri
x 179 170 195 176 0 24 E
x 313 96 326 102 0 24 1
x 322 314 335 320 0 24 2
x 261 207 304 213 0 24 U12
x 314 236 329 242 0 24 V
x 318 217 324 223 0 24 |
x 318 192 324 198 0 24 |
x 205 145 219 151 0 24 +
x 243 99 294 105 0 24 I --->

```

На рисунке 2.3 изображен источник ЭДС, к зажимам которого подключено сопротивление  $R$ .  $R_i$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС.

Знак (+) источника ЭДС, на данной схеме, означает точку высшего потенциала. Стрелка напряжения на зажимах источника  $U_{12}$  направлена от точки высшего потенциала к точке меньшего потенциал.

Ток

$$I = \frac{E}{R_i + R},$$

$$E = R_i I + RI = R_i I + U_{12} \quad (2.2)$$

$$U_{12} = IR = E - IR_i \quad (2.3)$$

У идеального источника ЭДС внутреннее сопротивление  $R_i = 0$ ,  $U_{12} = E$

Из выражения (2.3) следует, что напряжение на зажимах реального источника ЭДС уменьшается с увеличением тока.

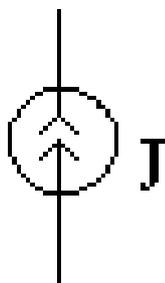
У идеального источника напряжение на зажимах не зависит от тока и равно электродвижущей силе.

Возможен другой путь идеализации источника: представление его в виде источника тока.

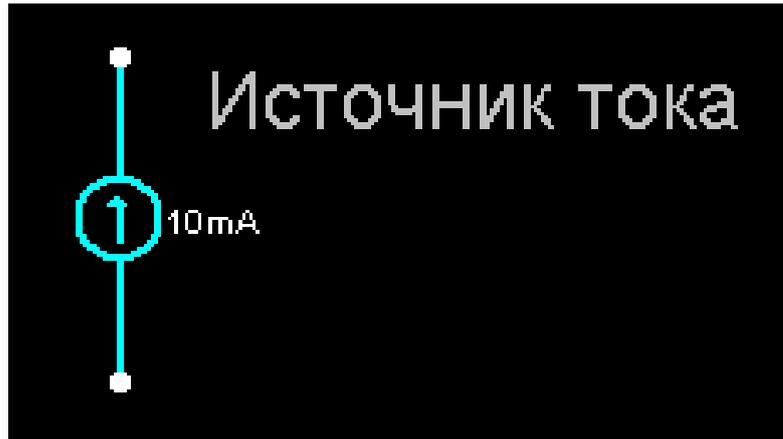
Источником тока называется источник энергии, характеризующийся величиной тока и внутренней проводимостью.

Идеальным называется источник тока, внутренняя проводимость которого равна нулю.

Графически источник тока обозначается



В программе Circuit Simulator v1.5j имеется элемент – источник тока. Он обозначается символом: круг со стрелкой внутри, при этом всегда указывается величина тока



Разделим левую и правую части уравнения (2.2) на  $R_i$  и получим

$$\frac{E}{R_i} = \frac{U_{12}}{R_i} + I$$

где  $\frac{E}{R_i}$  - ток источника тока;  $\frac{1}{R_i} = g_i$  - внутренняя проводимость.

У идеального источника тока  $g_i = 0$  и  $J = I$ .

**Ток идеального источника не зависит от сопротивления внешней части цепи. Он остается постоянным независимо от сопротивления нагрузки.** Условное изображение источника тока показано на рисунке 2.4.

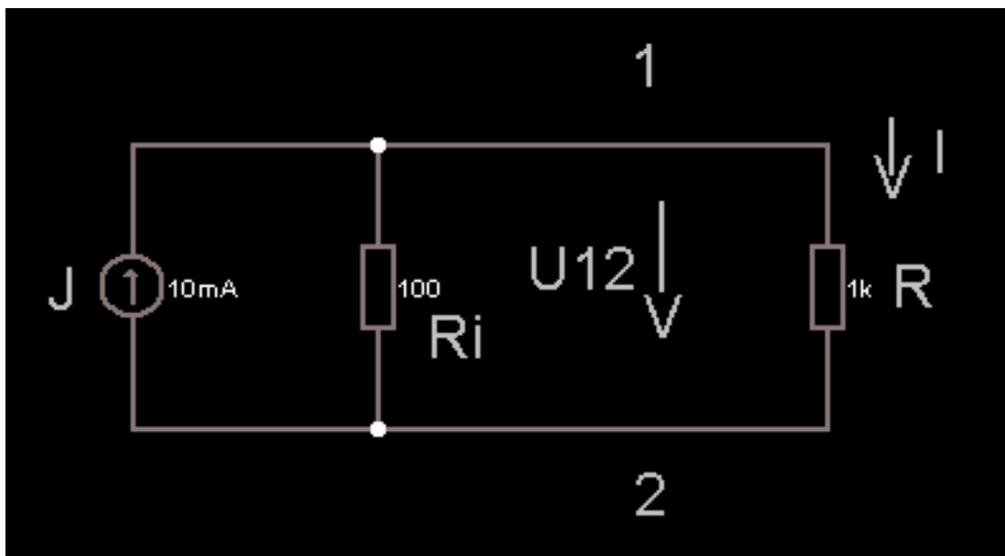


Рисунок 2.4

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
i 176 256 176 144 0 0.01
r 272 144 272 256 0 100.0
w 176 144 272 144 0
w 176 256 272 256 0
w 272 144 368 144 0
w 272 256 368 256 0
w 368 144 448 144 0
w 368 256 448 256 0
r 448 144 448 256 0 1000.0
x 143 210 155 216 0 24 J
x 292 229 314 235 0 24 Ri
x 474 209 491 215 0 24 R
x 371 122 384 128 0 24 1
x 373 291 386 297 0 24 2
x 331 202 374 208 0 24 U12
x 381 184 387 190 0 24 |
x 381 197 387 203 0 24 |
x 377 221 392 227 0 24 V
x 490 156 496 162 0 24 I
x 471 151 477 157 0 24 |
x 467 166 482 172 0 24 V

```

Любой реальный источник ЭДС можно преобразовать в источник тока и наоборот.

Источник энергии, внутреннее сопротивление которого мало по сравнению с сопротивлением нагрузки, приближается по своим свойствам к идеальному источнику ЭДС.

Если внутреннее сопротивление источника велико по сравнению с сопротивлением внешней цепи, он приближается по своим свойствам к идеальному источнику тока.

### Основные определения, относящиеся к схемам

Различают **разветвленные и неразветвленные схемы**.  
На рисунке 2.5 изображена неразветвленная схема.

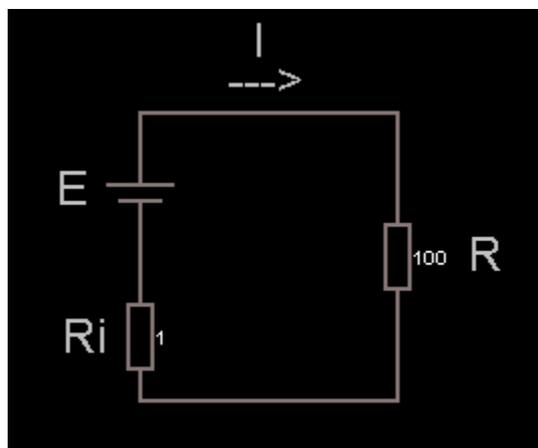


Рисунок 2.5

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
v 224 304 224 224 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 224 304 224 368 0 1.0
r 352 224 352 368 0 100.0
w 352 224 224 224 0
w 224 368 352 368 0
x 183 271 199 277 0 24 E
x 186 345 208 351 0 24 Ri
x 388 304 405 310 0 24 R
x 281 197 287 203 0 24 I
x 269 217 307 223 0 24 --->

```

**Разветвленная схема** - это сложная комбинация соединений пассивных и активных элементов.

На рисунке 2.6 показана **разветвленная схема**, содержащая два источника ЭДС и 5 сопротивлений.

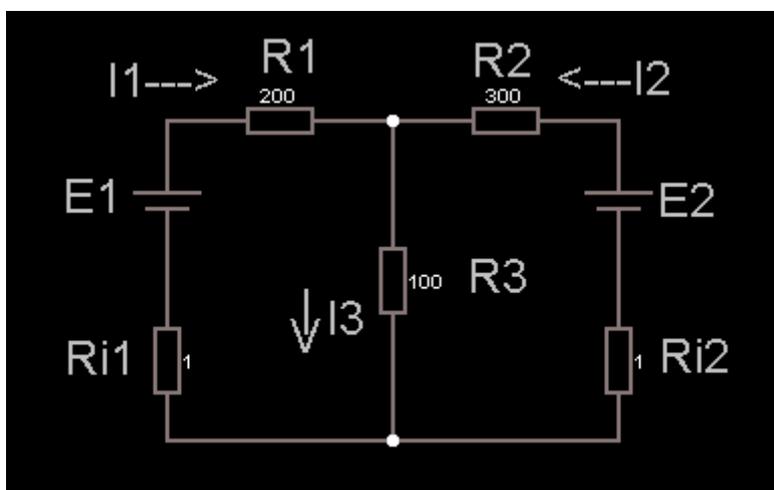


Рисунок 2.6

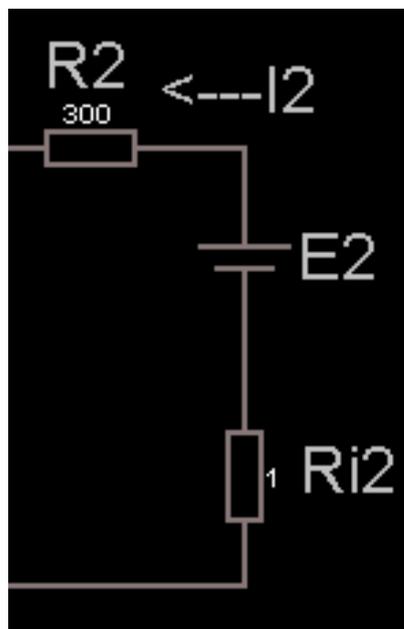
```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
r 160 160 272 160 0 200.0
r 272 160 384 160 0 300.0
v 384 240 384 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
v 160 240 160 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 384 240 384 320 0 1.0
r 160 240 160 320 0 1.0
r 272 160 272 320 0 100.0
w 272 320 384 320 0
w 272 320 160 320 0
x 405 287 440 293 0 24 Ri2
x 404 209 433 215 0 24 E2
x 312 139 342 145 0 24 R2
x 354 148 411 154 0 24 <---I2
x 310 247 340 253 0 24 R3
x 227 262 233 268 0 24 I
x 240 268 259 274 0 24 I3
x 222 277 237 283 0 24 V
x 110 288 145 294 0 24 Ri1
x 109 207 138 213 0 24 E1
x 207 137 237 143 0 24 R1
x 131 149 188 155 0 24 I1--->

```

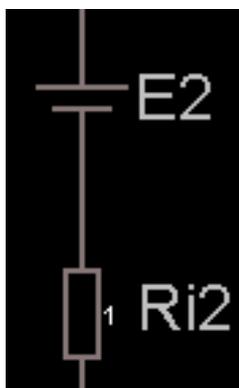
Сопротивления соединительных проводов принимают равными нулю.

Участок электрической цепи, по которому проходит один и тот же ток, называется *ветвью*.



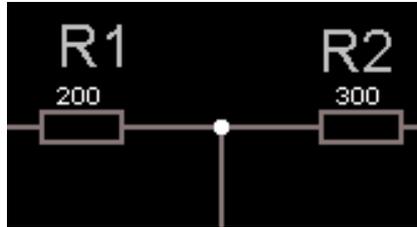
Место соединения двух и более ветвей электрической цепи называется *узлом*.

Узел, в котором сходятся две ветви, называется *устранимым*.



Узел является *неустранимым*, если в нем соединены три и большее число ветвей.

Узел в схеме обозначается точкой.



*Последовательным* называют такое соединение участков цепи, при котором через все участки проходит одинаковый ток.

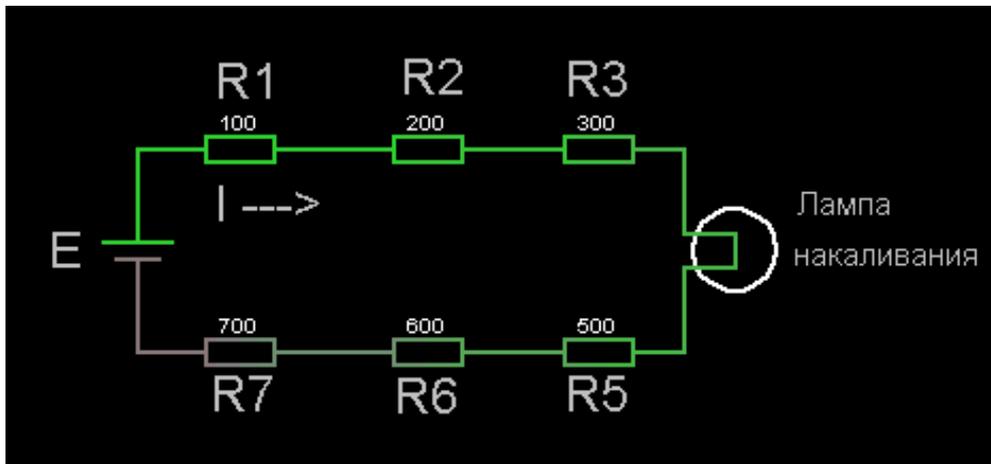


Рисунок 2.7

```

$ 0 9.92E-6 0.0 67 7.0 50
v 160 320 160 224 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 160 224 256 224 0 100.0
r 256 224 336 224 0 200.0
r 336 224 416 224 0 300.0
r 416 320 336 320 0 500.0
r 336 320 256 320 0 600.0
r 256 320 160 320 0 700.0
x 90 274 106 280 0 24 E
x 197 201 227 207 0 24 R1
x 284 199 314 205 0 24 R2
x 361 200 391 206 0 24 R3
x 361 349 391 355 0 24 R5
x 281 350 311 356 0 24 R6
x 195 349 225 355 0 24 R7
x 197 259 248 265 0 24 I --->
181 416 224 416 320 0 300.00003501803366 100.0 120.0 0.4 0.4
x 470 256 514 260 0 15 Лампа
x 468 280 555 284 0 15 накаливания

```

При параллельном соединении все участки цепи присоединяются к одной паре узлов, находятся под одним и тем же напряжением.

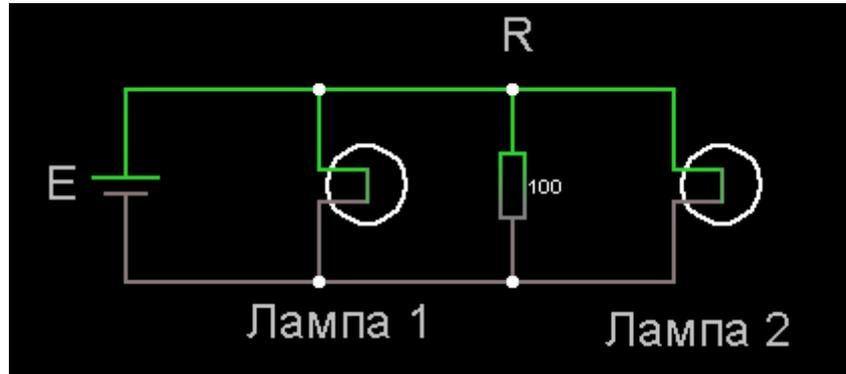


Рисунок 2.8

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
v 176 272 176 176 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
181 272 176 272 272 0 334.63405311140167 100.0 100.0 0.4 0.4
r 368 176 368 272 0 100.0
w 448 176 368 176 0
w 368 176 272 176 0
w 272 176 176 176 0
w 176 272 272 272 0
w 272 272 368 272 0
w 368 272 448 272 0
181 448 176 448 272 0 302.90308284179764 100.0 120.0 0.4 0.4
x 137 232 153 238 0 24 E
x 363 158 380 164 0 24 R
x 237 301 329 307 0 24 Лампа 1
x 415 305 507 311 0 24 Лампа 2

```

Любой замкнутый путь тока, включающий в себя несколько ветвей, называется *контуром*.

## Режимы работы электрических цепей

В зависимости от нагрузки различают следующие режимы работы: *номинальный, режим холостого хода, короткого замыкания, согласованный режим*.

При **номинальном режиме** электротехнические устройства работают в условиях, указанных в паспортных данных завода-изготовителя.

**В нормальных условиях** величины тока, напряжения, мощности не превышают указанных значений.

**Режим холостого хода** возникает при обрыве цепи или отключении сопротивления нагрузки.

**Режим короткого замыкания** получается при сопротивлении нагрузки, равном нулю.

Ток короткого замыкания в несколько раз превышает номинальный ток. Режим короткого замыкания является аварийным.

**Согласованный режим** - это режим передачи от источника к сопротивлению нагрузки наибольшей мощности.

Согласованный режим наступает тогда, когда сопротивление нагрузки становится равным внутреннему сопротивлению источника. При этом в нагрузке выделяется максимальная мощность.

### Основные законы электрических цепей

На рисунке 2.9 изображен участок цепи с сопротивлением R.

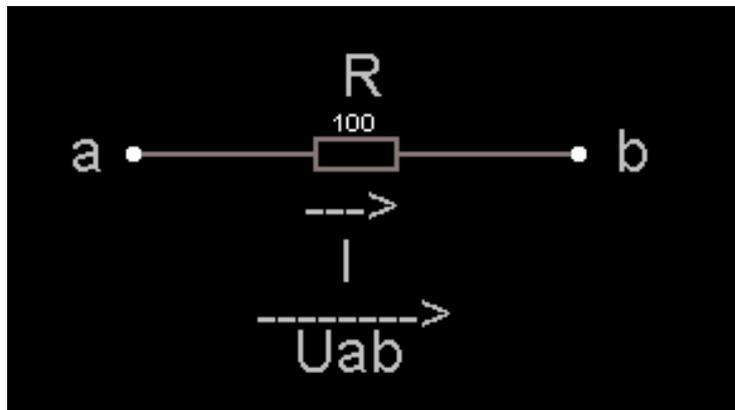


Рисунок 2.9

Ток, протекающий через сопротивление R, пропорционален падению напряжения на сопротивлении и обратно пропорционален величине этого сопротивления.

$$I = \frac{U_{ab}}{R} .$$

Падением напряжения на сопротивлении называется произведение тока, протекающего через сопротивление, на величину этого сопротивления.

Основными законами электрических цепей, наряду с *законом Ома*, являются *законы баланса токов в разветвлениях (первый закон Кирхгофа)* и *баланса напряжений на замкнутых участках цепи (второй закон Кирхгофа)*.

В соответствии с первым законом Кирхгофа, алгебраическая сумма токов в любом узле цепи равна нулю:

$$\sum I = 0 .$$

Рассмотрим схему на рисунке 2.10. Запишем для нее уравнение по первому закону Кирхгофа.

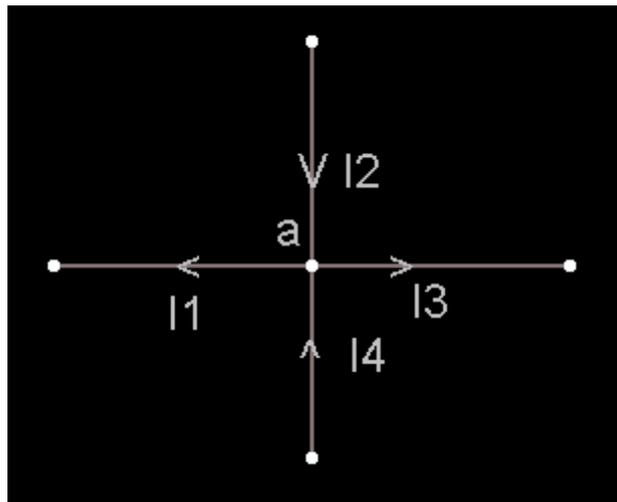


Рисунок 2.10

Токам, направленным к узлу **а**, присвоим знак "**плюс**", а токам, направленным от узла - знак "**минус**".

Получим следующее уравнение:

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

Согласно второму закону Кирхгофа, алгебраическая сумма ЭДС вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в этом контуре

$$\sum E = \sum U.$$

Рассмотрим схему на рисунке 2.11 и запишем для контура  $-R_{i1} - E_1 - R_1 - R_2 - E_2 - R_{i2}$  этой схемы уравнение по второму закону Кирхгофа.

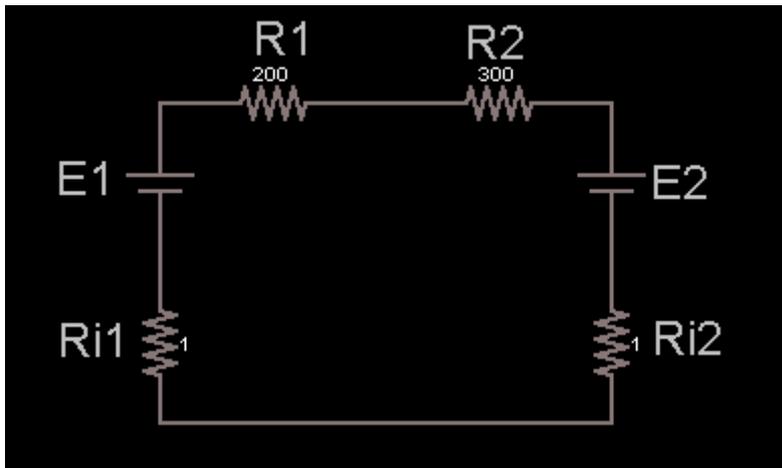


Рисунок 2.11

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
r 224 160 336 160 0 200.0
r 336 160 448 160 0 300.0
v 448 240 448 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
v 224 240 224 160 0 0 40.0 12.0 0.0 0.0 0.5
r 448 240 448 320 0 1.0
r 224 240 224 320 0 1.0
w 336 320 448 320 0
w 336 320 224 320 0
x 469 287 504 293 0 24 Ri2
x 468 209 497 215 0 24 E2
x 376 139 406 145 0 24 R2
x 174 288 209 294 0 24 Ri1
x 173 207 202 213 0 24 E1
x 271 137 301 143 0 24 R1

```

Для этого выберем произвольно направление обхода контура, например, по часовой стрелке.

ЭДС и падения напряжений записываются в левую и правую части уравнения со знаком "плюс", если направления их совпадают с направлением обхода контура, и со знаком "минус", если не совпадают.

$$E_1 - E_2 = U_{R_{i_1}} + U_{R_1} + U_{R_2} + U_{R_{i_2}} .$$

При определении тока в ветви, содержащей источник ЭДС, используют **закон Ома для активной ветви**.

Рассмотрим ветвь, содержащую сопротивления и источники ЭДС. Ветвь включена к узлам a-b, известно направление тока в ветви (рисунок 2.12). Обход контура проведем по часовой стрелке.

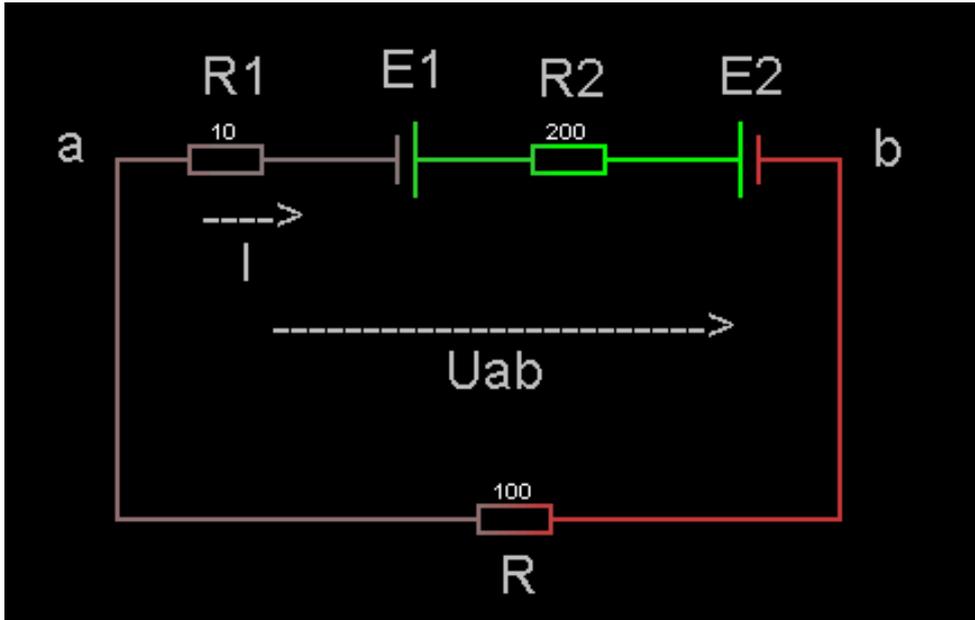


Рисунок 2.12

```

$ 1 9.92E-6 3.9121283998153213 67 7.0 50
v 208 192 272 192 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 272 192 352 192 0 200.0
v 432 192 352 192 0 0 40.0 15.0 0.0 0.0 0.5
r 208 192 112 192 0 10.0
x 229 161 258 167 0 24 E1
x 150 164 180 170 0 24 R1
x 299 165 329 171 0 24 R2
x 379 164 408 170 0 24 E2
x 447 196 461 202 0 24 b
x 151 226 197 232 0 24 ---->
x 182 275 388 281 0 24 ----->
x 86 194 99 200 0 24 a
x 258 295 302 301 0 24 Uab
x 167 247 173 253 0 24 I
w 240 352 112 352 0
w 112 192 112 352 0
w 336 352 432 352 0
w 432 352 432 192 0
r 240 352 336 352 0 100.0
x 282 386 299 392 0 24 R

```

Рассмотрим замкнутый контур, **состоящий из активной ветви и стрелки напряжения**  $U_{ab}$ , и запишем для него уравнение по второму закону Кирхгофа (*Сопротивление  $R$  введено только для того, чтобы цепь была замкнута при моделировании*).

Выберем направление обхода контура по часовой стрелке. Получим

$$IR_1 + IR_2 - U_{ab} = E_1 - E_2$$

Из этого уравнения выведем формулу для тока

$$I = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

В общем виде:

$$I = \frac{U_{ab} \pm \sum E}{\sum R},$$

где  $\sum R$  - сумма сопротивлений ветви;

$\sum E$  - алгебраическая сумма ЭДС.

ЭДС в формуле записывается со знаком "плюс", если направление ее совпадает с направлением тока и со знаком "минус", если не совпадает.

## Лекция 3

### Эквивалентные преобразования цепей

**Эквивалентным** называется преобразование, при котором напряжения и токи в частях цепи, не подвергшихся преобразованию, не меняются.

#### Последовательное соединение элементов электрических цепей

На рисунке 3.1а изображена электрическая цепь с последовательно соединенными сопротивлениями.

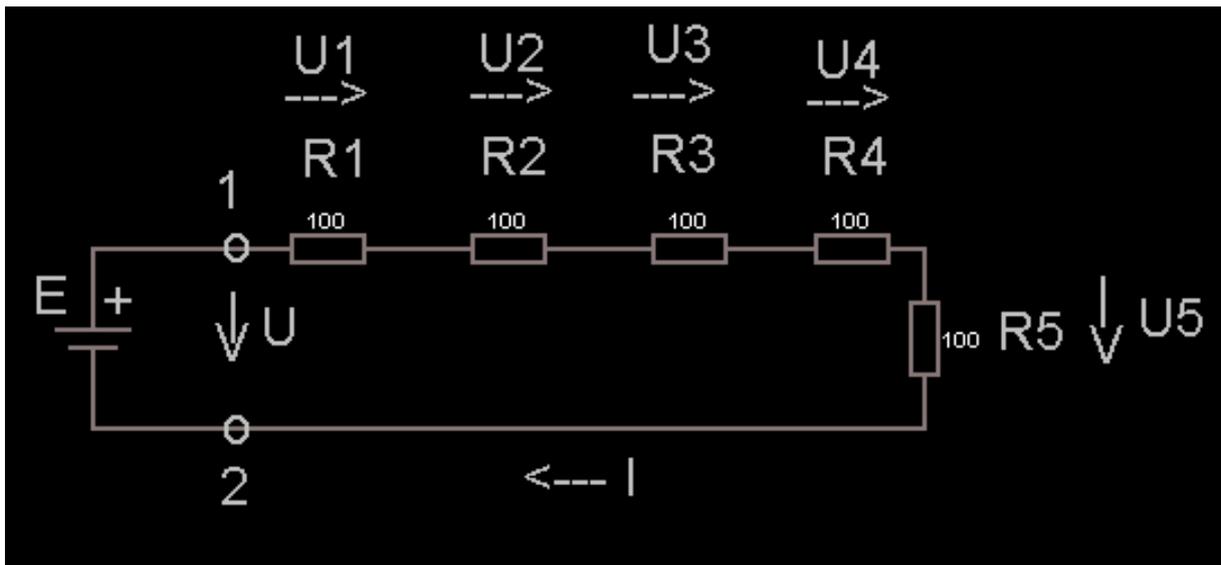


Рисунок 3.1а

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 144 224 224 224 0 100.0
r 224 224 304 224 0 100.0
r 304 224 384 224 0 100.0
r 384 224 448 224 0 100.0
r 448 224 448 304 0 100.0
w 144 304 448 304 0
x 173 193 203 199 0 24 R1
x 252 192 282 198 0 24 R2
x 327 191 357 197 0 24 R3
x 403 192 433 198 0 24 R4
x 481 270 511 276 0 24 R5
x 271 335 322 341 0 24 <--- I
w 144 224 80 224 0
w 144 304 80 304 0

```

```

v 80 304 80 224 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 54 254 70 260 0 24 E
x 134 207 147 213 0 24 1
x 137 339 150 345 0 24 2
x 140 261 146 267 0 24 |
x 135 275 150 281 0 24 V
x 85 256 99 262 0 24 +
x 138 231 151 237 0 24 o
x 138 312 151 318 0 24 o
x 169 147 199 153 0 24 U1
x 251 146 281 152 0 24 U2
x 325 142 355 148 0 24 U3
x 400 149 430 155 0 24 U4
x 525 254 531 260 0 24 |
x 522 276 537 282 0 24 V
x 543 264 573 270 0 24 U5
x 155 268 172 274 0 24 U
x 166 164 204 170 0 24 ---->
x 248 163 286 169 0 24 ---->
x 320 163 358 169 0 24 ---->
x 397 166 435 172 0 24 ---->

```

Эта цепь с пятью сопротивлениями эквивалентна цепи с одним сопротивлением, изображенной на рисунке 3.1б

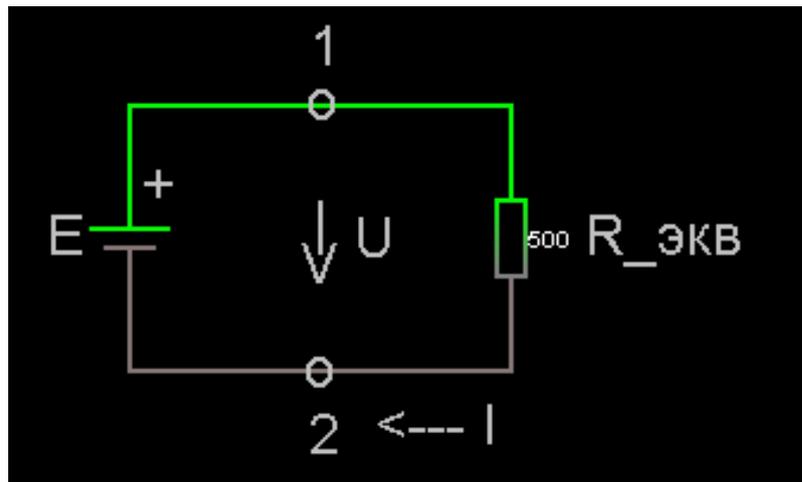


Рисунок 3.1б

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
v 176 288 176 176 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 176 176 256 176 0
w 256 176 336 176 0
w 176 288 256 288 0
w 256 288 336 288 0
r 336 176 336 288 0 500.0
x 142 240 158 246 0 24 E
x 182 218 196 224 0 24 +
x 252 160 265 166 0 24 1
x 251 183 264 189 0 24 o
x 252 324 265 330 0 24 2
x 280 320 331 326 0 24 <--- I
x 254 234 260 240 0 24 |

```

```

x 249 252 264 258 0 24 V
x 271 241 288 247 0 24 U
x 368 240 434 246 0 24 R_ЭКВ
x 250 296 263 302 0 24 o

```

Напряжение на зажимах источника ЭДС равно величине электродвижущей силы. Поэтому часто источник на схеме не изображают. Падения напряжений на сопротивлениях определяются по выражениям (в общем случае число сопротивлений  $n$ , но в примере модели – 5)

$$U_1 = IR_1, U_2 = IR_2, \dots, U_5 = IR_5, \dots, U_n = IR_n.$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа, напряжение на входе электрической цепи равно сумме падений напряжений на сопротивлениях цепи.

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR_{ЭКВ}$$

где -  $U_{ЭКВ} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$  - эквивалентное сопротивление.

Эквивалентное сопротивление электрической цепи, состоящей из  $n$  последовательно включенных элементов, равно сумме сопротивлений этих элементов.

### Параллельное соединение элементов электрических цепей

На рисунке 3.2а показана электрическая цепь с параллельным соединением сопротивлений.

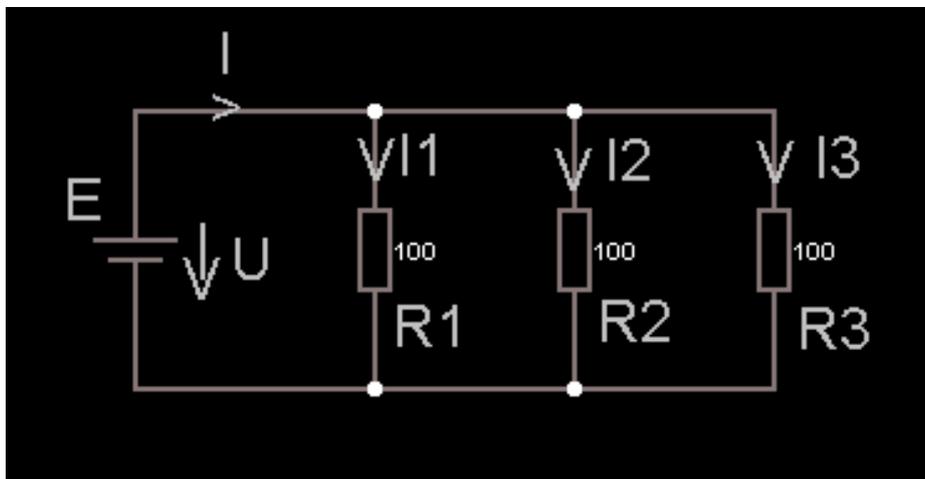


Рисунок 3.2а

```

$ 1 9.92E-6 9.78399845368213 82 7.0 50
w 160 160 256 160 0
r 256 160 256 272 0 100.0
r 336 160 336 272 0 100.0
r 416 160 416 272 0 100.0
w 416 160 336 160 0
w 336 160 256 160 0
w 160 272 256 272 0
w 256 272 336 272 0
w 336 272 416 272 0
x 426 257 456 263 0 24 R3
x 346 254 376 260 0 24 R2
x 264 256 294 262 0 24 R1
x 266 187 285 193 0 24 I1
x 250 189 265 195 0 24 V
x 349 189 368 195 0 24 I2
x 329 193 344 199 0 24 V
x 410 190 425 196 0 24 V
x 433 188 452 194 0 24 I3
x 185 223 191 229 0 24 |
x 180 237 195 243 0 24 V
v 160 272 160 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 132 205 148 211 0 24 E
x 199 229 216 235 0 24 U
x 191 168 205 174 0 24 >
x 194 146 200 152 0 24 I

```

Эта цепь с тремя сопротивлениями эквивалентна цепи с одним сопротивлением, изображенной на рисунке 3.2б

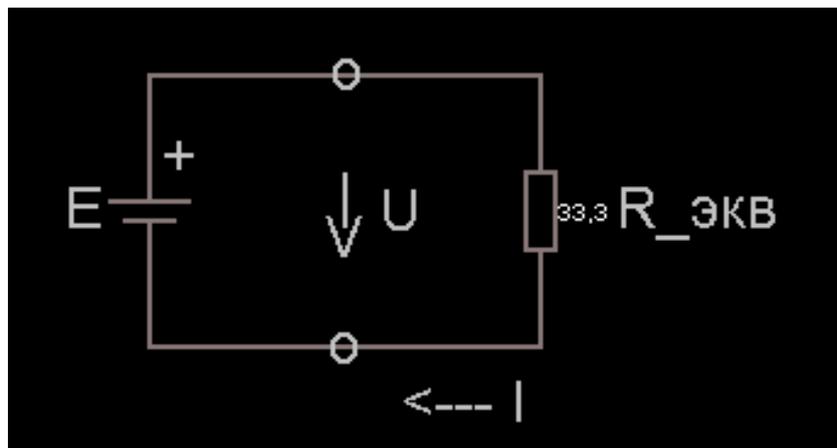


Рисунок 3.2б

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
v 208 240 208 128 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 208 128 288 128 0
w 288 128 368 128 0
w 208 240 288 240 0
w 288 240 368 240 0
r 368 128 368 240 0 33.33

```

```

x 174 192 190 198 0 24 E
x 214 170 228 176 0 24 +
x 283 135 296 141 0 24 o
x 312 272 363 278 0 24 <--- I
x 286 186 292 192 0 24 |
x 281 204 296 210 0 24 V
x 303 193 320 199 0 24 U
x 400 192 466 198 0 24 R_ЭКВ
x 282 248 295 254 0 24 o

```

Токи в параллельных ветвях определяются по выражениям:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = Ug_1, \dots, I_n = \frac{U}{R_n} = Ug_n.$$

где -  $g_1 = \frac{1}{R_1}, \dots, g_n = \frac{1}{R_n}$  - проводимости 1-й, и n-й ветвей.

В соответствии с первым законом Кирхгофа, ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов в параллельных ветвях.

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

$$I = Ug_1 + Ug_2 + \dots + Ug_n.$$

$$I = U(g_1 + g_2 + \dots + g_n) = Ug_{ЭКВ}.$$

где  $g_{ЭКВ} = g_1 + g_2 + \dots + g_n$ .

**Эквивалентная проводимость** электрической цепи, состоящей из n параллельно включенных элементов, равна сумме проводимостей параллельно включенных элементов.

Эквивалентным сопротивлением цепи называется величина, обратная эквивалентной проводимости

$$R_{ЭКВ} = \frac{1}{g_{ЭКВ}}.$$

Рассмотрим пример. Пусть электрическая цепь содержит три параллельно включенных сопротивления.

Эквивалентная проводимость

$$g_{\text{ЭКВ}} = g_1 + g_2 + g_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

$$g_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}.$$

Эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{g_{\text{ЭКВ}}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}.$$

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из  $n$  одинаковых элементов, в  $n$  раз меньше сопротивлений  $R$  одного элемента

Для двух параллельно включенных сопротивлений выражение для эквивалентного сопротивления имеет вид

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{g_{\text{ЭКВ}}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = I \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Если включено параллельно  $n$  одинаковых сопротивлений, то эквивалентное сопротивление в  $n$  раз меньше.

## Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду

Часто встречаются схемы, в которых отсутствуют сопротивления, включенные последовательно или параллельно, например, мостовая схема, изображенная на рисунке 3.3а.

Определить эквивалентное сопротивление этой цепи относительно ветви с источником ЭДС описанными выше методами нельзя.

Если же заменить *треугольник сопротивлений*  $R_1 - R_2 - R_3$  включенных между узлами 1-2-3, *трехлучевой звездой сопротивлений*, лучи которой расходятся из точки 0 в те же узлы 1-2-3, эквивалентное сопротивление полученной схемы легко определяется (рисунок 3.2б).

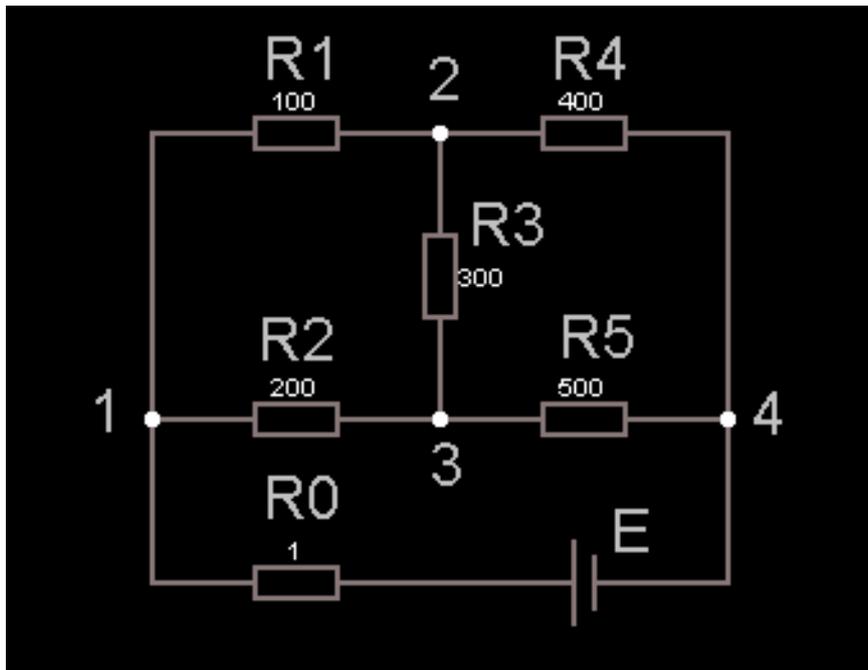


Рисунок 3.3а

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 192 176 304 176 0 100.0
r 304 176 416 176 0 400.0
r 304 176 304 288 0 300.0
r 304 288 416 288 0 500.0
r 304 288 192 288 0 200.0
w 192 176 192 288 0
w 192 288 192 352 0
w 416 176 416 288 0
w 416 288 416 352 0
r 192 352 304 352 0 1.0
v 416 352 304 352 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 236 156 266 162 0 24 R1

```

```

x 234 266 264 272 0 24 R2
x 316 221 346 227 0 24 R3
x 348 156 378 162 0 24 R4
x 351 265 381 271 0 24 R5
x 371 341 387 347 0 24 E
x 236 328 266 334 0 24 R0
x 168 294 181 300 0 24 1
x 426 295 439 301 0 24 4
x 301 315 314 321 0 24 3
x 300 164 313 170 0 24 2

```

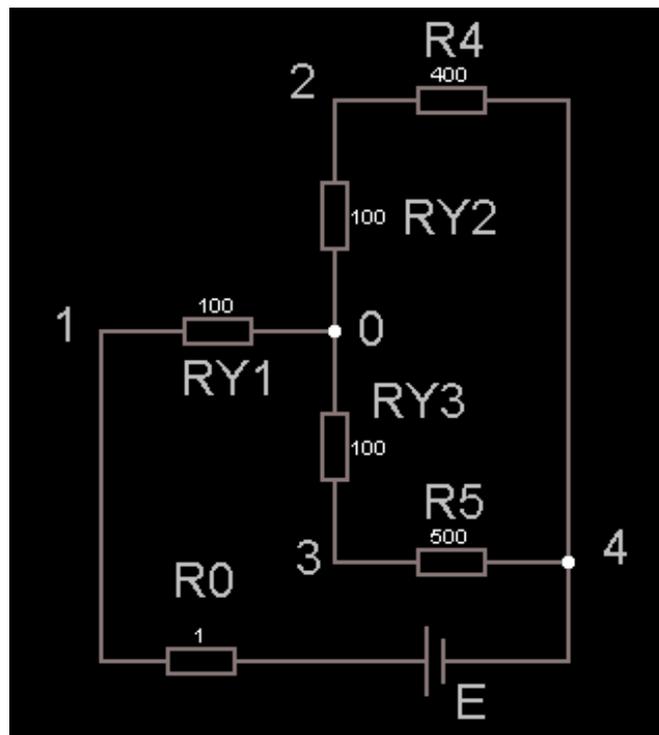


Рисунок 3.3б

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 192 224 304 224 0 100.0
r 304 224 304 112 0 100.0
r 304 112 416 112 0 400.0
r 304 224 304 336 0 100.0
r 304 336 416 336 0 500.0
w 416 112 416 336 0
w 416 336 416 384 0
w 192 224 192 384 0
r 192 384 288 384 0 1.0
v 416 384 288 384 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 337 178 383 184 0 24 RY2
x 227 354 257 360 0 24 R0
x 231 256 277 262 0 24 RY1
x 169 230 182 236 0 24 1
x 283 112 296 118 0 24 2
x 347 92 377 98 0 24 R4
x 433 338 446 344 0 24 4
x 362 413 378 419 0 24 E
x 286 343 299 349 0 24 3
x 322 267 368 273 0 24 RY3
x 347 316 377 322 0 24 R5
x 316 232 329 238 0 24 0

```

Сопротивление луча эквивалентной звезды сопротивлений равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.

В соответствии с указанным правилом, сопротивления лучей звезды определяются по формулам:

$$R_{Y1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R_{Y2} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R_{Y3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Обозначения  $R_{Y1}$  и аналогично для других на схеме и  $R_{Y1}$ , и т.д. в формулах, эквивалентны по смыслу

### **Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник**

В ряде случаев для упрощения схемы полезно преобразовать звезду сопротивлений в эквивалентный треугольник.

Рассмотрим схему на рисунке 3.4а.

