

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Теоретические основы цифровой обработки сигналов

Великий Новгород 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого
Институт электронных и информационных систем

Кафедра радиосистем

Чеботарев Д.В.
**Теоретические основы цифровой
обработки сигналов**

Иллюстративный материал к конспекту лекций

Великий Новгород 2011

УДК 621.39

ББК

Теоретические основы цифровой обработки сигналов: иллюстративный материал к конспекту лекций / сост. Д.В. Чеботарев, / ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, Изд. 2-е, 2011г. - 156 с.

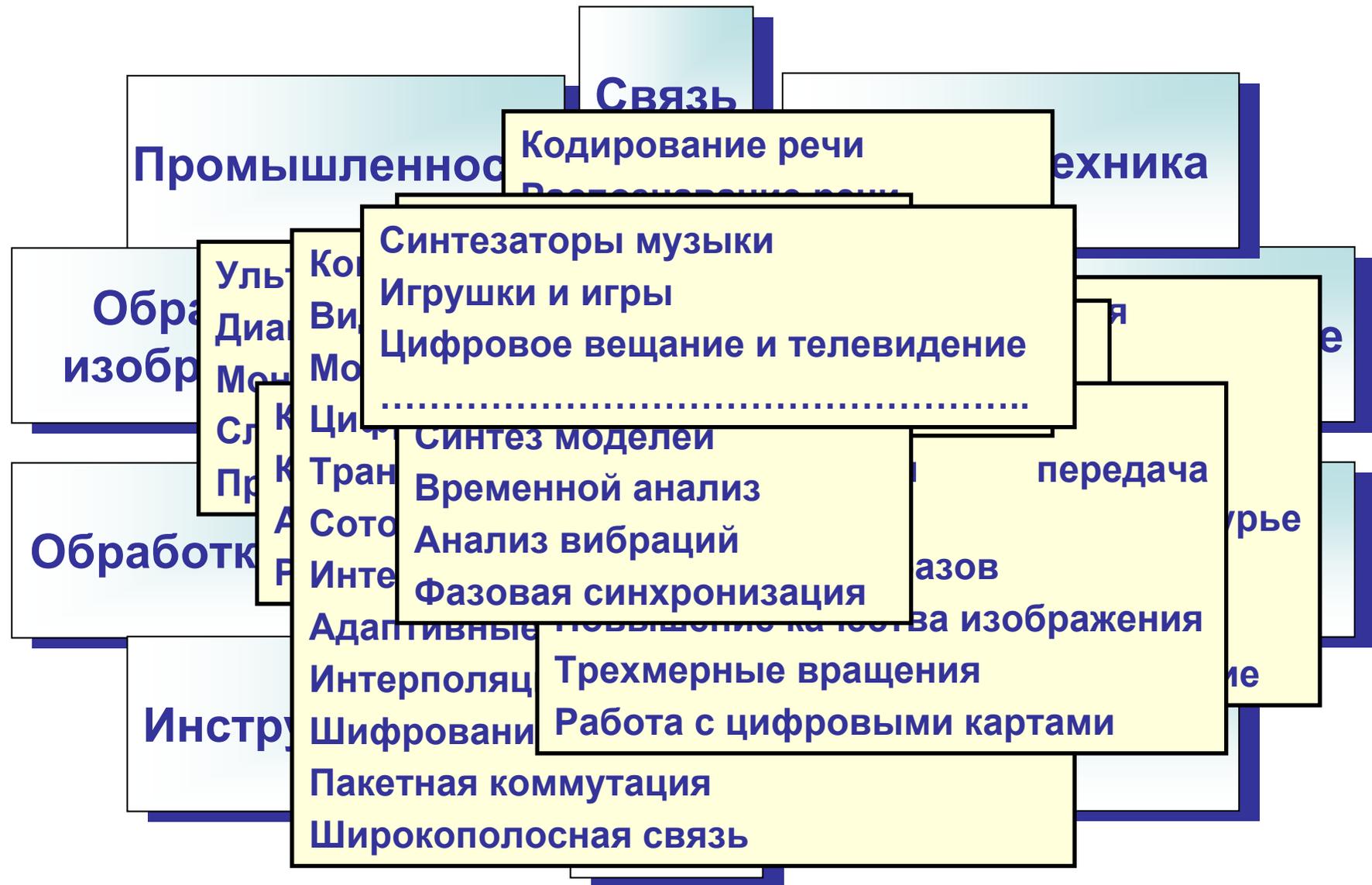
В пособии представлен иллюстративный материал к конспекту лекций «Цифровая обработка сигналов».