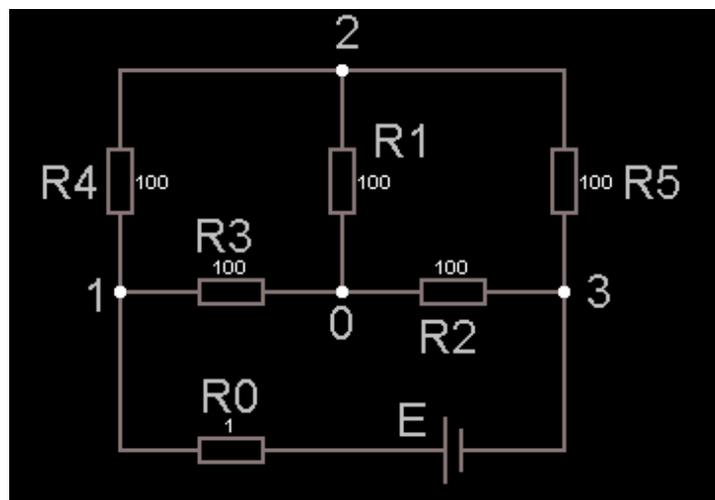


Рисунок 3.4а

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 196 213 196 101 0 100.0
r 196 213 308 213 0 100.0
r 308 213 308 101 0 100.0
r 308 213 420 213 0 100.0
r 420 213 420 101 0 100.0
r 196 293 308 293 0 1.0
v 420 293 308 293 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 420 213 420 293 0
w 196 213 196 293 0
w 196 101 308 101 0
w 308 101 420 101 0
x 237 275 267 281 0 24 R0
x 336 287 352 293 0 24 E
x 347 245 377 251 0 24 R2
x 305 91 318 97 0 24 2
x 178 224 191 230 0 24 1
x 234 194 264 200 0 24 R3
x 156 167 186 173 0 24 R4
x 450 167 480 173 0 24 R5
x 324 146 354 152 0 24 R1
x 302 238 315 244 0 24 0
x 432 222 445 228 0 24 3

```

Заменяем *звезду сопротивлений*  $R_1 - R_2 - R_3$  эквивалентным *треугольником сопротивлений*  $R_{\Delta 1} - R_{\Delta 2} - R_{\Delta 3}$ , включенных между узлами 1-2-3.

Обозначения  $RT1, RT2, RT3$  на схеме эквивалентны обозначениям  $R_{\Delta 1}, R_{\Delta 2}, R_{\Delta 3}$  в выражениях.

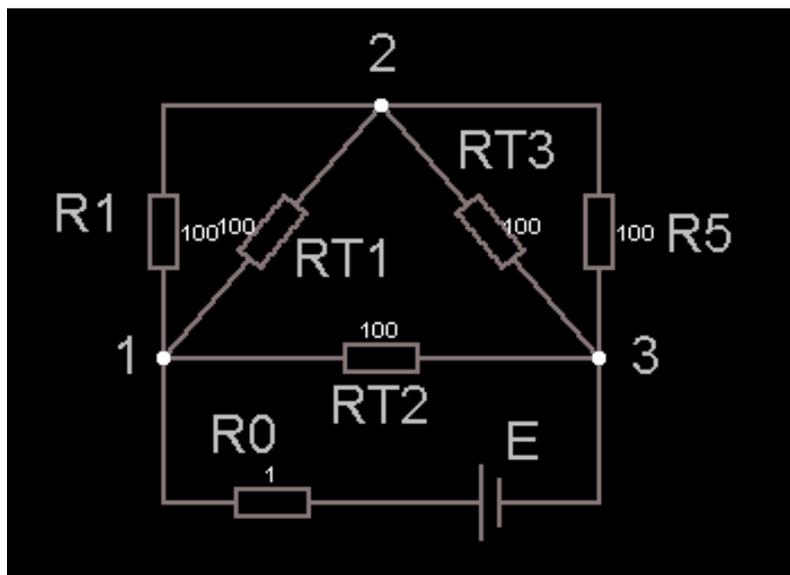


Рисунок 3.4б

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 192 240 288 128 0 100.0
r 288 128 384 240 0 100.0
r 192 240 384 240 0 100.0
r 192 240 192 128 0 100.0
r 384 240 384 128 0 100.0
w 192 128 288 128 0
w 288 128 384 128 0
w 192 240 192 304 0
w 384 240 384 304 0
r 192 304 288 304 0 1.0
v 384 304 288 304 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 213 283 243 289 0 24 R0
x 343 286 359 292 0 24 E
x 399 248 412 254 0 24 3
x 283 114 296 120 0 24 2
x 170 248 183 254 0 24 1
x 144 185 174 191 0 24 R1
x 250 205 294 211 0 24 RT1
x 266 270 310 276 0 24 RT2
x 414 194 444 200 0 24 R5
x 322 157 366 163 0 24 RT3

```

Сопротивление стороны эквивалентного треугольника сопротивлений равно сумме сопротивлений двух прилегающих лучей звезды плюс произведение этих же сопротивлений, деленное на сопротивление оставшегося (противолежащего) луча.

Сопротивления сторон треугольника определяются по выражениям:

$$R_{\Delta 1} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2},$$

$$R_{\Delta 2} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1},$$

$$R_{\Delta 3} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}.$$

## Лекция 4

### Анализ электрических цепей постоянного тока с одним источником энергии

#### Расчет электрических цепей постоянного тока с одним источником методом свертывания

В соответствии с методом свертывания, отдельные участки схемы упрощают и постепенным преобразованием приводят схему к одному эквивалентному (входному) сопротивлению, включенному к зажимам источника.

Схема упрощается с помощью замены группы последовательно или параллельно соединенных сопротивлений одним, эквивалентным по сопротивлению.

Определяют ток в упрощенной цепи, затем возвращаются к исходной схеме и определяют в ней токи.

Рассмотрим схему на рисунке 4.1.

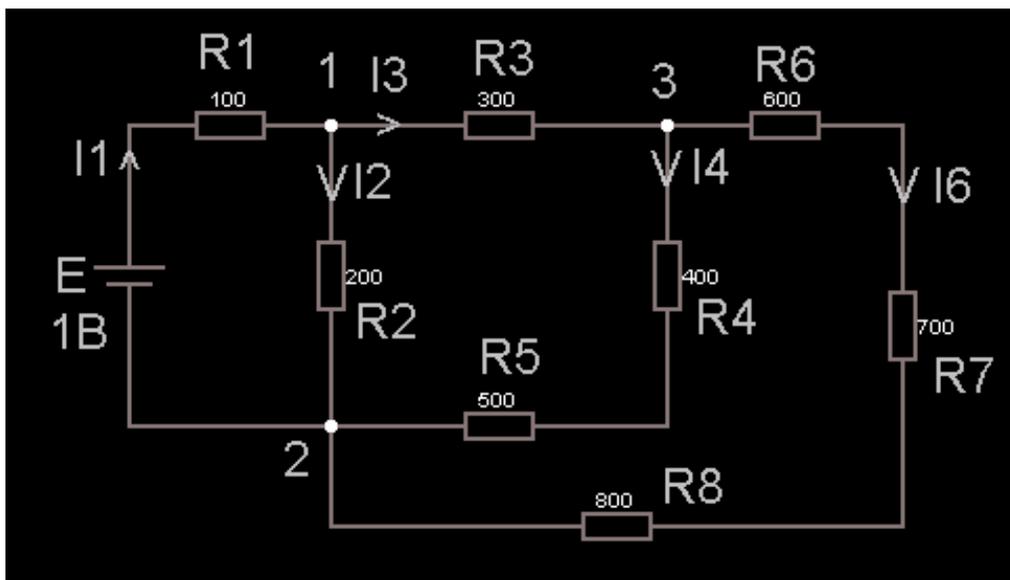


Рисунок 4.1

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
v 144 288 144 144 0 0 40.0 1.0 0.0 0.0 0.5
r 144 144 240 144 0 100.0

```

```

r 240 144 240 288 0 200.0
r 240 144 400 144 0 300.0
r 400 144 400 288 0 400.0
r 400 288 240 288 0 500.0
r 400 144 512 144 0 600.0
r 512 144 512 336 0 700.0
r 512 336 240 336 0 800.0
w 240 336 240 288 0
w 240 288 144 288 0
x 109 225 125 231 0 24 E
x 177 118 207 124 0 24 R1
x 118 169 137 175 0 24 I1
x 308 121 338 127 0 24 R3
x 442 124 472 130 0 24 R6
x 414 245 444 251 0 24 R4
x 527 273 557 279 0 24 R7
x 398 326 428 332 0 24 R8
x 311 264 341 270 0 24 R5
x 252 247 282 253 0 24 R2
x 234 181 249 187 0 24 V
x 139 174 151 180 0 24 ^
x 106 252 135 258 0 24 1B
x 412 173 431 179 0 24 I4
x 393 174 408 180 0 24 V
x 251 180 270 186 0 24 I2
x 262 153 276 159 0 24 >
x 259 129 278 135 0 24 I3
x 506 182 521 188 0 24 V
x 527 182 546 188 0 24 I6
x 233 127 246 133 0 24 1
x 218 313 231 319 0 24 2
x 393 132 406 138 0 24 3

```

Пусть известны величины всех сопротивлений и ЭДС  $E$ . Необходимо определить токи в ветвях цепи.

Сопротивления  $R_4$  и  $R_5$  соединены последовательно. Сопротивления  $R_6$ ,  $R_7$  и  $R_8$  - также последовательно и одновременно параллельно с ветвью  $R_4$  и  $R_5$ , поэтому их эквивалентное сопротивление

$$R_{45678} = \frac{(R_4 + R_5)(R_6 + R_7 + R_8)}{R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8}.$$

Сопротивление  $R_3$  соединено последовательно сопротивлению  $R_{45678}$  и одновременно оба параллельно подключены к сопротивлению  $R_2$ . В результате преобразований получаем

$$R_{2345678} = \frac{(R_3 + R_{45678})R_2}{R_2 + R_3 + R_{45678}}.$$

Осталось добавить к выражению значение сопротивления  $R_1$  и получим окончательное выражение для эквивалентного сопротивления  $R_{ЭКВ}$

$$R_{ЭКВ} = \frac{(R_3 + R_{45678})R_2}{R_2 + R_3 + R_{45678}} + R_1.$$

Найдем токи в ветвях цепи.

Ток  $I_1$  в неразветвленной части цепи определяется по выражению:

$$I_1 = \frac{E}{R_{ЭКВ}}.$$

Найдем токи  $I_2$  и  $I_3$  по выражениям:

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2},$$

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_{45678}}{R_2 + R_3 + R_{45678}},$$

$$I_3 = I_1 - I_2.$$

Последнее выражение получается из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа.  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

$$I_4 = I_5 = \frac{U_{23}}{R_4 + R_5} = I_3 \frac{R_6 + R_7 + R_8}{R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8}.$$

$$I_6 = I_3 - I_4,$$

в соответствии с первым законом Кирхгофа  $I_3 - I_4 - I_6 = 0$ .

Для указанных на рисунке 4.1 значений сопротивлений и ЭДС источника ток  $I_1 = 3.779$  мА.

**Расчет электрических цепей постоянного тока с одним источником методом подобия или методом пропорциональных величин**

Рассмотрим электрическую схему на рисунке 4.2.

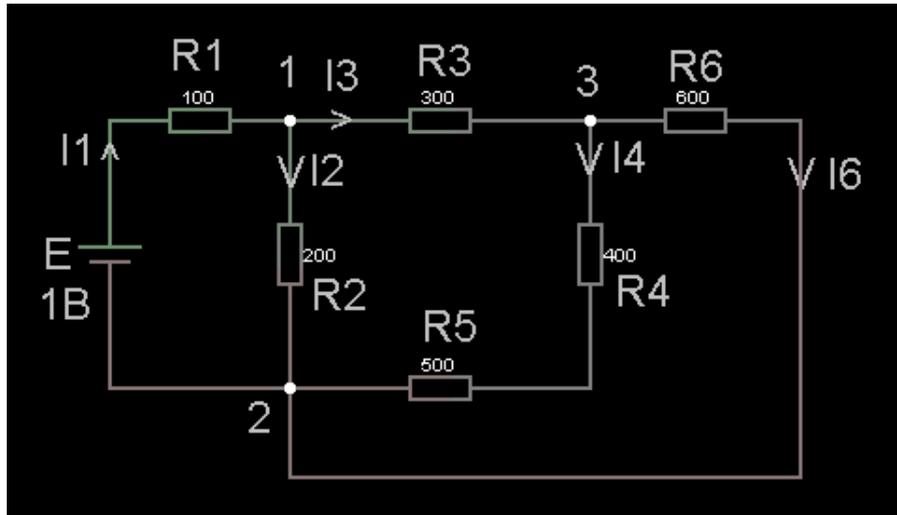


Рисунок 4.2

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
v 96 288 96 144 0 0 40.0 1.0 0.0 0.0 0.5
r 96 144 192 144 0 100.0
r 192 144 192 288 0 200.0
r 192 144 352 144 0 300.0
r 352 144 352 288 0 400.0
r 352 288 192 288 0 500.0
r 352 144 464 144 0 600.0
w 192 336 192 288 0
w 192 288 96 288 0
x 61 225 77 231 0 24 E
x 129 118 159 124 0 24 R1
x 70 169 89 175 0 24 I1
x 260 121 290 127 0 24 R3
x 394 124 424 130 0 24 R6
x 366 245 396 251 0 24 R4
x 263 264 293 270 0 24 R5
x 204 247 234 253 0 24 R2
x 186 181 201 187 0 24 V
x 91 174 103 180 0 24 ^
x 58 252 87 258 0 24 1B
x 364 173 383 179 0 24 I4
x 345 174 360 180 0 24 V
x 203 180 222 186 0 24 I2
x 214 153 228 159 0 24 >
x 211 129 230 135 0 24 I3
x 458 182 473 188 0 24 V
x 479 182 498 188 0 24 I6
x 185 127 198 133 0 24 1
x 170 313 183 319 0 24 2
x 345 132 358 138 0 24 3

```

w 192 336 464 336 0  
w 464 144 464 336 0

Зададимся произвольным значением тока  $I'_6$  в сопротивлении  $R_6$ , как наиболее удаленном от источника питания. По заданному току  $I'_6$  и сопротивлению  $R_6$  определим напряжение

$$U'_{23} = R_6 I'_6.$$

Далее определим:

$$I'_4 = I'_5 = \frac{U'_{23}}{R_4 + R_5}, \quad I'_3 = I'_4 + I'_6, \quad U'_{13} = I'_3 R_3, \quad I'_2 = \frac{U'_{12}}{R_2}, \quad I'_1 = I'_2 + I'_3$$

Находим значение ЭДС

$$E' = R_1 I'_1 + R_2 I'_2$$

Найденное значение ЭДС  $E'$  отличается от заданной величины ЭДС  $E$ .

Вычислим коэффициент подобия.

$$K = \frac{E}{E'}$$

Умножим на него полученные при расчете значения токов и напряжений, находим действительные значения токов цепи.

## Лекция 5

### Анализ сложных электрических цепей с несколькими источниками энергии

#### Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

На рисунке 5.1 изображена схема разветвленной электрической цепи. Известны величины сопротивлений и ЭДС, необходимо определить токи. В схеме имеются четыре узла, можно составить четыре уравнения по первому закону Кирхгофа.

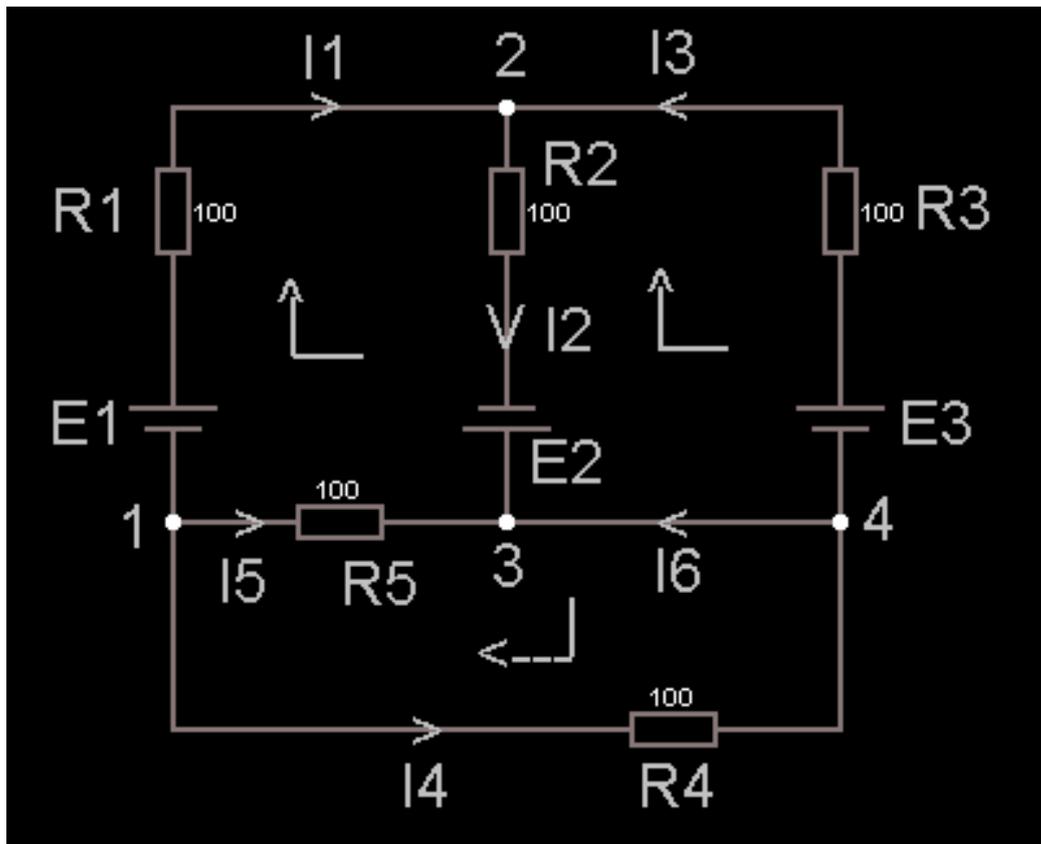


Рисунок 5.1

```

§ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
v 176 224 176 144 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 176 144 176 64 0 100.0
r 176 224 304 224 0 100.0
v 304 144 304 224 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 304 144 304 64 0 100.0
  
```

```

w 304 64 176 64 0
w 304 64 432 64 0
w 304 224 432 224 0
r 432 64 432 144 0 100.0
v 432 224 432 144 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 176 304 304 304 0
r 304 304 432 304 0 100.0
w 432 224 432 304 0
w 176 224 176 304 0
x 130 113 160 119 0 24 R1
x 318 95 348 101 0 24 R2
x 241 257 271 263 0 24 R5
x 129 195 158 201 0 24 E1
x 313 210 342 216 0 24 E2
x 455 195 484 201 0 24 E3
x 355 335 385 341 0 24 R4
x 268 314 282 320 0 24 >
x 264 335 283 341 0 24 I4
x 226 54 245 60 0 24 I1
x 229 73 243 79 0 24 >
x 359 52 378 58 0 24 I3
x 362 73 376 79 0 24 <
x 461 112 491 118 0 24 R3
x 297 158 312 164 0 24 V
x 319 159 338 165 0 24 I2
x 362 234 376 240 0 24 <
x 361 252 380 258 0 24 I6
x 200 234 214 240 0 24 >
x 194 256 213 262 0 24 I5
x 441 232 454 238 0 24 4
x 300 53 313 59 0 24 2
x 155 235 168 241 0 24 1
x 299 250 312 256 0 24 3
x 220 155 226 161 0 24 |
x 216 148 228 154 0 24 ^
x 358 144 370 150 0 24 ^
x 361 151 367 157 0 24 |
x 293 284 331 290 0 24 <---
x 224 157 250 163 0 24 —
x 364 154 390 160 0 24 —
x 327 271 333 277 0 24 |

```

Укажем произвольно направления токов. Запишем уравнения:

$$\begin{aligned}
 \text{Для узла 1} & \quad -I_1 - I_5 - I_4 = 0, \\
 \text{для узла 2} & \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\
 \text{для узла 3} & \quad I_2 + I_5 + I_6 = 0, \\
 \text{для узла 4} & \quad -I_3 - I_6 + I_4 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Сложим эти уравнения. Получим тождество  $0 = 0$ .

Система уравнений (5.1) является зависимой.

**Если в схеме имеется  $n$  узлов, количество независимых уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, равно  $n-1$ .**

Для схемы на рис. 5.1 число независимых уравнений равно трем.

$$\left. \begin{aligned} -I_1 - I_5 - I_4 &= 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ I_2 + I_5 + I_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Недостающее количество уравнений составляют по второму закону Кирхгофа.

Уравнения по второму закону составляют для независимых контуров.

**Независимым является контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в другие контуры.**

Выберем **три независимых контура** и укажем направления обхода контуров (например, по часовой стрелке).

Запишем три уравнения по второму закону Кирхгофа.

$$\left. \begin{aligned} E_1 + E_2 &= -I_5 R_5 + I_1 R_1 + I_2 R_2 \\ -E_2 - E_3 &= -I_2 R_2 - I_3 R_3 \\ 0 &= I_5 R_5 - I_4 R_4 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Решив совместно системы уравнений (5.2) и (5.3), определим токи в схеме.

Ток в ветви может иметь отрицательное значение.

Это означает, что действительное направление тока **противоположно** выбранному нами.

### **Метод контурных токов**

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа громоздок.

Имеется возможность уменьшить количество совместно решаемых уравнений системы.

Число уравнений, составленных по методу контурных токов, равно количеству уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа.

Метод контурных токов заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются, на основании второго закона Кирхгофа, так называемые **контурные токи**, замыкающиеся в контурах.

На рисунке 5.2 в качестве примера изображена двухконтурная схема, в которой  $I_{11}$  и  $I_{22}$  - контурные токи.

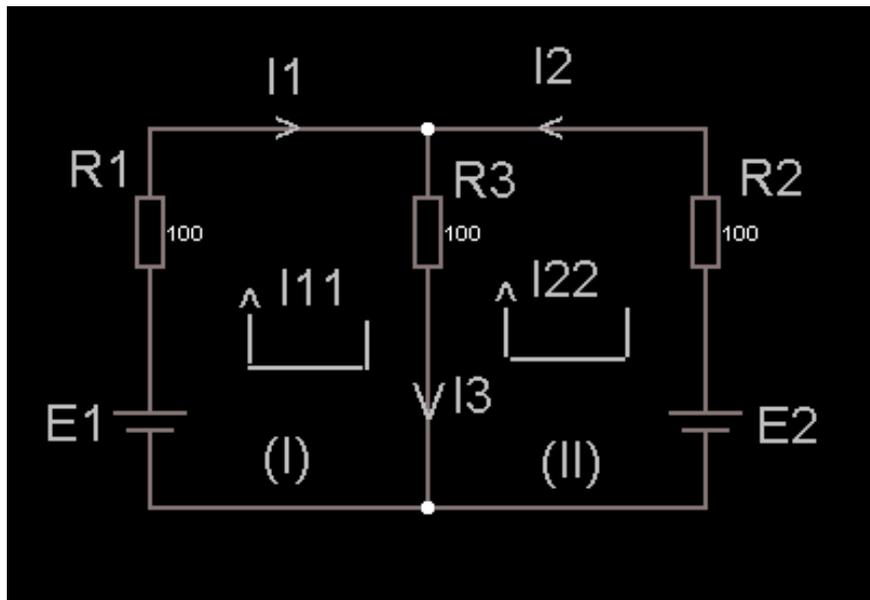


Рис. 5.2

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 208 176 208 272 0 100.0
r 336 176 336 272 0 100.0
r 464 176 464 272 0 100.0
w 208 176 336 176 0
w 336 176 464 176 0
v 208 352 208 272 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
v 464 352 464 272 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 336 272 336 352 0
w 208 352 336 352 0
w 336 352 464 352 0
x 171 204 201 210 0 24 R1
x 262 161 281 167 0 24 I1
x 266 185 280 191 0 24 >
x 385 156 404 162 0 24 I2
x 387 185 401 191 0 24 <
x 348 209 378 215 0 24 R3
x 480 208 510 214 0 24 R2
x 488 323 517 329 0 24 E2
x 160 322 189 328 0 24 E1
x 261 337 283 343 0 24 (I)

```

x	389	339	417	345	0	24	(II)
x	306	283	312	289	0	24	
x	255	284	307	290	0	24	_____
x	252	280	258	286	0	24	
x	249	268	261	274	0	24	^
x	367	265	379	271	0	24	^
x	426	277	432	283	0	24	
x	370	277	376	283	0	24	
x	376	280	428	286	0	24	_____
x	268	259	300	265	0	24	I11
x	330	312	345	318	0	24	V
x	348	309	367	315	0	24	I3
x	384	255	416	261	0	24	I22

Токи в сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  равны соответствующим контурным токам.

Ток в сопротивлении  $R_3$ , являющийся общим для обоих контуров, равен разности контурных токов  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , так как эти токи направлены в ветви с  $R_3$  встречно.

### *Порядок расчета*

Выбираются независимые контуры, и задаются произвольные направления контурных токов.

В нашем случае эти токи направлены по часовой стрелке.

Направление обхода контура совпадает с направлением контурных токов.

Уравнения для этих контуров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{11}R_1 + I_{11}R_3 - I_{22}R_3 &= E_1, \\ I_{22}R_2 + I_{22}R_3 - I_{11}R_3 &= -E_2. \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые в уравнениях

$$I_{11}(R_1 + R_3) - I_{22}R_3 = E_1 = E_{11}, \quad (5.4)$$

$$-I_{11}R_3 + I_{22}(R_2 + R_3) = -E_2 = E_{22}. \quad (5.5)$$

Суммарное сопротивление данного контура называется **собственным сопротивлением контура**.

Собственные сопротивления контуров схемы

$$R_{11} = R_1 + R_3,$$

$$R_{22} = R_2 + R_3.$$

Сопротивление  $R_3$ , принадлежащее одновременно двум контурам, называется *общим сопротивлением* этих контуров.

$$R_3 = R_{12} = R_{21}.$$

где  $R_{12}$  - общее сопротивление между первым и вторым контурами;

$R_{21}$  - общее сопротивление между вторым и первым контурами.

$E_{11} = E_1$  и  $E_{22} = E_2$  - контурные ЭДС.

В общем виде уравнения (5.4) и (5.5) записываются следующим образом:

$$I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11}$$

$$I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}$$

Собственные сопротивления всегда имеют знак "плюс". Общее сопротивление имеет знак "минус", если в данном сопротивлении контурные токи направлены встречно друг другу, и знак "плюс", если контурные токи в общем сопротивлении совпадают по направлению.

Решая уравнения (5.4) и (5.5) совместно, определим контурные токи  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , затем от контурных токов переходим к токам в ветвях.

Ветви схемы, по которым протекает один контурный ток, называются *внешними*, а ветви, по которым протекают несколько контурных токов, называются *общими*.

Ток во внешней ветви совпадает по величине и по направлению с контурным. Ток в общей ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в этой ветви.

В схеме на рисунке 5.2

$$I_1 = I_{11}, \quad I_2 = I_{22}, \quad I_3 = I_{11} - I_{22}$$

## *Рекомендации*

Контурные выбирают произвольно, но целесообразно выбрать контуры таким образом, чтобы их внутренняя область не пересекалась ни с одной ветвью, принадлежащей другим контурам.

Контурные токи желательно направлять одинаково (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

Если нужно определить ток в одной ветви сложной схемы, необходимо сделать его контурным. Если в схеме имеется ветвь с известным контурным током, этот ток следует сделать контурным, благодаря чему количество уравнений становится на единицу меньше.

### **Метод узловых потенциалов**

Метод узловых потенциалов позволяет составить систему уравнений, по которой можно определить потенциалы всех узлов схемы.

По известным разностям узловых потенциалов можно определить токи во всех ветвях.

В схеме на рисунке 5.3 имеется четыре узла.

Потенциал любой точки схемы можно принять равным нулю.

Тогда у нас останутся неизвестными три потенциала.

Узел, величину потенциала которого выбирают произвольно, называют базисным.

Укажем в схеме произвольно направления токов.

Примем для схемы  $\varphi_4 = 0$ .

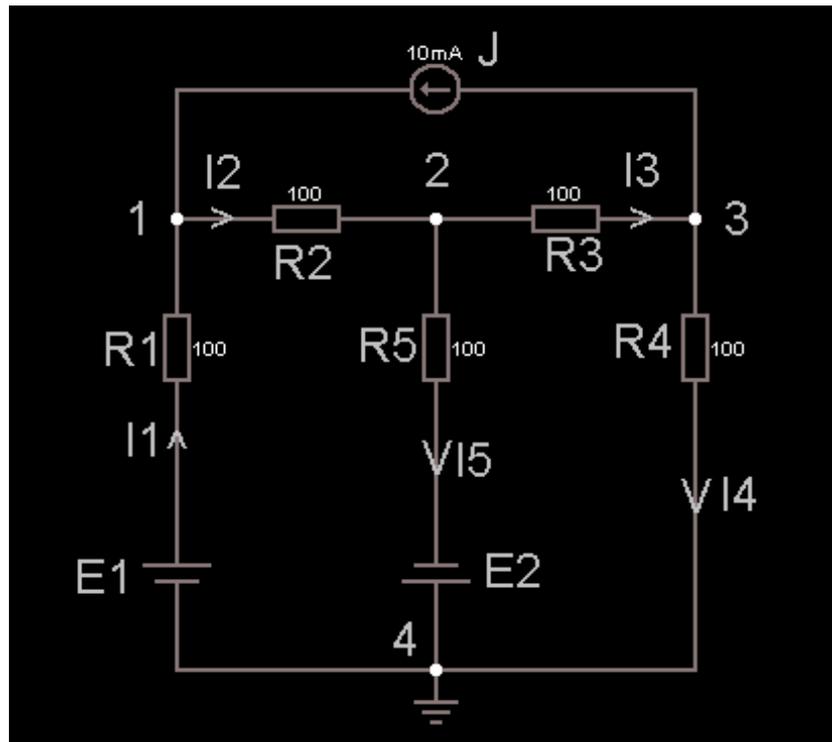


Рисунок 5.3

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
r 160 160 160 288 0 100.0
r 160 160 288 160 0 100.0
r 288 160 416 160 0 100.0
r 288 160 288 288 0 100.0
r 416 160 416 288 0 100.0
v 160 384 160 288 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
v 288 288 288 384 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 416 288 416 384 0
w 416 384 288 384 0
w 288 384 160 384 0
g 288 384 288 400 0
i 416 96 160 96 0 0.01
w 416 96 416 160 0
w 160 96 160 160 0
x 376 230 406 236 0 24 R4
x 342 187 372 193 0 24 R3
x 309 85 321 91 0 24 J
x 208 191 238 197 0 24 R2
x 250 232 280 238 0 24 R5
x 124 234 154 240 0 24 R1
x 110 347 139 353 0 24 E1
x 155 283 167 289 0 24 ^
x 135 279 154 285 0 24 I1
x 282 288 297 294 0 24 V
x 298 289 317 295 0 24 I5
x 429 306 448 312 0 24 I4
x 410 307 425 313 0 24 V
x 135 169 148 175 0 24 1
x 283 145 296 151 0 24 2
x 431 169 444 175 0 24 3
x 267 378 280 384 0 24 4

```

x 312 344 341 350 0 24 E2  
 x 174 146 193 152 0 24 I2  
 x 177 169 191 175 0 24 >  
 x 384 169 398 175 0 24 >  
 x 381 145 400 151 0 24 I3

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла 1.

$$I_1 + J - I_2 = 0 \quad (5.6)$$

В соответствии с законами Ома для активной и пассивной ветви

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1)g_1,$$

где -  $g_1 = \frac{1}{R_1}$  - проводимость первой ветви.

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = (\varphi_1 - \varphi_2)g_2,$$

где -  $g_2 = \frac{1}{R_2}$  проводимость второй ветви.

Подставим выражения токов в уравнение (5.6).

$$-\varphi_1 g_1 + J - \varphi_1 g_2 + \varphi_2 g_2 = 0,$$

$$\varphi_1 (g_1 + g_2) - \varphi_2 g_2 = E_1 g_1 + J,$$

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} = E_1 g_1 + J, \quad (5.7)$$

где  $g_{11} = g_1 + g_2$  - собственная проводимость узла 1.

**Собственной проводимостью узла называется сумма проводимостей ветвей, сходящихся в данном узле.**

$g_{12} = g_2$  - общая проводимость между узлами 1 и 2.

**Общей проводимостью называют проводимость ветви, соединяющей узлы 1 и 2.**

$(E_1 \cdot g_1 + J)$  - сумма токов источников, находящихся в ветвях, сходящихся в узле 1.

Если ток источника направлен к узлу, величина его записывается в правую часть уравнения со знаком "плюс", если от узла - со знаком "минус".

По аналогии запишем для узла 2:

$$\varphi_2(g_2 + g_3 + g_5) - \varphi_1 g_2 - \varphi_3 g_3 = -E_2 g_5. \quad (5.8)$$

Для узла 3:

$$\varphi_3(g_3 + g_4) - \varphi_2 g_3 = -J \quad (5.9)$$

Решив совместно уравнения (5.7), (5.8), (5.9), определим неизвестные потенциалы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , а затем по закону Ома для активной или пассивной ветви найдем токи.

**Если число узлов схемы -  $n$ , количество уравнений по методу узловых потенциалов -  $(n - 1)$ .**

### *Рекомендация*

Если в какой-либо ветви содержится идеальный источник ЭДС, необходимо один из двух узлов, между которыми включена эта ветвь, выбрать в качестве базисного, тогда потенциал другого узла окажется известным и равным величине ЭДС. Количество составляемых узловых уравнений становится на одно меньше.

### **Метод двух узлов**

В ряде случаев необходимо определить разность потенциалов только между двумя узлами цепи. В этом случае целесообразно использовать метод двух узлов

Схема на рисунке 5.4 имеет два узла.

Потенциал точки 2 примем равным нулю  $\varphi_2 = 0$ . Составим узловое уравнение для узла 1.

$$\varphi_1(g_1 + g_2 + g_3) - \varphi_2(g_1 + g_2 + g_3) = E_1 g_1 - E_3 g_3.$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \frac{E_1 g_1 - E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3},$$

где  $g_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $g_2 = \frac{1}{R_2}$ ,  $g_3 = \frac{1}{R_3}$  - проводимости ветвей.

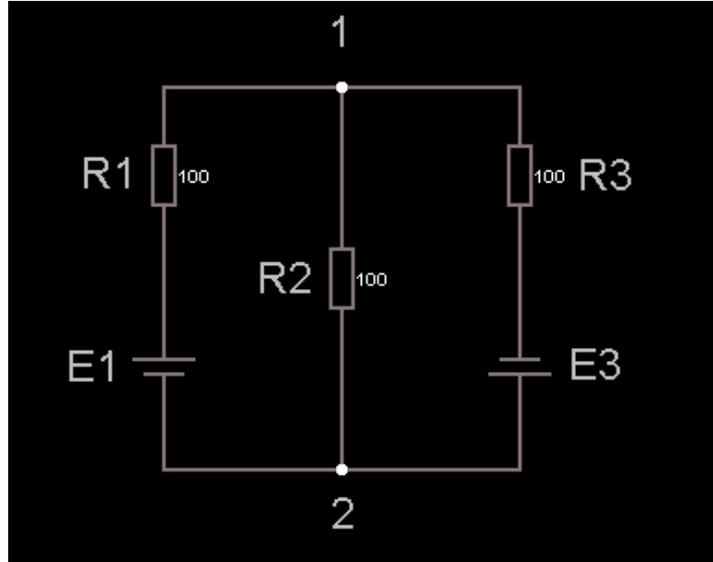


Рисунок 5.4

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
v 208 352 208 240 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 208 240 208 144 0 100.0
r 304 144 304 352 0 100.0
r 400 144 400 240 0 100.0
v 400 240 400 352 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 208 144 304 144 0
w 304 144 400 144 0
w 208 352 304 352 0
w 304 352 400 352 0
x 299 385 312 391 0 24 2
x 297 123 310 129 0 24 1
x 164 200 194 206 0 24 R1
x 156 305 185 311 0 24 E1
x 259 257 289 263 0 24 R2
x 432 201 462 207 0 24 R3
x 427 304 456 310 0 24 E3

```

В общем виде:

$$U_{12} = \frac{\pm \sum E g}{\sum g}.$$

В знаменателе формулы - сумма проводимостей параллельно включенных ветвей.

В числителе - алгебраическая сумма произведений ЭДС источников на проводимости ветвей, в которые эти ЭДС включены.

ЭДС в формуле записывается со знаком "плюс", если она направлена к узлу 1, и со знаком "минус", если направлена от узла 1.

После вычисления величины потенциала  $\varphi_1$  находим токи в ветвях, используя закон Ома для активной и пассивной ветви.

### Метод эквивалентного генератора

Этот метод используется тогда, когда надо определить ток только в одной ветви сложной схемы.

Чтобы разобраться с методом эквивалентного генератора, ознакомимся сначала с понятием "двухполюсник".

Часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами называется **двухполюсником**.

Двухполюсники, содержащие источники энергии, называются **активными**.

На рисунке 5.5 показано условное обозначение активного двухполюсника.

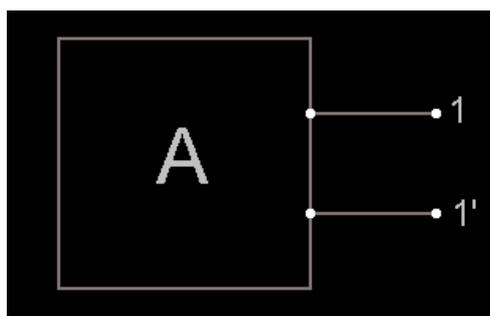


Рисунок 5.5

Двухполюсники, не содержащие источников, называются **пассивными**.

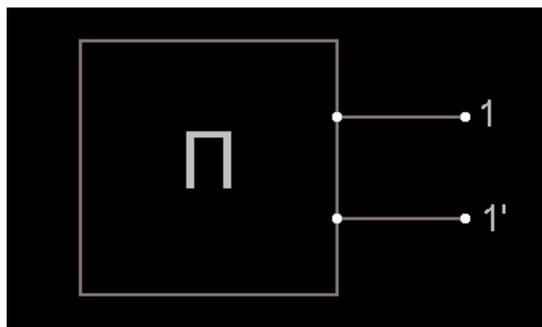


Рисунок 5.6а

На эквивалентной схеме пассивный двухполюсник может быть заменен одним элементом - внутренним или входным сопротивлением пассивного двухполюсника  $R_{BX}$

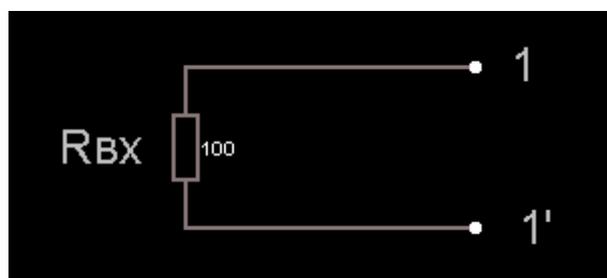


Рисунок 5.6б

На рисунке 5.6а,б условно изображен пассивный двухполюсник и его эквивалентная схема.

Входное сопротивление пассивного двухполюсника можно измерить.

Если известна схема пассивного двухполюсника, входное сопротивление его можно определить, свернув схему относительно заданных зажимов.

Дана электрическая цепь.

Необходимо определить ток  $I_1$  в ветви с сопротивлением  $R_1$  в этой цепи.

Выделим эту ветвь, а оставшуюся часть схемы заменим активным двухполюсником (Рисунок 5.7).

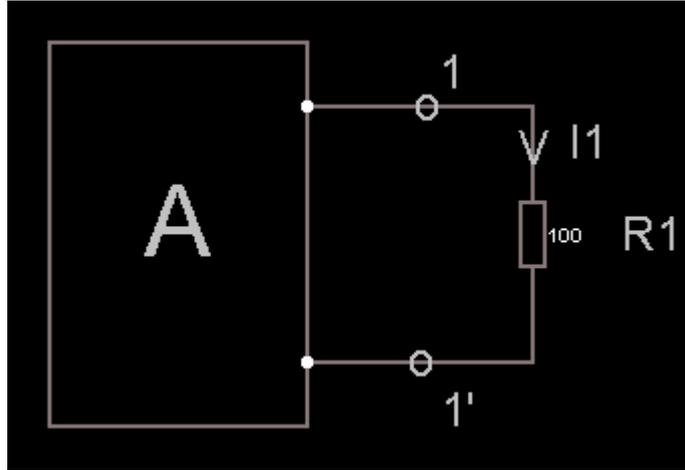


Рисунок 5.7

Согласно теореме об активном двухполюснике, любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором (источником напряжения) с ЭДС, равным напряжению холостого хода на зажимах этого двухполюсника и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению того же двухполюсника, из схемы которого исключены все источники (Рисунок 5.8).

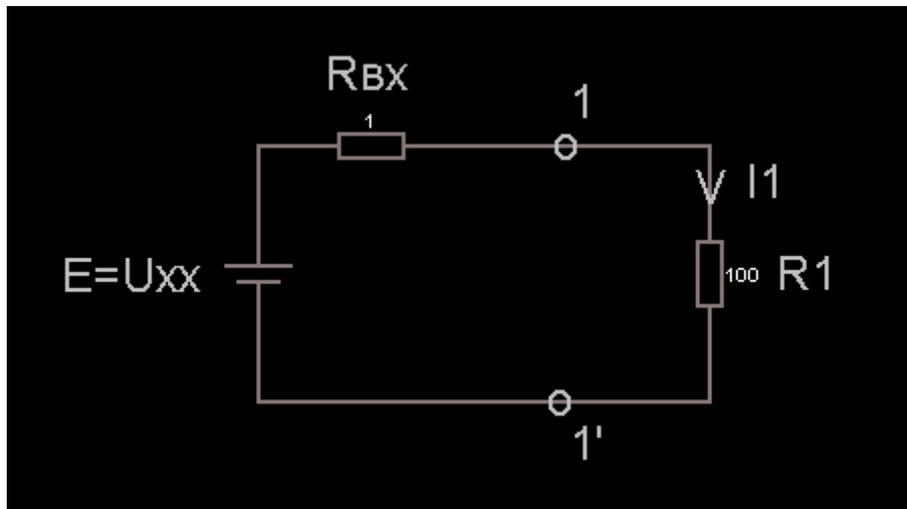


Рисунок 5.8

```

$ 1 5.0E-6 9.78399845368213 56 5.0 50
w 320 176 432 176 0
w 320 304 432 304 0
r 432 176 432 304 0 100.0
x 363 163 376 169 0 24 1
x 363 334 381 340 0 24 1'
x 466 249 496 255 0 24 R1
x 451 203 470 209 0 24 I1
x 426 206 441 212 0 24 V
x 355 184 368 190 0 24 o
x 352 312 365 318 0 24 o

```

```

r 320 176 208 176 0 1.0
w 208 304 320 304 0
x 242 149 283 155 0 24 RBX
x 111 250 180 256 0 24 E=Uxx
v 208 304 208 176 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5

```

Искомый ток  $I_1$  определится по формуле:

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{R_{BX} + R_1}. \quad (5.10)$$

Параметры эквивалентного генератора - **напряжение холостого хода и входное сопротивление** можно определить экспериментально или расчетным путем.

При расчетном способе из схемы исключаются все источники тока, т.к. они дают холостой ход. Источники ЭДС заменяются коротким замыканием. Относительно необходимых зажимов тем или иным методом рассчитывается сопротивление, которое будет входным. Для определения напряжения холостого хода, отключается сопротивление  $R_1$ , и далее рассчитывается напряжение на зажимах известными методами.

Для определения параметров эквивалентного генератора экспериментальным путем необходимо выполнить **опыты холостого хода и короткого замыкания**.

При проведении опыта холостого хода от активного двухполюсника отключают сопротивление  $R_1$ , ток в котором необходимо определить.

К зажимам двухполюсника 1-1' подключают вольтметр и измеряют напряжение холостого хода  $U_{xx}$  (Рисунок 5.9).

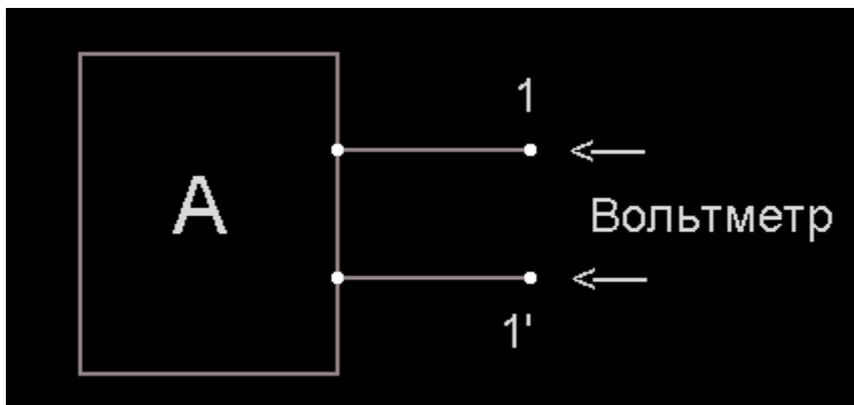


Рисунок 5.9

При выполнении опыта короткого замыкания соединяют проводником зажимы 1-1' активного двухполюсника и измеряют амперметром ток короткого замыкания  $I_{1кз}$  (Рисунок 5.10).

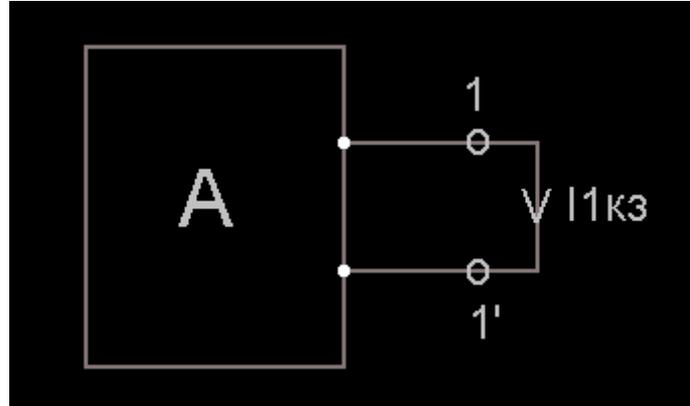


Рисунок 5.10

$$I_{1кз} = \frac{U_{XX}}{R_{BX}},$$

откуда

$$R_{BX} = \frac{U_{XX}}{I_{1кз}}.$$

### **Баланс мощности в цепи постоянного тока**

Уравнение баланса мощности является отражением закона сохранения энергии. Сумма мощностей всех источников энергии в цепи равна мощности, выделяемой в сопротивлениях, причем знак плюс ставится, если направление действия источника совпадает с направлением тока. Общее выражение:

$$\pm \sum_n E_n I_n = \sum_k I_k^2 R_k.$$

## Лекция 6

### Нелинейные электрические цепи постоянного тока

#### Основные определения

**Все электрические цепи являются нелинейными.**

Цепи могут считаться линейными в ограниченных диапазонах значений токов и напряжений.

Например, при чрезмерно больших токах происходит значительный нагрев материала проводников, сопровождающийся резкими изменениями их сопротивлений.

В линейной электрической цепи сопротивления ее элементов не зависят от величины или направления тока или напряжения.

Вольтамперные характеристики линейных элементов (зависимость напряжения на элементе от тока) являются **прямыми линиями** (Рисунок 6.1).

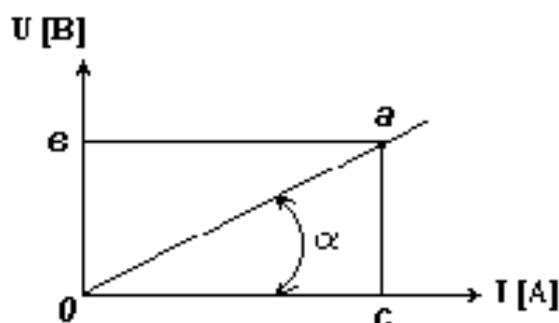


Рисунок 6.1

Электрическое сопротивление линейного элемента **пропорционально тангенсу угла наклона его вольтамперной характеристики к оси тока.**

$$R = \frac{U}{I} = \frac{m_U}{m_I} \frac{ac}{oc} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha ,$$

где  $m_U$  и  $m_I$  - масштабы напряжения и тока.

**В нелинейной электрической цепи сопротивления ее элементов зависят от величины или направления тока или напряжения.**

**Нелинейные элементы имеют криволинейные вольтамперные характеристики, симметричные или несимметричные относительно осей координат.**

Сопротивления нелинейных элементов с симметричной характеристикой не зависят от направления тока.

Сопротивления нелинейных элементов с несимметричной характеристикой зависят от направления тока.

Например, электролампы, термисторы, варисторы имеют симметричные вольтамперные характеристики (Рисунок 6.2), а полупроводниковые диоды - несимметричные характеристики (Рисунок 6.3).

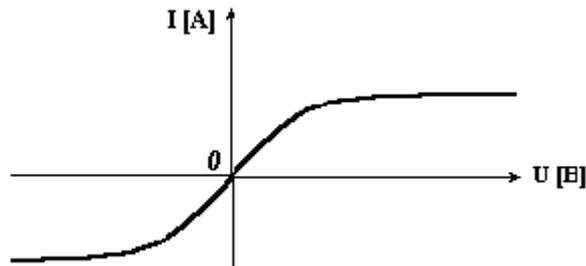


Рисунок 6.2

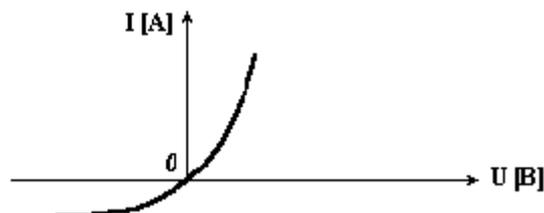


Рисунок 6.3

На рисунке 6.4а приведена схема цепи с полупроводниковым диодом

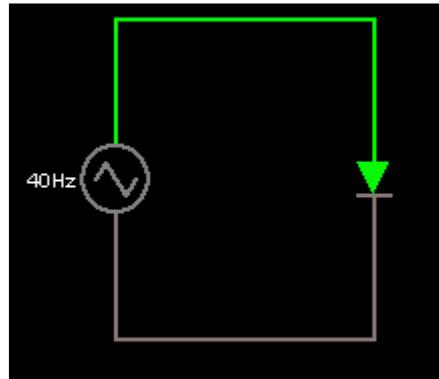


Рисунок 6.4.а

```

$ 1 5.0E-6 51.8012824668342 73 5.0 50
v 256 288 256 128 0 3 40.0 15.0 0.0 0.0 0.5
w 256 128 384 128 0
w 256 288 384 288 0
d 384 128 384 288 1 0.805904783
o 3 64 0 99 20.0 5.593535921577141E246 0 -1

```

На рисунке 6.4б – результат моделирования его вольтамперной характеристики

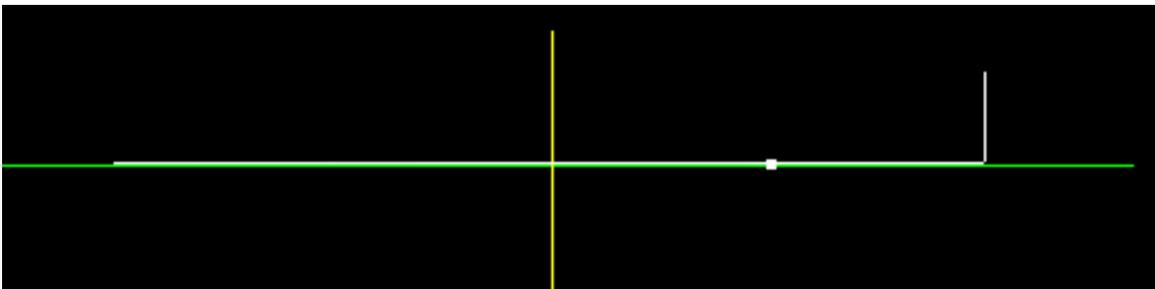


Рисунок 6.4б

По горизонтальной оси отложено напряжение, изменяющееся по линейному закону, с частотой 40 Гц. По вертикальной оси откладывается ток. Белая точка на горизонтальной оси – показывает процесс в динамике.

Рассмотрим пример моделирования ВАХ лампы накаливания (Рисунок 6.5).

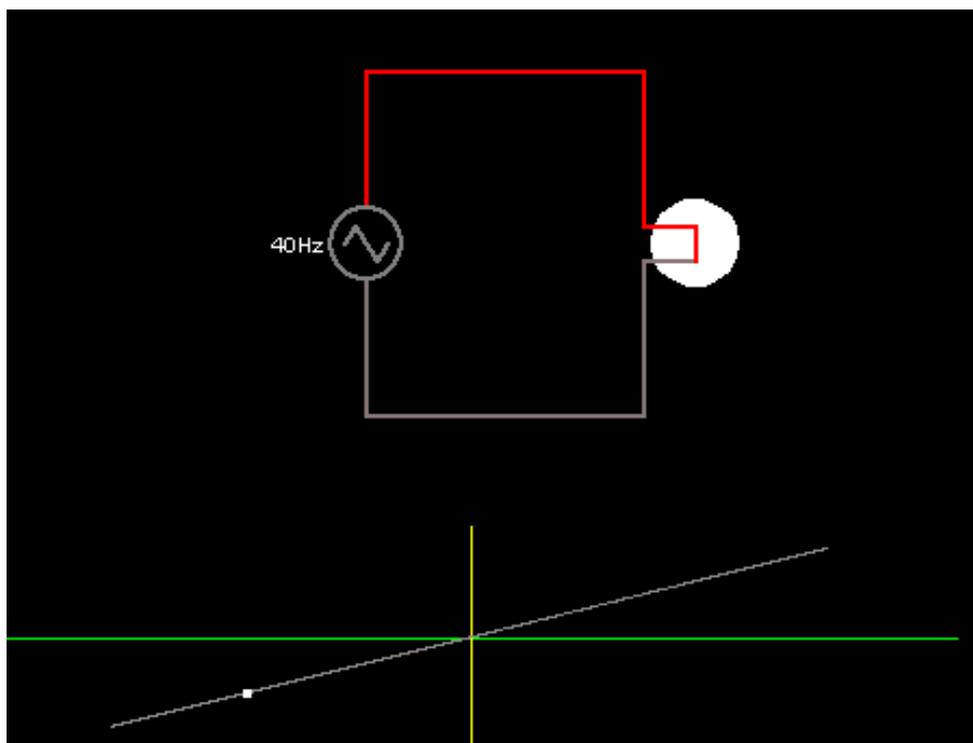


Рисунок 6.5

```

$ 1 5.0E-6 51.8012824668342 73 5.0 50
v 224 288 224 128 0 3 40.0 220.0 0.0 0.0 0.5
w 224 128 352 128 0
w 224 288 352 288 0
181 352 128 352 288 0 3160.6282519900997 10.0 120.0 1.4 1.4000000000000001
o 3 64 0 99 299.3155353253689 0.18707220957835557 0 -1

```

Необходимо обратить внимание на то, что в данном случае модель лампы накаливания имеет линейную ВАХ.

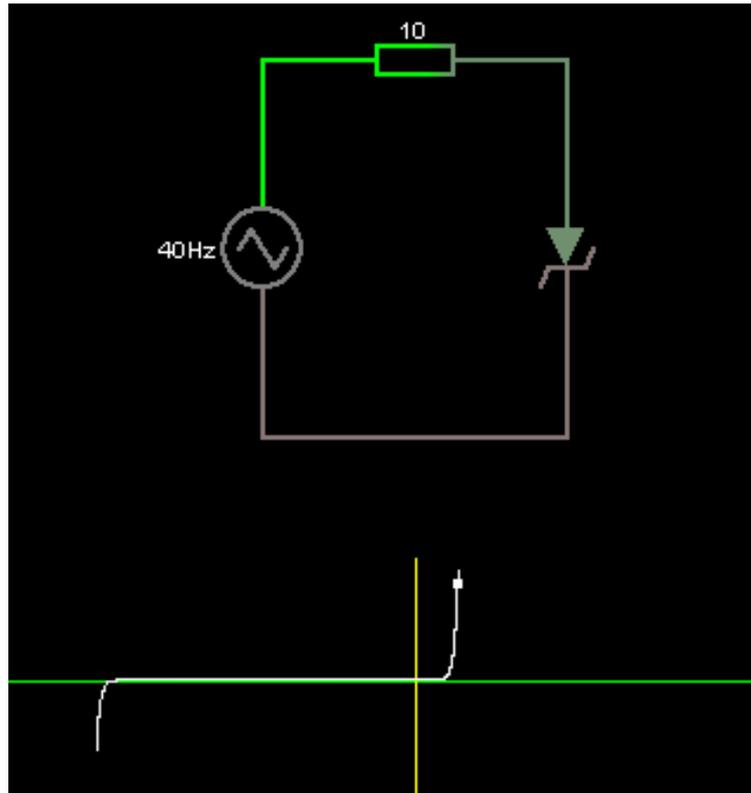


Рисунок 6.6

```

:
$ 1 5.0E-6 51.8012824668342 73 5.0 50
v 256 288 256 128 0 3 40.0 15.0 0.0 0.0 0.5
z 384 128 384 288 1 0.805904783 5.6
w 384 288 256 288 0
r 384 128 256 128 0 10.0
o 1 64 0 99 10.0 1.6 0 -1

```

На рисунке 6.6 пример моделирования ВАХ стабилитрона с напряжением стабилизации 5,6 В.

**Статическим или интегральным сопротивлением нелинейного элемента называется отношение напряжения на элементе к величине тока.**

Это сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона  $\alpha$  между осью тока и прямой, проведенной из начала координат в точку **a** характеристики.

$$R_{CT} = \frac{U}{I} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha.$$

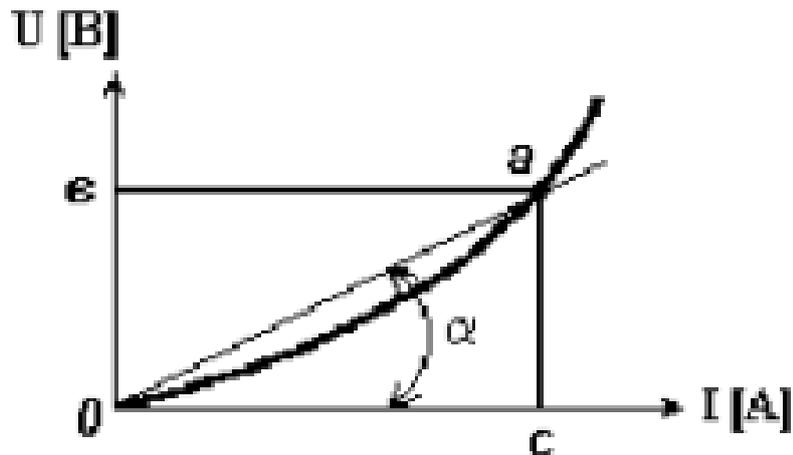


Рисунок 6.7

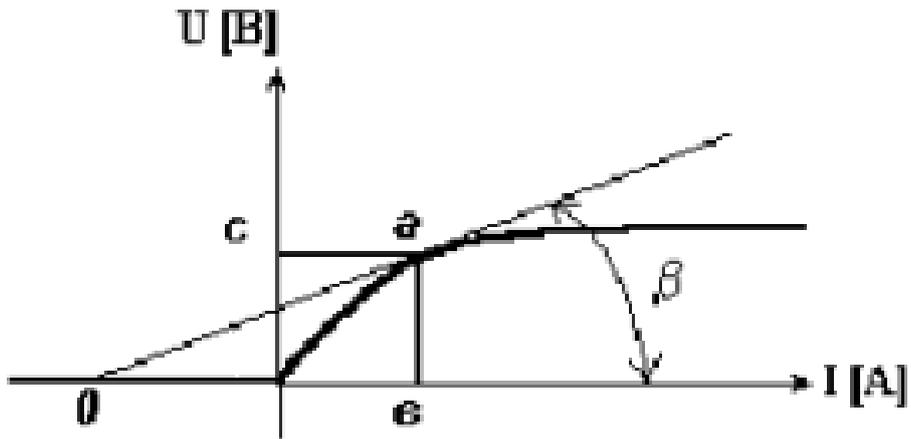


Рисунок 6.8

**Дифференциальное или динамическое сопротивление** нелинейного элемента - это величина, равная отношению бесконечно малого приращения напряжения на нелинейном сопротивлении к соответствующему приращению тока.

Это сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона  $\beta$  между осью тока и касательной к точке **a** характеристики.

$$R_{\text{дин}} = \frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{m_U}{m_I} \frac{ab}{ob} \operatorname{tg} \beta.$$

При переходе от одной точки вольтамперной характеристики к соседней статическое и динамическое сопротивления нелинейного элемента меняются.

Статическое и динамическое сопротивления линейного элемента одинаковы и не зависят от тока или напряжения.

### Графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока

Известные аналитические методы непригодны для расчета нелинейных электрических цепей, так как сопротивления нелинейных элементов зависят от направления и значения тока или напряжения.

Применяются графоаналитические методы, основанные на применении законов Кирхгофа и использовании заданных вольтамперных характеристик (ВАХ) этих элементов.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из двух последовательно соединенных нелинейных сопротивлений н.с.1 и н.с.2 (Рисунок 6.9).

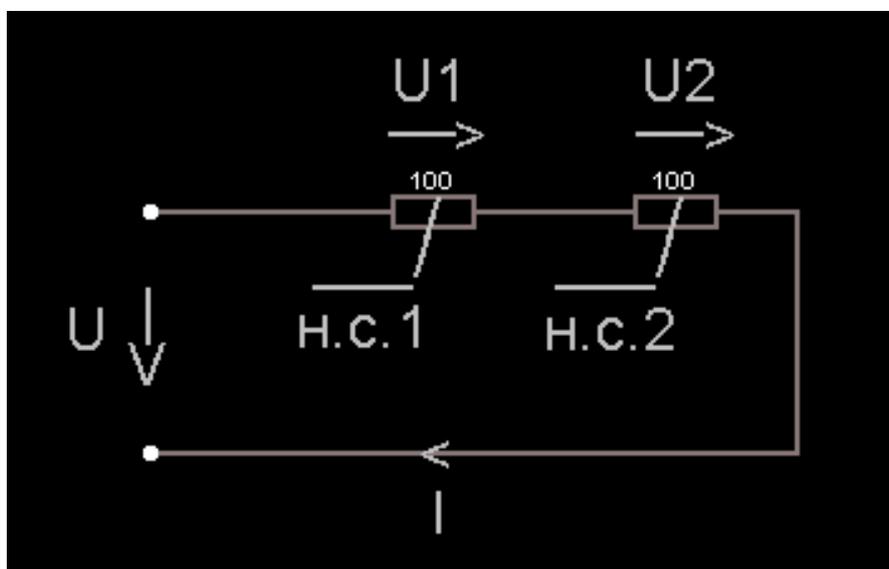


Рисунок 6.9

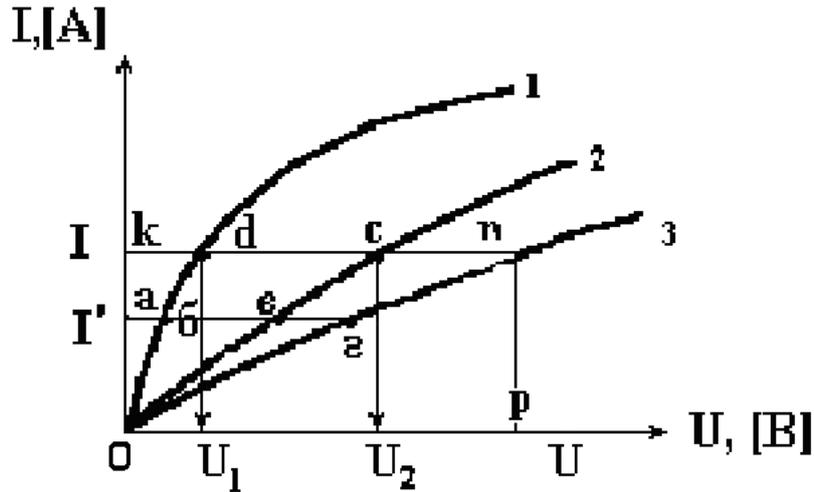


Рисунок 6.10

ВАХ 1 и ВАХ 2 приведены на рисунке 6.10.

К цепи подведено напряжение  $U$ , и оно равно сумме падений напряжений на н.с.1 и н.с.2:

$$U(I) = U_1(I) + U_2(I) \quad (6.1)$$

По всей цепи протекает один и тот же ток  $I$ , так как н.с.1 и н.с.2 соединены между собой последовательно.

Для определения тока в электрической цепи нужно построить результирующую ВАХ цепи.

Для построения этой характеристики следует **суммировать абсциссы кривых 1 и 2, соответствующие одним и тем же значениям тока.**

Далее, задаваясь произвольным значением тока (например, больше  $I'$  и меньше  $I$ ) можно построить ВАХ всей цепи (рис. 6.10, кривая 3).

Затем, пользуясь этой ВАХ, можно найти искомый ток всей цепи и искомые напряжения на н.с.1 и н.с.2.

Для этого отложим на оси абсцисс отрезок  $op = \frac{U}{m_U}$

( $m_U$  - масштаб напряжения источника питания) и проведем из точки  $p$  прямую, перпендикулярную оси абсцисс до пересечения с кривой 3.

Получим отрезок  $np = ko$ . Ток  $I = ko \cdot m_I$  ( $m_I$  - масштаб тока всей цепи).

Для найденного тока по ВАХ 1 и ВАХ 2 находим напряжения  $U_1$  и  $U_2$

$$U_1 = kd \cdot m_U,$$

$$U_2 = kc \cdot m_U.$$

При параллельном соединении двух нелинейных элементов (Рисунок 6.11) ток в неразветвленной части электрической цепи равен сумме токов в параллельных определенных ветвях.

Поэтому при построении результирующей ВАХ всей цепи следует суммировать ординаты графиков 1 и 2 (Рисунок 6.12), соответствующие одним и те же значениям напряжения, так как к этим нелинейным элементам приложено одно и то же напряжение, равное напряжению внешней сети, т.е. источника питания.

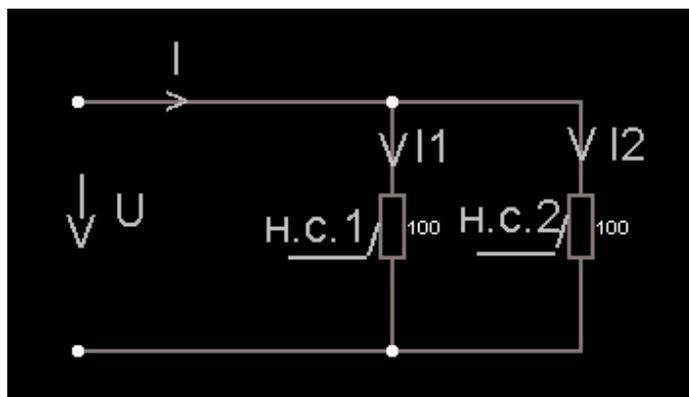


Рисунок 6.11

Например, для произвольного значения напряжения

$$U' = oa \cdot m_U$$

находим ординату  $ag$  точки для результирующей кривой 3. ( $ag = av + ab$ )



## Лекция 7

### Электрические цепи однофазного переменного тока

#### Основные определения

Переменным называется электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени.

Область применения переменного тока намного шире, чем постоянного. Это объясняется тем, что напряжение переменного тока можно легко понижать или повышать с помощью трансформатора, практически в любых пределах.

Переменный ток легче транспортировать на большие расстояния. Но физические процессы, происходящие в цепях переменного тока, сложнее, чем в цепях постоянного тока из-за наличия переменных магнитных и электрических полей.

Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют **мгновенным значением** и обозначают строчной буквой  $i$ .

Мгновенный ток называется периодическим, если значения его повторяются через одинаковые промежутки времени

$$i(t) = i(t + T)$$

Наименьший промежуток времени, через который значения переменного тока повторяются, называется **периодом**.

Период  $T$  измеряется в **секундах**. Периодические токи, изменяющиеся по синусоидальному закону, называются **синусоидальными**.

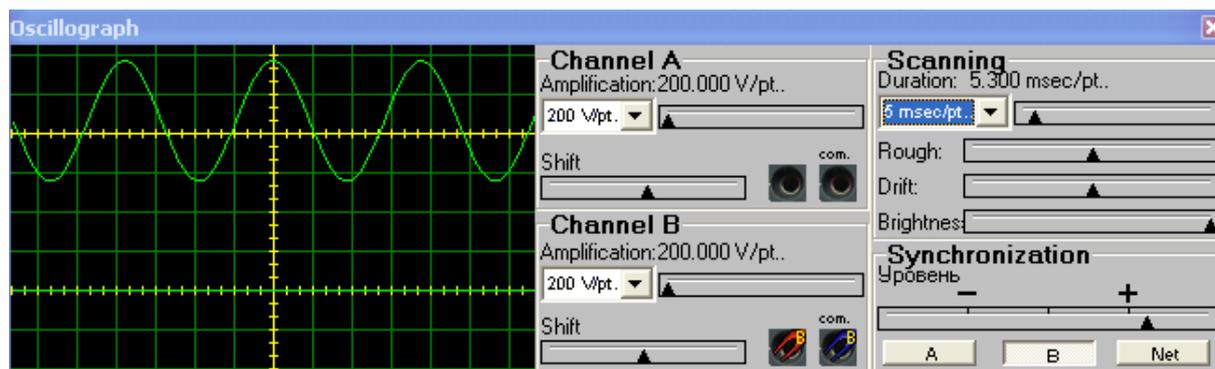


Рисунок 7.1

Мгновенное значение синусоидального тока определяется выражением

$$i(t) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_i\right) = I_m \sin(2\pi ft + \varphi_i) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

где  $I_m$  - максимальное, или **амплитудное**, значение тока.

Аргумент синусоидальной функции

$$\frac{2\pi}{T}t + \varphi_i$$

называют **фазой**; величину  $\varphi$  равную фазе в момент времени  $t = 0$ , называют **начальной фазой**.

Фаза измеряется в **радианах или градусах**.

**Величину, обратную периоду, называют частотой.**

**Частота  $f$  измеряется в герцах.**

$$f = \frac{1}{T}, [\text{Гц}].$$

В Западном полушарии и в Японии используется переменный ток частотой **60 Гц**, в Восточном полушарии - частотой **50 Гц**.

Величину  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  называют **круговой, или угловой, частотой**.

**Угловая частота измеряется в рад/с.**

Если у синусоидальных токов начальные фазы при одинаковых частотах одинаковы, говорят, что эти **токи совпадают по фазе**.

Если не одинаковы по фазе, говорят, что **токи сдвинуты по фазе**.

Сдвиг фаз двух синусоидальных токов измеряется разностью начальных фаз

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

С помощью осциллографа можно измерить амплитудное значение синусоидального тока или напряжения.

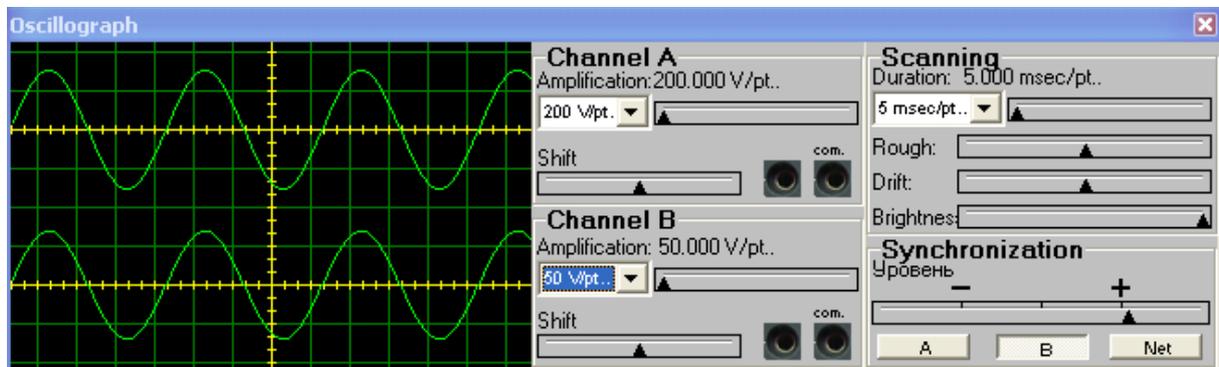


Рисунок 7.2

Так в канале А осциллографа отображается напряжение амплитудой 311В, в канале В – 70,7В. Оба колебания имеют одинаковую частоту – 50 Гц, круговую частоту 314 рад/с, период – 0,02 с.

Амперметры и вольтметры электромагнитной системы измеряют действующие значения переменного тока и напряжения. Электронные вольтметры могут также отражать действующие значения.



Рисунок 7.3

Вольтметр показывает действующее значение напряжения в канале А осциллографа

**Действующим значением переменного тока называется среднеквадратичное значение тока за период.**

Действующее значение тока (для синусоиды )

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt} =$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжений

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

**Действующие значения переменного тока, напряжения, ЭДС меньше максимальных в  $\sqrt{2}$  раз.**

Законы Ома и Кирхгофа справедливы для мгновенных значений токов и напряжений.

Закон Ома для мгновенных значений:

$$i = \frac{u}{R} . \quad (7.1)$$

Законы Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\sum i = 0 . \quad (7.2)$$

$$\sum e = \sum u . \quad (7.3)$$

### **Изображения синусоидальных функций времени в векторной форме**

При расчете электрических цепей часто приходится складывать или вычитать величины токов или напряжений, являющиеся синусоидальными функциями времени.

Графические построения или тригонометрические преобразования в этом случае могут оказаться слишком громоздкими.

Задача упрощается, если представить наши синусоидальные функции в векторной форме.

Имеем синусоидальную функцию

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Известно, что проекция отрезка, вращающегося вокруг оси с постоянной угловой скоростью, на любую линию, проведенную в плоскости вращения, изменяется по синусоидальному закону.

Пусть отрезок прямой длиной  $I_m$  начинает вращаться вокруг оси  $O$  из положения, когда он образует с горизонтальной осью угол  $\varphi$ , и вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Проекция отрезка на вертикальную ось в начальный момент времени

$$oa = I_m \sin \varphi.$$

Когда отрезок повернется на угол  $\alpha_1$ , проекция его

$$b'b = I_m \sin(\varphi + \alpha_1)$$

Откладывая углы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  на горизонтальной оси, а проекции отрезка прямой - на вертикальной оси, получим ряд точек синусоиды (Рисунок 7.4).

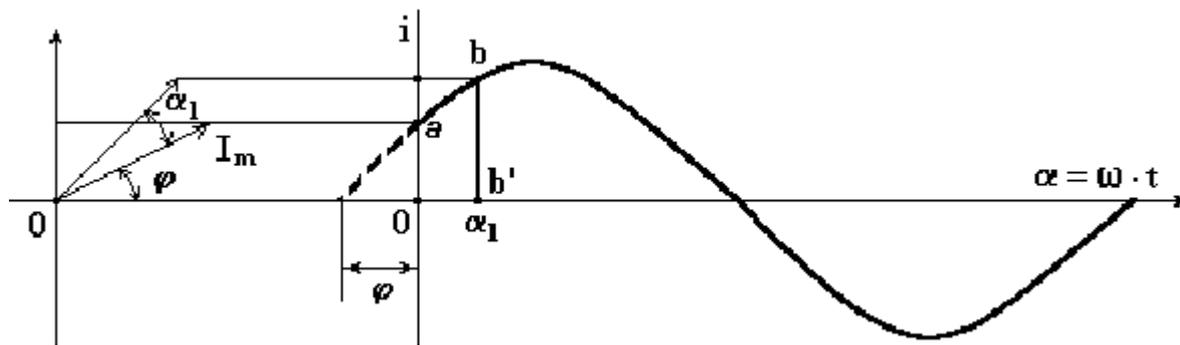


Рисунок 7.4

Пусть даны два синусоидальных тока:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Нужно сложить эти токи и получить результирующий ток:

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = I_{3m} \sin(\omega t + \varphi_3).$$

Представим синусоидальные токи  $i_1$  и  $i_2$  в виде двух радиус - векторов, длина которых равна в соответствующем масштабе  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$ .

Эти векторы расположены в начальный момент времени под углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  относительно горизонтальной оси.

Сложим геометрически отрезки  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$ .

Получим отрезок, длина которого равна амплитудному значению результирующего тока  $I_{3m}$ .

Отрезок расположен под углом  $\varphi_3$  относительно горизонтальной оси.

Все три отрезка вращаются вокруг оси  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Проекции отрезков на вертикальную ось изменяются по синусоидальному закону.

Будучи остановленными для рассмотрения, данные отрезки образуют векторную диаграмму (Рисунок 7.5).

**Векторная диаграмма - это совокупность векторов, изображающих синусоидальные напряжения, токи и ЭДС одинаковой частоты.**

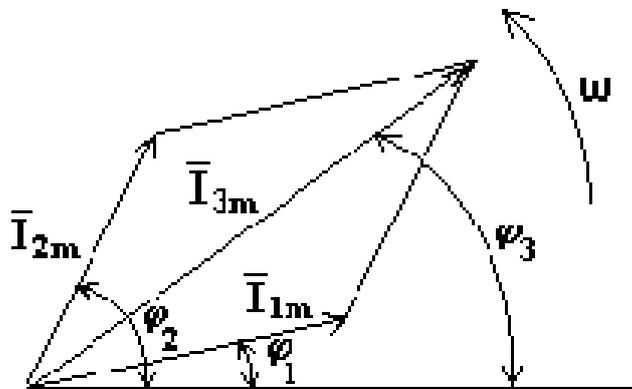


Рисунок 7.5

**Необходимо отметить, что напряжение, ток и ЭДС - это скалярные, а не векторные величины.**

Представление их на векторной диаграмме в виде не пространственных, а временных радиус - векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью.

Изображать на векторной диаграмме два вектора, вращающихся с различной угловой скоростью, бессмысленно.

Положительным считается направление вращения векторов против часовой стрелки.

Векторные диаграммы используются для качественного анализа электрических цепей, а также при решении некоторых электротехнических задач.

### **Изображение синусоидальных функций времени в комплексной форме**

При расчетах цепей синусоидального тока используют символический метод расчета или метод комплексных амплитуд.

В этом методе сложение двух синусоидальных токов заменяют сложением двух комплексных чисел, соответствующих этим токам.

Из курса математики известно, что комплексное число может быть записано в показательной или алгебраической форме:

$$C = ce^{j\varphi} = a + jb$$

где  $c$  - модуль комплексного числа;

$\varphi$  - аргумент;

$a$  - вещественная часть комплексного числа;

$b$  - мнимая часть;

$j$  - мнимая единица,  $j = \sqrt{-1}$ .

С помощью формулы Эйлера можно перейти от показательной формы записи к алгебраической.

$$ce^{j\varphi} = c \cos \varphi + jc \sin \varphi = a + jb,$$

$$a = c \cos \varphi,$$

$$b = c \sin \varphi.$$

От алгебраической формы записи переходят к показательной форме с помощью формул:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Комплексное число может быть представлено в виде радиус - вектора в комплексной плоскости.

Вектор длиной, равной модулю  $c$ , расположен в начальный момент времени под углом  $\varphi$  относительно вещественной оси (Рисунок 7.6).



Рисунок 7.6

Умножим комплексное число на множитель  $e^{j\beta}$

Радиус - вектор на комплексной плоскости повернется на угол  $\beta$ .

Множитель  $e^{j\beta}$  называется поворотным.  $ce^{j\varphi}e^{j\beta} = ce^{j(\varphi+\beta)}$ .

Если  $\beta = \omega t$ , то вектор, умноженный на  $e^{j\omega t}$ , превратится во вращающийся со скоростью  $\omega$  радиус - вектор.

Выражение  $ce^{j\omega t}e^{j\varphi} = ce^{j(\omega t+\varphi)}$  называется комплексной функцией времени.

Применительно к напряжению, получим - комплексную функцию времени для напряжения.

$$U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

$\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi}$  - комплексная амплитуда напряжения (исходное положение вектора в комплексной плоскости).

Определим, чему равна мнимая часть (  $\operatorname{Im}$  ) комплексной функции времени для напряжения.

$$\operatorname{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = \operatorname{Im}(U_m e^{j(\omega t+\varphi)}) = \operatorname{Im}(U_m \cos(\omega t + \varphi) + jU_m \sin(\omega t + \varphi)) =$$

$$= U_m \sin(\omega t + \varphi) = u$$

**Мгновенное синусоидальное напряжение (ток, ЭДС) является мнимой частью соответствующей комплексной функции времени.**

**Замечание.**

В электротехнике над символами, изображающими комплексные напряжения, токи, ЭДС, принято ставить точку.

Синусоидальные функции времени могут быть представлены векторами в комплексной плоскости, вращающимися против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

**Проекция вектора на мнимую ось изменяется по синусоидальному закону.**

**Пример.**

$$i_1 = 5 \sin(314t + 60^\circ) A;$$

$$i_2 = 3 \sin(314t + 45^\circ) A.$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{3m} \sin(314t + \varphi_3)$$

Сложение синусоидальных токов заменим сложением комплексных амплитуд, соответствующих этим токам.

$$\dot{I}_{1m} = 5e^{j60^\circ}; \quad \dot{I}_{2m} = 3e^{j45^\circ};$$

$$\dot{I}_{3m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = 5e^{j60^\circ} + 3e^{j45^\circ} =$$

$$5 \cos 60^\circ + j5 \sin 60^\circ + 3 \cos 45^\circ + j3 \sin 45^\circ =$$

$$2,5 + j4,33 + 2,121 + j2,121 = 4,621 + j6,451 = \sqrt{4,621^2 + 6,451^2} e^{j \arctg \frac{6,451}{4,621}} = 7,935 e^{j54^\circ 23'}$$

Амплитуда результирующего тока

$$I_{3m} = 7,935 A,$$

начальная фаза

$$\varphi_3 = 54,38^\circ.$$

Мгновенное значение результирующего тока

$$i_3 = 7,935 \sin(314t + 54,38^\circ) A.$$

В настоящее время существует много программных продуктов, позволяющих проводить вычисления с комплексными величинами. Одним из них является программа **Comcal** – калькулятор комплексных функций.

Рассмотрим решение примера, приведенного выше, с помощью этой программы.

```

F1: Меню | F2: Сохранить | F3: Взять | F4: Листинг | F5: Чистка | F8: MS-DOS | F9: Norton | F10: Выход
? Пример сложения двух токов с различными амплитудами и начальными фазами
? Перевод градусов в радианы
FI1=60*π/180
FI2=45*π/180
? Исходные токи
I1=5*cos(FI1)+j*5*sin(FI1)
I2=3*cos(FI2)+j*3*sin(FI2)
? Результат
I3=I1+I2

```

Real	Imag	Abs	Arg, рад	Arg, гр
+4.6213203E+00	+6.4514474E+00	+7.9358538E+00	+9.4919910E-01	+54.023' 6"

В нижней строке приведены значения результата.

**Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме:**

$$i_m = \frac{\dot{U}_m}{R} \text{ - закон Ома;} \quad (7.4)$$

$$\sum I_m = 0 \text{ - первый закон Кирхгофа;} \quad (7.5)$$

$$\sum \dot{E}_m = \sum \dot{U}_m \text{ - второй закон Кирхгофа.} \quad (7.6)$$

## Сопротивление в цепи синусоидального тока

Если напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u),$$

подключить к сопротивлению  $R$ , то через него протекает ток

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (7.7)$$

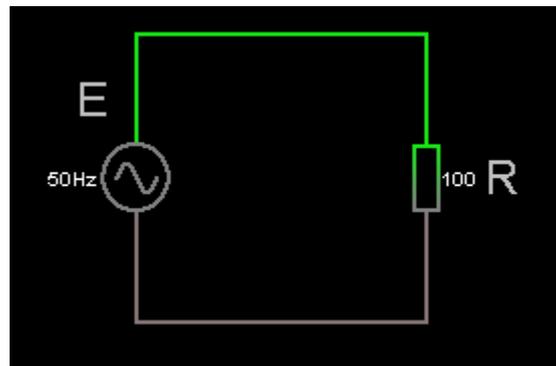


Рисунок 7.7а

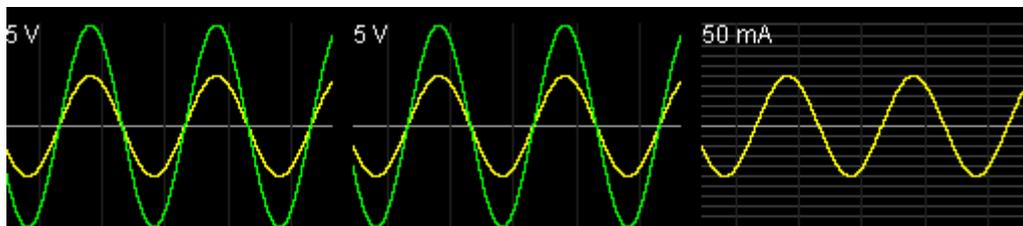


Рисунок 7.7б

(ток обозначен желтым цветом)

На левой осциллограмме ЭДС и ток источника, на средней осциллограмме – напряжение и ток в сопротивлении, на правой осциллограмме – амплитудное значение тока в сопротивлении.

```

$ 1 5.0E-6 8.281975887399955 50 5.0 50
v 224 272 224 128 0 1 50.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 368 128 368 272 0 100.0
w 368 128 224 128 0
w 368 272 224 272 0
x 398 209 415 215 0 24 R
x 195 170 211 176 0 24 E
o 0 64 0 35 5.0 0.1 0 -1
o 1 64 0 35 5.0 0.1 1 -1
o 1 64 0 33 2.5 0.1 2 -1

```

Анализ выражения (7.7) показывает, что напряжение на сопротивлении и ток, протекающий через него, совпадают по фазе. Выражение (7.7) в комплексной форме записи имеет вид

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R}, \quad (7.8)$$

где  $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$ ,  $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  - комплексные амплитуды тока и напряжения.

Комплексному уравнению (7.8) соответствует векторная диаграмма (Рисунок 7.8).

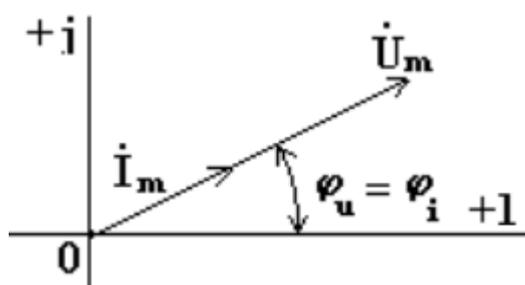


Рисунок 7.8

Из анализа диаграммы следует, что векторы напряжения и тока совпадают по направлению.

Сопротивление участка цепи постоянному току называется омическим, а сопротивление того же участка переменному току - активным сопротивлением.

Активное сопротивление больше омического из-за явления поверхностного эффекта.

Поверхностный эффект заключается в том, что ток вытесняется из центральных частей к периферии сечения проводника.

### Индуктивная катушка в цепи синусоидального тока

Вначале рассмотрим идеальную индуктивную катушку, активное сопротивление которой равно нулю.

Пусть по идеальной катушке с индуктивностью  $LL$  протекает синусоидальный ток

$$i = I_m \sin(\omega t)$$

Этот ток создает в индуктивной катушке переменное магнитное поле, изменение которого вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (7.9)$$

Эта ЭДС уравнивается напряжением, подключенным к катушке:

$$u = e_L = 0.$$

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (7.10)$$

Таким образом, ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$  из-за явления самоиндукции.

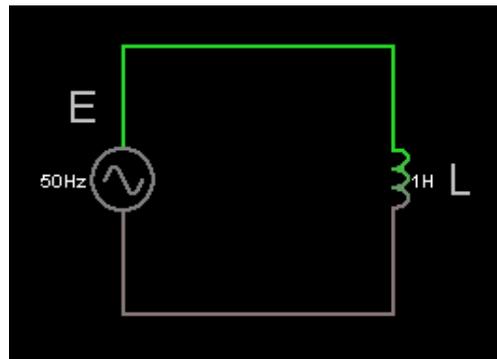


Рисунок 7.9а

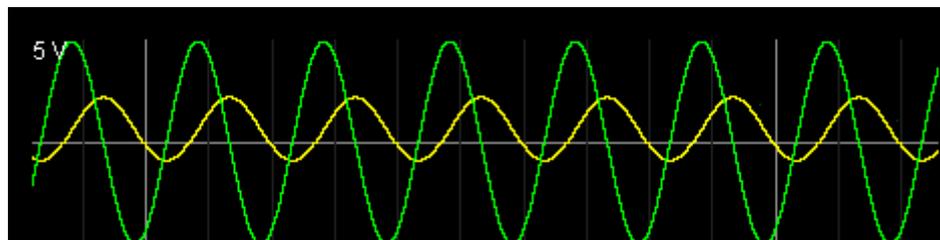


Рисунок 7.9б

```

$ 1 5.0E-6 8.281975887399955 50 5.0 50
v 224 272 224 128 0 1 50.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 368 128 224 128 0
w 368 272 224 272 0
x 398 209 411 215 0 24 L
x 195 170 211 176 0 24 E
l 368 128 368 272 0 1.0 -0.003046923739209876

```

o 0 64 0 35 5.0 0.05 0 -1

Уравнение вида (7.10) для реальной катушки, имеющей активное сопротивление  $R$ , имеет следующий вид:

$$u = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (7.11)$$

Анализ выражения (7.11) показывает, что ЭДС самоиндукции оказывает препятствие (сопротивление) протеканию переменного тока, из-за чего ток в реальной индуктивной катушке отстает по фазе от напряжения на некоторый угол  $\varphi$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ), величина которого зависит от соотношения  $R$  и  $L$ . (Рисунок 7.10)

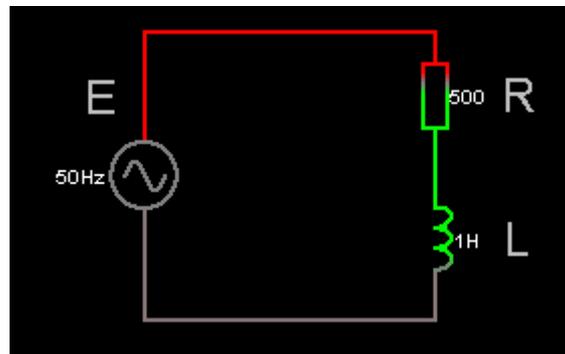


Рисунок 7.10а

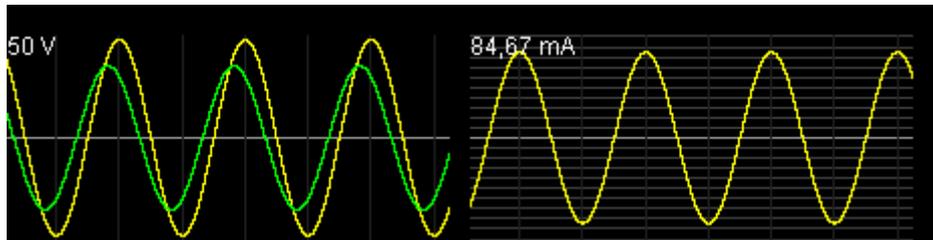


Рисунок 7.10б

```

$ 1 5.0E-6 8.281975887399955 50 5.0 50
v 224 272 224 128 0 1 50.0 50.0 0.0 0.0 0.5
w 368 128 224 128 0
w 368 272 224 272 0
x 403 241 416 247 0 24 L
x 195 170 211 176 0 24 E
r 368 128 368 192 0 500.0
l 368 192 368 272 0 1.0 0.0769362062372541
x 402 169 419 175 0 24 R
o 0 64 0 35 69.99202319305638 0.08749002899132048 0 -1
o 1 64 0 33 40.0 0.1 1 -1

```

Выражение (6.11) в комплексной форме записи имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= R\dot{I}_m + \omega L e^{j90^\circ} \dot{I}_m = R\dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m = (R + j\omega L)\dot{I}_m = Z_L \dot{I}_m = z_L e^{j\varphi} \dot{I}_m. \\ e^{j90^\circ} &= \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j \end{aligned} \quad (7.12)$$

где  $Z_L$  - полное комплексное сопротивление индуктивной катушки ;  
 $z_L$  - модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$  - начальная фаза комплексного сопротивления;

$X_L = \omega L$  - индуктивное сопротивление (фиктивная величина, характеризующая реакцию электрической цепи на переменное магнитное поле).

### Полное сопротивление индуктивной катушки или модуль комплексного сопротивления

$$z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Комплексному уравнению (7.12) соответствует векторная диаграмма (Рисунок 7.11).

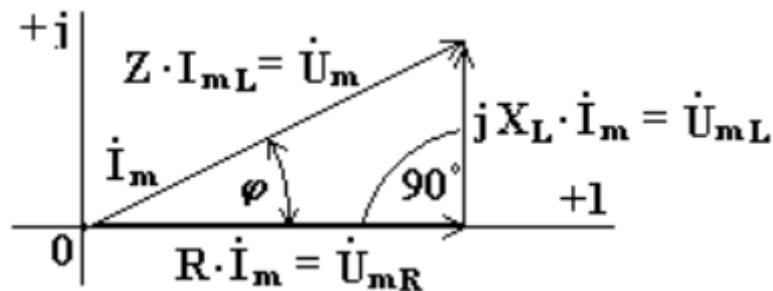


Рисунок 7.11

Из анализа диаграммы видно, что **вектор напряжения на индуктивности опережает вектор тока на  $90^\circ$ .**

**В цепи переменного тока напряжения на участках цепи складываются не арифметически, а геометрически.**

Если мы поделим стороны треугольника напряжений на величину тока  $I_m$ , то перейдем к подобному треугольнику сопротивлений (Рисунок 7.12).

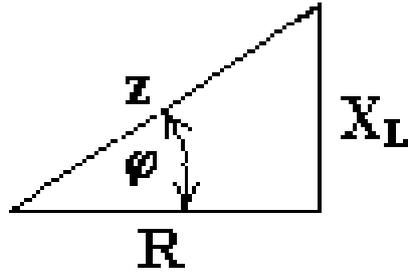


Рисунок 7.12

Из треугольника сопротивлений получим несколько выражений:

$$\cos \varphi = \frac{R}{z}, \quad \sin \varphi = \frac{X_L}{z}, \quad z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad R = z \cos \varphi, \quad X_L = z \sin \varphi.$$

### Емкость в цепи синусоидального тока

Если к конденсатору емкостью  $C$  подключить источник синусоидального напряжения, то в цепи протекает синусоидальный ток

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (7.13)$$

Из анализа выражений 7.13 и рисунка 7.13б , следует, что ток опережает напряжение по фазе на  $90^\circ$ .

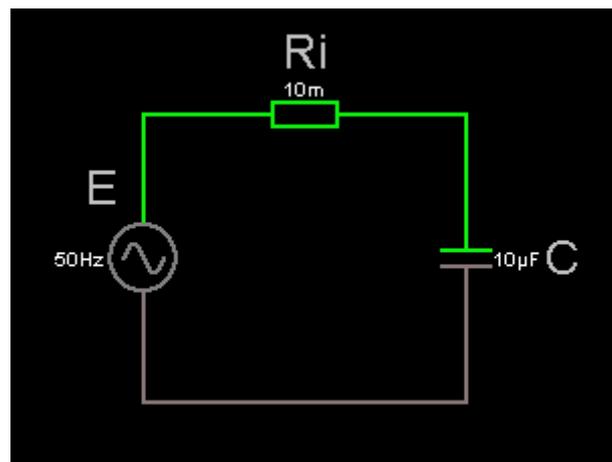


Рисунок 7.13а

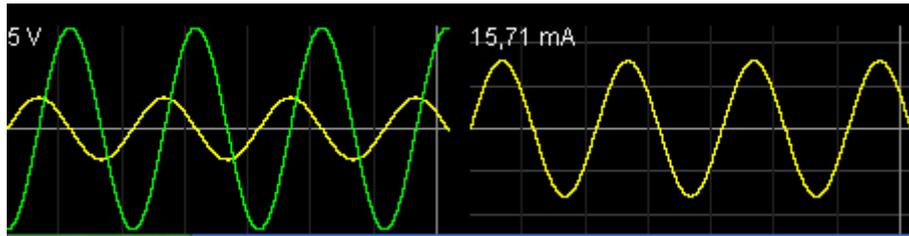


Рисунок 7.13б