Учебное пособие отвечает новым образовательным стандартам и предназначено для подготовки бакалавров по направлению 210300.62 "Радиотехника".

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, 2011

Основные области применения ЦОС



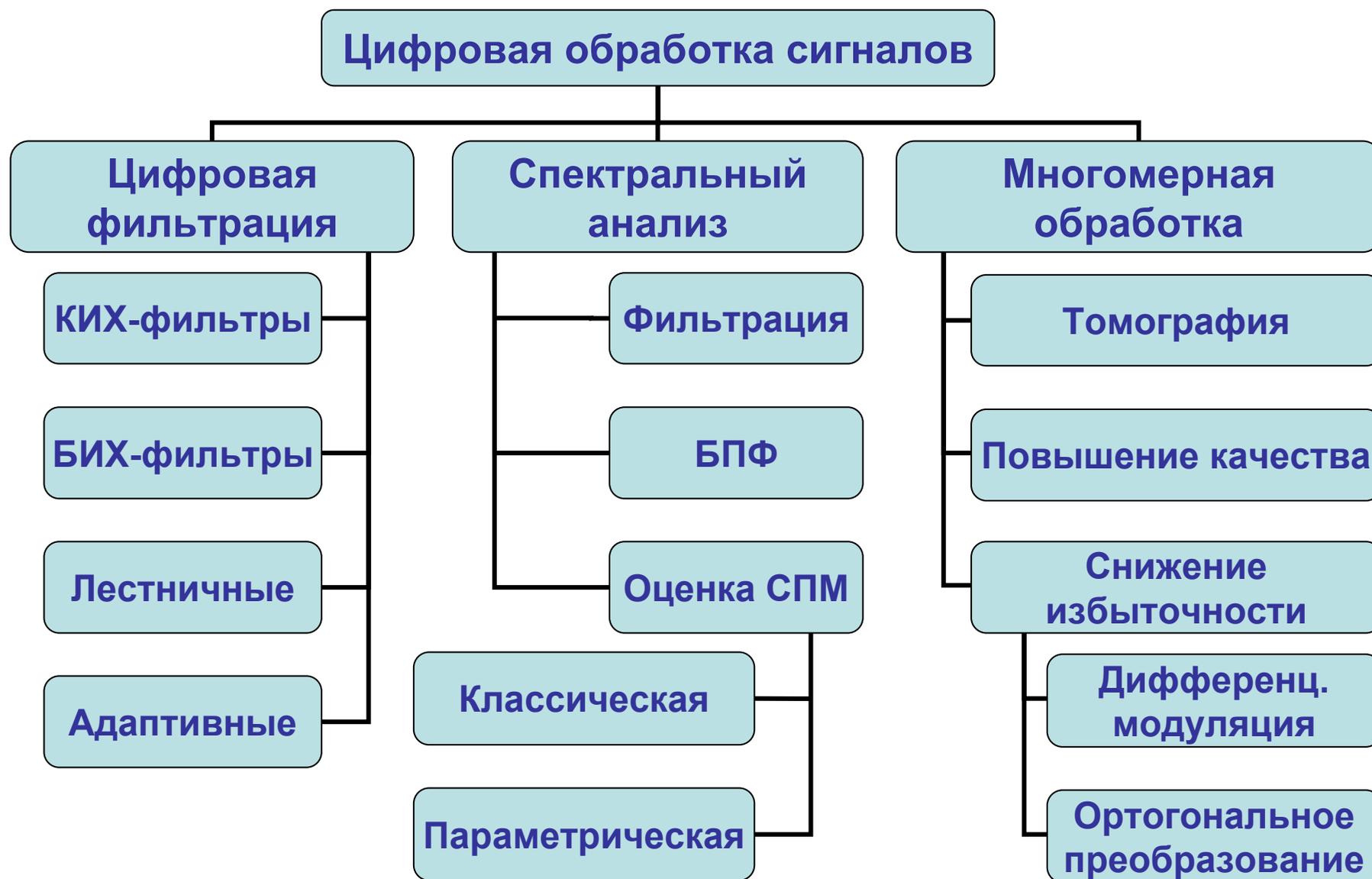