```

$ 1 5.0E-6 8.281975887399955 50 5.0 50
v 240 272 240 128 0 1 50.0 5.0 0.0 0.0 0.5
c 400 128 400 272 0 1.0E-5 4.8974159912117825
r 240 128 400 128 0 0.01
w 400 272 240 272 0
x 440 209 457 215 0 24 C
x 212 174 228 180 0 24 E
x 310 106 332 112 0 24 Ri
o 1 64 0 35 5.0 0.05 0 -1
o 1 64 0 33 4.676805239458889 0.023384026197294447 1 -1

```

(Для корректной работы модели в цепь введено сопротивление 0.01 Ом, не влияющее на результаты моделирования.)

Выражение (7.13) в комплексной форме записи имеет вид:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m e^{j90^\circ}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{j\dot{U}_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}_m}{-jX_C}, \quad e^{j90^\circ} = j. \quad (7.14)$$

где -  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  - емкостное сопротивление, фиктивная расчетная величина, имеющая размерность сопротивления.

**Если комплексное сопротивление индуктивности положительно, то комплексное сопротивление емкости отрицательно.**

На рисунке 7.14 изображена векторная диаграмма цепи с емкостью.

Вектор тока опережает вектор напряжения на 90°.

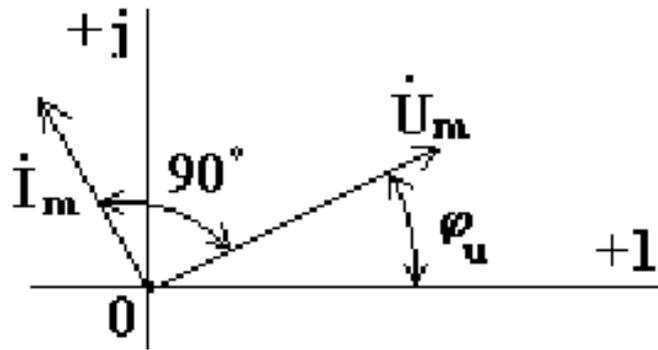


Рисунок 7.14

**Последовательно соединенные реальная катушка индуктивности и конденсатор в цепи синусоидального тока**

Катушка с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  и конденсатор емкостью  $C$ , включены последовательно (Рисунок 7.15)

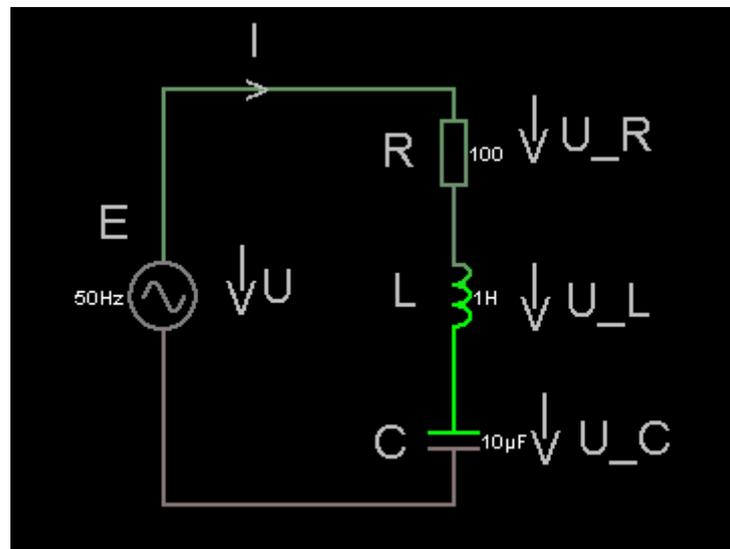


Рисунок 7.15

```

$ 1 5.0E-6 8.281975887399955 50 5.0 50
v 192 320 192 112 0 1 50.0 10.0 0.0 0.0 0.5
r 336 112 336 176 0 100.0
l 336 176 336 256 0 1.0 0.005294876894460856
c 336 256 336 320 0 1.0E-5 12.086472486724988
w 336 112 192 112 0
w 192 320 336 320 0
x 301 152 318 158 0 24 R
x 306 222 319 228 0 24 L

```

```

x 297 298 314 304 0 24 C
x 160 188 176 194 0 24 E
x 233 122 247 128 0 24 >
x 235 97 241 103 0 24 I
x 374 133 380 139 0 24 |
x 369 150 384 156 0 24 V
x 389 144 436 150 0 24 U_R
x 370 234 385 240 0 24 V
x 374 217 380 223 0 24 |
x 392 227 435 233 0 24 U_L
x 379 282 385 288 0 24 |
x 375 301 390 307 0 24 V
x 398 296 445 302 0 24 U_C
x 229 208 235 214 0 24 |
x 224 226 239 232 0 24 V
x 241 220 258 226 0 24 U

```

В схеме протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ . Определим напряжение на входе схемы. В соответствии со вторым законом Кирхгофа,

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad u_R = iR, \quad U_L = L \frac{di}{dt}, \quad U_C = \frac{1}{C} \int idt. \quad (7.15)$$

Подставим эти выражения в первое уравнение (7.15). Получим:

$$\begin{aligned} u &= iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \\ &= RI_m \sin \omega t + X_L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) + X_C I_m \sin(\omega t - 90^\circ). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Из выражения (7.16) видно: **напряжение в активном сопротивлении совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на  $90^\circ$ , напряжение по емкости отстает по фазе от тока на  $90^\circ$ .**

Запишем уравнение (7.16) в комплексной форме:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \dot{U}_m = \left( RI_m + X_L \dot{I}_m e^{j90^\circ} + X_C \dot{I}_m e^{-j90^\circ} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = (RI_m + jX_L I_m - jX_C I_m) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.17)$$

Поделим левую и правую части уравнения (7.17) на  $\sqrt{2}$ .

Получим уравнение для комплексов действующих значений токов и напряжений

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m (R + j(X_L + X_C)) = IZ = Ize^{-j\varphi}, \quad (7.18)$$

где  $Z = R + j(X_L - X_C)$  - комплексное сопротивление цепи;

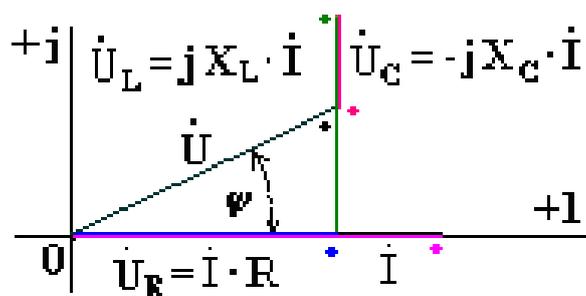
$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  - модуль комплексного сопротивления, или полное сопротивление цепи;

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  - начальная фаза комплексного сопротивления.

При построении векторных диаграмм цепи рассмотрим три случая.

- $X_L > X_C$ , цепь носит индуктивный характер. Векторы напряжений на индуктивности и емкости направлены в противоположные стороны, частично компенсируют друг друга. Вектор напряжения на входе схемы опережает вектор тока (Рисунок 7.16).
- Индуктивное сопротивление меньше емкостного.  $X_L < X_C$ . Вектор напряжения на входе схемы отстает от вектора тока. Цепь носит емкостный характер (Рисунок 7.17).
- Индуктивное и емкостное сопротивления одинаковы  $X_L = X_C$ . Напряжения на индуктивности и емкости полностью компенсируют друг друга. Ток в цепи совпадает по фазе с входным напряжением. В электрической цепи наступает режим резонансного напряжения (Рисунок 7.18).

1.  $X_L > X_C$



$$\varphi > 0$$

Рисунок 7.16

Концы стрелок на диаграммах обозначены крестиком соответствующего цвета.

2.  $X_L < X_C$

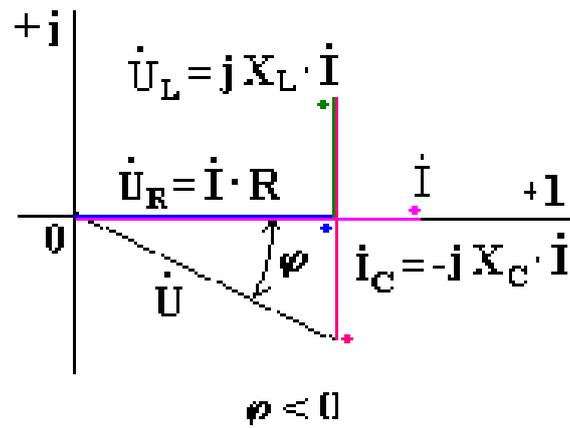


Рисунок 7.17

3.  $X_L = X_C$

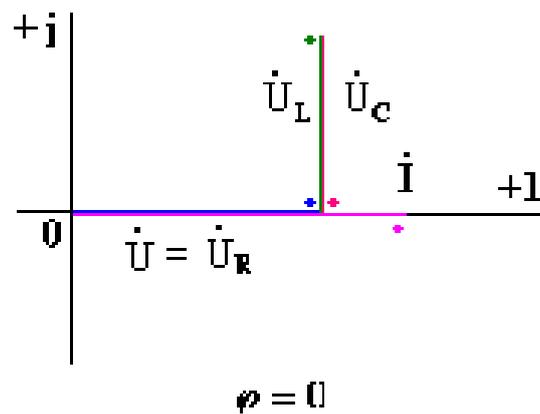


Рисунок 7.18

Ток в резонансном режиме достигает максимума, так как полное сопротивление ( $z$ ) цепи имеет минимальное значение.

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}.$$

Условие возникновения резонанса:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

отсюда резонансная частота равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Из выражения следует, что режима резонанса можно добиться следующими способами:

1. изменением частоты;
2. изменением индуктивности;
3. изменением емкости.

В резонансном режиме входное напряжение равно падению напряжения в активном сопротивлении.

$$U = RI_0 \ll X_L I_0 = X_C I_0$$

**На индуктивности и емкости схемы могут возникнуть напряжения, во много раз превышающие напряжение на входе цепи.**

Это объясняется тем, что каждое напряжение равно произведению тока  $I_0$  (а он наибольший), на соответствующее индуктивное или емкостное сопротивление (а они могут быть большими).

Рассмотрим в качестве примера модель на Рисунке 7.19а. Так после 7,55с процесса моделирования, напряжения на конденсаторе достигло величины 2960В, при напряжении источника 10 В. Частота источника в этом слчае близка к резонансной частоте контура.

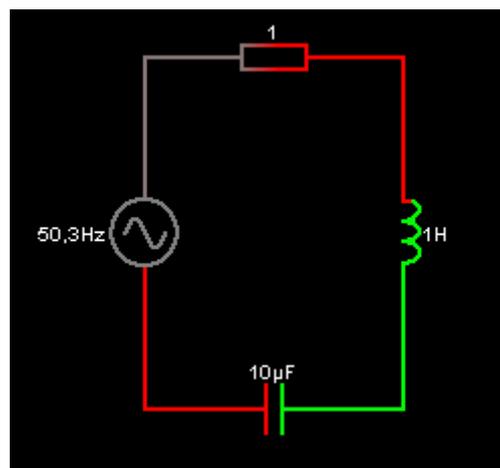


Рисунок 7.19а



```

x 239 238 245 244 0 24 |
x 235 256 250 262 0 24 V
x 260 177 282 183 0 24 Ri
x 305 249 322 255 0 24 R
x 398 251 415 257 0 24 C
x 258 246 272 252 0 24 u
x 426 201 441 207 0 24 V
x 449 198 484 204 0 24 i_C
x 220 130 225 136 0 24 i
x 217 153 231 159 0 24 >
l 544 144 544 336 0 1.0 -1.0762673535411302E-5
w 544 336 432 336 0
w 544 144 432 144 0
x 519 249 532 255 0 24 L
x 536 201 551 207 0 24 V
r 336 144 336 336 0 100.0
x 331 199 346 205 0 24 V
x 355 197 390 203 0 24 i_R
x 562 196 593 202 0 24 i_L

```

Схема состоит из параллельно включенных индуктивности, емкости и активного сопротивления (Сопротивление  $R_i = 0,01 \text{ Ом}$  добавлено для корректной работы модели). Определим ток на входе схемы. В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$i = i_R + i_L + i_C, \quad (7.19)$$

где  $i_R = \frac{U}{R} = gU_m \sin \omega t$ ,  $g = \frac{1}{R}$  - активная проводимость.

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt, \quad i_C = C \frac{dU}{dt}$$

Подставим эти выражения в уравнение (7.19). Получим:

$$\begin{aligned} i &= gu + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = gU_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + C \omega U_m \cos \omega t = \\ &= gU_m \sin \omega t + b_L U_m \sin(\omega t - 90^\circ) + b_C U_m \sin(\omega t + 90^\circ), \end{aligned} \quad (7.20)$$

где  $b_L = \frac{1}{\omega L}$  - индуктивная проводимость;

$b_C = \omega C$  - емкостная проводимость.

**Из уравнения (7.20) видно, что ток в ветви с индуктивностью отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$ , ток в ветви с активным сопротивлением совпадает по фазе с напряжением, ток в ветви с емкостью опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$ .**

Запишем уравнение (7.20) в комплексной форме.

$$\dot{I} = g\dot{U} - \dot{U}jb_L + \dot{U}jb_C = \dot{U}(g + j(b_C - b_L)) = \dot{U}Y = \dot{U}ye^{j\varphi}, \quad (7.21)$$

где  $Y = g + j(b_C - b_L)$  - комплексная проводимость;

$y = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}$  - полная проводимость;

$\varphi = \arctg \frac{b_C - b_L}{g}$  - начальная фаза комплексной проводимости.

Построим векторные диаграммы, соответствующие комплексному уравнению (7.21).

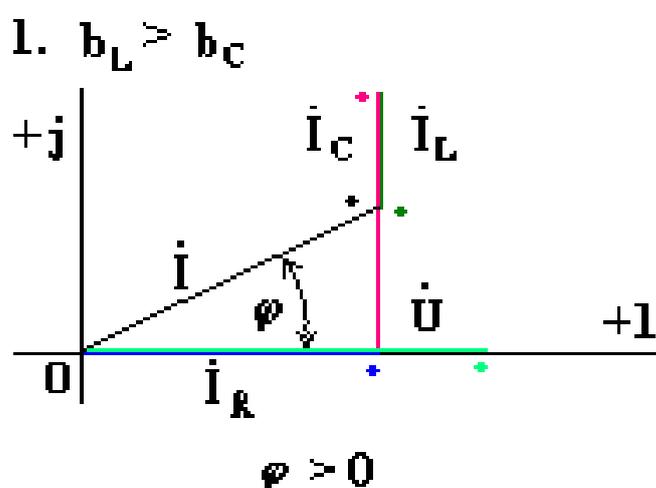


Рисунок 7.21

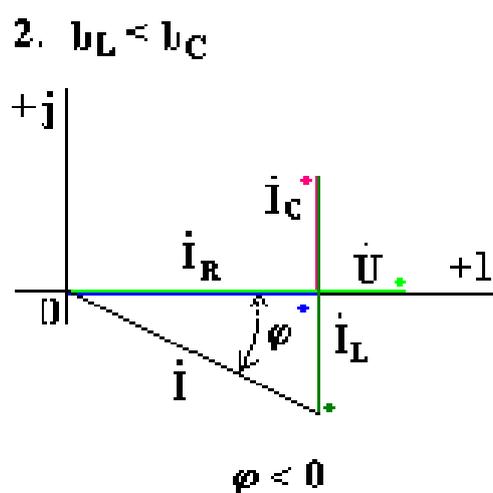


Рисунок 7.22

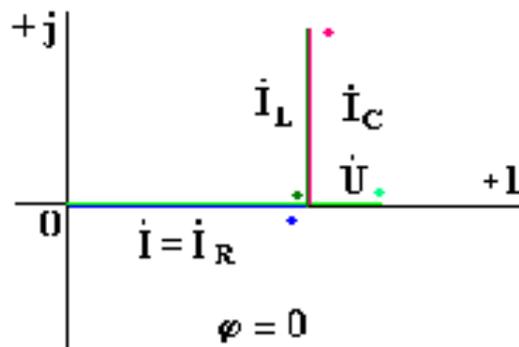
3.  $b_L = b_C$ 

Рисунок 7.23

В цепи на рисунке 7.20 может возникнуть режим **резонанса токов**.

**Резонанс токов возникает тогда, когда индуктивная и емкостная проводимости одинаковы. При этом индуктивный и емкостный токи, направленные в противоположные стороны, полностью компенсируют друг друга. Ток в неразветвленной части схемы совпадает по фазе с напряжением.**

Из условия возникновения резонанса тока

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L},$$

получим формулу для резонансной частоты тока:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

В режиме резонанса тока полная проводимость цепи

$$y = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} = g - \text{минимальна, а полное сопротивление}$$

$$z = \frac{1}{y} - \text{максимально.}$$

Ток в неразветвленной части схемы  $I = \frac{U}{z}$ , в резонансном режиме имеет минимальное значение.

В идеализированном случае  $R = \infty$ ,  $y = b_C - b_L = 0$ ,  $z = \infty$

Ток в неразветвленной части цепи  $I = 0$ .

Такая схема называется **фильтр - пробкой**.

## Резонансный режим в цепи, состоящей из параллельно включенных реальной индуктивной катушки и конденсатора

Рассмотрим схему, состоящую из параллельно соединенных катушки индуктивности с потерями и конденсатора (рисунок 7.24).

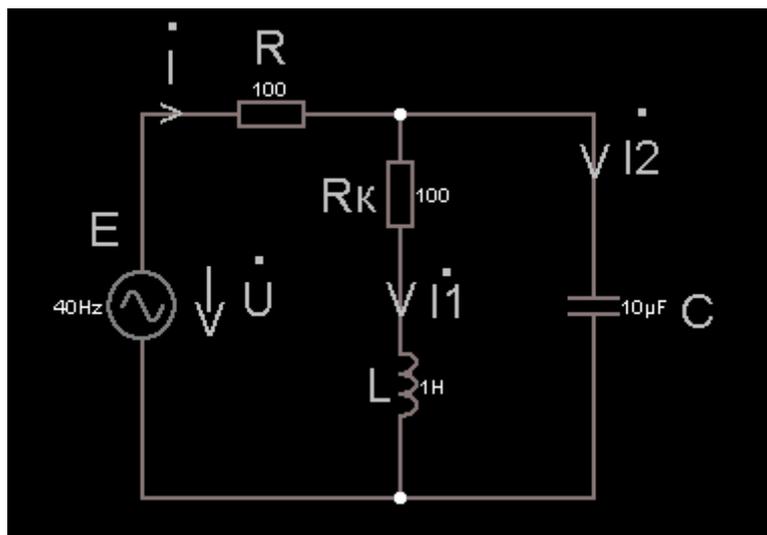


Рисунок 7.24

```

$ 1 5.0E-6 19.056626845863 50 5.0 50
v 144 336 144 144 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
c 368 144 368 336 0 1.0E-5 0.0
w 368 144 272 144 0
w 368 336 272 336 0
w 144 336 272 336 0
r 272 144 144 144 0 100.0
x 118 211 134 217 0 24 E
x 175 238 181 244 0 24 I
x 171 256 186 262 0 24 V
x 200 120 217 126 0 24 R
x 233 194 261 200 0 24 Rk
x 287 247 306 253 0 24 I1
x 412 252 429 258 0 24 C
x 194 246 211 252 0 24 U
x 362 177 377 183 0 24 V
x 383 175 402 181 0 24 I2
x 387 146 398 155 0 40 .
x 256 289 269 295 0 24 L
r 272 144 272 224 0 100.0
l 272 224 272 336 0 1.0 0.0
x 290 226 301 235 0 40 .
x 197 220 208 229 0 40 .
x 266 246 281 252 0 24 V
x 156 130 162 136 0 24 I
x 153 153 167 159 0 24 >

```

x 154 103 165 112 0 40 .

Комплексная проводимость индуктивной ветви

$$Y_1 = \frac{1}{R_K + j\omega_0 L} \frac{R_K - j\omega_0 L}{R_K - j\omega_0 L} = \frac{R_K - j\omega_0 L}{R_K^2 + (\omega_0 L)^2} =$$

$$= \frac{R_K}{R_K^2 + (\omega_0 L)^2} - j \frac{\omega_0 L}{R_K^2 + (\omega_0 L)^2} = g_K - jb_L,$$

где  $g_K = \frac{R_K}{R_K^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{R_K}{z_K^2}$  - активная проводимость индуктивной катушки;

$z_K = \sqrt{R_K^2 + (\omega_0 L)^2}$  - полное сопротивление индуктивной катушки;

$b_L = \frac{\omega_0 L}{R_K^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{\omega_0 L}{z_K^2}$  - индуктивная проводимость катушки;

$b_C = \omega_0 C$  - емкостная проводимость второй ветви.

В режиме резонансов токов справедливо уравнение:  $b_L = b_C$  или

$$\frac{\omega_0 L}{R_K^2 + (\omega_0 L)^2} = \omega_0 C.$$

Из этого уравнения получим формулу для частоты резонанса

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_K^2}{\frac{L}{C}}}. \quad (7.22)$$

На рисунке 7.25 изображена векторная диаграмма цепи в резонансном режиме.

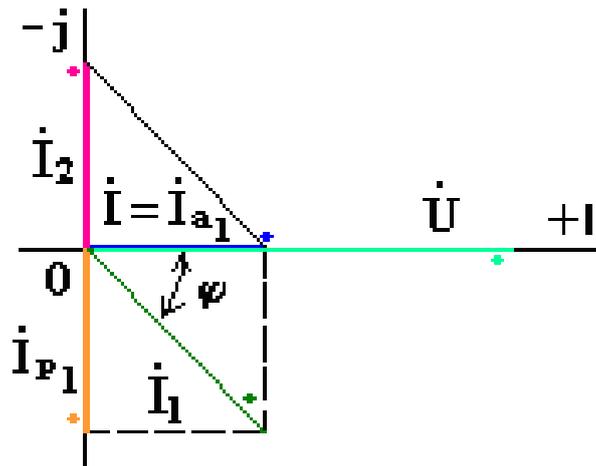


Рисунок 7.25

Вектор тока  $I_2$  опережает вектор напряжения на  $90^\circ$ . Вектор тока  $I_1$  отстает от вектора напряжения на угол  $\omega$ ,

где  $\varphi = \text{arctg} \frac{\omega_0 L}{R_K}$ .

Разложим вектор тока  $I_1$  на две взаимно перпендикулярные составляющих, одна из них, совпадающая с вектором напряжения, называется активной составляющей тока  $I_{a1}$ , другая - реактивной составляющей тока  $I_{p1}$ .

В режиме резонанса тока реактивная составляющая тока  $I_{p1}$  и емкостный ток  $I_2$ , направленные в противоположные стороны, полностью компенсируют друг друга, активная составляющая тока  $I_{a1}$  совпадает по фазе с напряжением (Рисунок 7.25).

Ток  $I$  в неразветвленной части схемы совпадает по фазе с напряжением.

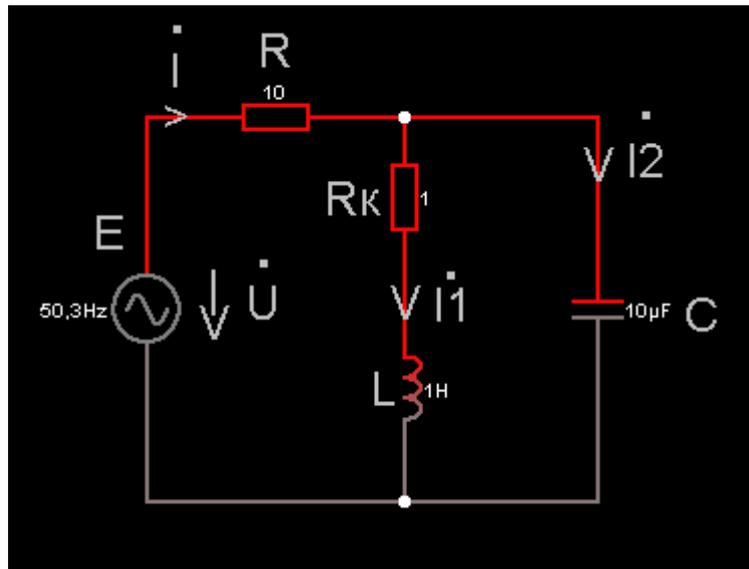


Рисунок 7.26а

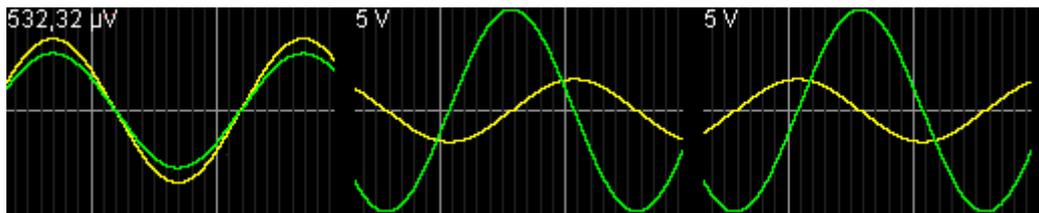


Рисунок 7.26б

При моделировании видно, что при резонансе, ток в неразветвленной части цепи (левая осциллограмма совпадает по фазе с напряжением). Токи и напряжения в 1-й и 2-й ветвях не совпадают по фазе. Токи текут противофазно и их максимальная величина составляет 16,8 мА (Рисунок 7.27)

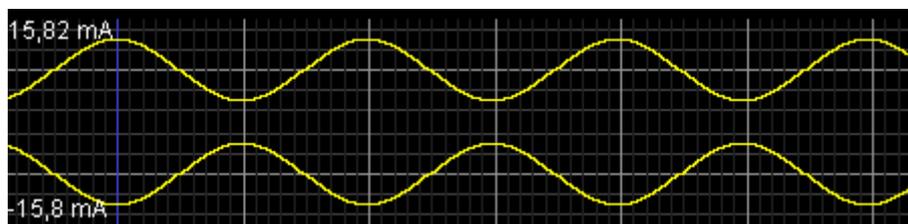


Рисунок 7.27

А в неразветвленной части цепи ток принимает максимальное значение 53,3 мкА (Рисунок 7.28)

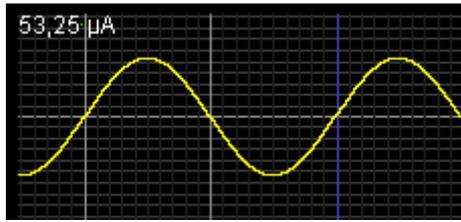


Рисунок 7.28

## Мощность в цепи синусоидального тока

Мгновенной мощностью называют произведение мгновенного напряжения на входе цепи на мгновенный ток.

Пусть мгновенные напряжение и ток определяются по выражениям:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) ,$$

$$i = I_m \sin \omega t .$$

Тогда

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)) = \\ &= UI \sin \varphi = UI \cos(2\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Среднее значение мгновенной мощности за период

$$\begin{aligned} p_{CP} &= \frac{1}{T} \int_0^T (UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)) dt = \\ &= \frac{1}{T} UI \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{1}{T} UI \cos \varphi \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = UI \cos \varphi . \end{aligned}$$

Из треугольника сопротивлений

$$\cos \varphi = \frac{R}{z}, \quad I = \frac{U}{z} .$$

Получим еще одно выражение:

$$P_{CP} = UI \cos \varphi = UI \frac{R}{z} = I^2 R = P(Bm).$$

Среднее арифметическое значение мощности за период называют **активной мощностью** и обозначают буквой  $P$ .

**Эта мощность измеряется в ваттах и характеризует необратимое преобразование электрической энергии в другой вид энергии, например, в тепловую, световую и механическую энергию.**

Рассмотрим реактивный элемент (индуктивность или емкость).

Активная мощность в этом элементе

$$P = UI \cos 90^\circ = 0,$$

так как напряжение и ток в индуктивности или емкости различаются по фазе на  $90^\circ$ .

**В реактивных элементах отсутствуют необратимые потери электрической энергии, не происходит нагрева элементов.**

**Происходит обратимый процесс в виде обмена электрической энергией между источником и приемником.**

**Для качественной оценки интенсивности обмена энергией вводится понятие реактивной мощности  $Q$ .**

Преобразуем выражение (7.23):

$$\begin{aligned} p &= UI \cos \varphi - UI(\cos 2\omega t \cos \varphi - \sin 2\omega t \sin \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi(1 - \cos 2\omega t) + UI \sin \varphi \sin 2\omega t = p_1 + p_2, \end{aligned}$$

где  $p_1 = UI \cos \varphi(1 - \cos 2\omega t)$  - мгновенная мощность в активном сопротивлении;

$p_2 = UI \sin \varphi \sin 2\omega t$  - мгновенная мощность в реактивном элементе (в индуктивности или в емкости).

**Максимальное или амплитудное значение мощности  $p_2$  называется реактивной мощностью**

$$Q = UI \sin \varphi \text{ (Var)}$$

**Реактивная мощность, измеряемая в вольтамперах реактивных, расходуется на создание магнитного поля в индуктивности или электрического поля в емкости.**

**Энергия, накопленная в емкости или в индуктивности, периодически возвращается источнику питания.**

**Амплитудное значение суммарной мощности**

$$P = P_1 + P_2 \text{ - называется полной мощностью.}$$

**Полная мощность, измеряемая в вольтамперах, равна произведению действующих значений напряжения и тока:**

$$S = UI = I^2 z, \text{ (ВА)}$$

где  $z$  - полное сопротивление цепи.

**Полная мощность характеризует предельные возможности источника энергии.**

В электрической цепи можно использовать часть полной мощности

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi,$$

где  $\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}$  - коэффициент мощности или "косинус "фи".

**Коэффициент мощности является одной из важнейших характеристик электротехнических устройств.**

Принимают специальные меры к увеличению коэффициента мощности.

Возьмем треугольник сопротивлений и умножим его стороны на квадрат тока в цепи.

Получим подобный треугольник мощностей (Рисунок 7.29).

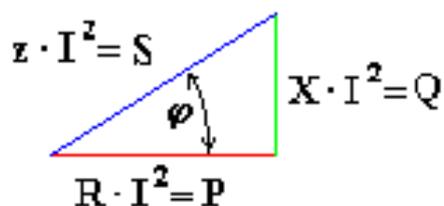


Рисунок 7.29

$x$  - реактивное сопротивление.

Из треугольника мощностей получим ряд выражений:

$$P = S \cos \varphi, \quad Q = S \sin \varphi, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

При анализе электрических цепей символическим методом используют выражение **комплексной мощности**, равное произведению комплексного напряжения на сопряженный комплекс тока.

Для цепи, имеющей индуктивный характер (R-L цепи)

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ$$

где  $\dot{U} = U e^{j\varphi_u}$  - комплекс напряжения;

$\dot{I} = I e^{j\varphi_i}$  - комплекс тока;

$I^* = I e^{-j\varphi_i}$  - сопряженный комплекс тока;

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  - сдвиг по фазе между напряжением и током.

$\varphi > 0$  - ток как в R-L цепи, напряжение опережает по фазе ток.

Вещественной частью полной **комплексной мощности** является **активная мощность**.

Мнимой частью комплексной мощности - **реактивная мощность**.

Для цепи, имеющей емкостной характер (R-C цепи),

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = S e^{-j\varphi} = S \cos \varphi - jS \sin \varphi = P - jQ$$

$\varphi_u - \varphi_i = \varphi < 0$ . Ток опережает по фазе напряжение.

**Активная мощность всегда положительна.**

**Реактивная мощность в цепи, имеющей индуктивный характер, - положительна, а в цепи с емкостным характером - отрицательна.**

## Баланс мощностей

Для схемы на рисунке 7.30 запишем уравнение по второму закону Кирхгофа.

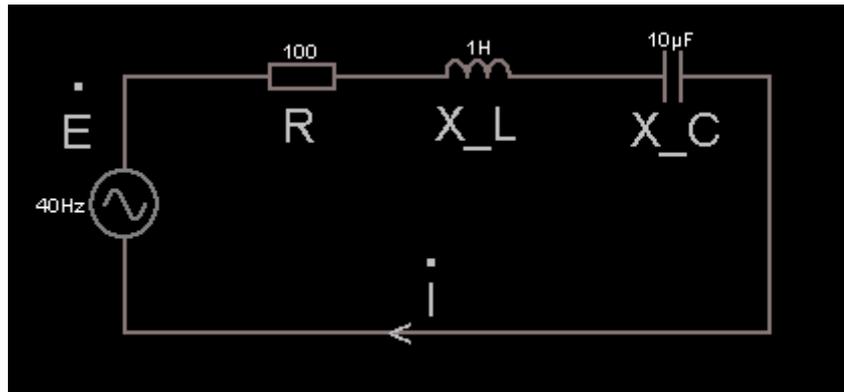


Рисунок 7.30

```

§ 1 9.92E-6 5.236996988945491 82 7.0 50
r 208 208 288 208 0 100.0
l 288 208 384 208 0 1.0 0.0
c 384 208 480 208 0 1.0E-5 0.0
w 208 208 160 208 0
v 160 208 160 336 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 160 336 480 336 0
w 480 208 480 336 0
x 129 245 145 251 0 24 E
x 239 242 256 248 0 24 R
x 315 241 356 247 0 24 X_L
x 412 244 457 250 0 24 X_C
x 132 216 143 225 0 40 .
x 307 304 318 313 0 40 .
x 310 329 316 335 0 24 I
x 291 346 305 352 0 24 <

```

Умножим левую и правую части уравнения на сопряженный комплекс тока

$$\dot{E} I^* = (\dot{i}R + jX_L - jX_C)I = \dot{i}I^*R + \dot{i}I^*j(X_L - X_C) = I^2R \pm I^2jX,$$

где  $\pm X = X_L - X_C$  - результирующее реактивное сопротивление;

$\dot{i}I^* = I^2$  - квадрат модуля тока.

$$\dot{E} I^* = \tilde{S}_H = P_H \pm jQ_H,$$

где  $\tilde{S}_H$ ,  $P_H$ ,  $\pm jQ_H$  - полная комплексная, активная и реактивная мощности источника питания.

$$I^2 R \pm jI^2 X = P_H \pm jQ_H,$$

где  $P_H$ ,  $\pm jQ_H$  - активная и реактивная мощности, потребляемые элементами схемы.

Получим уравнение

$$P_H \pm jQ_H = P_H \pm jQ_H. \quad (7.24)$$

Два комплексных числа равны, если равны по отдельности их вещественные и мнимые части, следовательно уравнение (7.24) распадается на два:

$$P_H = P_H; \quad \pm Q_H = \pm Q_H \quad (7.25)$$

Полученные равенства выражают законы сохранения активных и реактивных мощностей.

### Согласованный режим работы электрической цепи. Согласование нагрузки с источником

В схемах на рисунке 7.31а,б

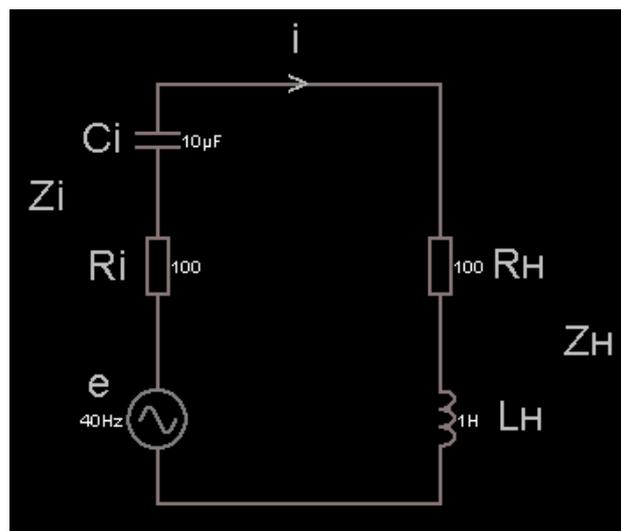


Рисунок 7.31а

```

$ 1 9.92E-6 5.2369969888945491 82 7.0 50
v 176 352 176 256 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 176 256 176 176 0 100.0
r 336 176 336 256 0 100.0
c 176 176 176 112 0 1.0E-5 0.0
l 336 256 336 352 0 1.0 0.0
w 336 176 336 112 0
w 336 112 176 112 0
w 176 352 336 352 0
x 369 311 395 317 0 24 LH
x 366 224 396 230 0 24 RH
x 134 152 156 158 0 24 Ci
x 137 225 159 231 0 24 Ri
x 137 292 150 298 0 24 e
x 104 185 124 191 0 24 Zi
x 407 268 435 274 0 24 ZH
x 252 95 257 101 0 24 i
x 250 121 264 127 0 24 >

```

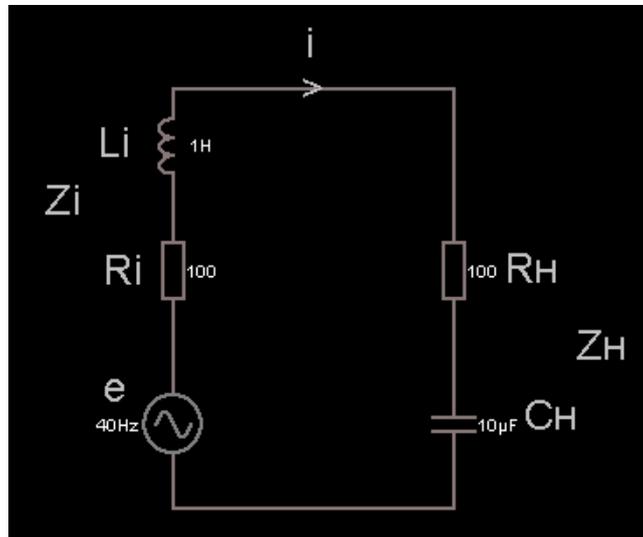


Рис. 7.31б

```

$ 1 9.92E-6 5.2369969888945491 82 7.0 50
v 176 352 176 256 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 176 256 176 176 0 100.0
r 336 176 336 256 0 100.0
w 336 176 336 112 0
w 336 112 176 112 0
w 176 352 336 352 0
x 377 308 407 314 0 24 CH
x 366 224 396 230 0 24 RH
x 134 152 152 158 0 24 Li
x 137 225 159 231 0 24 Ri
x 137 292 150 298 0 24 e
x 104 185 124 191 0 24 Zi
x 407 268 435 274 0 24 ZH
x 252 95 257 101 0 24 i
x 250 121 264 127 0 24 >
l 176 176 176 112 0 1.0 0.0
c 336 256 336 352 0 1.0E-5 0.0

```

$z_i, R_i, X_i$  ( $X_i = \omega L_i$  или  $X_i = \frac{1}{\omega C_i}$ ) - полное, активное и реактивное сопротивление источника ЭДС,  
 $z_H, R_H, X_H$  ( $X_H = \omega L_H$  или  $X_H = \frac{1}{\omega C_H}$ ) - полное, активное и реактивное сопротивление нагрузки.

**Активная мощность может выделяться только в активных сопротивлениях цепи переменного тока.**

Активная мощность, выделяемая в нагрузке,

$$P_2 = R_H I^2 = R_H \frac{E^2}{z^2} = \frac{R_H E^2}{(R_H + R_i)^2 + (X_i + X_H)^2}. \quad (7.26)$$

Активная мощность, развиваемая генератором

$$P_1 = (R_H + R_i) I^2. \quad (7.27)$$

Коэффициент полезного действия для данной схемы:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_H}{R_H + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_H}}. \quad (7.28)$$

Из выражения (7.26) видно, что выделяемая в нагрузке мощность будет максимальной, когда знаменатель минимален.

Последнее имеет место при условии

$$X_i + X_H = 0,$$

т.е. при  $X_H = -X_i$

**Это означает, что реактивные сопротивления источника и нагрузки должны быть одинаковы по модулю и иметь разнородный характер.**

При индуктивном характере реактивного сопротивления источника реактивное сопротивление нагрузки должно быть емкостным и наоборот.

$$P_{2MAX} = \frac{R_H E^2}{(R_H + R_i)^2}. \quad (7.29)$$

Условие, при котором от источника к нагрузке будет передаваться наибольшая мощность

$$R_H = R_i, \quad X_H = -X_i. \quad (7.30)$$

### ***Величина наибольшей мощности***

$$P_{2MAX\_MAX} = \frac{R_i E^2}{(R_H + R_i)^2} = \frac{E^2}{4R_i} \quad (7.31)$$

Режим передачи ***наибольшей мощности*** от источника к нагрузке называется ***согласованным режимом***, а подбор сопротивлений - ***согласованием нагрузки с источником***.

В согласованном режиме  $\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_H}} = 0,5$ . (7.32)

**Половина мощности теряется внутри источника. Поэтому согласованный режим не используется в силовых энергетических цепях.** Этот режим используют в информационных цепях, где мощности могут быть малыми, и решающими являются не соображения экономичности передачи сигнала, а максимальная мощность сигнала в нагрузке.

## Лекция 8

### Трёхфазные цепи

#### Основные определения

Трёхфазная цепь является совокупностью трех электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые относительно друг друга по фазе на  $120^\circ$ , создаваемые общим источником.

Участок трёхфазной системы, по которому протекает одинаковый ток, называется **фазой**.

**Трёхфазная цепь состоит из трёхфазного генератора, соединительных проводов и приемников или нагрузки, которые могут быть однофазными или трёхфазными.**

**Трёхфазный генератор представляет собой синхронную машину.**

На статоре генератора размещена обмотка, состоящая из трех частей или фаз, пространственно смещенных относительно друг друга на  $120^\circ$ .

В фазах генератора индуцируется симметричная трёхфазная система ЭДС, в которой электродвижущие силы одинаковы по амплитуде и различаются по фазе на  $120^\circ$ .

Запишем мгновенные значения и комплексы действующих значений ЭДС.

$$e_A = E_m \sin \omega t, \quad e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ),$$

$$\dot{E}_A = E, \quad \dot{E}_B = E e^{-j120^\circ}, \quad \dot{E}_C = E e^{j120^\circ}.$$

**Сумма электродвижущих сил симметричной трёхфазной системы в любой момент времени равна нулю.**  $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$

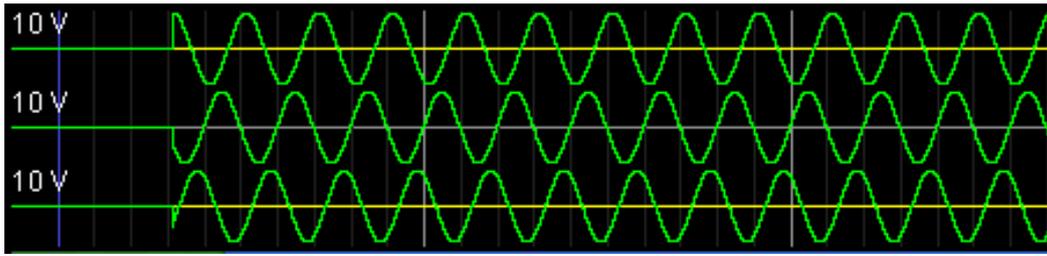


Рисунок 8.1

```

$ 1 9.92E-6 5.236996988945491 82 7.0 50
v 256 128 384 128 0 1 50.0 10.0 0.0 0.0 0.5
v 256 208 384 208 0 1 50.0 10.0 0.0 2.0943951023931953 0.5
v 256 288 384 288 0 1 50.0 10.0 0.0 4.1887902047863905 0.5
w 256 128 256 208 0
w 256 208 256 288 0
x 402 136 417 142 0 24 A
x 400 216 416 222 0 24 B
x 403 296 420 302 0 24 C
x 249 365 266 371 0 24 N
x 235 132 250 138 0 24 X
x 232 295 247 301 0 24 Z
x 232 218 248 224 0 24 Y
w 256 288 256 336 0
o 0 64 0 35 10.0 9.765625E-5 0 -1
o 1 64 0 34 10.0 9.765625E-5 0 -1
o 2 64 0 35 10.0 9.765625E-5 0 -1

```

Соответственно  $e_A + e_B + e_C = 0$

На схемах трехфазных цепей начала фаз обозначают первыми буквами латинского алфавита (**A**, **B**, **C**), а концы - последними буквами (**X**, **Y**, **Z**).

Направления ЭДС указывают от конца фазы обмотки генератора к ее началу.

Каждая фаза нагрузки соединяется с фазой генератора двумя проводами: **прямым и обратным**.

Получается несвязанная трехфазная система, в которой имеется шесть соединительных проводов.

**Чтобы уменьшить количество соединительных проводов, используют трехфазные цепи, соединенные звездой или треугольником.**

## Соединение в звезду. Схема, определения

Если концы всех фаз генератора соединить в общий узел, а начала фаз соединить с нагрузкой, образующей трехлучевую звезду сопротивлений, получится трехфазная цепь, соединенная звездой.

При этом три обратных провода сливаются в один, называемый нулевым или нейтральным.

Трехфазная цепь, соединенная звездой, изображена на рисунке 8.2

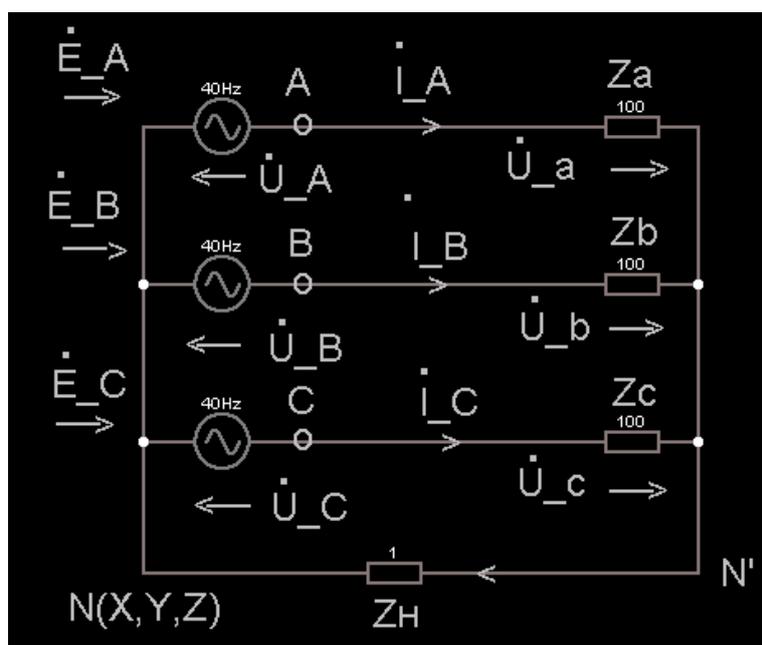


Рис. 8.2

```

§ 1 9.92E-6 5.236996988945491 82 7.0 50
v 176 96 272 96 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
v 176 192 272 192 0 1 40.0 5.0 0.0 2.0943951023931953 0.5
v 176 288 272 288 0 1 40.0 5.0 0.0 4.1887902047863905 0.5
r 432 96 512 96 0 100.0
r 432 192 512 192 0 100.0
r 432 288 512 288 0 100.0
w 176 96 176 192 0
w 176 192 176 288 0
w 272 96 432 96 0
w 272 192 432 192 0
w 272 288 432 288 0
w 512 96 512 192 0
w 512 192 512 288 0
w 176 288 176 368 0
r 288 368 368 368 0 1.0E-5
w 368 368 512 368 0
w 512 288 512 368 0
w 288 368 176 368 0
x 458 73 486 79 0 24 Za
x 460 169 489 175 0 24 Zb

```

```

x 461 267 488 273 0 24 Zc
x 127 40 138 49 0 40 .
x 118 153 163 159 0 24 E_B
x 124 63 168 69 0 24 E_A
x 121 262 167 268 0 24 E_C
x 131 398 224 404 0 24 N(X, Y, Z)
x 316 402 344 408 0 24 ZH
x 267 102 280 108 0 24 o
x 267 199 280 205 0 24 o
x 267 294 280 300 0 24 o
x 263 78 278 84 0 24 A
x 264 176 280 182 0 24 B
x 264 272 281 278 0 24 C
x 151 87 165 93 0 24 >
x 130 75 156 81 0 24 ___
x 121 128 132 137 0 40 .
x 129 167 155 173 0 24 ___
x 155 181 169 187 0 24 >
x 124 238 135 247 0 40 .
x 125 274 151 280 0 24 ___
x 147 287 161 293 0 24 >
x 205 136 219 142 0 24 <
x 213 123 239 129 0 24 ___
x 246 137 291 143 0 24 U_A
x 202 238 216 244 0 24 <
x 210 226 236 232 0 24 ___
x 252 240 298 246 0 24 U_B
x 247 117 258 126 0 40 .
x 207 336 221 342 0 24 <
x 255 218 266 227 0 40 .
x 216 324 242 330 0 24 ___
x 254 337 301 343 0 24 U_C
x 256 315 267 324 0 40 .
x 345 105 359 111 0 24 >
x 339 178 374 184 0 24 I_B
x 344 273 380 279 0 24 I_C
x 341 248 352 257 0 40 .
x 378 378 392 384 0 24 <
x 357 298 371 304 0 24 >
x 349 202 363 208 0 24 >
x 329 77 363 83 0 24 I_A
x 326 49 337 58 0 40 .
x 331 142 342 151 0 40 .
x 461 119 487 125 0 24 ___
x 483 131 497 137 0 24 >
x 460 216 486 222 0 24 ___
x 480 228 494 234 0 24 >
x 460 315 486 321 0 24 ___
x 482 327 496 333 0 24 >
x 403 322 445 328 0 24 U_c
x 404 227 448 233 0 24 U_b
x 396 129 439 135 0 24 U_a
x 408 204 419 213 0 40 .
x 399 107 410 116 0 40 .
x 407 301 418 310 0 40 .
x 526 377 548 383 0 24 N'

```

**Провода, идущие от источника к нагрузке называют линейными проводами, провод, соединяющий нейтральные точки источника  $N_n$  приемника  $N'$  называют нейтральным (нулевым) проводом.**

**Напряжения между началами фаз или между линейными проводами называют линейными напряжениями.**

**Напряжения между началом и концом фазы или между линейным и нейтральным проводами называются фазными напряжениями.**

**Токи в фазах приемника или источника называют фазными токами, токи в линейных проводах - линейными токами.**

Так как линейные провода соединены последовательно с фазами источника и приемника, линейные токи при соединении звездой являются одновременно фазными токами.

$$I_{\text{лин}} = I_{\text{ф}}.$$

$Z_N$  - сопротивление нейтрального провода.

**Линейные напряжения равны геометрическим разностям соответствующих фазных напряжений**

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (8.1)$$

На рисунке 8.3 изображена векторная диаграмма фазных и линейных напряжений симметричного источника.

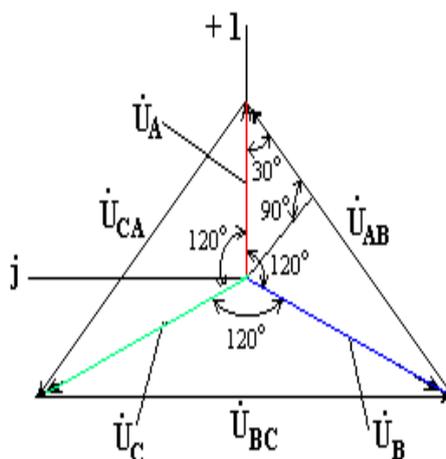


Рисунок 8.3

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_{\text{ли}} = U_{AB} = 2U_{\phi} \cos 30^{\circ} = 2U_{\phi} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_{\phi}$$

При симметричной системе ЭДС источника линейное напряжение больше фазного в  $\sqrt{3}$  раз.  $U_{\text{ли}} = \sqrt{3}U_{\phi}$

### Соединение в треугольник. Схема, определения

Если конец каждой фазы обмотки генератора соединить с началом следующей фазы, образуется соединение в треугольник.

К точкам соединений обмоток подключают три линейных провода, ведущие к нагрузке.

На рисунке 8.4 изображена трехфазная цепь, соединенная треугольником.

Как видно из рис. 8.4, в трехфазной цепи, соединенной треугольником, фазные и линейные напряжения одинаковы.

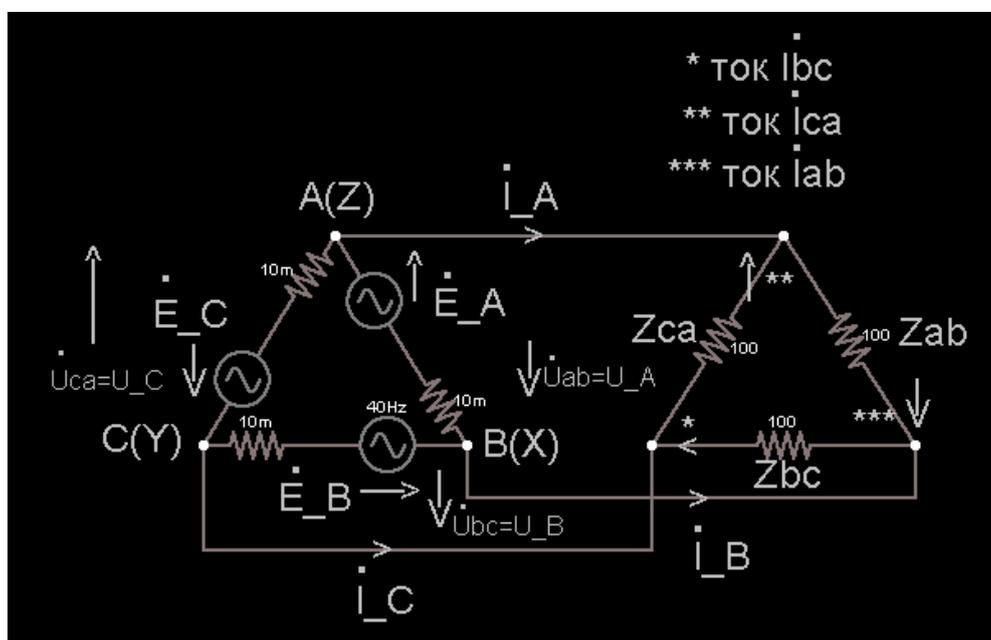


Рисунок 8.4

```

$ 1 9.92E-6 5.236996988945491 82 7.0 50
v 128 272 176 192 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 176 192 208 144 0 0.01
v 208 144 256 224 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 256 224 288 272 0 0.01

```

```

r 128 272 192 272 0 0.01
v 192 272 288 272 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 480 144 400 272 0 100.0
r 480 144 560 272 0 100.0
r 400 272 560 272 0 100.0
w 208 144 480 144 0
w 288 272 288 304 0
w 288 304 560 304 0
w 560 272 560 304 0
w 400 272 400 336 0
w 128 272 128 336 0
w 128 336 400 336 0
x 463 299 504 305 0 24 Zbc
x 389 210 429 216 0 24 Zca
x 551 212 593 218 0 24 Zab
x 423 314 437 320 0 24 >
x 187 129 233 135 0 24 A(Z)
x 298 280 345 286 0 24 B(X)
x 67 277 116 283 0 24 C(Y)
x 225 297 251 303 0 24 _
x 248 309 262 315 0 24 >
x 323 153 337 159 0 24 >
x 231 345 245 351 0 24 >
x 219 351 230 360 0 40 .
x 310 129 344 135 0 24 I_A
x 307 105 318 114 0 40 .
x 221 376 257 382 0 24 I_C
x 423 326 434 335 0 40 .
x 426 349 461 355 0 24 I_B
x 174 313 219 319 0 24 E_B
x 98 201 144 207 0 24 E_C
x 179 290 190 299 0 40 .
x 120 228 126 234 0 24 |
x 116 243 131 249 0 24 V
x 100 173 111 182 0 40 .
x 254 179 260 185 0 24 |
x 268 194 312 200 0 24 E_A
x 251 171 263 177 0 24 ^
x 271 171 282 180 0 40 .
x 416 282 430 288 0 24 <
x 418 272 427 278 0 24 *
x 421 50 511 56 0 24 * ток Ibc
x 483 25 494 34 0 40 .
x 419 83 517 89 0 24 ** ток Ica
x 482 60 493 69 0 40 .
x 469 184 487 190 0 24 **
x 522 268 549 274 0 24 ***
x 410 115 519 121 0 24 *** ток Iab
x 483 93 494 102 0 40 .
x 457 179 463 185 0 24 |
x 453 172 465 178 0 24 ^
x 555 262 570 268 0 24 V
x 559 249 565 255 0 24 |
x 324 226 330 232 0 24 |
x 319 243 334 249 0 24 V
x 335 237 404 241 0 16 Uab=U_A
x 269 305 275 311 0 24 |
x 265 323 280 329 0 24 V
x 280 328 348 332 0 16 Ubc=U_B
x 336 221 344 228 0 30 .
x 282 312 290 319 0 30 .

```

```

x 56 168 68 174 0 24 ^
x 59 176 65 182 0 24 I
x 36 239 105 243 0 16 Uca=U_c
x 59 205 65 211 0 24 |
x 59 193 65 199 0 24 |
x 38 218 46 225 0 30 .

```

$$U_{\text{лин}} = U_{\phi}.$$

$I_A, I_B, I_C$  - линейные токи;

$I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$  - фазные токи.

**Линейные и фазные токи нагрузки связаны между собой первым законом Кирхгофа для узлов  $a, b, c$ .**

Линейный ток равен геометрической разности соответствующих фазных токов.

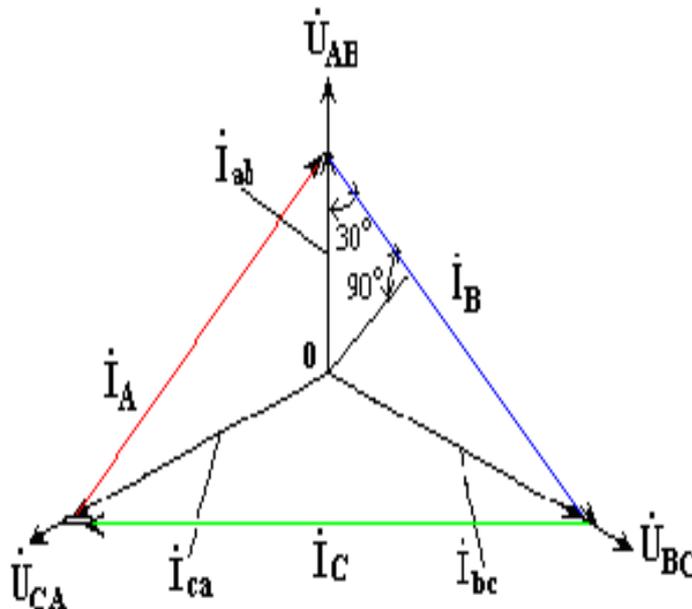


Рисунок 8.5

На рисунке 8.5 изображена векторная диаграмма трехфазной цепи, соединенной треугольником при симметричной нагрузке.

Нагрузка является симметричной, если сопротивления фаз одинаковы.

Векторы фазных токов совпадают по направлению с векторами соответствующих фазных напряжений, так как нагрузка состоит из активных сопротивлений.

Из векторной диаграммы видно, что

$$I_{\text{лин}} = 2I_{\phi} \cos 30^{\circ} = 2I_{\phi} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}I_{\phi},$$

$$I_{\text{лин}} = \sqrt{3}I_{\phi} \text{ при симметричной нагрузке.}$$

Трехфазные цепи, соединенные звездой, получили большее распространение, чем трехфазные цепи, соединенные треугольником.

Это объясняется тем, что, во-первых, в цепи, соединенной звездой, можно получить два напряжения: линейное и фазное.

Во-вторых, если фазы обмотки электрической машины, соединенной треугольником, находятся в неодинаковых условиях, в обмотке появляются дополнительные токи, нагружающие ее.

Такие токи отсутствуют в фазах электрической машины, соединенных по схеме "звезда".

Поэтому на практике избегают соединять обмотки трехфазных электрических машин в треугольник.

### **Расчет трехфазной цепи, соединенной звездой**

Трехфазную цепь, соединенную звездой, удобнее всего рассчитать методом двух узлов.

На рисунке 8.6 изображена трехфазная цепь при соединении звездой. В общем случае сопротивления фаз нагрузки неодинаковы ( $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ )

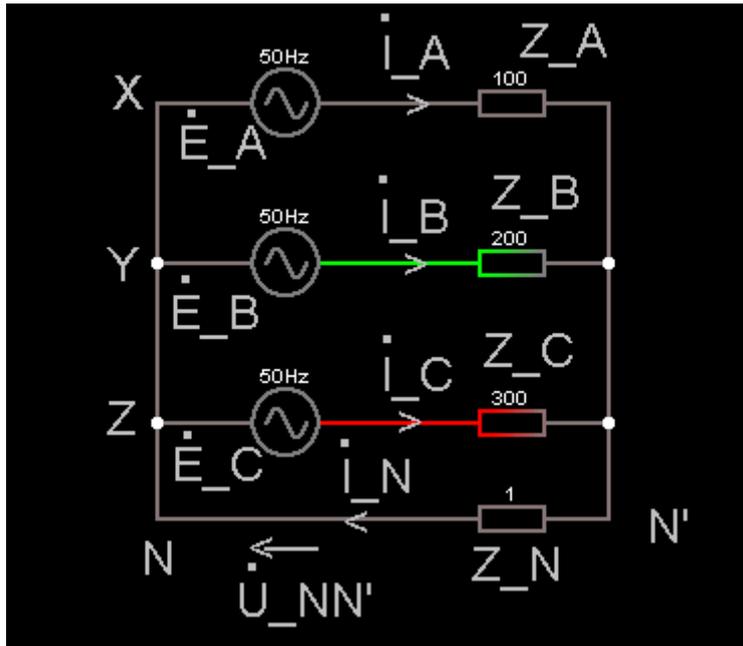


Рисунок 8.6

```

$ 1 9.92E-6 5.236996988945491 82 7.0 50
v 208 96 336 96 0 1 50.0 10.0 0.0 0.0 0.5
v 208 176 336 176 0 1 50.0 10.0 0.0 2.0943951023931953 0.5
v 208 256 336 256 0 1 50.0 10.0 0.0 4.1887902047863905 0.5
w 208 96 208 176 0
w 208 176 208 256 0
x 320 80 354 86 0 24 I_A
x 319 162 354 168 0 24 I_B
x 320 241 356 247 0 24 I_C
x 201 333 218 339 0 24 N
x 187 100 202 106 0 24 X
x 184 263 199 269 0 24 Z
x 184 186 200 192 0 24 Y
w 208 256 208 304 0
r 336 176 432 176 0 200.0
r 336 256 432 256 0 300.0
r 336 96 432 96 0 100.0
w 432 96 432 176 0
w 432 176 432 256 0
w 208 304 336 304 0
r 336 304 432 304 0 1.0
w 432 256 432 304 0
x 452 317 474 323 0 24 N'
x 389 74 432 80 0 24 Z_A
x 375 150 419 156 0 24 Z_B
x 371 229 416 235 0 24 Z_C
x 365 336 410 342 0 24 Z_N
x 219 125 263 131 0 24 E_A
x 215 210 260 216 0 24 E_B
x 216 286 262 292 0 24 E_C
x 332 106 346 112 0 24 >
x 331 186 345 192 0 24 >
x 328 265 342 271 0 24 >
x 248 354 317 360 0 24 U_NN'
x 263 316 289 322 0 24 <
x 254 328 268 334 0 24 <

```

```

x 301 315 315 321 0 24 <
x 300 292 336 298 0 24 I_N
x 316 56 327 65 0 40 .
x 315 137 326 146 0 40 .
x 317 217 328 226 0 40 .
x 296 269 307 278 0 40 .
x 220 104 231 113 0 40 .
x 218 265 229 274 0 40 .
x 217 187 228 196 0 40 .
x 250 331 261 340 0 40 .
o 0 64 0 35 10.0 0.1 0 -1
o 1 64 0 34 10.0 0.05 0 -1
o 2 64 0 35 10.0 0.05 0 -1

```

Нейтральный провод имеет конечное сопротивление  $Z_N$ .

В схеме между нейтральными точками источника и нагрузки возникает узловое напряжение или напряжение смещения нейтрали.

Это напряжение определяется по формуле (8.2).

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\frac{\dot{E}_A}{Z_A} + \frac{\dot{E}_B}{Z_B} + \frac{\dot{E}_C}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_N}}. \quad (8.2)$$

Фазные токи определяются по формулам (в соответствии с законом Ома для активной ветви):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{\dot{U}_A - U_{N'N}}{Z_A} = \frac{\dot{U}_A}{Z_A}, \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_B - U_{N'N}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_B}{Z_B}, \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_C - U_{N'N}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_C}{Z_C}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{N'N}}{Z_N}. \quad (8.4)$$

Частные случаи.

Симметричная нагрузка. Сопротивления фаз нагрузки одинаковы и равны некоторому активному сопротивлению  $Z_A = Z_B = Z_C = R$ .

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

Узловое напряжение

$$\dot{U}_{NN'} = \frac{\frac{\dot{E}_A}{R} + \frac{\dot{E}_B}{R} + \frac{\dot{E}_C}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_N}} = 0.$$

потому что трехфазная система ЭДС симметрична,

Напряжения фаз нагрузки и генератора одинаковы:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a, \quad \dot{U}_B = \dot{U}_b, \quad \dot{U}_C = \dot{U}_c.$$

Фазные токи одинаковы по величине и совпадают по фазе со своими фазными напряжениями.

Ток в нейтральном проводе отсутствует

$$\dot{i}_N = \frac{\dot{U}_{N'N}}{Z_N} = 0.$$

В трехфазной системе, соединенной звездой, при симметричной нагрузке нейтральный провод не нужен.

На рисунке 8.7 изображена векторная диаграмма трехфазной цепи для симметричной нагрузки.

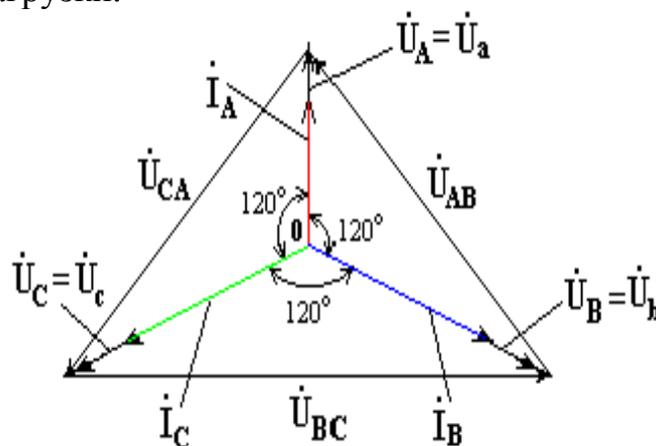


Рисунок 8.7

Нагрузка несимметричная,  $R_A < R_B = R_C$ , но сопротивление нейтрального провода равно нулю:  $Z_N = 0$ . Напряжение смещения нейтрали

$$\dot{U}_{NN'} = \frac{\frac{\dot{E}_A}{R} + \frac{\dot{E}_B}{R} + \frac{\dot{E}_C}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \infty} = 0, \quad \frac{1}{Z_N} = \infty.$$

Фазные напряжения нагрузки и генератора одинаковы

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a, \quad \dot{U}_B = \dot{U}_b, \quad \dot{U}_C = \dot{U}_c.$$

Фазные токи определяются по выражениям

$$\dot{I}_A = \frac{U_A}{R_A}, \quad \dot{I}_B = \frac{U_B}{R_B}, \quad \dot{I}_C = \frac{U_C}{R_C}.$$

Вектор тока в нейтральном проводе равен геометрической сумме векторов фазных токов.

На рисунке 8.8 приведена векторная диаграмма трехфазной цепи, соединенной звездой, с нейтральным проводом, имеющим нулевое сопротивление, нагрузкой которой являются неодинаковые по величине активные сопротивления.

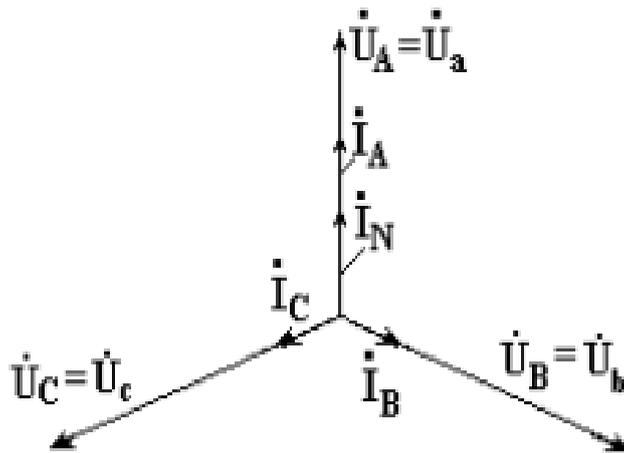


Рисунок 8.8

Нагрузка несимметричная,  $R_A < R_B = R_C$ , нейтральный провод отсутствует,

$$Z_N = \infty, \quad \frac{1}{Z_N} = 0.$$

В схеме появляется напряжение смещения нейтрали, вычисляемое по выражению:

$$\dot{U}_{NN'} = \frac{\frac{\dot{E}_A}{R_A} + \frac{\dot{E}_B}{R_B} + \frac{\dot{E}_C}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}.$$

Система фазных напряжений генератора остается симметричной.

Это объясняется тем, что источник трехфазных ЭДС имеет практически бесконечно большую мощность.

Несимметрия нагрузки не влияет на систему напряжений генератора. Из-за напряжения смещения нейтрали фазные напряжения нагрузки становятся неодинаковыми.

Фазные напряжения генератора и нагрузки отличаются друг от друга.

При отсутствии нейтрального провода геометрическая сумма фазных токов равна нулю.

На рисунке 8.9 изображена векторная диаграмма трехфазной цепи с несимметричной нагрузкой и оборванным нейтральным проводом.

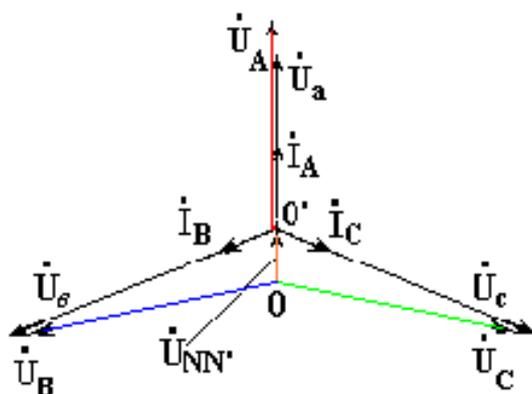


Рисунок 8.9

Векторы фазных токов совпадают по направлению с векторами соответствующих фазных напряжений нагрузки.

Нейтральный провод с нулевым сопротивлением в схеме с несимметричной нагрузкой выравнивает несимметрию фазных напряжений нагрузки, т.е. с включением данного нейтрального провода фазные напряжения нагрузки становятся одинаковыми.

### **Мощность в трехфазных цепях**

Трехфазная цепь является обычной цепью синусоидального тока с несколькими источниками.

Активная мощность трехфазной цепи равна сумме активных мощностей фаз

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C \quad (8.5)$$

Выражение (8.5) используется для расчета активной мощности в трехфазной цепи при несимметричной нагрузке.

При симметричной нагрузке:

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi .$$

При соединении в треугольник симметричной нагрузки

$$U_\phi = U_{\text{лин}}, \quad I_\phi = \frac{I_{\text{лин}}}{\sqrt{3}} .$$

При соединении в звезду

$$U_\phi = \frac{U_{\text{лин}}}{\sqrt{3}}, \quad I_\phi = I_{\text{лин}} .$$

В обоих случаях

$$P = \sqrt{3} U_{\text{лин}} I_{\text{лин}} \cos \varphi$$

## Лекция 9

### Переходные процессы в линейных электрических цепях

#### Общая характеристика переходных процессов

В электрических цепях возможны включения и отключения отдельных ветвей, короткие замыкания участков цепи, различного рода переключения.

Любые изменения в электрических цепях можно представить в виде переключений или коммутаций.

Характер коммутации указывается в схеме с помощью рубильника со стрелкой.

По направлению стрелки можно судить, замыкается или размыкается рубильник.

При коммутации в цепи возникают переходные процессы, т.е. процессы перехода токов и напряжений от одного установившегося значения к другому.

Изменения токов и напряжений вызывают одновременное изменение энергии электрического и магнитного полей, связанных с элементами цепи - емкостями и индуктивностями.

Однако энергия электрического поля и энергия магнитного поля могут изменяться только непрерывно, так как скачкообразное изменение потребовало бы от источника бесконечно большой мощности.

На этом рассуждении основаны законы коммутации.

**Первый закон.** В любой ветви с индуктивностью ток не может изменяться скачком и в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел непосредственно перед моментом коммутации

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

где  $i_L(0_+)$  - ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации, сразу после коммутации. Знак "+" в формуле обычно не записывается.

Время переходного процесса отсчитывается от момента коммутации;  $i_L(0_-)$  - ток в индуктивности непосредственно перед коммутацией.

**Второй закон.** Напряжение на емкости сразу после коммутации сохраняет то значение, которое оно имело непосредственно перед моментом коммутации.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-),$$

где  $u_C(0_+)$  - напряжение на емкости в момент коммутации;  $u_C(0_-)$  - напряжение на емкости непосредственно перед моментом коммутации.

Допущения, применяемые при анализе переходных процессов.

- Полагают, что переходный процесс длится бесконечно большое время.
- Считают, что замыкание и размыкание рубильника происходит мгновенно, без образования электрической дуги.
- Принимают, что к моменту коммутации предыдущие переходные процессы в цепи закончились.

В соответствии с классическим методом расчета, переходный ток в ветви схемы представляют в виде **суммы принужденного и свободного токов.**

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t)$$

где  $i_{\text{пр}}(t)$  - принужденный ток, определяется в установившемся режиме после коммутации. Этот ток создается внешним источником питания.

Если в цепь включен источник постоянной ЭДС, принужденный ток будет постоянным, если в цепи действует источник синусоидальной ЭДС, принужденный ток изменяется по периодическому, синусоидальному закону;

$i_{\text{св}}(t)$  - свободный ток, определяется в схеме после коммутации, из которой исключен внешний источник питания.

Свободный ток создается внутренними источниками питания: ЭДС самоиндукции индуктивности или напряжением заряженной емкости.

Свободный ток определяют по формуле:

$$i_{CB}(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} + \dots$$

Количество слагаемых в формуле равно числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в схеме.

$P_1, P_2$  - корни характеристического уравнения.

$A_1, A_2$  - постоянные интегрирования, определяются с помощью начальных условий.

**Начальные условия** - это переходные токи и напряжения в момент коммутации, в момент времени  $t$ , равный нулю.

**Начальные условия могут быть независимыми или зависимыми.**

**Независимыми называют начальные условия, подчиняющиеся законам коммутации, законам постепенного, непрерывного изменения.**

Это напряжение на емкости  $u_C(0)$  и ток в ветви с индуктивностью  $i_L(0)$  в момент коммутации.

**Остальные начальные условия:** напряжение и ток в ветви с сопротивлением  $u_R(0)$  и  $i_R(0)$ , напряжение на индуктивности  $u_L(0)$ , ток в ветви с емкостью  $i_C(0)$  - это **зависимые начальные условия**.

Они не подчиняются законам коммутации и могут изменяться скачком.

## **Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом**

### ***Короткое замыкание в R-L цепи***

На рисунке 9.1 изображена электрическая цепь, в которой включен источник постоянной ЭДС.

В результате коммутации рубильник замыкается (при помощи внешнего управляющего тактового генератора) и образуется замкнутый на себя  $R-L$  контур.

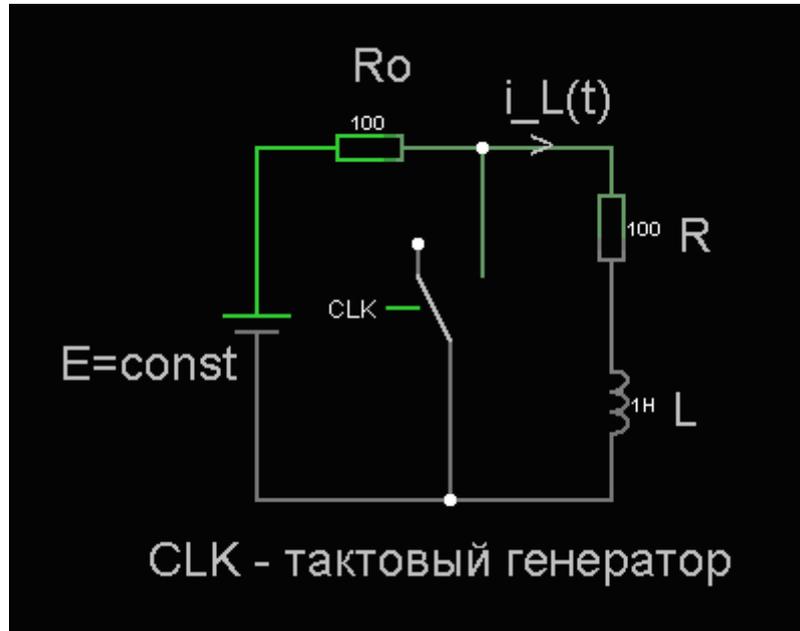


Рисунок 9.1

```

$ 1 9.92E-6 19.056626845863 82 7.0 50
v 240 288 240 112 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 240 112 352 112 0 100.0
w 352 112 416 112 0
r 416 112 416 192 0 100.0
l 416 192 416 288 0 1.0 0.02320504986312513
160 336 224 336 160 0 20.0 1.0E10
w 352 160 352 112 0
w 336 224 336 288 0
w 336 288 416 288 0
w 336 288 240 288 0
R 320 192 288 192 1 2 10.0 2.5 2.5 0.0 0.5
x 143 229 231 235 0 24 E=const
x 187 327 477 333 0 24 CLK - тактовый генератор
x 288 80 318 86 0 24 Ro
x 450 165 467 171 0 24 R
x 447 252 460 258 0 24 L
x 376 120 390 126 0 24 >
x 363 96 417 102 0 24 i_L(t)
o 2 128 0 33 2.3384026197294445 0.046768052394588894 0 -1
o 4 128 0 34 5.0 0.0125 1 -1

```

До коммутации по индуктивности протекал ток

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Этот ток создавал постоянное магнитное поле в индуктивной катушке.

Определим закон изменения тока в индуктивности после коммутации.  
В соответствии с классическим методом

$$i_L(t) = i_{L\_ИП}(t) + i_{L\_СВ}(t) = i_{L\_ИП} + Ae^{Pt}.$$

Принужденный ток после коммутации замыкается через рубильник, имеющий нулевое сопротивление, и через индуктивность не протекает.

Индуктивный ток имеет только свободную составляющую

$$i_{L\_ИП} = 0, \quad i_L(t) = 0 + i_{L\_СВ}(t) = i_{L\_СВ}(t).$$

Магнитное поле, исчезая, индуцирует в индуктивной катушке ЭДС самоиндукции.

Свободный ток в  $R-L$  контуре существует за счет этой электродвижущей силы.

Запишем уравнение для свободного тока в  $R-L$  контуре, используя второй закон Кирхгофа.

$$i_{L\_СВ}R + L \frac{di_{L\_СВ}}{dt} = 0. \quad (9.1)$$

Ищем решение этого уравнения в виде экспоненты

$$i_{L\_СВ} = Ae^{Pt}.$$

Производная

$$\frac{di_{L\_СВ}}{dt} = APe^{Pt}.$$

Подставим значения свободного тока и производной тока в уравнение (9.1)

$$AR \cdot e^{Pt} + LAPe^{Pt} = Ae^{Pt}(R + PL) = R + LP = 0. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2), полученное из уравнения (9.1), называется **характеристическим**.

$P = -\frac{R}{L}$  - корень характеристического уравнения.

$\tau = -\frac{1}{P} = \frac{L}{R}$  - постоянная времени переходного процесса, измеряется в секундах.

Постоянная времени  $\tau$  - это интервал времени, за который переходный ток уменьшается в  $e$  раз.

$$i_{L\_CB} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяем с помощью начального условия.

В соответствии с первым законом коммутации,

$$i_L(0) = i_{L\_CB}(0) = A = i_L(0_-) = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Получим

$$i_L(t) = i_{L\_CB}(t) = \frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Напряжение на индуктивности.

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \left( -\frac{R}{L} \right) \frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{R}{R_0 + R} E e^{-\frac{R}{L}t}.$$

На рисунке 9.2 изображены осциллограммы переходного тока (желтый) в ветви с индуктивностью и переходного напряжения (зеленый) на индуктивности.

Переходный ток и напряжение по экспоненте стремятся к нулю.

В инженерных расчетах полагают, что через интервал времени, равный  $(4 \div 5)\tau$ , переходный процесс заканчивается.

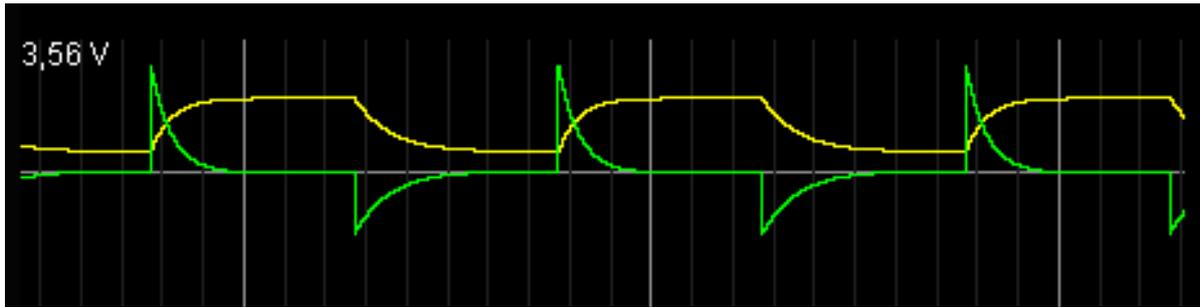


Рисунок 9.2

### ***Подключение R-L цепи к источнику постоянной ЭДС***

В схеме на рисунке 9.3 до коммутации рубильник разомкнут.

В результате коммутации рубильник замыкается и подключает R–L цепь к источнику постоянной ЭДС.

Определим закон изменения тока  $i(t)$ .

$$i(t) = i_{L\_пр}(t) + i_{L\_св}(t) = i_{L\_пр} + Ae^{Pt}.$$

Принужденный ток в установившемся режиме после коммутации

$$i_{пр} = \frac{E}{R}.$$

В свободном режиме из схемы исключен внешний источник питания.

Схема на рисунке 9.3 без источника ЭДС ничем не отличается от схемы на рисунке 9.1

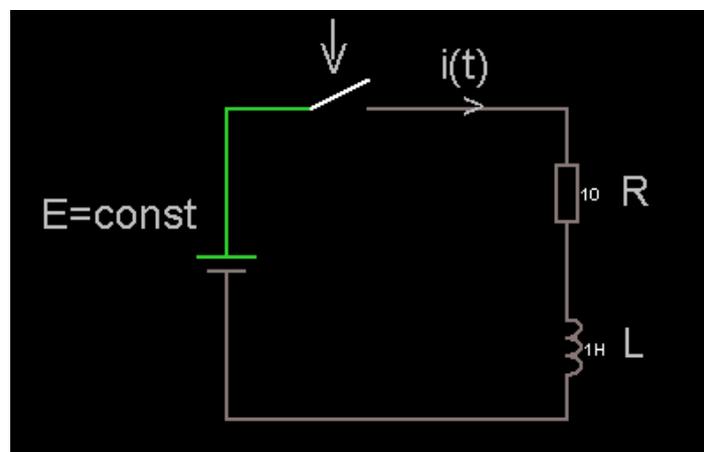


Рисунок 9.3

```

$ 1 9.92E-6 19.056626845863 82 7.0 50
w 368 128 432 128 0
r 432 128 432 224 0 10.0
l 432 224 432 304 0 1.0 0.0
w 432 304 240 304 0
x 464 270 477 276 0 24 L
x 463 184 480 190 0 24 R
x 136 197 224 203 0 24 E=const
x 374 136 388 142 0 24 >
x 361 112 389 118 0 24 i(t)
s 240 128 368 128 0 1 true
v 240 304 240 128 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 298 95 304 101 0 24 |
x 294 109 309 115 0 24 v
o 2 64 0 35 7.62939453125E-5 9.765625E-5 0 -1

```

Свободный ток определяется по формуле

$$i_{CB}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Запишем значение переходного тока для момента коммутации, ( $t = 0$ ),

$$i(0) = i_{IP} + i_{CB}(0) = i_{IP} + A,$$

откуда

$$A = i(0) - i_{IP}.$$

До коммутации рубильник был разомкнут, и ток в схеме отсутствовал.

Сразу после коммутации ток в индуктивности остается равным нулю.

$$i(0) = i(0_-) = 0,$$

$$A = 0 - i_{IP} = -i_{IP} = -\frac{E}{R},$$

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -L \left(-\frac{R}{L}\right) \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = Ee^{-\frac{R}{L}t}.$$

На рис. 9.4 изображены осциллограммы переходного тока (желтый) и переходного напряжения на индуктивности (зеленый) – рисунок 9.4а. Переходный ток стремится к значению принужденного тока (Рисунок 9.4б).

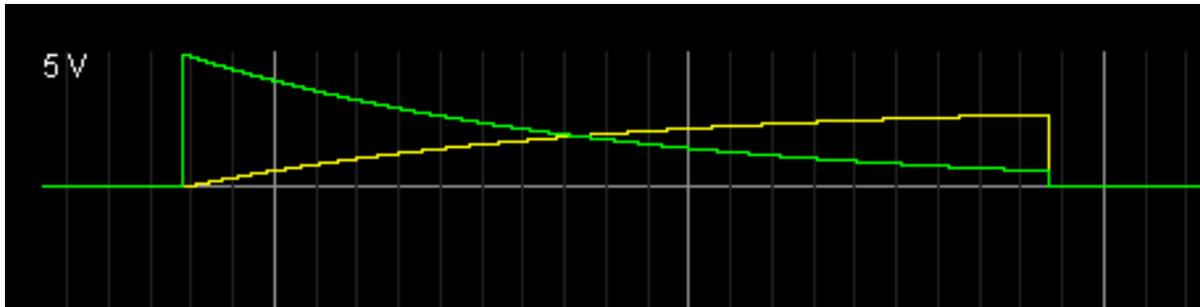


Рисунок 9.4а

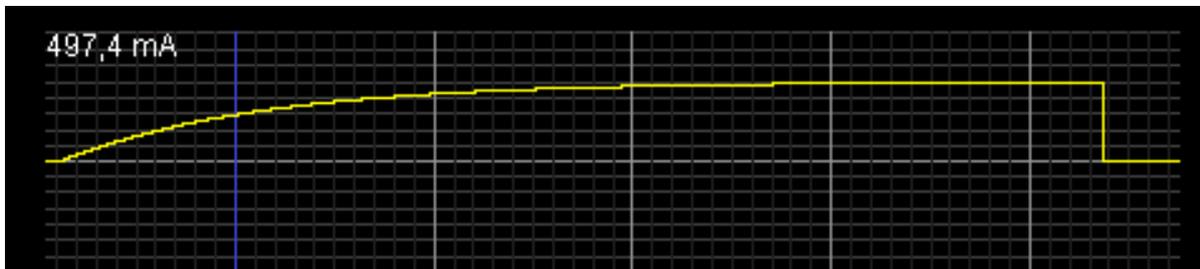


Рисунок 9.4б

Свободный ток и напряжение на индуктивности плавно уменьшаются до нуля. В момент коммутации свободный и принужденный токи одинаковы по абсолютной величине.

Переходный ток начинается при включении с нуля, затем возрастает, приближаясь к установившемуся постоянному значению.

### ***Короткое замыкание в R-C цепи***

В схеме на рисунке 9.5 в результате коммутации рубильник замыкается, и образуется замкнутый на себя R–C контур.

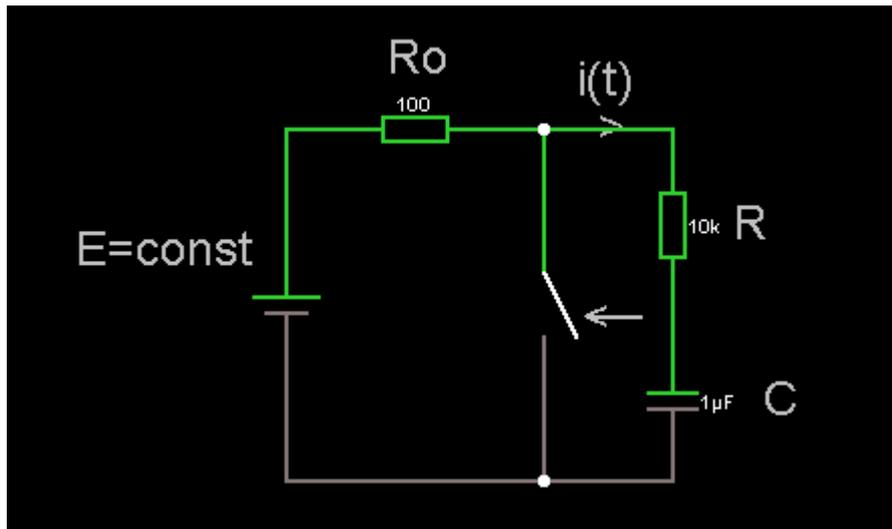


Рисунок. 9.5

```

$ 1 9.92E-6 19.056626845863 82 7.0 50
r 432 128 432 224 0 10000.0
x 478 272 495 278 0 24 C
x 463 184 480 190 0 24 R
x 136 197 224 203 0 24 E=const
x 396 136 410 142 0 24 >
x 385 112 413 118 0 24 i(t)
v 240 304 240 128 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 432 128 368 128 0
r 240 128 368 128 0 100.0
s 368 128 368 304 0 1 true
w 432 304 368 304 0
w 368 304 240 304 0
c 432 224 432 304 0 1.0E-6 4.996754329245483
x 388 231 402 237 0 24 <
x 392 219 418 225 0 24 ___
x 291 101 321 107 0 24 Ro
o 12 64 0 35 5.0 7.8125E-4 0 -1

```

До коммутации емкость полностью зарядилась до напряжения, равного ЭДС источника питания, то есть  $u_C(0_-) = E$ .

После коммутации емкость полностью разряжается, следовательно, принужденный ток в  $R-C$  цепи и принужденное напряжение на конденсаторе равны нулю.

В цепи существует только свободный ток за счет напряжения заряженного конденсатора.

Запишем для  $R-C$  контура уравнение по второму закону Кирхгофа

$$u_{C_{CB}} + Ri_{CB} = 0$$

Ток через конденсатор.

$$i_{CB} = C \frac{du_{C\_CB}}{dt}.$$

Получим дифференциальное уравнение

$$u_{C\_CB} + RC \frac{du_{C\_CB}}{dt} = 0. \quad (9.3)$$

Решение этого уравнения

$$u_{C\_CB} = Ae^{Pt}.$$

Подставим значение свободного напряжения и производной от напряжения

$$\frac{du_{C\_CB}}{dt} = APe^{Pt}$$

в уравнение (9.3).

$$Ae^{Pt} + RC PAe^{Pt} = Ae^{Pt}(1 + RCP) = 0, \text{ следовательно } 1 + RCP = 0.$$

Уравнение

$$1 + RCP = 0$$

называется характеристическим.

$$P = -\frac{1}{RC} \text{ - корень характеристического уравнения;}$$

$$\tau = -\frac{1}{P} = RC \text{ - постоянная времени переходного процесса;}$$

$$u_{C\_CB} = Ae^{-\frac{1}{RC}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$u_C(0) = u_{C\_CB}(0) = A = u_C(0_-) = E.$$

$$A = E.$$

$$u_C = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \left( -\frac{1}{RC} \right) E e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Переходный ток (желтый) и переходное напряжение на конденсаторе (зеленый) по показательному закону уменьшаются до нуля (Рисунок 9.6). (Коммутация ключа в модели осуществлялась в ручном режиме)

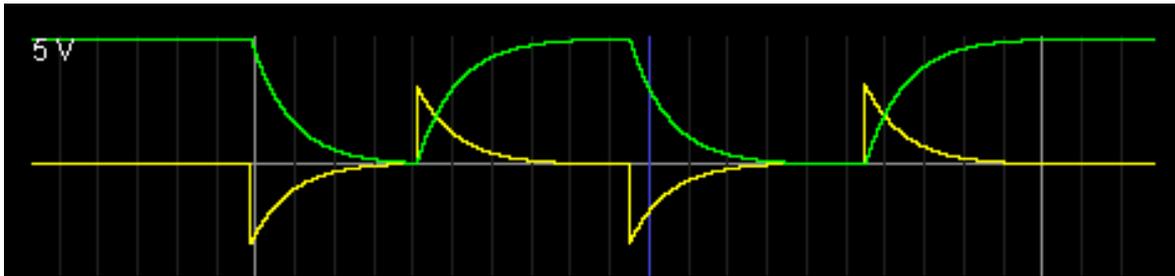


Рисунок 9.6

### *Подключение R-C цепи к источнику постоянной ЭДС*

Полагаем, что до коммутации конденсатор не заряжен, напряжение на нем  $u_C(0_-) = 0$ .

В результате коммутации рубильник замыкается, и конденсатор полностью заряжается (Рисунок 9.7).

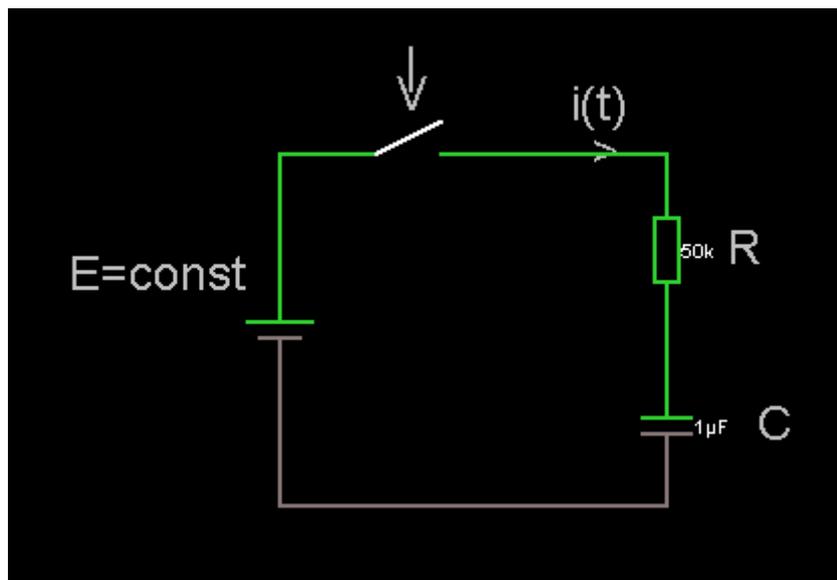


Рисунок 9.7