Основные области применения ЦОС



Взаимодействие ЦОС с другими областями науки и техники



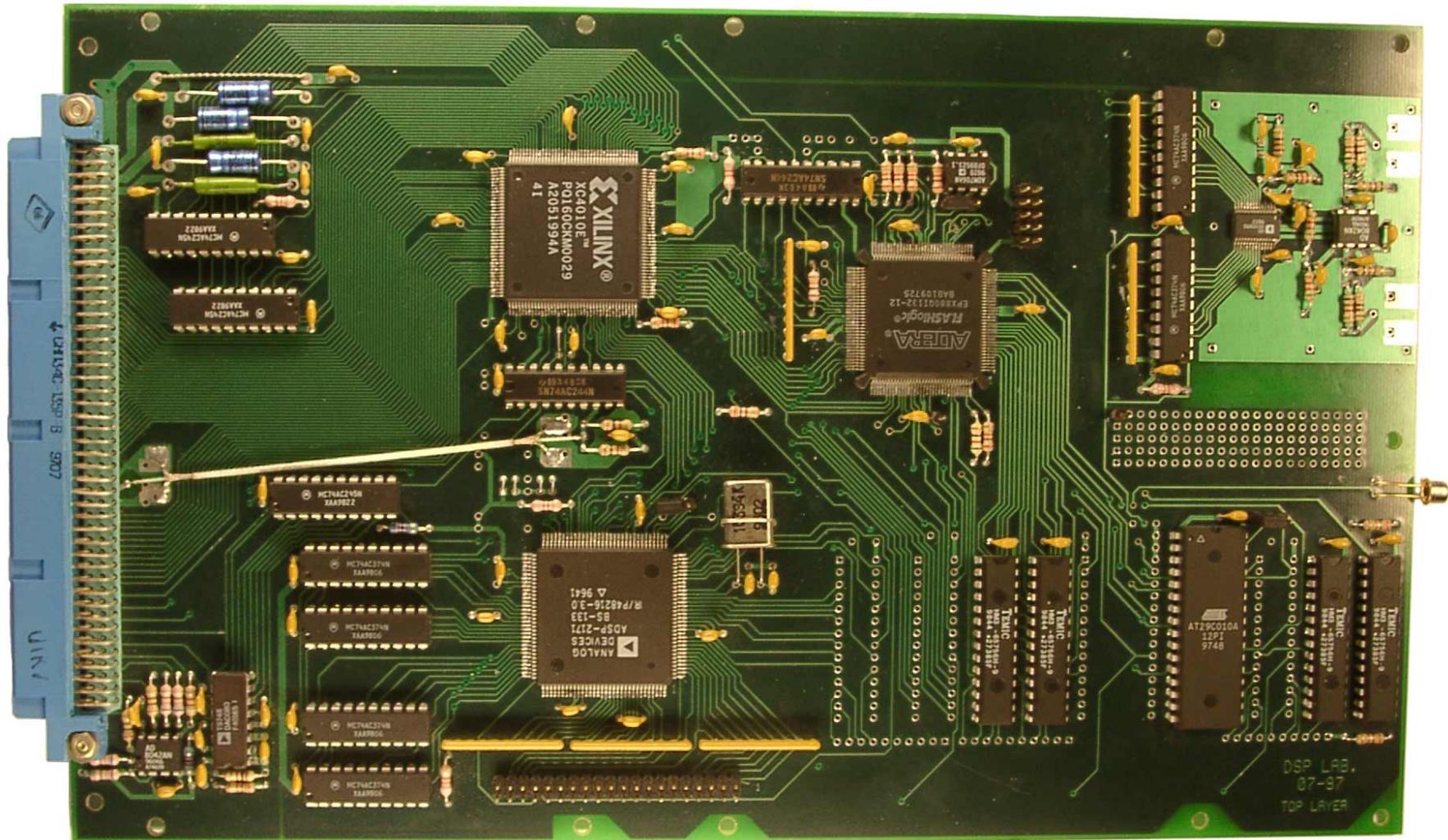
Основные теоретические направления ЦОС



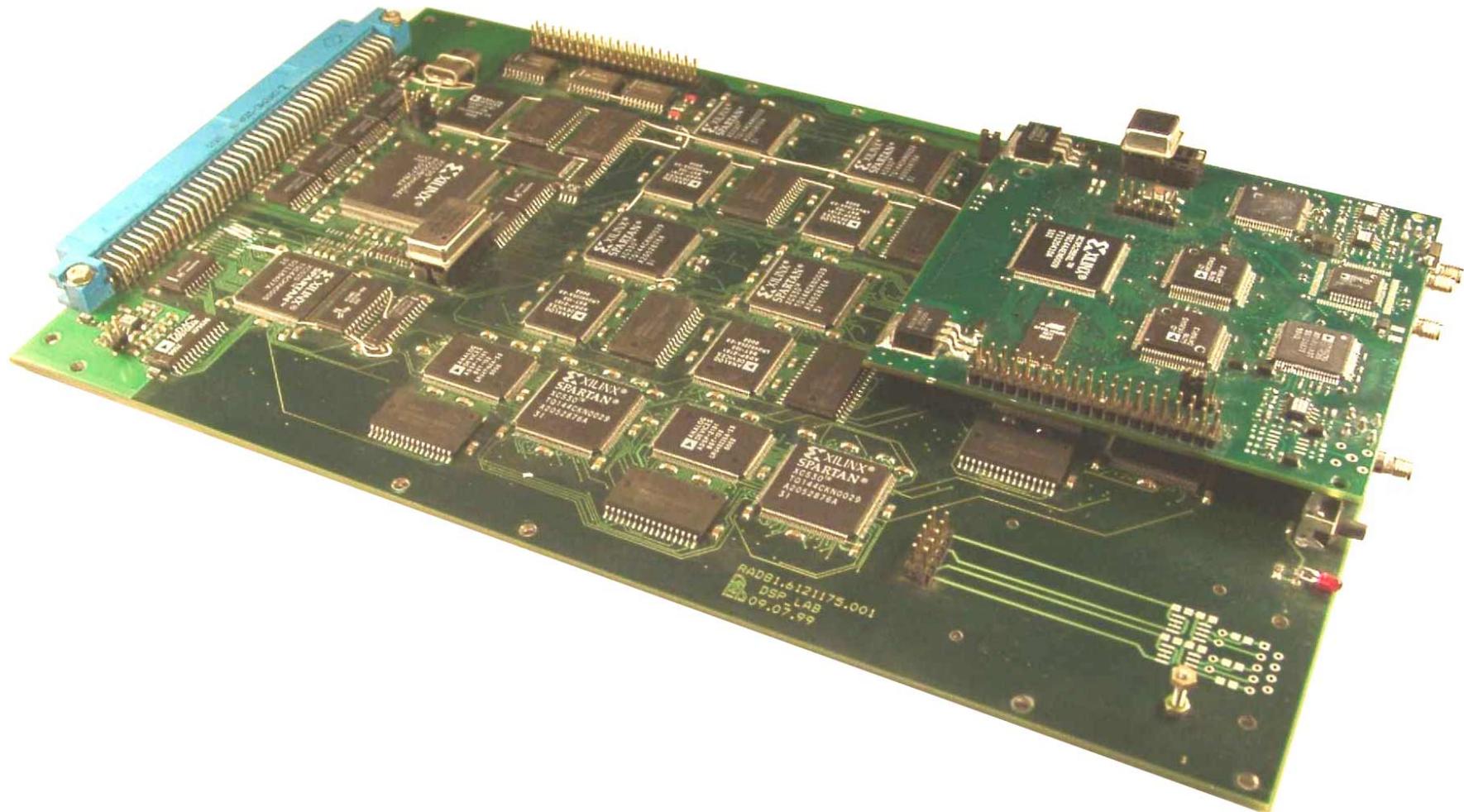
Элементная база ЦОС



Примеры устройств ЦОС



Примеры устройств ЦОС