```

$ 1 9.92E-6 19.056626845863 82 7.0 50
r 432 128 432 224 0 50000.0
x 478 272 495 278 0 24 C
x 463 184 480 190 0 24 R
x 136 197 224 203 0 24 E=const
x 396 136 410 142 0 24 >
x 385 112 413 118 0 24 i(t)
v 240 304 240 128 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 432 128 368 128 0
w 432 304 368 304 0
w 368 304 240 304 0
c 432 224 432 304 0 1.0E-6 4.905068122214993
x 299 107 314 113 0 24 v
s 240 128 368 128 0 1 true
x 303 92 309 98 0 24 |
o 10 64 0 35 5.0 1.953125E-4 0 -1

```

Принужденное напряжение на емкости равно ЭДС источника питания

$$u_{C\_PP} = E .$$

Переходное напряжение

$$u_C(t) = u_{C\_PP} + u_{C\_CB} = u_{C\_PP} + Ae^{-\frac{t}{RC}} .$$

В момент коммутации

$$u_C(0) = u_{C\_PP} + A .$$

Постоянная интегрирования

$$A = u_C - u_{C\_PP} .$$

В соответствии со вторым законом коммутации

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0 ,$$

$$A = 0 - u_{C\_PP} = -u_{C\_PP} = -E .$$

Переходное напряжение

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) .$$

Переходный ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \left( -\frac{1}{RC} \right) E e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Кривые напряжения на конденсаторе (зеленый) и тока (желтый) изображены на рисунке 9.8.

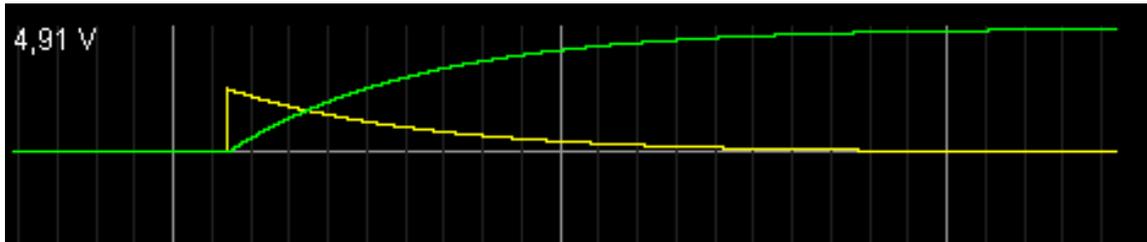


Рисунок 9.8

### Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами

При последовательном соединении сопротивления  $R$ , катушки индуктивности  $L$  и конденсатора  $C$  образуется электрический  $R-L-C$  контур (Рисунок 9.9).

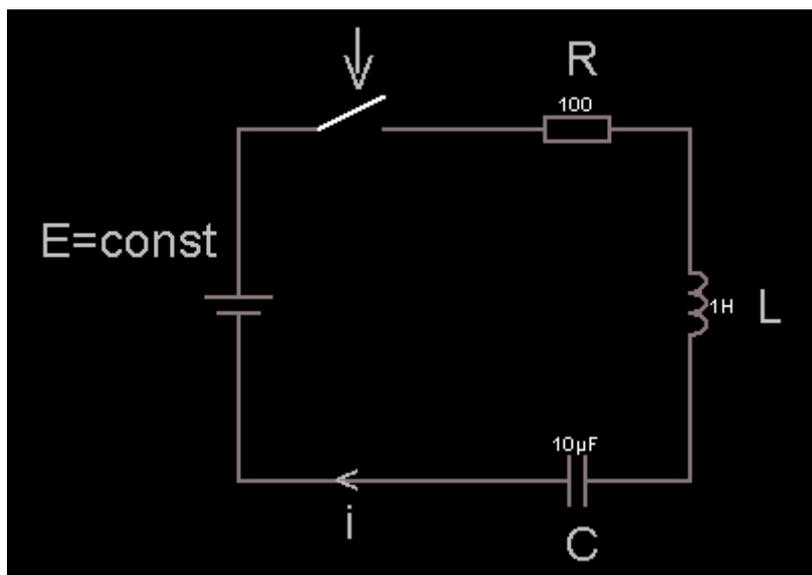


Рисунок 9.9

```

$ 1 5.0E-6 19.056626845863 50 5.0 50
r 272 144 384 144 0 100.0
l 384 144 384 320 0 1.0 0.0
c 384 320 272 320 0 1.0E-5 0.0
w 272 320 160 320 0
s 160 144 272 144 0 1 true
x 62 209 150 215 0 24 E=const
x 213 125 228 131 0 24 V
x 217 111 223 117 0 24 |
x 323 118 340 124 0 24 R
x 418 242 431 248 0 24 L
x 323 361 340 367 0 24 C
x 213 350 218 356 0 24 i
x 208 329 222 335 0 24 <
v 160 320 160 144 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5

```

Дифференциальное уравнение для тока в контуре

$$Ri = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E.$$

После дифференцирования по  $t$  и деления на  $L$  получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (9.4)$$

Решение уравнения (9.4) равно сумме принужденной и свободной составляющих

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

В нашем случае принужденная составляющая переходного тока равна нулю, так как в схеме имеется емкость, являющаяся разрывом цепи для постоянного тока.

Свободная составляющая является общим решением уравнения

$$\frac{d^2 i_{\text{св}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{1}{LC} i_{\text{св}} = 0. \quad (9.5)$$

Пусть

$$i_{\text{св}} = A e^{Pt},$$

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} = A P e^{Pt},$$

$$\frac{d^2 i_{\text{св}}}{dt^2} = A P^2 e^{Pt}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (9.5) получим характеристическое уравнение

$$P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет два корня

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

где  $\alpha = \frac{R}{2L}$  - коэффициент затухания;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  - угловая резонансная частота контура без потерь.

Получим

$$i = i_{CB} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}.$$

Вид корней зависит от отношения

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q},$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  - характеристическое или волновое сопротивление контура;

$Q = \frac{\rho}{R}$  - добротность контура.

### ***Колебательный режим***

**Наиболее важен часто встречающийся случай, когда корни  $P_{1,2}$  - комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью, свободная составляющая имеет вид затухающих колебаний.**

В этом случае  $P_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{CB}$

$$\alpha < \omega_0, \quad R < 2\rho, \quad Q < 0.5,$$

где  $\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  - угловая частота собственных колебаний в контуре;

$$T_{CB} = \frac{2\pi}{\omega_{CB}} - \text{период собственных колебаний.}$$

Ток в цепи

$$i_{CB} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB}t + \varphi) \quad (9.6)$$

где  $A$  и  $\varphi$  - постоянные интегрирования.

До коммутации ток в индуктивности равен нулю, сразу после коммутации остается равным нулю

$$i(0) = i_{CB}(0) = i(0_-) = 0.$$

Чтобы определить две постоянные интегрирования, необходимо иметь два начальных условия и составить два уравнения.

Напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_{CB}}{dt} = L \frac{d}{dt} (Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB}t + \varphi)) = \\ &= LA(-\alpha)e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB}t + \varphi) + LA\omega_{CB}e^{-\alpha t} \cos(\omega_{CB}t + \varphi). \end{aligned} \quad (9.7)$$

где  $u_L(0)$  - напряжение на индуктивности в момент коммутации, является зависимым начальным условием.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для момента коммутации, чтобы определить зависимое начальное условие .

$$u_L(0),$$

$$E = i(0)R + u_C(0) + u_L(0).$$

До коммутации конденсатор был не заряжен, поэтому

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0,$$

$$u_L(0) = E$$

Подставляя в (9.6) и (9.7)  $t=0$  и используя независимое и зависимое начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A \sin \varphi = 0 \\ LA(-\alpha) \sin \varphi + LA\omega_{CB} \cos \varphi = E \end{cases} \quad (9.8)$$

Решив систему (9.8), определим

$$\varphi = 0,$$

$$A = \frac{E}{L\omega_{CB}},$$

$$I(t) = \frac{E}{L\omega_{CB}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{CB} t.$$

На рисунке 9.10 приведена кривая изменения тока в контуре при подключении к нему источника постоянной ЭДС.

Из рисунка видно, что колебания в контуре затухают по показательному закону из-за потерь электрической энергии в сопротивлении  $R$ .

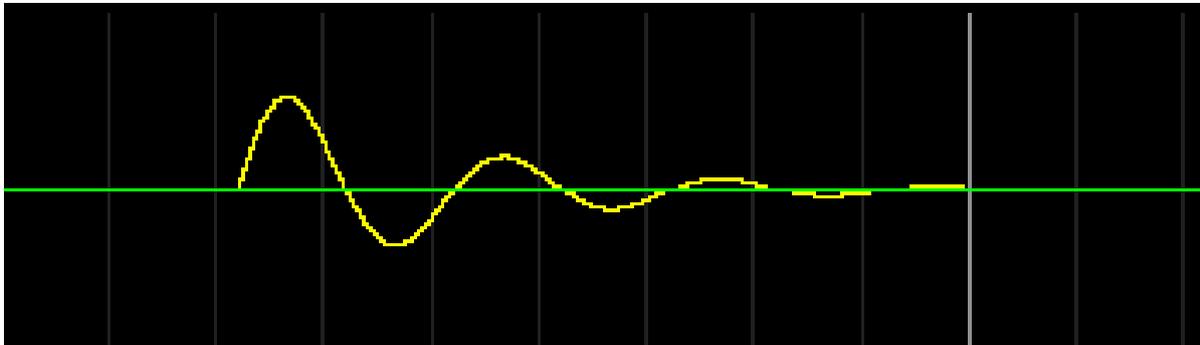


Рисунок 9.10

Затухание происходит тем медленнее, чем меньше коэффициент затухания  $\alpha$ .

Постоянная времени переходного процесса

$$\tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}.$$

При малом коэффициенте затухания величина  $\omega_{CB}$  незначительно отличается от резонансной частоты  $\omega_0$ .

Относительное затухание колебаний характеризуется декрементом затухания, представляющим отношение мгновенных значений тока через один период.

$$\Delta = \frac{e^{-\alpha t} \sin \omega_{CB} t}{e^{-\alpha(t+T)} \sin \omega_{CB} (t + T_{CB})} = e^{\alpha T_{CB}},$$

где  $T_{CB}$  - период свободных колебаний в контуре

Натуральный логарифм этого оператора носит название логарифмического декремента затухания

$$\ln \Delta = \alpha T_{CB}.$$

Для контура с небольшим затуханием, когда

$$\omega_{CB} \approx \omega_0,$$

$$\ln \Delta \approx \frac{2\pi\alpha}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q}.$$

На рисунке 9.11 приведен пример слабозатухающего колебания, при  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ .

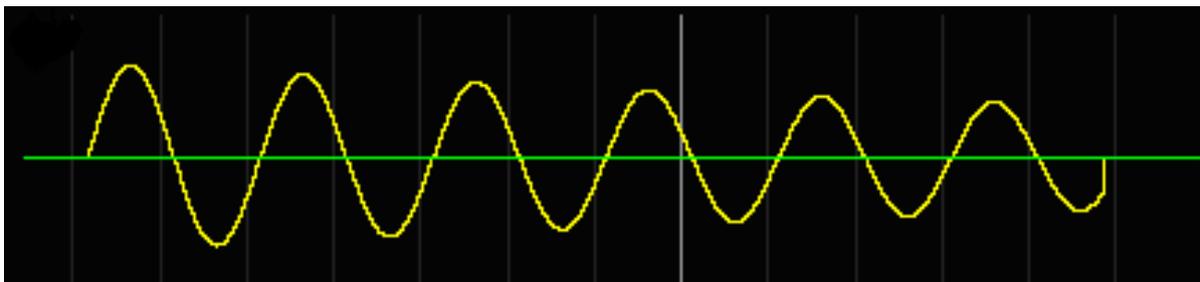


Рисунок 9.11

Апериодический режим в  $R-L-C$  контуре наблюдается при большом затухании, когда  $\alpha > \omega_0$ ,  $Q < 0.5$ ,  $R > 2\rho$

**В этом случае корни  $P_{1,2}$  вещественные, отрицательные, различные.**

Свободный ток определяется по выражению

$$i_{CB} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}. \quad (9.9)$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{di_{CB}}{dt} = LA_1 P_1 e^{P_1 t} + LA_2 P_2 e^{P_2 t}. \quad (9.10)$$

Подставив в уравнение (9.9) и (9.10)  $t=0$  и используя независимое и зависимое условия, получим систему уравнений

$$A_1 + A_2 = 0,$$

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = \frac{E}{L}.$$

Решив эту систему, определим постоянные интегрирования

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(P_1 - P_2)}$$

Выражение для тока в контуре

$$i(t) = i_{CB}(t) = \frac{E}{L(P_1 - P_2)} (e^{P_1 t} - e^{P_2 t}),$$

состоит из положительной, медленно затухающей экспоненты с коэффициентом затухания  $P_1$  и отрицательной, быстро затухающей экспоненты с коэффициентом  $P_2$  (Рисунок 9.12).

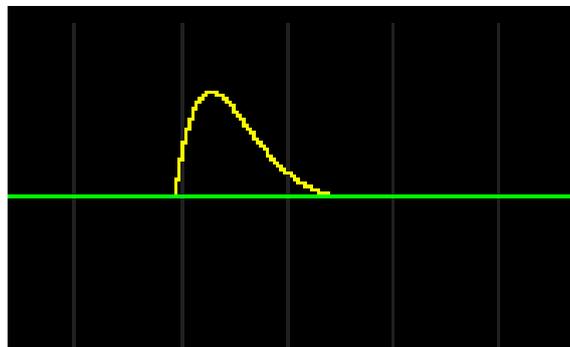


Рисунок 9.12

Ток получается неколебательным, он не принимает отрицательных значений, то есть не меняет своего направления.

На границе между колебательным и апериодическим режимом при

$$\alpha = \omega_0, \quad R = 2\rho, \quad Q = 0.5,$$

наблюдается предельный случай апериодического процесса (Рисунок 9.13).

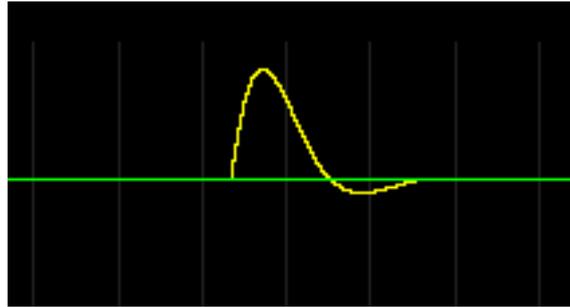


Рисунок 9.13

### Операторный метод расчета переходных процессов

Классический метод расчета переходных процессов весьма трудоемок, т.к. требует составления и решения дифференциального уравнения, которое в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВЫХ}} = \\ = b_m \frac{d^m u_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} + b_0 u_{\text{ВХ}}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Операторный метод базируется на **преобразовании Лапласа**.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

где  $F(p)$  - изображение по Лапласу,  
 $f(t)$  - оригинал функции,  
 $p = \sigma + j\omega$  - комплексная частота,  
 $\sigma$  - затухание,

$j\omega$  - комплексная круговая частота

**Обратное преобразование Лапласа** переводит изображение в оригинал

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dt.$$

Выражение (9.11) устанавливает соответствие между величинами напряжений на входе и выходе линейной стационарной системы. Наложим ограничение

$$u_{BX}(t) = 0, \text{ при } t < 0.$$

Считаем, что до момента коммутации (подачи входного напряжения) в системе отсутствует запасенная энергия.

Кроме этого допускаем, что область возможных входных напряжений не содержит в себе функций, сколь угодно быстро нарастающих во времени, что для них не существует преобразования Лапласа.

Установим закон соответствия между **оригиналами** и **изображениями** по Лапласу:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{BX}(p), \quad u_{\text{вых}}(t) = U_{BЫX}(p).$$

Вычислив преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (9.11) получим

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) U_{BЫX}(p) = \\ = (b_n p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) U_{BX}(p). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Таким образом, осуществлен переход от дифференциального уравнения с оригиналами к алгебраическому уравнению с изображениями, решать которое проще, чем исходное.

Важнейшей характеристикой, которой основан операторный метод, является отношение выходной и входной величин (напряжений)

$$K(p) = \frac{U_{BЫX}(p)}{U_{BX}(p)},$$

называемое **передаточной функцией** или **операторным коэффициентом передачи** рассматриваемой системы.

В рамках операторного метода передаточная функция является полной математической моделью системы. Если эта функция известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие разбивается на три этапа:

- 1)  $u_{BX}(t) \rightarrow U_{BIX}(p)$ ,
- 2)  $U_{BIX}(p) = K(p)U_{BX}(p)$ ,
- 3)  $U_{BIX}(p) \rightarrow u_{BIX}(t)$ .

Подробная таблица оригиналов и изображений представлена в [7, С.266]

Продemonстрируем применение операторного метода на примере нахождения переходной характеристики  $R-C$  цепи (рис. 9.14).

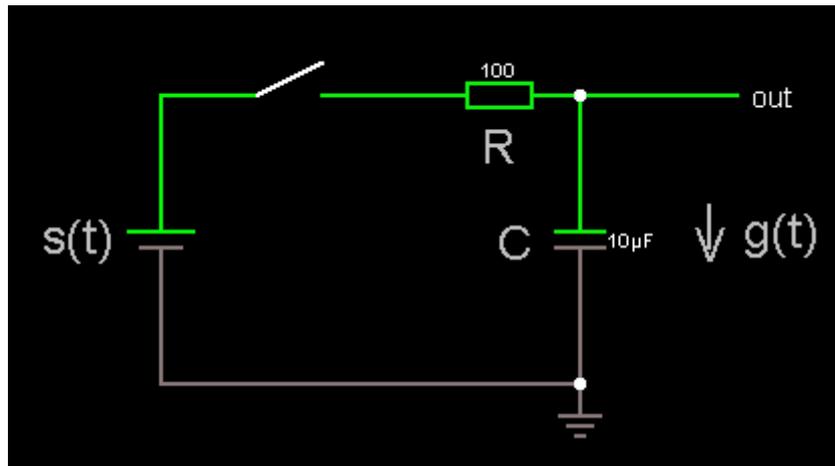


Рисунок 9.14

```

$ 1 5.0E-6 19.056626845863 50 5.0 50
v 176 272 176 128 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 304 128 384 128 0 100.0
c 384 128 384 272 0 1.0E-5 4.999998872822862
w 384 272 176 272 0
s 176 128 304 128 0 1 true
x 336 163 353 169 0 24 R
x 344 211 361 217 0 24 C
x 118 208 153 214 0 24 s(t)
O 384 128 480 128 0
g 384 272 384 288 0
x 446 200 452 206 0 24 |
x 442 212 457 218 0 24 V
x 466 205 503 211 0 24 g(t)

```

o 8 64 0 34 5.0 9.765625E-5 0 -1

$$s(t) \Rightarrow \frac{1}{p}, \quad K_p = \frac{1}{(1+p\tau)}, \quad \tau = RC,$$

ПОЭТОМУ

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{1}{p(1+p\tau)}.$$

Разлагая на элементарные дроби

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}.$$

Оригиналы, соответствующие обоим слагаемым правой части известны.  
Искомый результат

$$g(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) s(t).$$

Осциллограмма представлена на рисунке 9.15

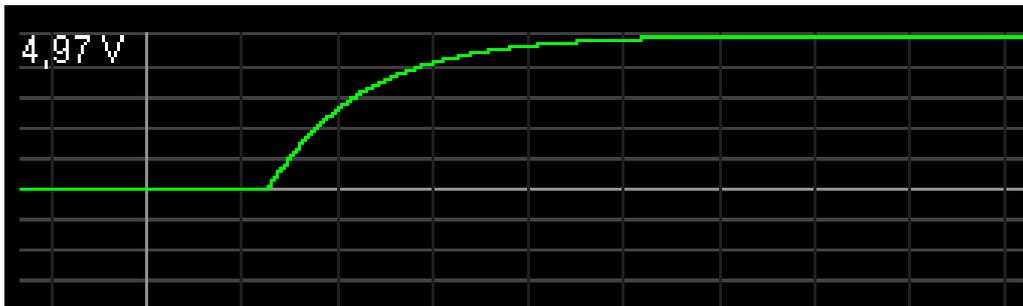


Рисунок 9.15

# Лекция 10

## Магнитные цепи

### Основные определения

Как известно из курса физики, вокруг проводника с током появляется магнитное поле.

Интенсивность магнитного поля характеризуется векторной величиной:  $\vec{H}$  - напряженностью магнитного поля, измеряемой в амперах на метр (А/м).

Интенсивность магнитного поля характеризуется также вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  измеряемой в теслах (Тл).

Напряженность магнитного поля не зависит, а магнитная индукция зависит от свойств окружающей среды.

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где  $\mu_0$  - абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м;

$\mu$  - относительное значение магнитной проницаемости, безразмерная величина;

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

В зависимости от величины относительной магнитной проницаемости, все вещества делятся на три группы.

К первой группе относятся **диамагнетики**: вещества, у которых  $\mu < 1$ .

Ко второй группе относятся **парамагнетики**, вещества с  $\mu > 1$ .

К третьей группе относятся **ферромагнетики**, вещества с  $\mu \gg 1$ .

К ферромагнетикам принадлежат железо, никель, кобальт и многие сплавы из ферромагнитных веществ.

**Магнитной цепью называется совокупность устройств, содержащих ферромагнитные вещества.**

Процессы в магнитных цепях описываются с помощью понятий магнитодвижущей силы, магнитного потока.

Магнитным потоком называется поток вектора магнитной индукции через поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Магнитный поток измеряется в веберах (Вб).

Источником магнитодвижущей силы является либо постоянный магнит, либо электромагнит (катушка, обтекаемая током).

Магнитодвижущая сила электромагнита

$$F = IW,$$

где  $I$  - ток, протекающий в катушке;  
 $W$  - число витков катушки.

В магнитных цепях используется свойство ферромагнитного материала тысячекратно усиливать магнитное поле катушки с током за счет собственной намагниченности.

### **Свойства ферромагнитных материалов**

Поместим ферромагнитный материал внутри катушки с током.

Сначала, с увеличением напряженности намагничивающего поля, магнитная индукция быстро возрастает.

Затем, из-за насыщения материала, при дальнейшем увеличении напряженности магнитного поля магнитная индукция почти не меняется.

При уменьшении напряженности намагничивающего поля кривая размагничивания не совпадает с кривой намагничивания из-за явления гистерезиса.

Явление гистерезиса заключается в том, что изменение магнитной индукции запаздывает от изменения намагничивающего поля.

Кривая зависимости  $B(H)$ , получающаяся при циклическом перемагничивании ферромагнитного материала, называется петлей гистерезиса.

Эта кривая изображена на рисунке 10.1.

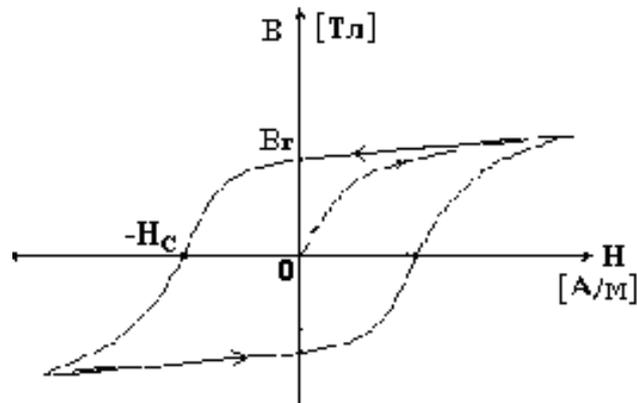


Рисунок 9.1

Чем больше площадь петли, тем больше потери на перемагничивание, нагревающие материал.

Значение магнитной индукции при напряженности намагничивающего поля, равном нулю, называется остаточной магнитной индукцией  $B_r$ , или остаточной намагниченностью.

Напряженность магнитного поля  $H_c$  при  $B=0$  называется коэрцитивной силой.

Ферромагнитные материалы с большим значением коэрцитивной силы

$$H_c > 4000 \frac{A}{m},$$

называются магнитотвердыми. Из этих материалов изготавливают постоянные магниты.

Ферромагнитные материалы с малым значением коэрцитивной силы

$$H_c > 200 \frac{A}{m},$$

называются магнитомягкими.

Эти материалы используют в магнитопроводах электрических машин и трансформаторов.

Таким образом, зависимости  $B = f(H)$  у ферромагнитных материалов нелинейные.

Эти зависимости приводятся в справочниках в табличной форме или в виде кривых, называемых кривыми намагничивания.

### Расчет магнитных цепей

**Основным законом, используемым при расчетах магнитных цепей, является закон полного тока.**

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (10.1)$$

Он формулируется следующим образом: **линейный интеграл вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равен алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.**

Если контур интегрирования охватывает катушку с числом витков  $W$ , через которую протекает ток  $I$ , то алгебраическая сумма токов,

$$\sum I = IW = F,$$

где  $F$  - магнитодвижущая сила.

Обычно контур интегрирования выбирают таким образом, чтобы он совпадал с силовой линией магнитного поля, тогда векторное произведение в формуле (10.1) можно заменить произведением скалярных величин  $Hdl$ .

В практических расчетах интеграл заменяют суммой и выбирают отдельные участки магнитной цепи таким образом, чтобы  $H_1, H_2, \dots$  вдоль этих участков можно было считать приблизительно постоянными.

При этом (10.1) переходит в

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = \sum IW = F, \quad (10.2)$$

где  $l_1, l_2, \dots, l_n$  - длины участков магнитной цепи;

$H_1 l_1, H_2 l_2, \dots, H_n l_n$  - магнитные напряжения участков цепи.

**Магнитным сопротивлением участка магнитной цепи называется отношение магнитного напряжения рассматриваемого участка к магнитному потоку в этом участке**

$$R_M = \frac{Hl}{\Phi} = \frac{Hl}{H\mu_a S} = \frac{l}{\mu_a S},$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения участка магнитной цепи,  
 $l$  - длина участка.

Рассмотрим расчет магнитной цепи, изображенной на рисунке 10.2.

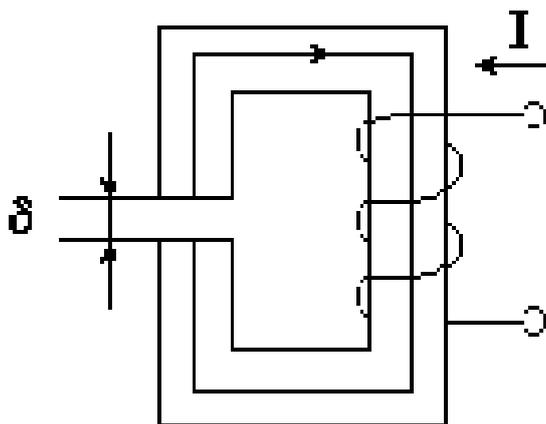


Рисунок 10.2

Ферромагнитный магнитопровод имеет одинаковую площадь поперечного сечения  $S$ .

$l_{CP}$  - длина средней силовой линии магнитного поля в магнитопроводе;

$\delta$  - толщина воздушного зазора.

На магнитопроводе размещена обмотка, по которой протекает ток  $I$ .

Прямая задача расчета магнитной цепи заключается в том, что задан магнитный поток  $\Phi$  и требуется определить магнитодвижущую силу  $F$ .

Определим магнитную индукцию в магнитопроводе

$$B = \frac{\Phi}{S}.$$

По кривой намагничивания найдем значение напряженности магнитного поля  $H$ , соответствующее величине  $B$ .

Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_1 = \frac{B}{\mu_a} = \frac{B}{4\pi \cdot 10^{-7}}.$$

Магнитодвижущая сила обмотки

$$F = Hl_{CP} + H_1\delta.$$

При обратной задаче расчета магнитной цепи по заданному значению магнитодвижущей силы требуется определить магнитный поток.

Расчет такой задачи выполняется с помощью магнитной характеристики цепи  $F = f(\Phi)$ .

Для построения такой характеристики необходимо задаться несколькими значениями  $\Phi$  и найти соответствующие значения  $F$ .

С помощью магнитной характеристики по заданной магнитодвижущей силе определяется магнитный поток.

# Лекция 11

## Трансформаторы

### Конструкция трансформатора

**Трансформатор представляет собой электромагнитный *аппарат*, предназначенный для преобразования величин токов и напряжений без изменения частоты.**

Трансформатор состоит из замкнутого ферромагнитного сердечника, на котором размещены две или большее число обмоток.

Обмотка, подключенная к источнику энергии, называется **первичной**.

Обмотки, подключенные к сопротивлениям нагрузки, называются **вторичными**.

**Сердечник** (магнитопровод) трансформатора изготавливают из листовой электротехнической стали, имеющей малые потери на перемагничивание и на вихревые токи.

Отдельные листы стали изолируют слоем лака, после чего стягивают болтами.

Такое устройство применяется для уменьшения вихревых токов, индуктируемых в стали переменным потоком.

По конструкции сердечника различают два типа трансформатора: **броневые и стержневые**.

На рисунке 11.1 изображен **броневой** трансформатор, или трансформатор с **Ш**-образным сердечником, а на рисунке 11.2 - **стержневой** трансформатор с **П**-образным сердечником.

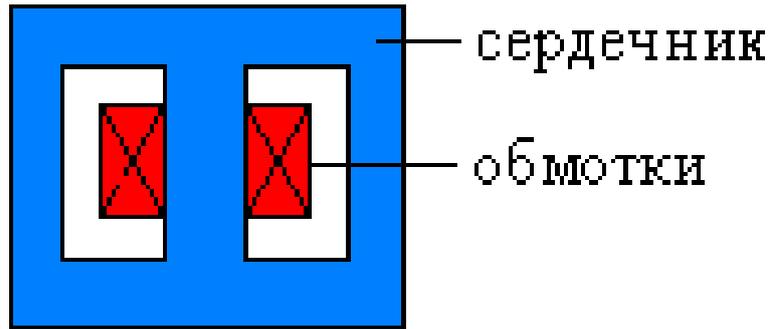


Рисунок 11.1

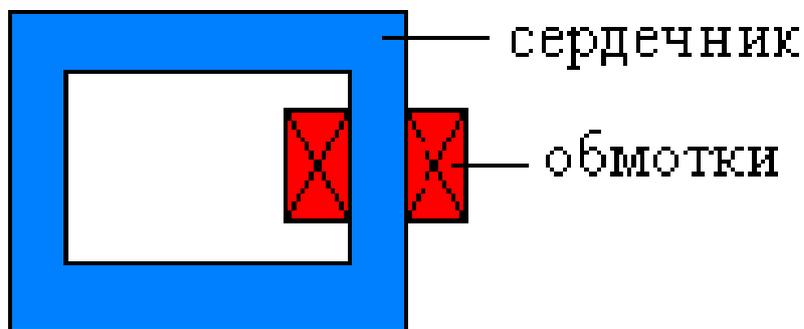


Рисунок 11.2

### Работа трансформатора в режиме холостого хода

**Под холостым ходом трансформатора понимается режим его работы при разомкнутой вторичной обмотке.**

Первичная обмотка трансформатора подключена к источнику переменного напряжения.

Ток  $i_{1x}$  первичной обмотки создает переменное магнитное поле, намагничивающее сердечник трансформатора.

Магнитный поток в трансформаторе разделим на две части: основной магнитный поток  $\Phi$ , замыкающийся в сердечнике, и поток рассеяния  $\Phi_{1s}$ , замыкающийся частично по воздуху.

На рисунке 11.3 изображен трансформатор, работающий в режиме холостого хода.

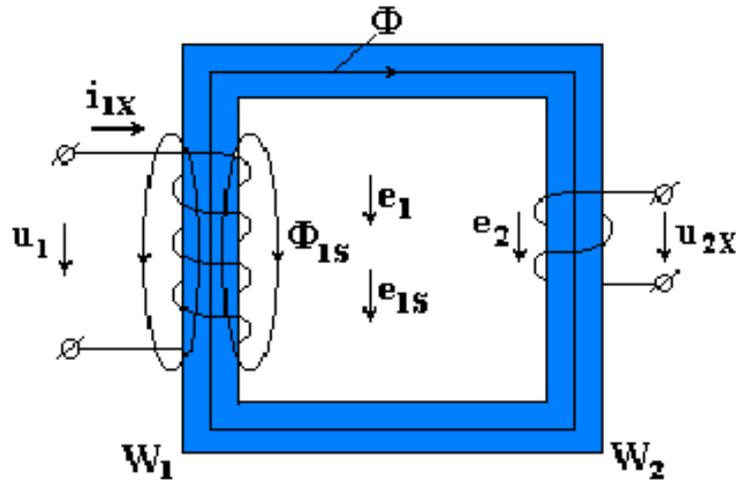


Рисунок 11.3

$W_1$  - число витков первичной обмотки;

$W_2$  - число витков вторичной обмотки;

$R_1$  - активное сопротивление первичной обмотки.

Определим ЭДС, индуцированную в первичной обмотке трансформатора основным магнитным потоком.

$$e_1 = W_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Основной магнитный поток изменяется по синусоидальному закону

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t,$$

где  $\Phi_m$  - максимальное или амплитудное значение основного магнитного потока;

Мгновенное значение ЭДС

$$e_1 = -W_1 \omega \Phi_m \cos \omega t = W_1 \omega \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Максимальное значение

$$E_{1m} = W_1 \omega \Phi_m = 2\pi f W_1 \Phi_m.$$

Действующее значение ЭДС в первичной обмотке

$$E_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi f W_1 \Phi_m = 4.44 f W_1 \Phi_m.$$

Для вторичной обмотки можно получить аналогичную формулу

$$E_2 = 4.44 f W_2 \Phi_m.$$

**Электродвижущие силы  $E_1$  и  $E_2$ , индуцированные в обмотках трансформатора основным магнитным потоком, называются трансформаторными ЭДС.**

Трансформаторные ЭДС отстают по фазе от основного магнитного потока на  $90^\circ$ .

Магнитный поток рассеяния индуцирует в первичной обмотке ЭДС рассеяния

$$e_{1s} = -L_{1s} \frac{di_{1X}}{dt}$$

где  $L_{1s}$  - индуктивность рассеяния в первичной обмотке.

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для первичной обмотки

$$e_1 + e_{1s} = i_{1X} R_1 - u_1, \quad (11.1)$$

откуда

$$u_1 = i_{1X} R_1 - e_1 - e_{1s} = i_{1X} R_1 - e_1 + L_{1s} \frac{di_{1X}}{dt}.$$

Напряжение на первичной катушке имеет три слагаемых: падение напряжения, напряжение, уравнивающее трансформаторную ЭДС, напряжение, уравнивающее ЭДС рассеяния.

Запишем уравнение (11.1) в комплексной форме

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{1X} R_1 - \dot{E}_1 + j\omega L_{1s} \dot{I}_{1X} = \dot{I}_{1X} R_1 - \dot{E}_1 + jX_{1s} \dot{I}_{1X}, \quad (11.2)$$

где  $X_{1s} = \omega L_{1s}$  - индуктивное сопротивление рассеяния первичной обмотки.

На рисунке 11.4 изображена векторная диаграмма трансформатора, работающего в режиме холостого хода.

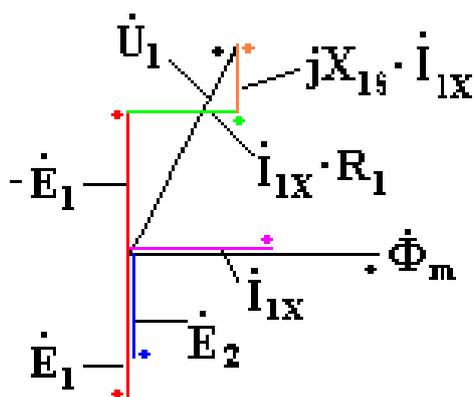


Рисунок 11.4

Векторы трансформаторных ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  отстают на  $90^\circ$  от вектора основного магнитного потока  $\Phi_m$ . Вектор напряжения  $\dot{I}_{1X} R_1$  параллелен вектору тока  $\dot{I}_{1X}$ , а вектор  $jX_{1s} \dot{I}_{1X}$  опережает вектор тока на  $90^\circ$ . Вектор  $\dot{U}_1$  напряжения на зажимах первичной обмотки трансформатора равен геометрической сумме векторов  $-\dot{E}_1$ ,  $\dot{I}_{1X} R_1$ ,  $jX_{1s} \dot{I}_{1X}$ .

На рисунке 11.5 изображена схема замещения трансформатора, соответствующая уравнению (11.2)

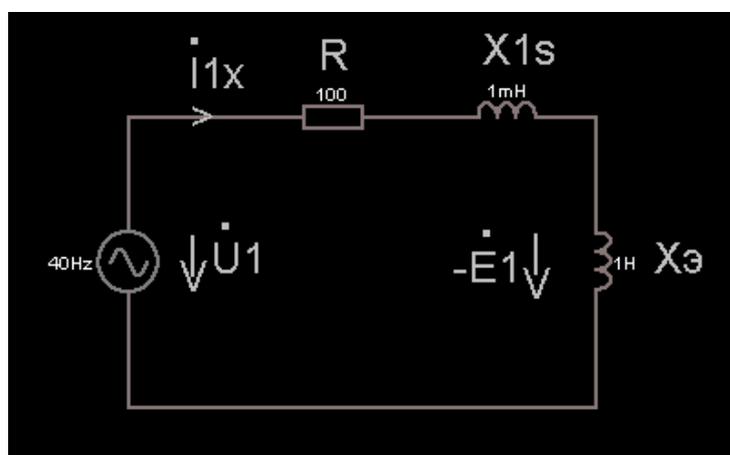


Рисунок 11.5

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 128 320 128 160 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 128 160 192 160 0
r 192 160 288 160 0 100.0
l 288 160 384 160 0 0.0010 0.0
l 384 160 384 320 0 1.0 0.0
w 384 320 128 320 0
x 307 252 344 258 0 24 -E1
x 319 227 330 236 0 40 .
x 345 261 360 267 0 24 V
x 417 247 444 253 0 24 Xэ
x 323 132 363 138 0 24 X1s
x 233 135 250 141 0 24 R
x 162 145 192 151 0 24 I1x
x 163 169 177 175 0 24 >
x 159 121 170 130 0 40 .
x 174 247 204 253 0 24 U1
x 161 243 167 249 0 24 |
x 157 257 172 263 0 24 V
x 176 223 187 232 0 40 .
x 349 242 355 248 0 24 |

```

$X_9$  - индуктивное сопротивление, пропорциональное реактивной мощности, затрачиваемой на создание основного магнитного потока.

В режиме холостого хода

$$U_{2X} = E_2, \quad U_1 \approx E_1.$$

Коэффициент трансформации

$$K_T = \frac{E_1}{E_2} = \frac{W_1}{W_2} \approx \frac{U_1}{U_{2X}}.$$

Коэффициент трансформации экспериментально определяется из опыта холостого хода.

### **Работа трансформатора под нагрузкой**

Если к первичной обмотке трансформатора подключить напряжение  $U_1$ , а вторичную обмотку соединить с нагрузкой, в обмотках появятся токи  $I_1$  и  $I_2$ .

Эти токи создадут магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , направленные навстречу друг другу.

### **Суммарный магнитный поток в магнитопроводе уменьшается.**

Вследствие этого индуцированные суммарным потоком ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  уменьшаются.

Действующее значение напряжения  $U_1$  остается неизменным.

Уменьшение  $E_1$ , согласно (11.2), вызывает увеличение тока  $I_1$ .

При увеличении тока  $I_1$  поток  $\Phi_1$  увеличивается ровно настолько, чтобы скомпенсировать размагничивающее действие потока  $\Phi_2$ .

### **Вновь восстанавливается равновесие при практически прежнем значении суммарного потока.**

В нагруженном трансформаторе, кроме основного магнитного потока,

$$\dot{E}_{1S} = -jX_{1S}\dot{I}_1,$$

имеются потоки рассеяния  $\Phi_{1S}$  и  $\Phi_{2S}$ , замыкающиеся частично по воздуху. Эти потоки индуцируют в первичной и вторичной обмотках ЭДС рассеяния.

$$\dot{E}_{2S} = -jX_{2S}\dot{I}_2,$$

где  $X_{2S}$  - индуктивное сопротивление рассеяния вторичной обмотки.

Для первичной обмотки можно записать уравнение

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + R_1\dot{I}_1 + jX_{1S}\dot{I}_1. \quad (11.3)$$

Для вторичной обмотки

$$\dot{E}_2 = \dot{I}_2 R_2 + jX_{2S}\dot{I}_2 + \dot{I}_2 Z_H, \quad (11.4)$$

где  $R_2$  - активное сопротивление вторичной обмотки;

$Z_H$  - сопротивление нагрузки.

Основной магнитный поток трансформатора есть результат совместного действия магнитодвижущих сил первичной и вторичной обмоток.

$$\Phi_m = f(i_1 W_1 + i_2 W_2)$$

Трансформаторная ЭДС  $E_1$ , пропорциональная основному магнитному потоку, приблизительно равна напряжению на первичной катушке  $U_1$ .

Действующее значение напряжения постоянно.

Поэтому основной магнитный поток трансформатора остается неизменным при изменении сопротивления нагрузки от нуля до бесконечности.

Если,  $\Phi_m = const$  то и сумма магнитодвижущих сил трансформатора

$$i_1 W_1 + i_2 W_2 = const = I_{1X} W_1. \quad (11.5)$$

**Уравнение (11.5) называется уравнением равновесия магнитодвижущих сил.**

**Уравнения (11.3), (11.4), (11.5) называются основными уравнениями трансформатора.**

Из (11.5) получим выражение

$$i_1 = I_{1X} - i_2 \frac{W_2}{W_1} = I_{1X} - i_2 \frac{1}{K_T}. \quad (11.6)$$

**Согласно (11.6), ток в первичной обмотке складывается из тока холостого хода, или намагничивающего тока, и тока, компенсирующего размагничивающее действие вторичной обмотки.**

Умножим левую и правую части уравнения (11.4) на коэффициент трансформации  $K_T$

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 K_T = \dot{E}_1 &= K_T \dot{I}_2 R_2 + j K_T X_{2S} \dot{I}_2 + K_T \dot{I}_2 Z_H = \\ &= K_T^2 R_2 \frac{\dot{I}_2}{K_T} + j K_T^2 X_{2S} \frac{\dot{I}_2}{K_T} + K_T^2 Z_H \frac{\dot{I}_2}{K_T} = R_2' \frac{\dot{I}_2}{K_T} + j X_{2S}' \frac{\dot{I}_2}{K_T} + Z_H' \frac{\dot{I}_2}{K_T}, \end{aligned} \quad (11.7)$$

где  $R_2' = K_T^2 R_2$  - приведенное активное сопротивление вторичной обмотки;

$X_{2S}' = K_T^2 X_{2S}$  - приведенное индуктивное сопротивление вторичной обмотки;

$$U_2' = K_T \dot{I}_2 Z_H = K_T \dot{U}_2 - \text{приведенное напряжение на нагрузке};$$

$Z'_H = K_T^2 Z_H$  - приведенное сопротивление нагрузки.

Величиной намагничивающего тока можно пренебречь, так как она мала по сравнению с током первичной обмотки трансформатора в нагрузочном режиме  $I_{1X} \approx 0$ , тогда  $\dot{I}_1 = -\frac{1}{K_T} \dot{I}_2$

Подставим уравнение (11.7) в уравнение (11.3). Получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -\frac{\dot{I}_2}{K_T} R_2' - j \frac{\dot{I}_2}{K_T} X_{2S}' - \frac{\dot{I}_2}{K_T} Z_H' + \dot{I}_1 R_1 + j X_{1S} \dot{I}_1 = \\ &= \dot{I}_1 R_2' + j \dot{I}_1 X_{2S}' + \dot{U}_2' + \dot{I}_1 R_1 + j X_{1S} \dot{I}_1 = \dot{I}_1 (R_1 + R_2') + \dot{I}_1 j (X_{1S} + X_{2S}') + \dot{U}_2' \end{aligned} \quad (11.8)$$

Уравнению (11.8) соответствует упрощенная схема замещения трансформатора, изображенная на рисунке 11.6.

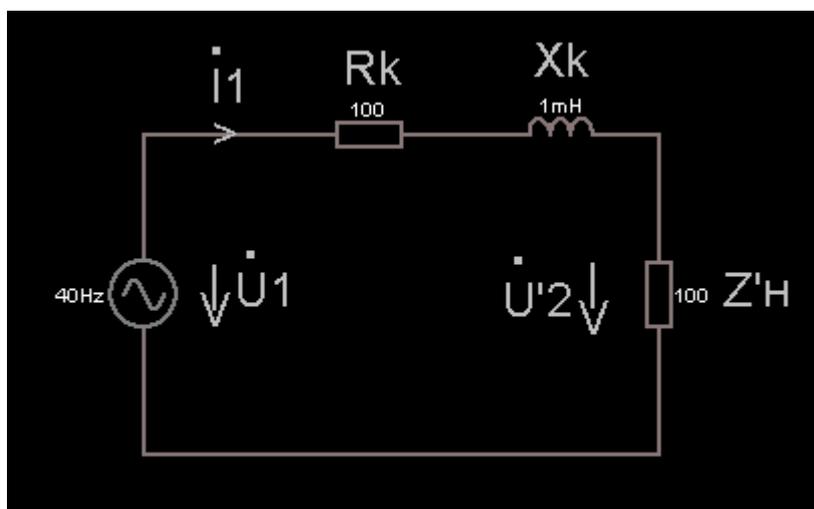


Рисунок 11.6

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 128 320 128 160 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 128 160 192 160 0
r 192 160 288 160 0 100.0
l 288 160 384 160 0 0.0010 0.0
w 384 320 128 320 0
x 307 252 342 258 0 24 U'2
x 309 226 320 235 0 40 .
x 345 261 360 267 0 24 V
x 417 247 450 253 0 24 Z'H
x 323 132 350 138 0 24 Xk
x 228 136 257 142 0 24 Rk
x 162 145 181 151 0 24 I1
x 163 169 177 175 0 24 >
x 159 121 170 130 0 40 .
x 174 247 204 253 0 24 U1
x 161 243 167 249 0 24 |
x 157 257 172 263 0 24 V

```

```
x 176 223 187 232 0 40 .
x 349 242 355 248 0 24 |
r 384 160 384 320 0 100.0
```

$R_k = R_1 + R_2' = R_1 + R_2 K_T^2$  - активное сопротивление короткого замыкания трансформатора,

$X_k = X_{1S} + X_{2S}' = X_{1S} + X_{2S} K_T^2$  - индуктивное сопротивление короткого замыкания.

Параметры упрощенной схемы замещения определяются из опыта короткого замыкания. Для этого собирается схема рисунке 11.7.

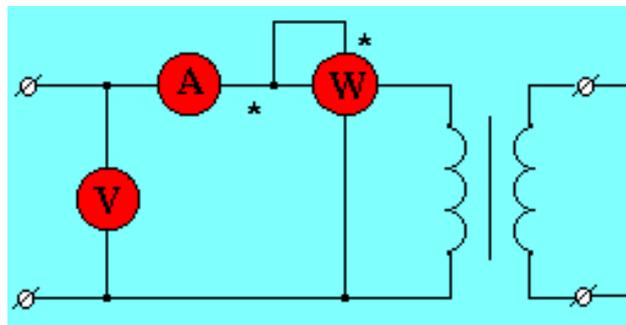


Рисунок 11.7

Зажимы вторичной обмотки замыкаются накоротко.

Измеряют напряжение, ток и мощность:  $U_{1K}$ ,  $I_{1K}$ ,  $P_K$ . **Опыт короткого замыкания осуществляется при пониженном напряжении на первичной обмотке.**

Затем вычисляют

$$R_k = \frac{P_K}{I_{1K}^2}, \quad Z_k = \frac{U_{1K}}{I_{1K}}, \quad X_k = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2},$$

где  $Z_k$  - полное сопротивление короткого замыкания.

На рисунке 11.8 изображена векторная диаграмма трансформатора, соответствующая упрощенной схеме замещения.

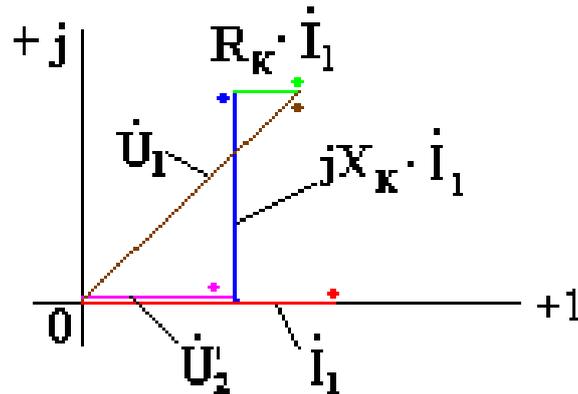


Рисунок 11.8

Нагрузкой трансформатора является активное сопротивление  $R_H$ .

Вектор тока совмещен с вещественной осью комплексной плоскости.

Вектор напряжения на сопротивлении нагрузки совпадает с вектором тока по направлению.

Вектор напряжения на индуктивном сопротивлении  $jX_k \dot{I}_1$  перпендикулярен, а вектор напряжения  $R_k \dot{I}_1$  параллелен вектору тока.

Вектор напряжения на входе трансформатора равен сумме трех векторов напряжения.

Упрощенная схема используется для расчета цепей, содержащих трансформаторы.

## Специальные типы трансформаторов

Наиболее часто в электротехнических установках используются следующие специальные типы трансформаторов: **автотрансформаторы, многообмоточные и трехфазные трансформаторы.**

**Автотрансформатором** называется такой трансформатор, у которого имеется только одна обмотка, часть которой принадлежит одновременно вторичной и первичной цепям.

Схема однофазного автотрансформатора изображена на рисунке 11.9.

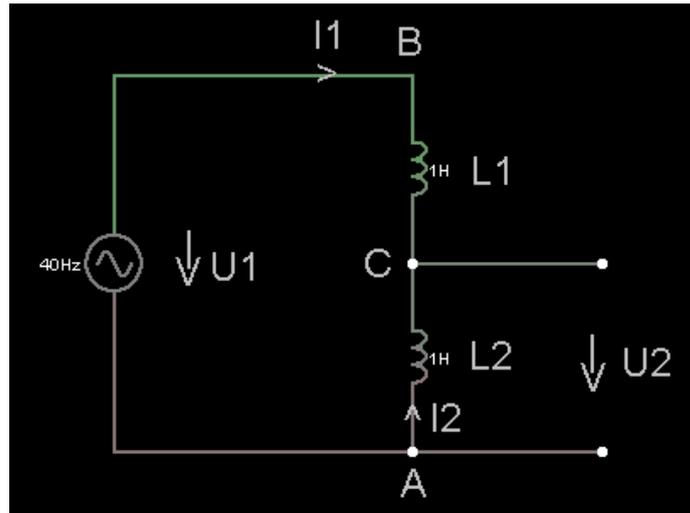


Рисунок 11.9

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 160 336 160 112 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 160 112 336 112 0
l 336 112 336 224 0 1.0 0.0
l 336 224 336 336 0 1.0 0.0
w 336 336 160 336 0
w 336 224 448 224 0
w 336 336 448 336 0
x 202 222 208 228 0 24 |
x 197 238 212 244 0 24 V
x 217 235 247 241 0 24 U1
x 327 101 343 107 0 24 B
x 308 233 325 239 0 24 C
x 330 364 345 370 0 24 A
x 436 301 451 307 0 24 V
x 460 292 490 298 0 24 U2
x 440 284 446 290 0 24 |
x 331 326 343 332 0 24 ^
x 370 288 396 294 0 24 L2
x 347 325 366 331 0 24 I2
x 278 97 297 103 0 24 I1
x 280 120 294 126 0 24 >
x 371 178 397 184 0 24 L1

```



Рисунок 11.10

На рисунке 11.10 приведены осциллограммы напряжений и токов в автотрансформаторе.

Режим холостого хода автотрансформатора, когда  $I_2 = 0$  ничем не отличается от режима холостого хода обычного трансформатора.

Подводимое к трансформатору напряжение  $U_1 = U_{AB}$  равномерно распределяется между витками первичной обмотки.

Вторичное напряжение

$$U_2 = U_{AC} = U_{AB} \frac{W_{AC}}{W_{AB}} = \frac{U_{AB}}{K_T},$$

где  $K_T = \frac{W_{AC}}{W_{AB}}$  - коэффициент трансформации.

Автотрансформаторы выгодно использовать в тех случаях, когда коэффициент трансформации близок к единице.

Многообмоточные (одна первичная и несколько вторичных) трансформаторы используются в радиотехнических схемах для получения нескольких напряжений.

В режиме холостого хода работа таких трансформаторов не отличается от двухобмоточных.

В трехфазной сети переменного тока преобразование напряжений осуществляется с помощью трехфазного трансформатора с общим для трех фаз сердечником.

В трехфазном трансформаторе с общим магнитопроводом магнитный поток любой из фаз может замыкаться через стержни, на которых расположены обмотки двух других фаз.

Затраты стали на трехфазный трансформатор значительно меньше, чем на три однофазных трансформатора.

## Моделирование работы трансформатора

Воспользуемся упрощенной моделью трансформатора в программе Circuit Simulator. Схема цепи приведена на рисунке 11.11.

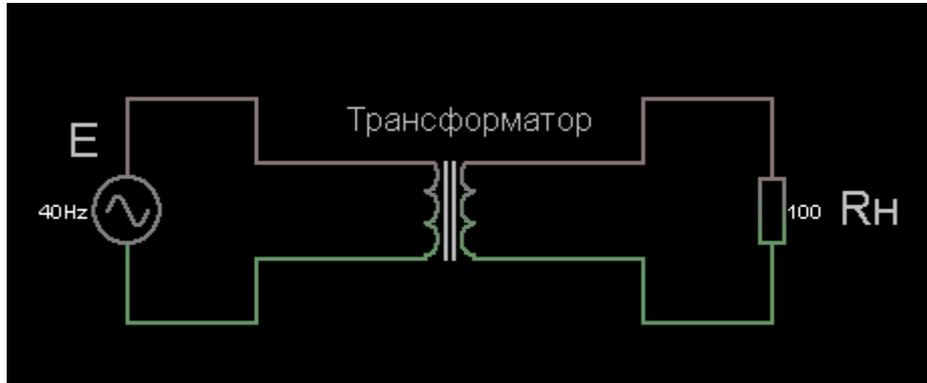


Рисунок 11.11

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 176 160 176 288 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 284 154 393 158 0 15 Трансформатор
x 136 198 152 204 0 24 E
r 496 160 496 288 0 100.0
T 256 192 416 240 0 10.0 1.0 0.009366126023979411 -0.013257772837145144
0.999
w 256 192 256 160 0
w 256 160 176 160 0
w 176 288 256 288 0
w 256 288 256 240 0
w 416 192 416 160 0
w 416 240 416 288 0
w 416 160 496 160 0
w 416 288 496 288 0
x 511 198 542 204 0 24 Rn
o 0 64 0 35 9.353610478917778 0.09353610478917779 0 -1
o 0 64 0 35 5.0 0.1 1 -1
o 3 64 0 35 5.0 0.1 2 -1

```

На рисунке 11.12 приведены осциллограммы напряжений и токов в первичной обмотке и нагрузочном сопротивлении.

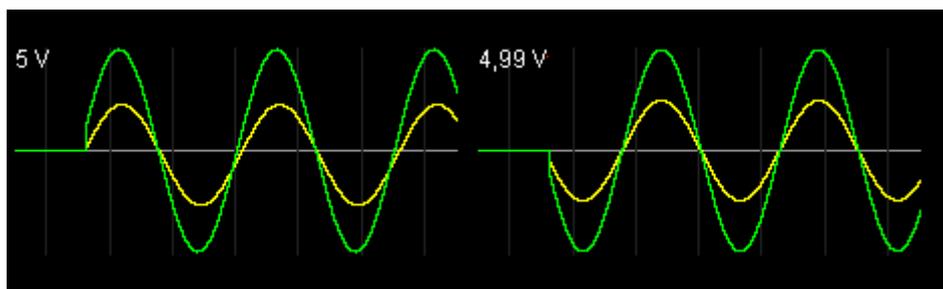


Рисунок 11.12

Модель трансформатора модель позволяет изменять параметры:

- Индуктивность первичной обмотки;
- Коэффициент трансформации;
- Коэффициент связи между обмотками.

Варьируя эти параметры можно провести серию исследований.

Кроме этой модели трансформатора, существует модель с отводом от средней части вторичной обмотки (Рисунок 11.13)

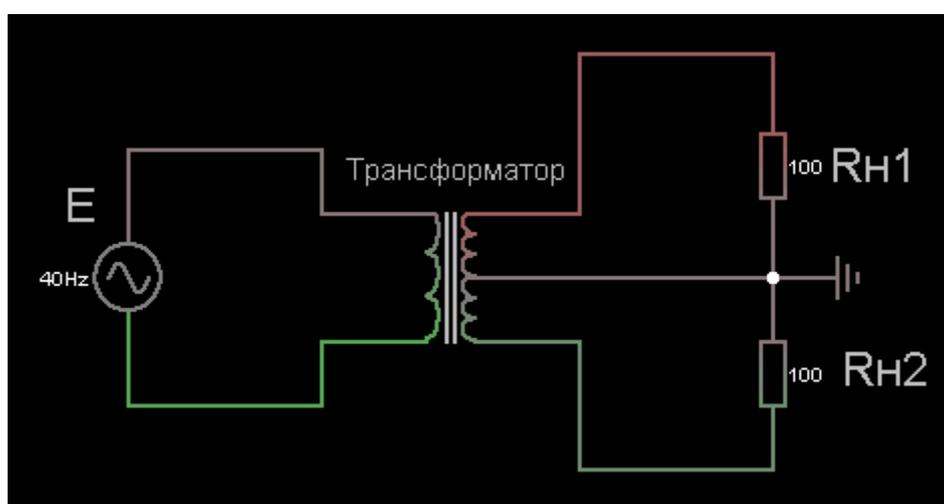


Рисунок 11.13

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
169 224 192 352 192 0 4.0 1.0 -0.029163328179555935 0.021059915102762766
0.021059915102762766
v 128 160 128 288 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 128 160 224 160 0
w 224 160 224 192 0
w 128 288 224 288 0
w 224 288 224 256 0
w 352 224 448 224 0
r 448 224 448 112 0 100.0
r 448 224 448 320 0 100.0
w 448 320 352 320 0
w 352 320 352 256 0
w 352 192 352 112 0
w 352 112 448 112 0
x 237 176 346 180 0 15 Трансформатор
x 97 197 113 203 0 24 E
x 477 177 520 183 0 24 RH1
x 483 279 526 285 0 24 RH2
g 448 224 480 224 0
o 1 64 0 34 9.353610478917778 0.023384026197294447 0 -1
o 7 64 0 34 5.0 0.0125 0 -1
o 8 64 0 35 4.374501449566024 0.04374501449566024 0 -1

```

Осциллограммы напряжений в первичной обмотке и нагрузках представлены на рисунке 11.14.

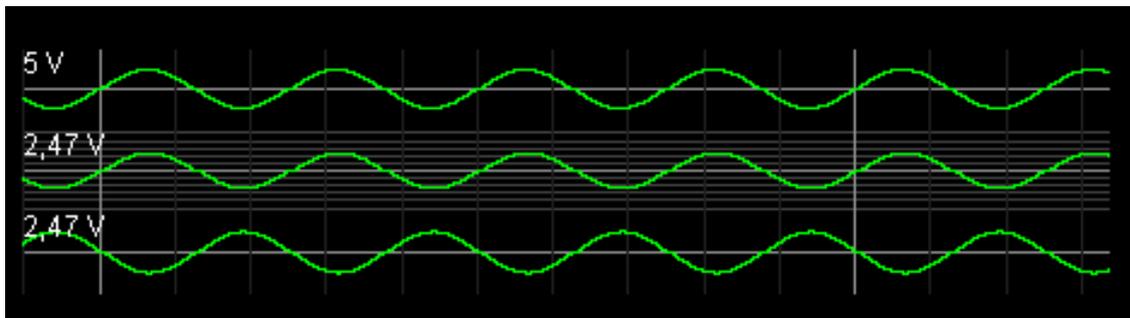


Рисунок 11.14

Необходимо обратить внимание на то, что напряжения частей вторичной обмотки находятся в противофазе.

# Лекция 12

## Четырехполюсники

### Определение и основные положения

Четырехполюсник – это обобщенное понятие электрической цепи, рассматриваемой по отношению к четырем ее зажимам.

К четырехполюсникам относятся трансформаторы, линии передачи энергии, мостовые схемы и многое другое.

Принято изображать четырехполюсник в виде прямоугольника с выходящими из него концами (полюсами)  $mn$  и  $pq$  (Рисунок 12.1). Если четырехполюсник содержит источник электрической энергии, то в прямоугольнике ставят букву **A** (активный); при отсутствии буквы четырехполюсник считается пассивным.

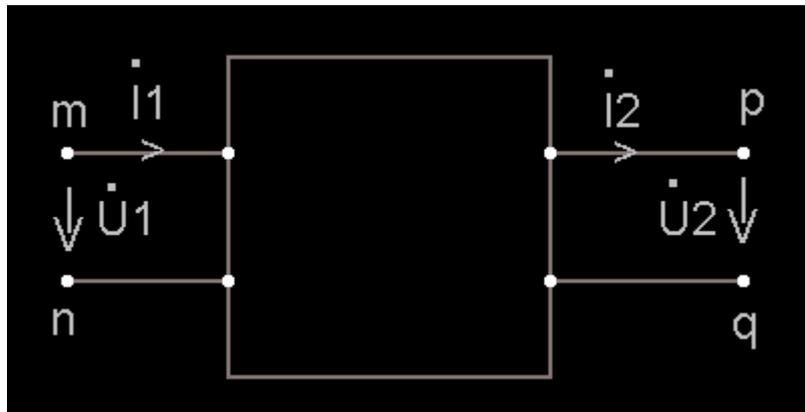


Рисунок 12.1

На практике четырехполюсник обычно работает в режиме, когда одна пара зажимов, например  $mn$ , является входной, а другая пара, например  $pq$ , - выходной.

Четырехполюсник, у которого рабочими являются две пары зажимов, называют **проходным**.

Ток  $i_1$  - входной ток,  $i_2$  - выходной ток,  $U_1$  - входное напряжение,  $U_2$  - выходное напряжение

Четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания и нагрузкой. К входным зажимам, как правило, подключается источник питания (генератор), к выходным зажимам подключается нагрузка.

Предполагается, что нагрузка и напряжение на входе при работе четырехполюсника в качестве связующего звена могут изменяться, но схема внутренних соединений четырехполюсника и элементы в ней остаются неизменными.

### **Формы уравнений четырехполюсника**

Четырехполюсник характеризуется двумя парами напряжений и токов. Любые две величины из четырех можно определить через остальные. Возможно шесть форм записи уравнений пассивного четырехполюсника:

A-форма

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.\end{aligned}$$

Y-форма

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Z-форма

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.\end{aligned}$$

H-форма

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

G-форма

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2. \end{aligned}$$

B-форма

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1, \\ \dot{I}_2 &= B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1. \end{aligned}$$

Исторически сложилось так, что для A-формы положительные направления для токов и напряжений соответствуют рис.12.1. Для Y-, Z-, H-, G-форм соответствуют рисунку 12.2. B-форме – рисунку 12.3.

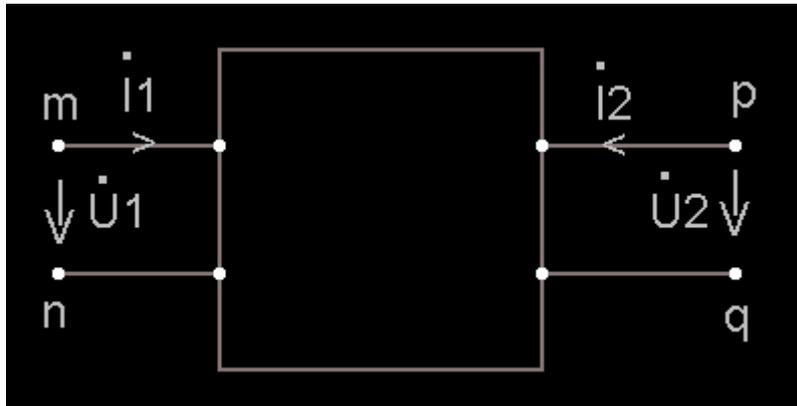


Рисунок 12.2

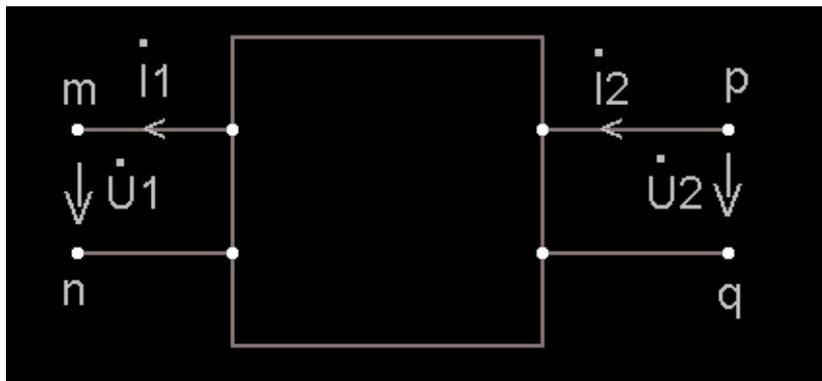


Рисунок 12.3

## Вывод уравнений в А-форме

Комплексные коэффициенты  $A, B, C, D$  зависят от схемы внутренних соединений четырехполюсника, значений сопротивлений схемы и частоты. Для каждого четырехполюсника их можно определить расчетным или экспериментальным путем. Для четырехполюсников, удовлетворяющих **условию взаимности**, коэффициенты связаны соотношением

$$AD - BC = 1.$$

Для вывода уравнений в А-форме ко входным зажимам подключим источник ЭДС  $\dot{E} = \dot{U}_{mn} = \dot{U}_1$ , а к выходным зажимам подключим нагрузку  $Z_2$ .

Напряжение на нагрузке

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \dot{U}_{pq}.$$

Согласно теореме компенсации заменим нагрузку  $Z_2$  источником ЭДС  $E_2 = U_2$  и направленной встречно току  $\dot{I}_2$ . Запишем выражения для токов через ЭДС и взаимные проводимости ветвей

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{E}_1 y_{11} - \dot{E}_2 y_{12}, \\ \dot{I}_2 &= \dot{E}_1 y_{21} - \dot{E}_2 y_{22}. \end{aligned}$$

Если токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  рассматривать как контурные, то ЭДС контуров, совпадающие с направлением контурных токов, войдут в уравнения со знаком плюс, а не совпадающие со знаком минус. Соответственно получим

$$(+\dot{E}_1) \text{ и } (-\dot{E}_2).$$

Для линейных четырехполюсников, не содержащих нелинейных элементов (для взаимных четырехполюсников), согласно принципу взаимности  $y_{12} = y_{21}$ .

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{22}}{y_{21}} + \dot{I}_2 \frac{1}{y_{21}}.$$

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{21}} + \dot{I}_2 \frac{y_{11}}{y_{21}}.$$

Обозначим

$$A = \frac{y_{22}}{y_{21}}, \quad B = \frac{1}{y_{21}}, \quad C = \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{21}}, \quad D = \frac{y_{11}}{y_{21}}.$$

Заменяем ЭДС на напряжения и получим уравнения в А-форме

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{aligned}$$

Выполним проверку

$$AD - BC = \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}^2} - \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{21}^2} = 1$$

Четырехполюсник называют **симметричным**, если при перемене местами источника питания и нагрузки токи в источнике питания и нагрузке не изменяются. В симметричном четырехполюснике  $A = D$ . Пример симметричного четырехполюсника приведен на рисунке 12.4.

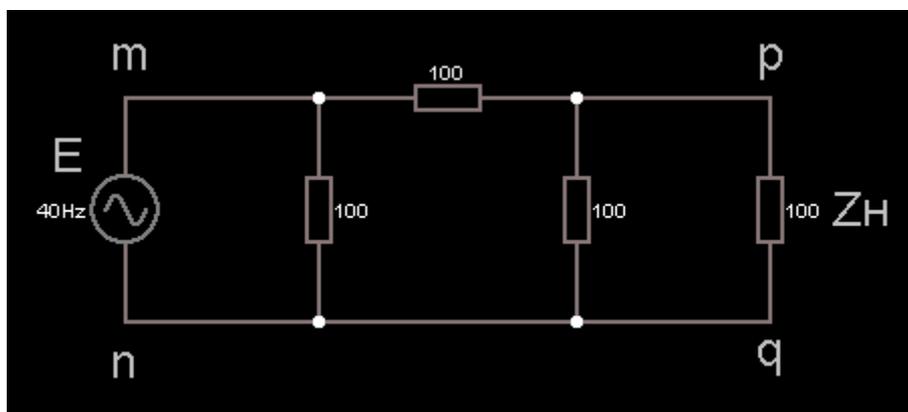


Рисунок 12.4

```

$ 1 9.92E-6 9.78399845368213 82 7.0 50
r 240 128 240 240 0 100.0
r 240 128 368 128 0 100.0
r 368 128 368 240 0 100.0
w 240 240 368 240 0
w 368 128 464 128 0
w 368 240 464 240 0
w 240 128 144 128 0
w 240 240 144 240 0
r 464 128 464 240 0 100.0
x 496 193 524 199 0 24 ZH
x 458 263 472 269 0 24 q

```

```

x 458 115 472 121 0 24 p
x 137 115 157 121 0 24 m
x 137 269 151 275 0 24 n
x 108 166 124 172 0 24 E
v 144 240 144 128 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5

```

Комплексные коэффициенты  $A, B, C, D$  можно определить расчетным путем по выражениям, приведенным выше, если известна схема внутренних соединений и параметры.

Для определения этих коэффициентов опытным путем необходимо провести измерения комплексных сопротивлений в трех режимах работы.

При питании со стороны зажимов  $mn$  и разомкнутой ветви  $pq$ . ( $\dot{I}_2 = 0$ ), индекс  $x$ .

$$Z_{1-x} = \frac{\dot{U}_{1-x}}{\dot{I}_{1-x}} = \frac{A}{C}.$$

При питании со стороны зажимов  $mn$  и коротком замыкании ветви  $pq$  ( $\dot{U}_2 = 0$ ), индекс  $k3$ .

$$Z_{1-k3} = \frac{\dot{U}_{1-k3}}{\dot{I}_{1-k3}} = \frac{B}{D}.$$

При питании со стороны зажимов  $pq$  и коротком замыкании зажимов  $mn$  ( $\dot{U}_1 = 0$ ).

$$Z_{2-k3} = \frac{B}{A}.$$

Проделав ряд преобразований, получим

$$A = \sqrt{\frac{Z_{1-x}}{Z_{2-k3}(Z_{1-x} - Z_{1-k3})}}.$$

### **T- и II-схемы замещения пассивного четырехполюсника**

Функции пассивного взаимного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой может

выполнять Т-схема (Рисунок 12.5) или эквивалентная ей П-схема (Рисунок 12.6).

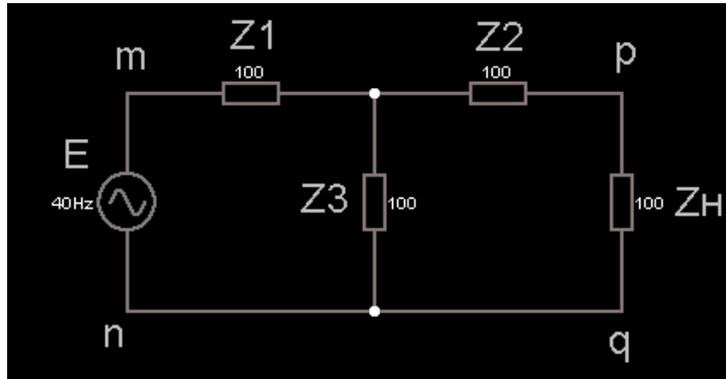


Рисунок 12.5

```

$ 1 9.92E-6 9.78399845368213 82 7.0 50
r 240 144 240 256 0 100.0
r 240 144 368 144 0 100.0
r 368 144 368 256 0 100.0
w 240 256 368 256 0
w 368 144 464 144 0
w 368 256 464 256 0
w 240 144 144 144 0
w 240 256 144 256 0
r 464 144 464 256 0 100.0
x 496 209 524 215 0 24 ZH
x 458 279 472 285 0 24 q
x 458 131 472 137 0 24 p
x 137 131 157 137 0 24 m
x 137 285 151 291 0 24 n
x 105 183 121 189 0 24 E
x 291 119 319 125 0 24 Z4
x 199 209 227 215 0 24 Z5
x 328 210 356 216 0 24 Z6
v 144 256 144 144 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5

```

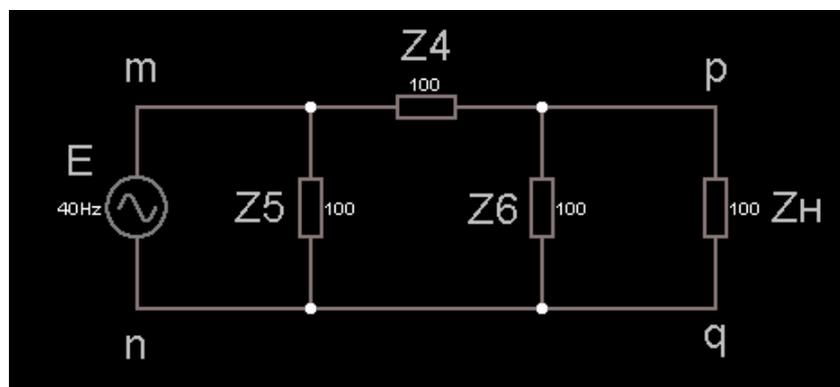


Рисунок 12.6

```

$ 1 9.92E-6 9.78399845368213 82 7.0 50
r 240 160 240 272 0 100.0
r 240 160 368 160 0 100.0
r 368 160 368 272 0 100.0
w 240 272 368 272 0
w 368 160 464 160 0
w 368 272 464 272 0
w 240 160 144 160 0
w 240 272 144 272 0
v 144 272 144 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
r 464 160 464 272 0 100.0
x 496 225 524 231 0 24 ZH
x 458 295 472 301 0 24 q
x 458 147 472 153 0 24 p
x 137 147 157 153 0 24 m
x 137 301 151 307 0 24 n
x 105 227 121 233 0 24 E
x 291 135 319 141 0 24 Z4
x 199 225 227 231 0 24 Z5
x 328 226 356 232 0 24 Z6

```

Для T-схемы:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}, \quad B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}, \quad C = \frac{1}{Z_3}, \quad D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}.$$

$$Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}, \quad Z_3 = \frac{1}{C}.$$

Для П-схемы:

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_6}, \quad B = Z_4, \quad C = \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{Z_5 Z_6}, \quad D = 1 + \frac{Z_4}{Z_5},$$

$$Z_4 = B, \quad Z_5 = \frac{B}{D-1}, \quad Z_6 = \frac{B}{A-1}.$$

Если четырехполюсник симметричный, то  $A = D$ , и в T-схеме замещения  $Z_1 = Z_2$ , а в П-схеме  $Z_5 = Z_6$ .

### Г-образный делитель напряжения

В качестве примера простого пассивного четырехполюсника рассмотрим широко используемый на практике Г-образный делитель напряжения (Рисунок 12.7)

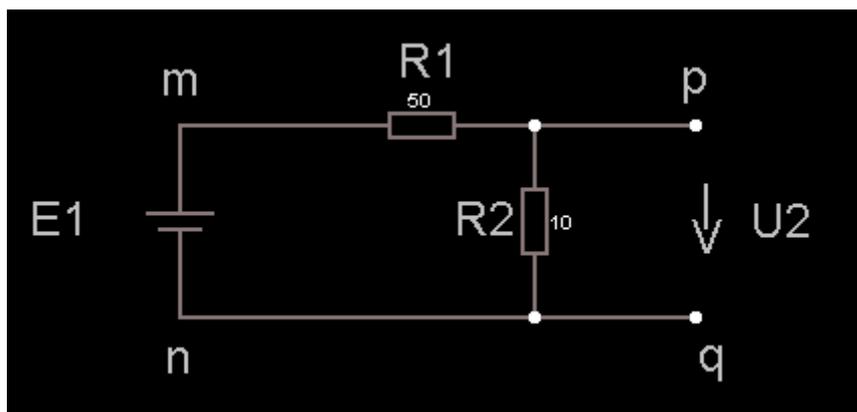


Рис. 12.7

```

$ 1 9.92E-6 9.78399845368213 82 7.0 50
r 224 160 336 160 0 50.0
r 336 160 336 256 0 10.0
w 336 256 160 256 0
w 224 160 160 160 0
w 336 160 416 160 0
w 336 256 416 256 0
v 160 256 160 160 0 0 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
x 409 145 423 151 0 24 p
x 151 146 171 152 0 24 m
x 153 285 167 291 0 24 n
x 269 137 299 143 0 24 R1
x 297 216 327 222 0 24 R2
x 444 217 474 223 0 24 U2
x 86 216 115 222 0 24 E1
x 418 284 432 290 0 24 q
x 419 207 425 213 0 24 |
x 415 225 430 231 0 24 v

```

Коэффициент передачи такой цепи определяется выражением

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Следовательно, выходное напряжение

$$U_2 = KE_1.$$

Для указанных на рисунке 12.7 значений сопротивлений коэффициент передачи  $K = \frac{10}{10+50} = \frac{1}{6}$ . При  $E_1 = 6B$ ,  $U_2 = 1B$ . Это подтверждает результат моделирования в правой нижней части рисунка 12.8.

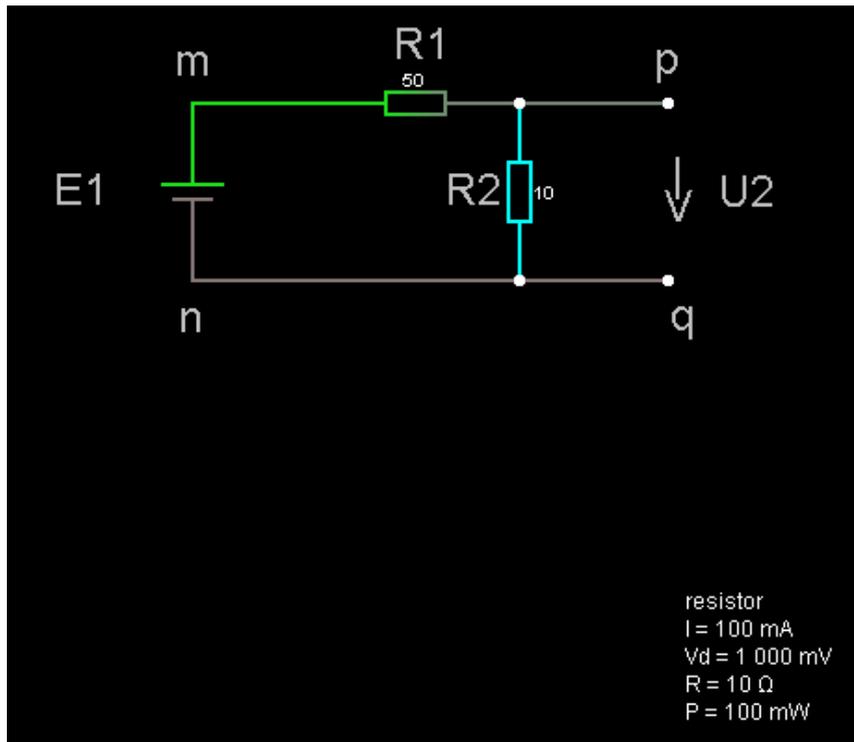


Рисунок 12.8

## Лекция 13

### Периодические сигналы несинусоидальной формы

#### Основные положения

Токи, напряжения и ЭДС, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону, называются **периодическими несинусоидальными**.

Причиной возникновения несинусоидальности ЭДС напряжений и токов в энергетике могут быть как синхронные генераторы (источники), так и приемники энергии, в схемах которых имеются нелинейные элементы. Причиной могут быть подключенные к электрическим цепям генераторы несинусоидальных напряжений определенной формы, например в виде широко применяемых в радиоэлектронике релаксационных генераторов, генераторов прямоугольной, пилообразной и др. форм.

Кроме этого в различных радиотехнических устройствах, персональных компьютерах, системах автоматики, обработки данных, устройствах автоматизированного управления широко используются генераторы периодических импульсов самой разнообразной формы.

Знание элементов теории несинусоидальных периодических токов необходимо для понимания принципа действия различных электронных и полупроводниковых устройств.

При анализе электрических цепей с несинусоидальными токами и напряжениями широко используется **теорема Фурье**, согласно которой любая периодически изменяющаяся величина может рассматриваться как сумма постоянной составляющей и ряда синусоидальных величин разной частоты.

#### Представление периодических несинусоидальных величин рядами Фурье

Любая периодическая функция  $f(\omega t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая за полный период конечное число разрывов

первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть представлена тригонометрическим рядом, т.е. рядом Фурье.

Токи, ЭДС и напряжения в цепях всегда удовлетворяют условиям Дирихле.

Представим  $f(\omega t)$  в виде тригонометрического ряда

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

или

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad (13.1)$$

где  $A_0$  - постоянная составляющая или нулевая гармоника, равная среднему значению функции за период;

$A_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$  - первая гармоника, обладающая той же частотой, что и периодическая несинусоидальная функция;

$A_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2)$  - вторая гармоника;

$A_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n)$  - высшая гармоника порядка  $n$ .

$A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{nm}$  - амплитуды гармоник;

$\omega t = \frac{2\pi}{T}$  - основная частота;

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  - начальные фазы гармоник.

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов. На практике обычно ограничиваются некоторым конечным числом, определяемым требуемой точностью расчета. Чаще всего ограничиваются той гармоникой ряда, амплитуда которой составляет менее 5% от амплитуды основной гармоники.

Для вычисления постоянной составляющей, амплитуд гармоник и их начальных фаз ряда Фурье кривой, полученной экспериментальным путем, целесообразно записать через синусы или косинусы без начальных фаз, т.е. раскрыв синусы сумм ряда.

Рассмотрим гармонику ряда с номером  $k$  :

$$A_k \sin(k\omega t) + \varphi_k = A_{km} \sin k\omega t \cos \varphi_k + A_{km} \cos k\omega t \sin \varphi_k = B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t, \quad (13.2)$$

где  $B_{km} = A_{km} \cos \varphi_k$ ,  $C_{km} = A_{km} \sin \varphi_k$ .

Таким образом, ряд Фурье можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + B_{1m} \sin \omega t + B_{2m} \sin 2\omega t + \dots + B_{nm} \sin n\omega t + \\ &+ C_{1m} \cos \omega t + C_{2m} \cos 2\omega t + \dots + C_{nm} \cos n\omega t = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^n (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t). \end{aligned} \quad (13.3)$$

Из (13.3) следует, что все синусоиды и косинусоиды ряда начинаются там же, где периодическая несинусоидальная функция. Однако коэффициенты  $B_{km}$  и  $C_{km}$  зависят от выбора начала отсчета времени. Коэффициенты ряда  $A_0$ ,  $B_{km}$  и  $C_{km}$  определяются с помощью интегралов:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t), \quad (13.4)$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t), \quad (13.5)$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \quad (13.6)$$

Из (13.4) следует, что постоянная составляющая – среднее значение функции  $f(\omega t)$  за период  $T$ .

Для более наглядного представления характера изменения амплитуд гармоник ряда от частоты  $k\omega$ , строят диаграмму амплитудно-частотного спектра. По оси абсцисс откладываются значения частот  $k\omega$ , а параллельно оси ординат – значения постоянной составляющей и амплитуд основной и высшей гармоник. В диаграмме фазочастотного спектра по оси абсцисс откладывают значения частот  $k\omega$ , а параллельно оси ординат – отрезки, численно равные начальным фазам гармоник.

## Примеры периодических несинусоидальных функций

На рисунке 13.1а приведена модель с генератором прямоугольных колебаний, а на осциллограмме (Рисунок 13.1б) – форма колебаний.

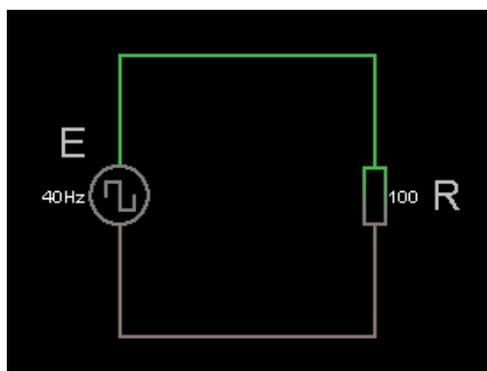


Рисунок 13.1а

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 240 288 240 128 0 2 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 240 128 384 128 0
w 240 288 384 288 0
r 384 128 384 288 0 100.0
x 417 217 434 223 0 24 R
x 206 187 222 193 0 24 E
o 3 64 0 34 5.0 0.025 0 -1

```

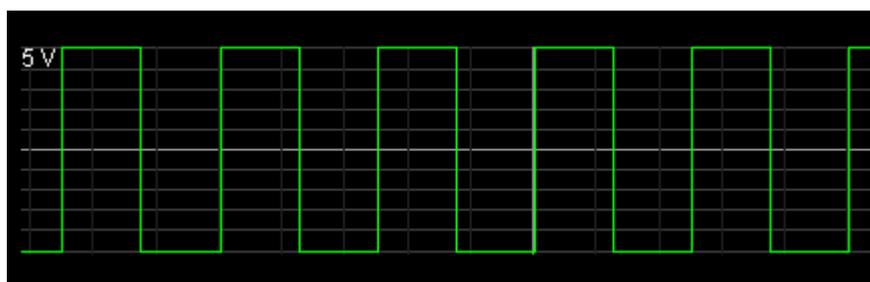


Рисунок 13.1б

Ряд Фурье этой функции

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right).$$

На рисунке 13.2а приведена модель с генератором треугольных колебаний, а на осциллограмме (Рисунок 13.2б) – форма колебаний.

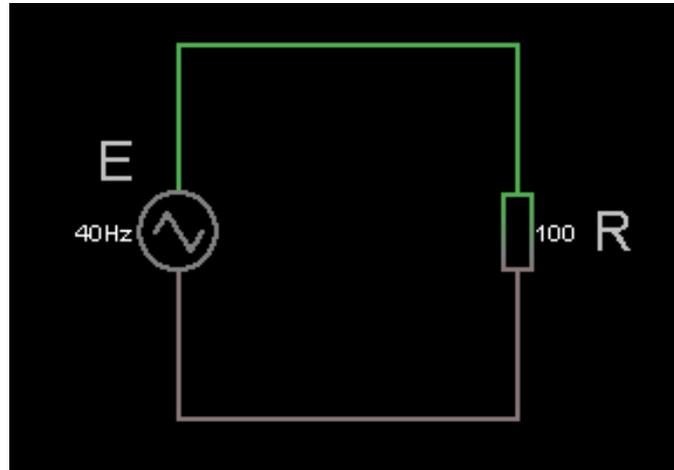


Рисунок 13.2а

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 256 304 256 144 0 3 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 256 144 400 144 0
w 256 304 400 304 0
r 400 144 400 304 0 100.0
x 433 233 450 239 0 24 R
x 222 203 238 209 0 24 E
o 3 64 0 34 5.0 0.025 0 -1

```

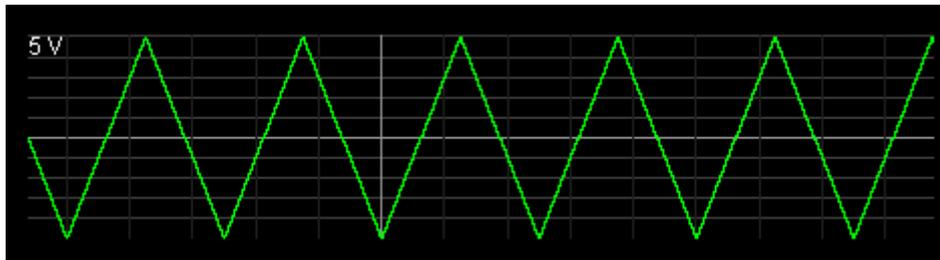


Рисунок 13.2б

Ряд Фурье этой функции

$$u(t) = \frac{8U_m}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \frac{1}{19} \cos 7\omega t + \dots \right).$$

На рисунке 13.3а приведена модель с однополупериодным выпрямителем, а на осциллограмме (Рисунок 13.3б) – форма колебаний.

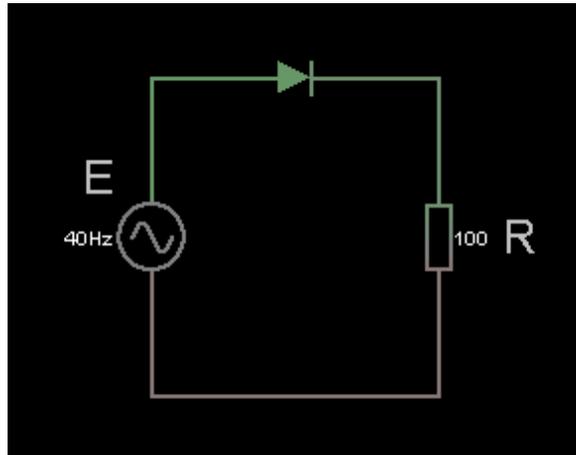


Рисунок 13.3а

```

$ 1 5.0E-6 10.20027730826997 69 10.0 50
v 240 288 240 128 0 1 40.0 5.0 0.0 0.0 0.5
w 240 288 384 288 0
r 384 128 384 288 0 100.0
x 417 217 434 223 0 24 R
x 206 187 222 193 0 24 E
d 240 128 384 128 1 0.805904783
o 2 64 0 34 5.0 0.025 0 -1

```

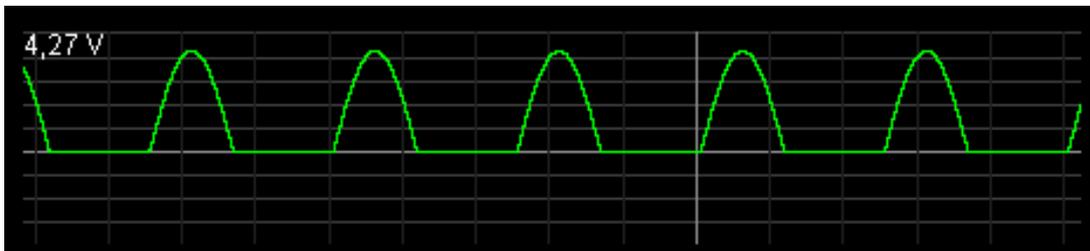


Рис.13.3б

Ряд Фурье этой функции

$$u(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \cos \omega t + \frac{2U_m}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega t + \dots \right).$$

На рисунке 13.4а приведена модель с двуполупериодным выпрямителем, а на осциллограмме (Рисунок 13.4б) – форма колебаний.

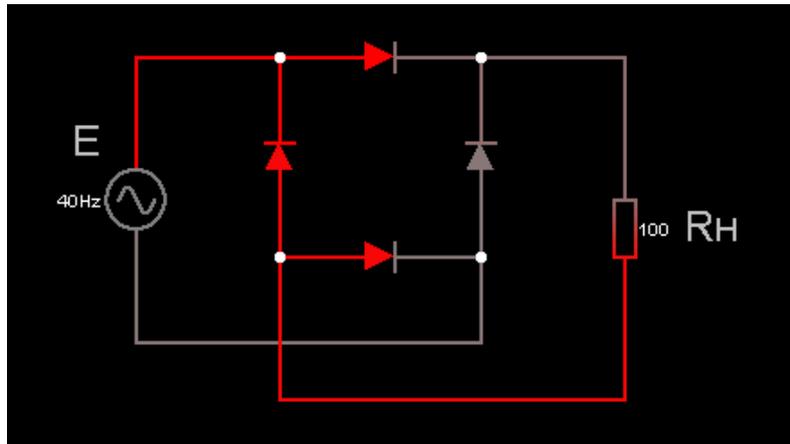


Рисунок 13.4а

```

$ 1 5.0E-6 4.818269829109882 69 10.0 50
d 256 112 368 112 1 0.805904783
d 256 224 368 224 1 0.805904783
d 368 224 368 112 1 0.805904783
d 256 224 256 112 1 0.805904783
w 368 224 368 272 0
w 368 272 176 272 0
w 256 112 176 112 0
w 256 224 256 304 0
w 256 304 448 304 0
w 368 112 448 112 0
r 448 112 448 304 0 100.0
v 176 272 176 112 0 1 40.0 15.0 0.0 0.0 0.5
x 482 216 512 222 0 24 RH
x 141 168 157 174 0 24 E
o 10 64 0 34 18.707220957835556 0.09353610478917779 0 -1

```

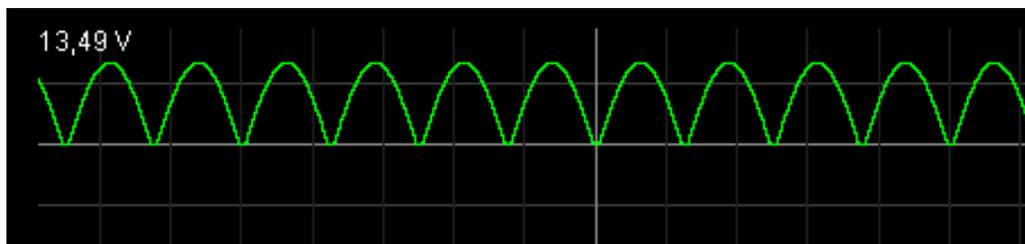


Рисунок 13.4б

Ряд Фурье этой функции

$$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} + \frac{4U_m}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega t + \dots \right).$$

Пример колебания с линейно изменяющейся амплитудой приведен на рисунке 13.5.

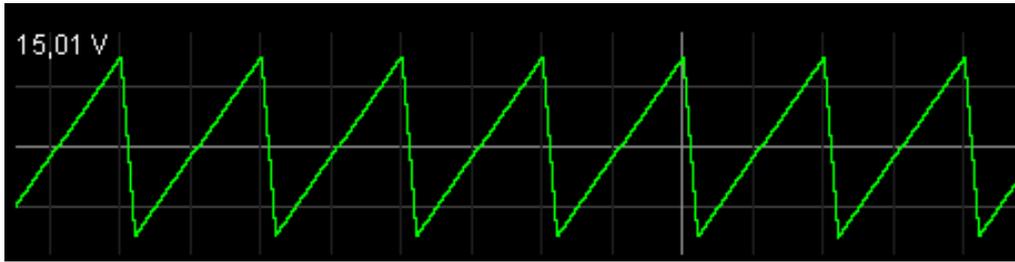


Рисунок 13.5.

Это колебание сформировано электронной цепью, поэтому оно имеет некоторый наклон при обратном ходе.

Ряд Фурье для идеального пилообразного колебания

$$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

## Спектры несинусоидальных колебаний

Изучать спектры разнообразных колебаний проще всего с помощью специализированных компьютерных программ. Воспользуемся средствами пакета NI Multisim 12.0.

### Амплитудно-модулированные колебания

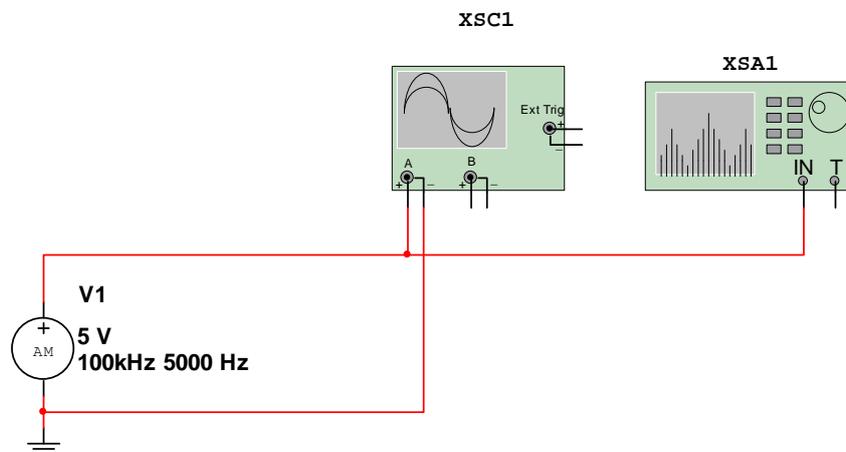


Рисунок 13.6. Схема эксперимента

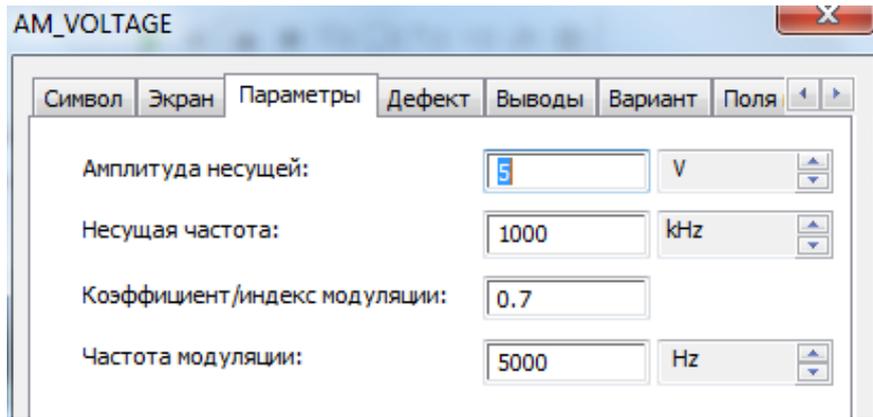


Рисунок 13.7. Параметры генератора V1

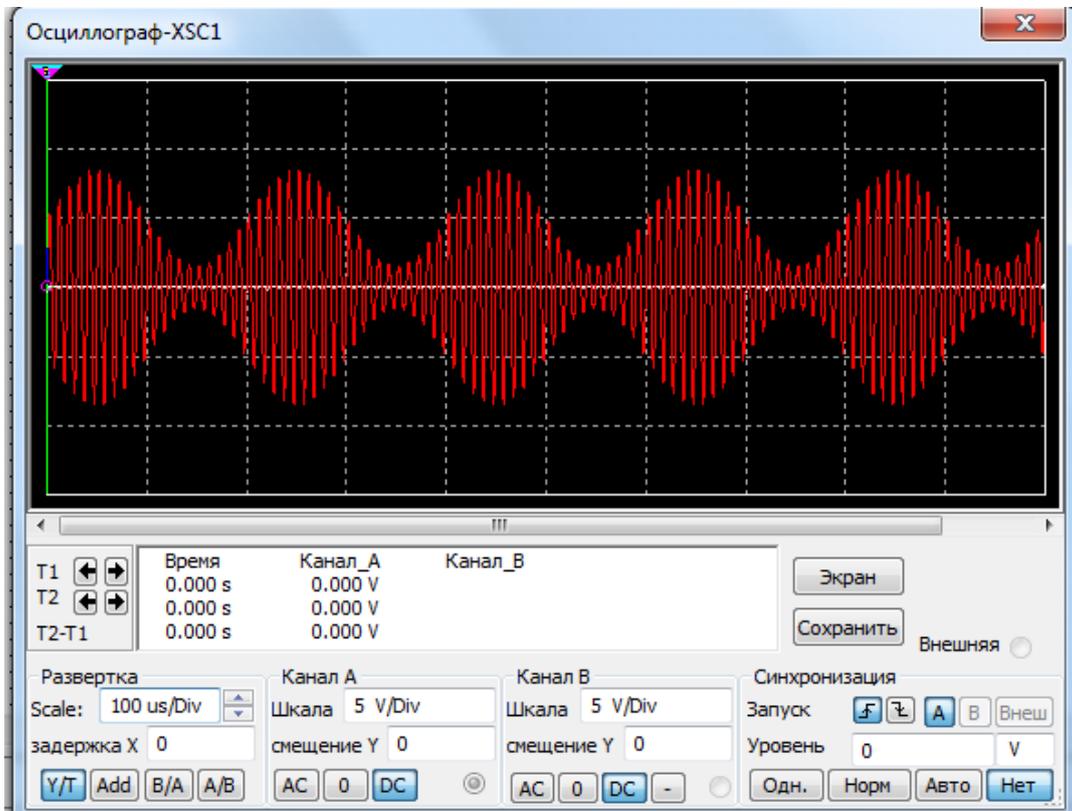


Рисунок 13.8. Осциллограмма

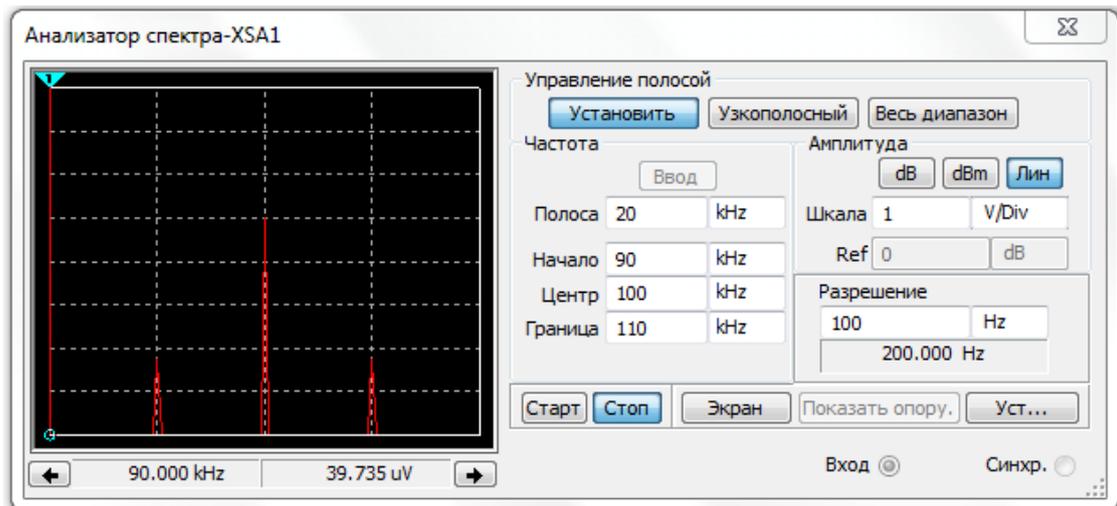


Рисунок 13.9. Спектр колебаний

### Частотно-модулированные колебания

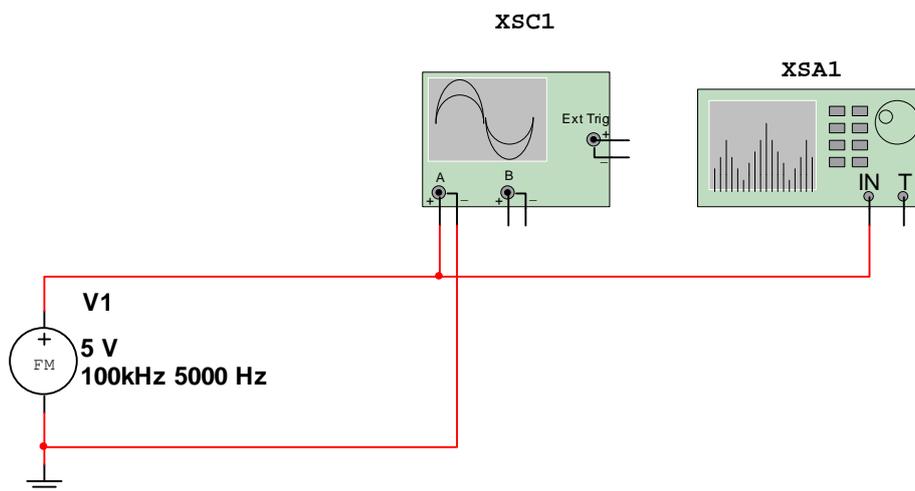


Рисунок 13.10. Схема эксперимента

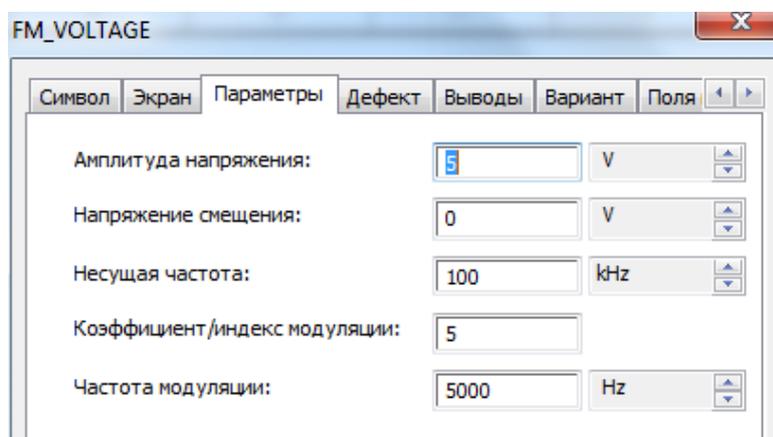


Рисунок 13.11. Параметры генератора V1

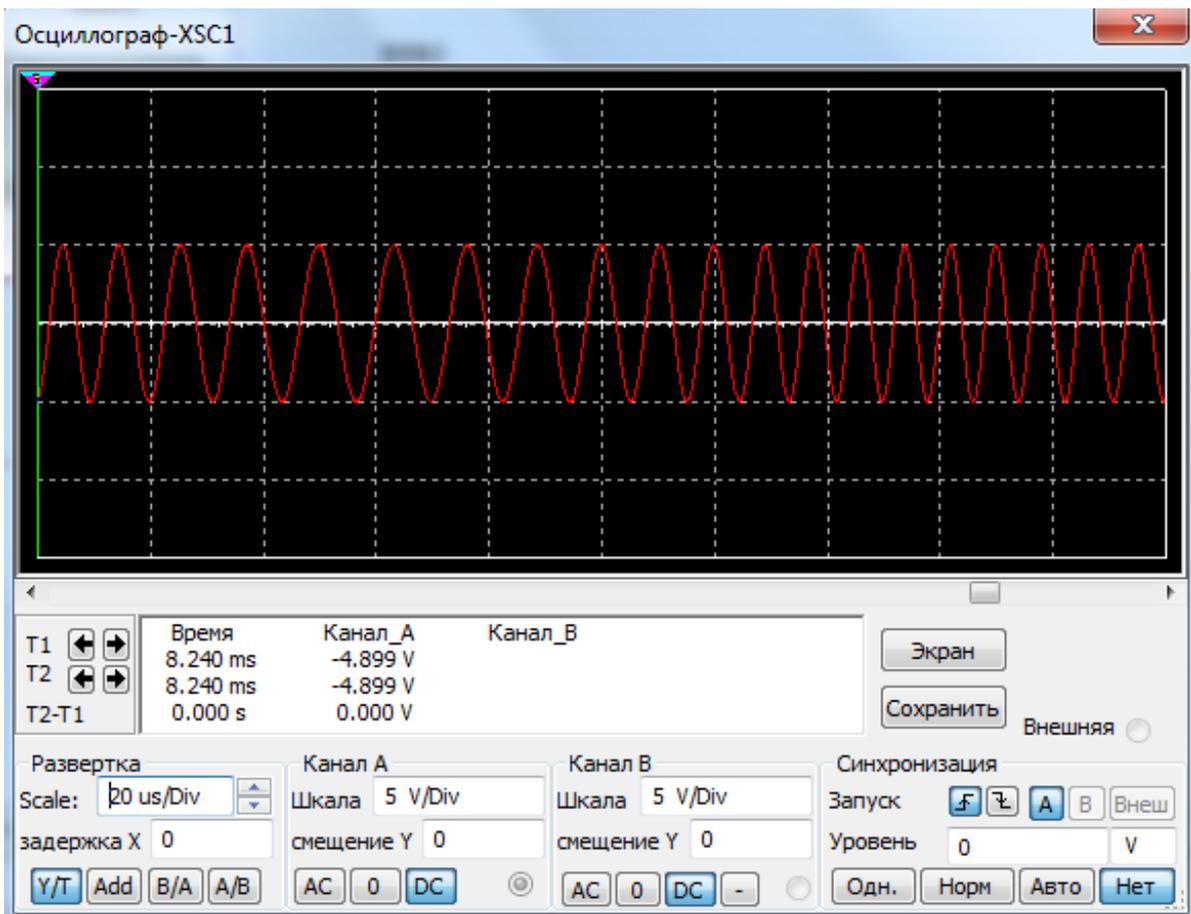


Рисунок 13.12. Осциллограмма

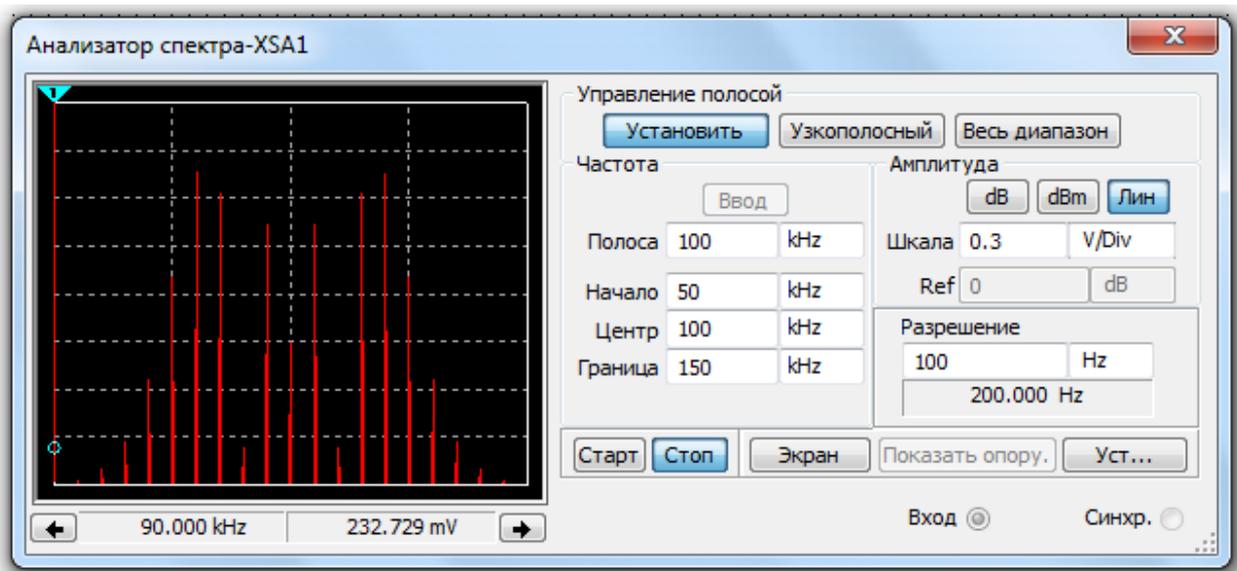


Рисунок 13.13. Спектр колебаний

## Колебания прямоугольной формы (меандр)

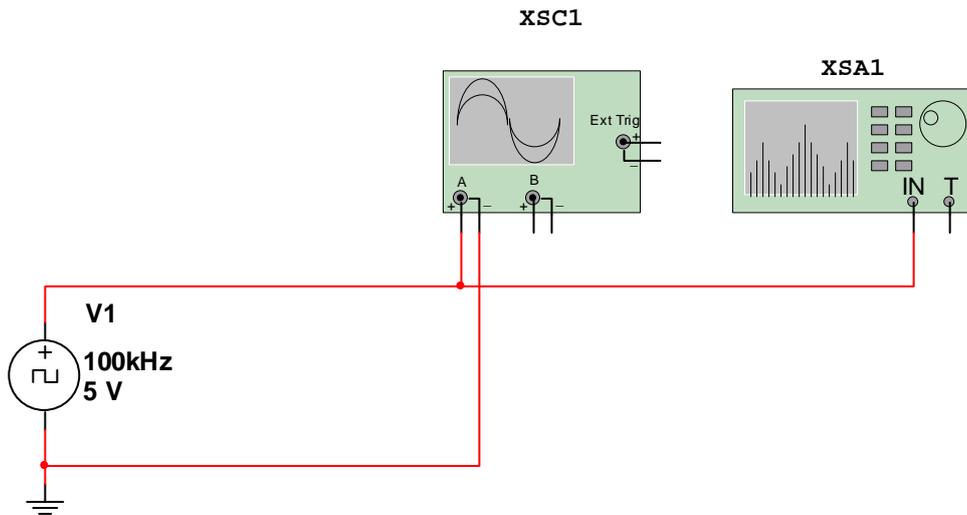


Рисунок 13.14. Схема эксперимента

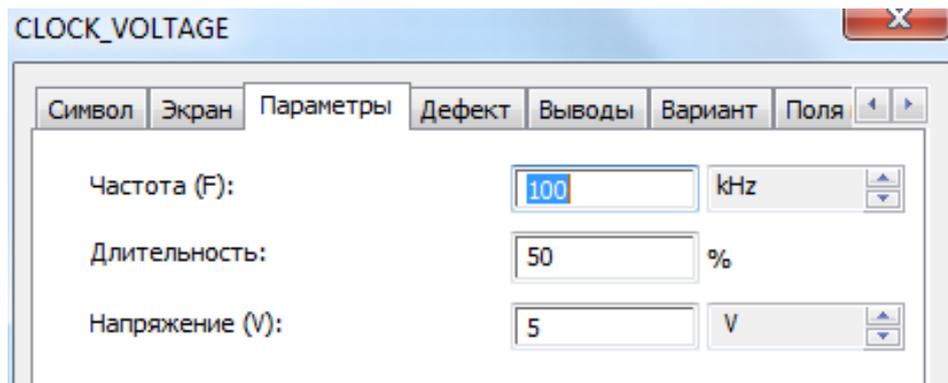


Рисунок 13.15. Параметры генератора V1



Рисунок 13.16. Осциллограмма колебаний

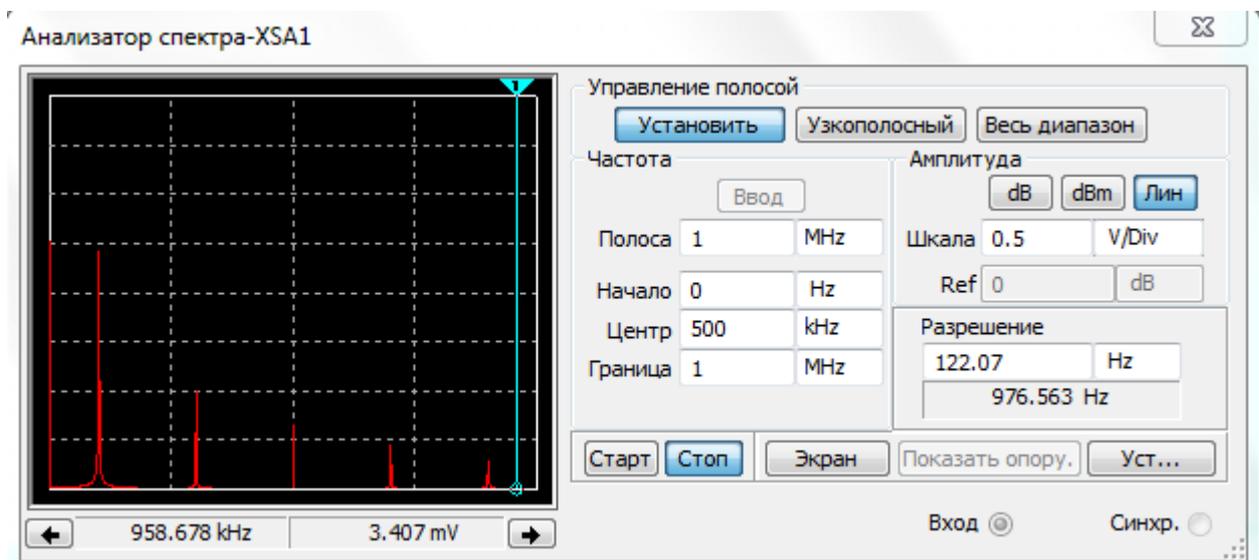


Рисунок 13.17. Спектр колебаний

## Колебания пилообразной формы

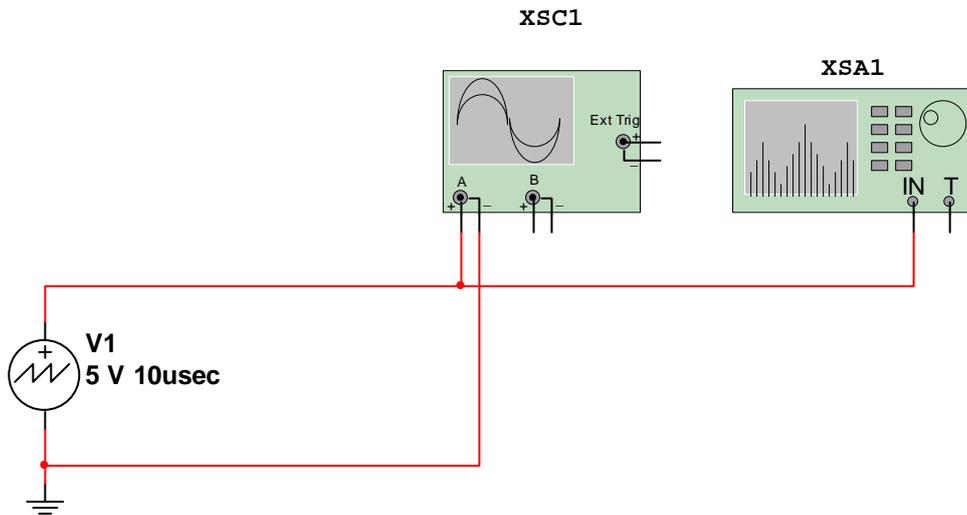


Рисунок 13.18. Схема эксперимента

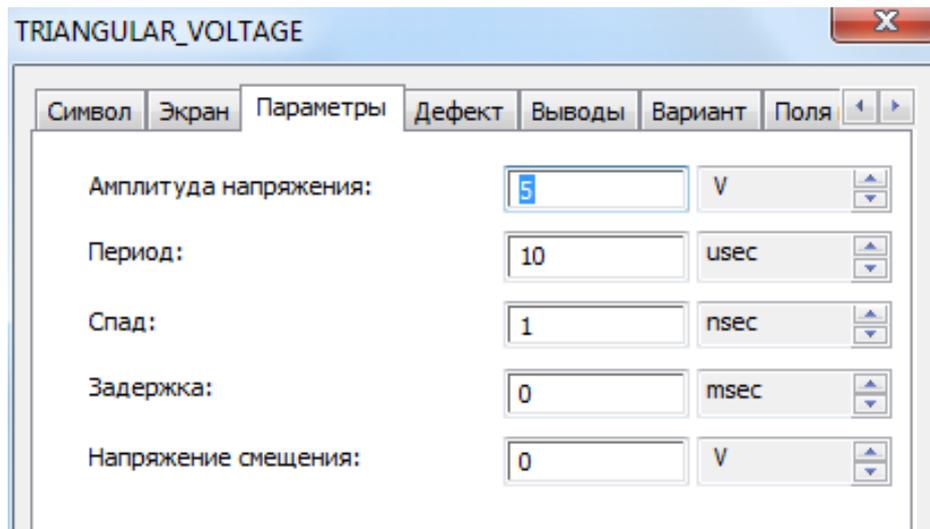


Рисунок 13.19. Параметры генератора V1

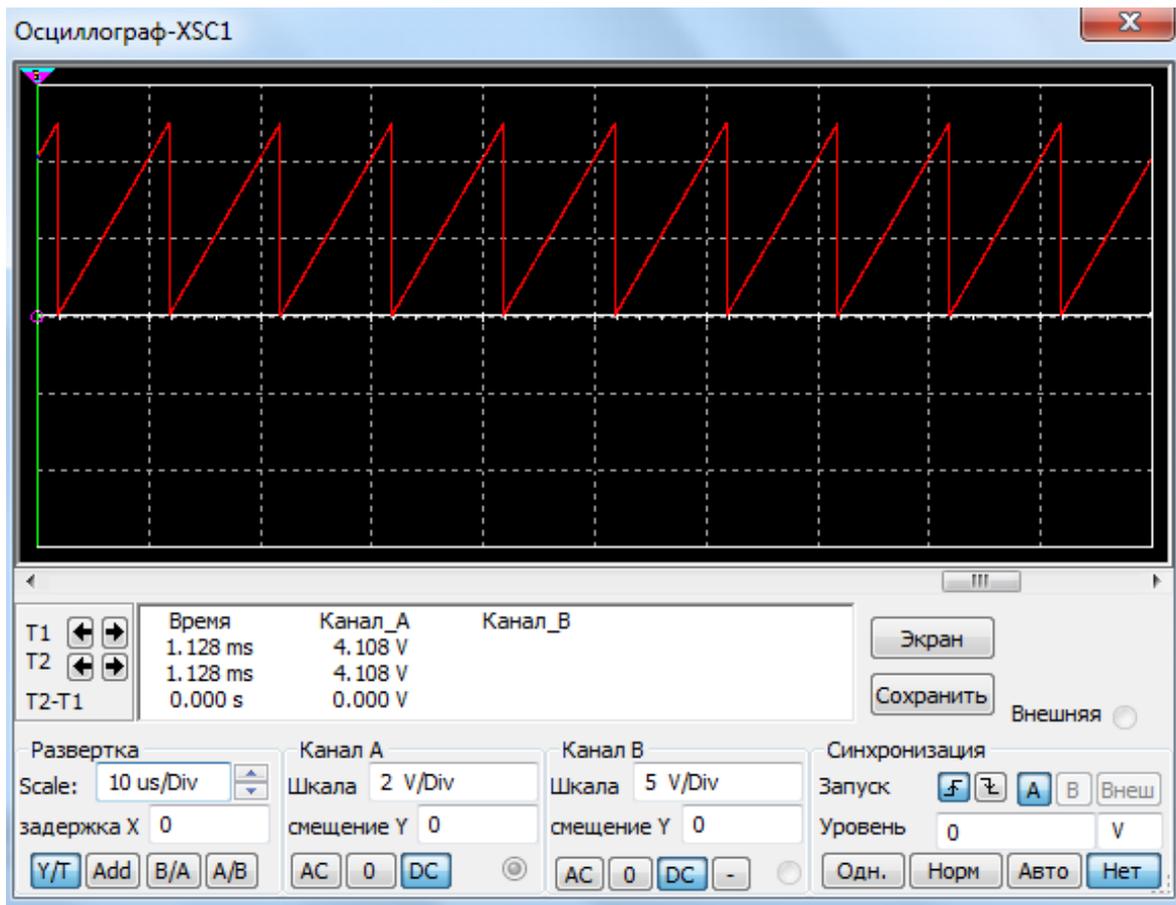


Рисунок 13.20. Осциллограмма колебаний

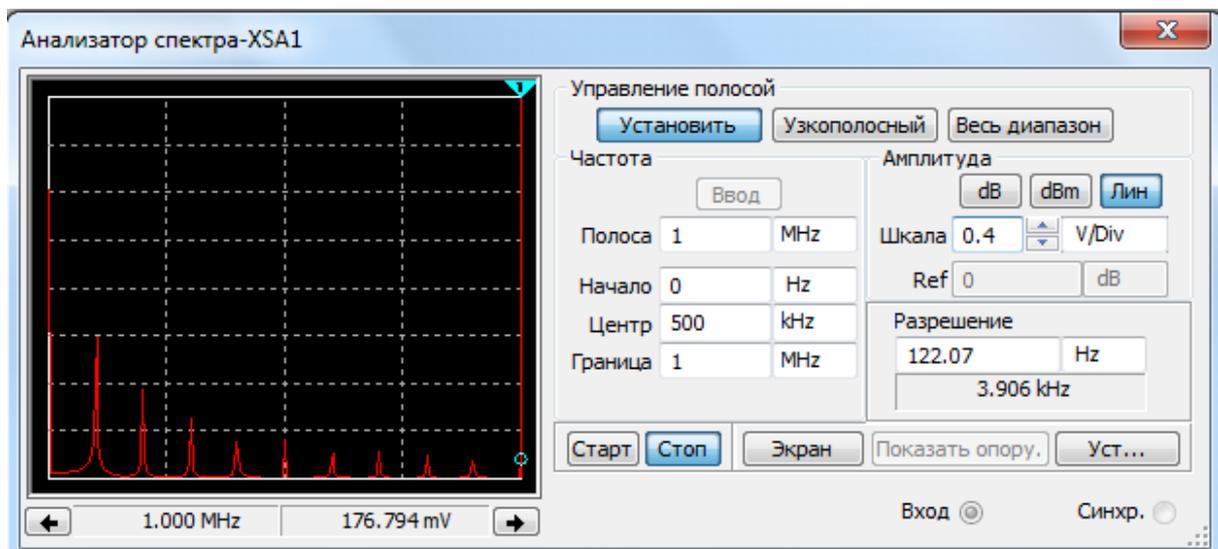


Рисунок 13.21. Спектр колебаний

## Колебания треугольной формы

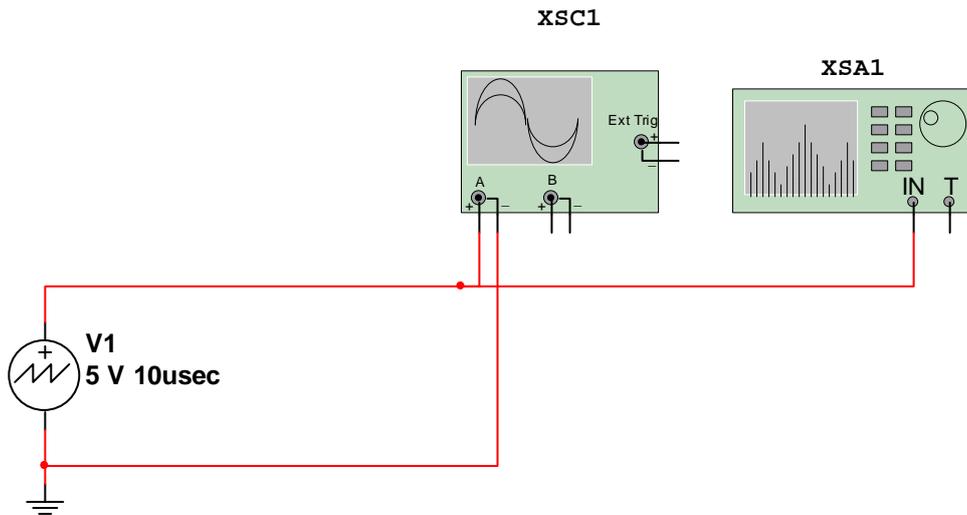


Рисунок 13.22. Схема эксперимента

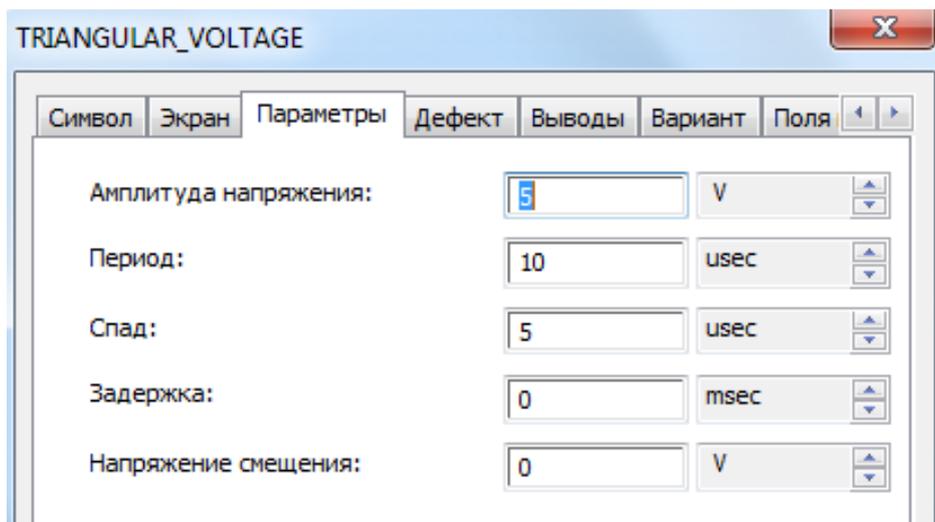


Рисунок 13.23. Параметры генератора V1

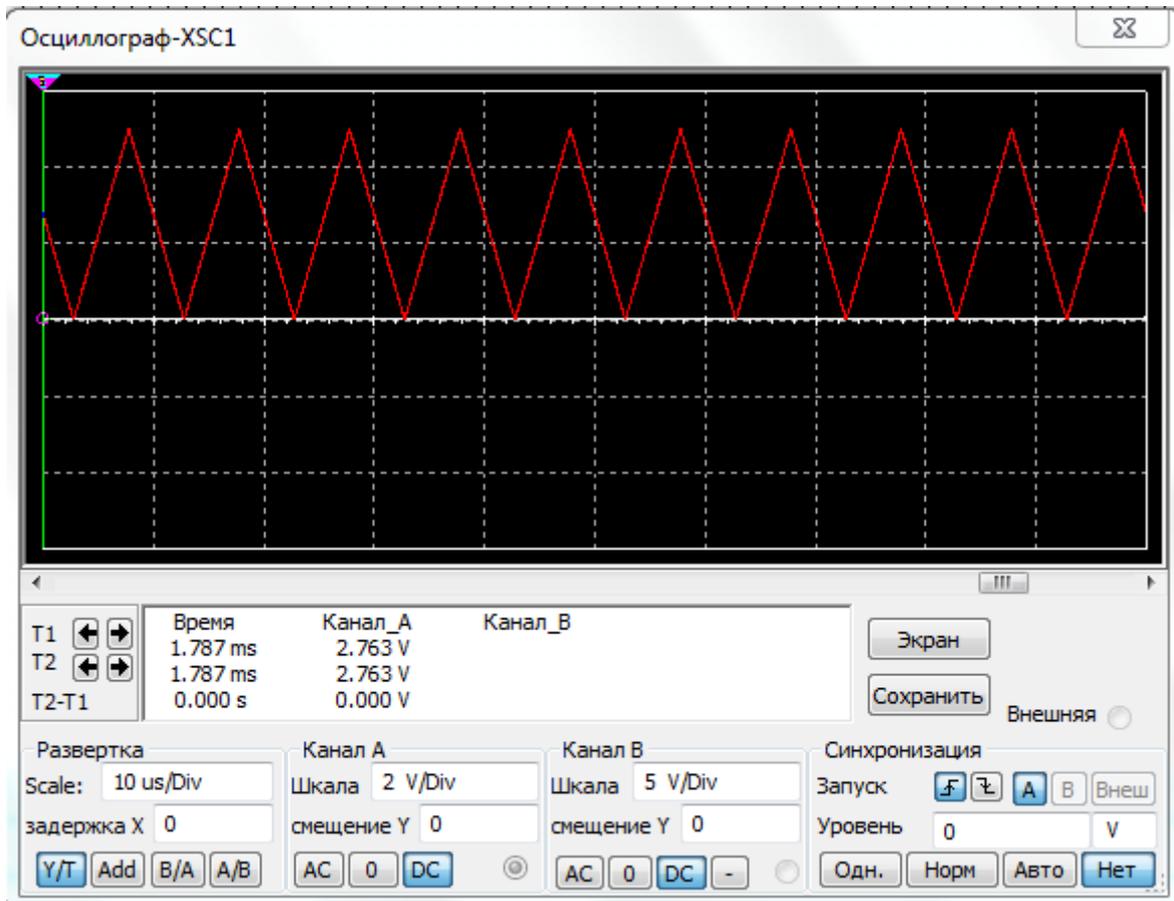


Рисунок 13.24. Осциллограмма колебаний

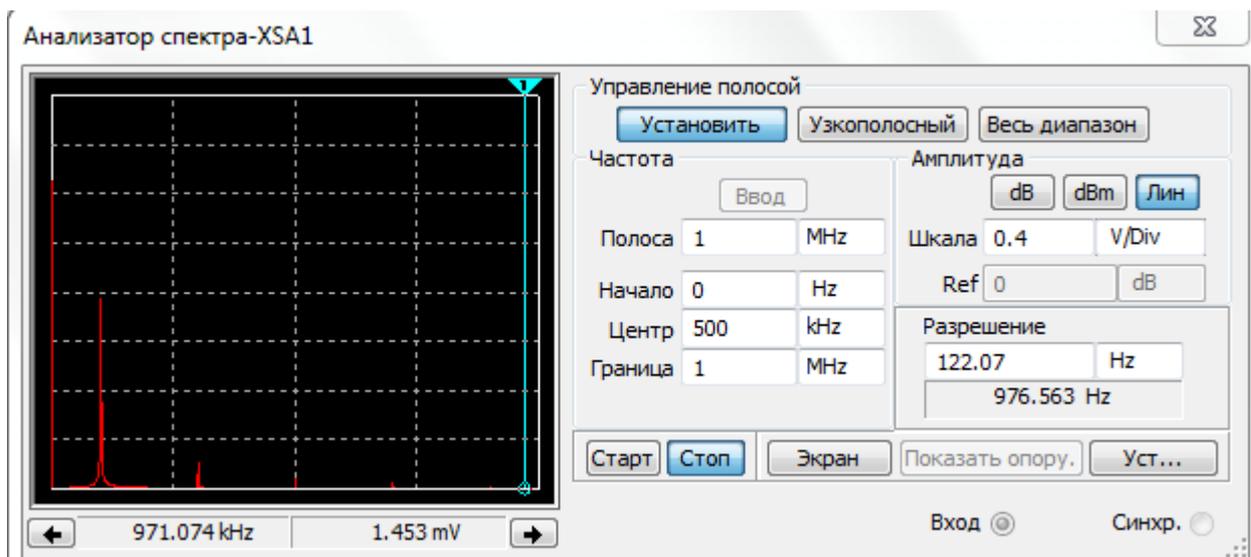


Рисунок 13.25. Спектр колебаний

## Заключение

Приведенный выше текст конспекта лекций представлен в редакции составителя. Если в тексте обнаружатся неточности, опечатки, неясности и т.д., то составитель будет очень признателен читателям, если на них укажут. Все замечания будут учтены в последующих версиях.

## Литература

1. Касаткин А.С. Курс электротехники: Учеб. для вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 8-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2005. – 540с.:ил.

2. Электротехника и электроника: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Кононенко, В.И. Мишкович, В.В. Муханов и др.; Под ред. В.В.Кононенко. – 3-е изд., испр. И доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 778 с.: ил. – (Высшее образование)

3. Немцов М.В. Электротехника и электроника: Учеб.для вузов/ М.В. Немцов. – М.:Издательство МЭИ, 2003. – 595с.:ил.

4. Электротехника и электроника: Учеб. пособие для вузов / Кононенко В.В., Мишкович В.И., Муханов В.В. и др. Под ред. В.В. Кононенко.- 2-е издание.-Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 747 с.

5. Касаткин А.С. Электротехника: Учеб. для студентов вузов/ А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 6-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2000. – 542с.

6. Электротехника и электроника: Учеб.пособие для вузов/ В.В. Кононенко, В.И. Мишкович, В.В. Муханов и др.; Под ред.В.В.Кононенко. – 3-е изд.,испр.и доп. – Ростов н/Д:Феникс,2007. – 778с.:ил. – (Высшее образование)

7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.: ил.

8. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях: В 2 т.: Практикум на Electronics Workbench: Учеб. пособие для вузов. Т. 1: Электротехника / Д.И. Панфилов, В.С. Иванов, И.Н. Чепурин / Д.И.

Панфилов, В.С. Иванов, И.Н. Чепурин; Под ред. Д.И. Панфилова. – М.: Додэка, 1999. – 304 с.: ил. + 1 дискета.

9. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях: В 2 т.: Практикум на Electronics Workbench: Учеб. пособие для в.Т.2: Электроника / Д.И. Панфилов, И.Н. Чепурин, В.Н. Миронов, С.Г.Обухов, В.А.Шитов, В.С.Иванов/ Д.И. Панфилов, И.Н. Чепурин, В.Н. Миронов и др.; Под ред. Д. И. Панфилова. – М.: Додэка, 2000. 287 с.: ил. + 1 дискета.

10. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд. Перераб. – М.: Энергоатомиздат. – 1989. – 528 с.: ил.

11. Глазенко Т.А., Прянишников В.А. Электротехника с основами электроники: Учеб. пособие для вузов. – М: Высшая школа, 1985. – 176 с.

12. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 2001. – 336 с., ил.

13. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учеб. пос. для вузов. – 4-е изд., перераб.– М.: Энергоатомиздат, 1983. –440 с., ил.

14. Морозов А.Г. Электротехника, электроника и импульсная техника: Учеб. пос. для инж.- эконом. Спец. Вузов. – М.: Высшая школа., 1987. – 448 с.: ил.

## **Рекомендуемые ресурсы сети Internet**

### **Энциклопедии, справочники**

- [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org) – энциклопедия Википедия

### **Курсы лекций доступные через сеть Internet:**

- <http://elib.ispu.ru/library/lessons/Golubev/index.htm> Голубев А.Н. «Курс лекций по теоретическим основам электротехники»;
- [http://www.ssga.ru/AllMetodMaterial/metod\\_mat\\_for\\_ioot/metodichki/matusko](http://www.ssga.ru/AllMetodMaterial/metod_mat_for_ioot/metodichki/matusko) Матуско В.Н. «Общая электротехника»;
- <http://www.tula.net/tgpu/resources/Elektrotehnika/vorop1.htm> Воропаев Е.Г. «Электротехника»;
- <http://www.ups-info.ru/index.php?link=160630> Голубев А.Н. «Теоретические основы электротехники»
- <http://frisk.newmail.ru/LEC> Фриск В.В. «Краткий курс электротехники»

**Система моделирования электронных цепей с помощью Java-машины**

- <http://falstad.com/circuit/e-index.html>

*Учебное издание*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

*Конспект лекций*

Составитель

**Сочилин** Андрей Викторович