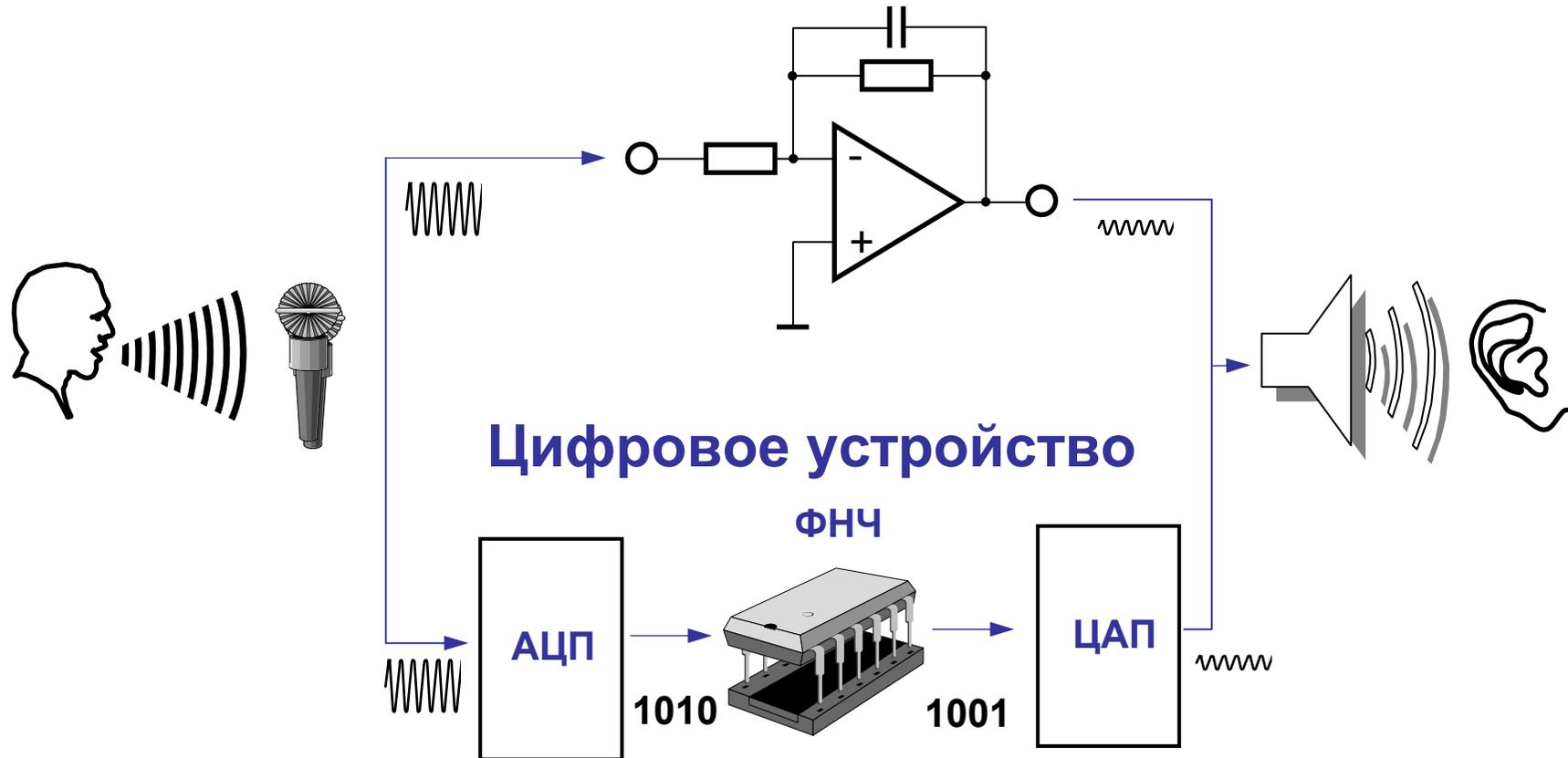


Средства разработки системы ЦОС



Пример аналогового и цифрового устройств

Аналоговое устройство



Сравнительная характеристика цифровой и аналоговой обработки

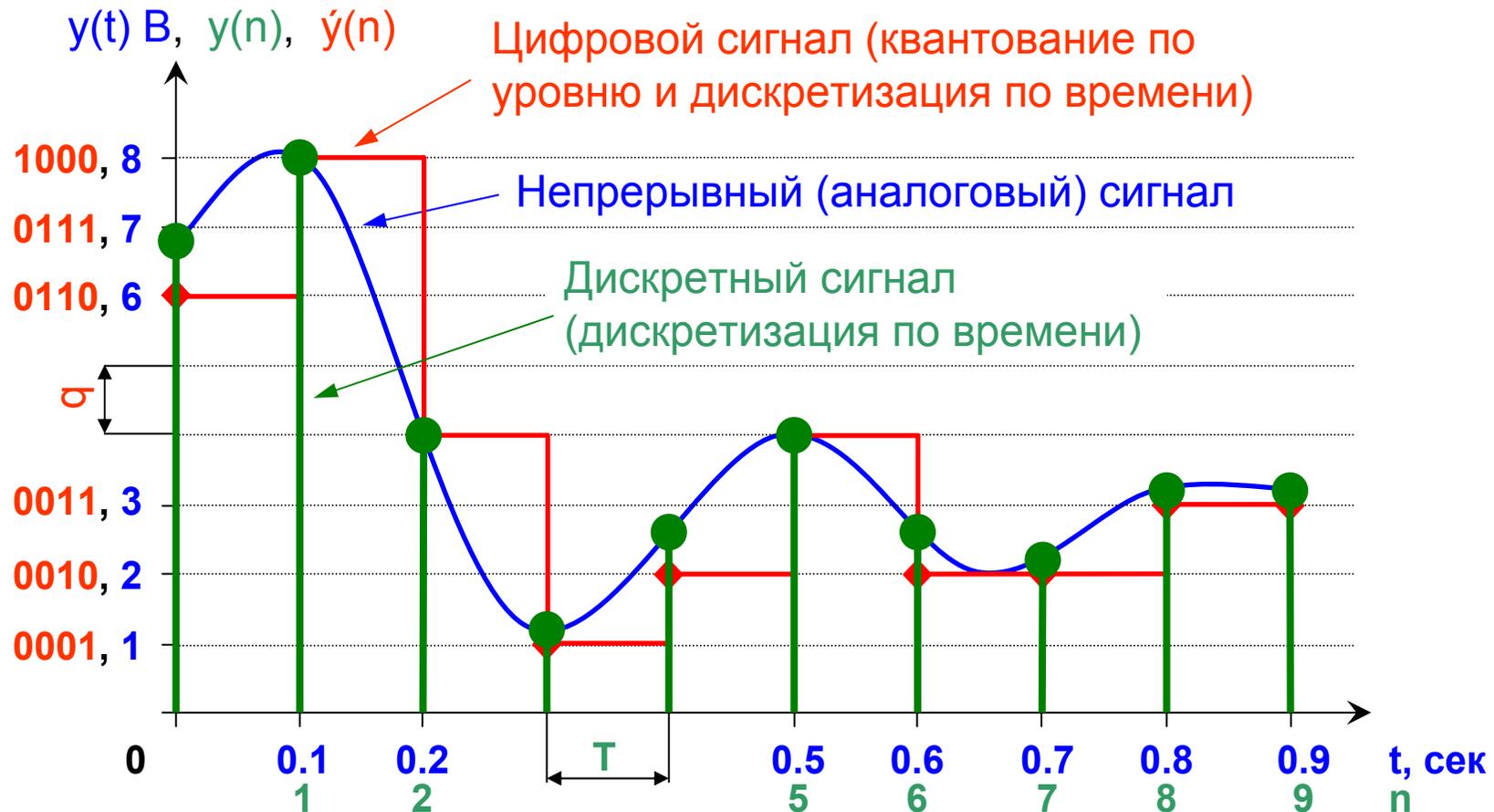
Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none">• Повторяемость (малочувствительны к старению, к допускам точности компонентов, к изменениям температуры)• Высокая помехоустойчивость• Большой динамический диапазон• Высокая точность• Универсальность методов и аппаратуры• Гибкость (Возможность программной перестройки)• Высокая степень интеграции	<ul style="list-style-type: none">• Большие требования к быстродействию (ширине полосы частот)• Сложность методов и аппаратуры• Большая мощность потребления энергии• Наличие погрешностей дискретизации и шумов квантования• Высокая скорость морального старения

Раздел 1. Теория дискретных систем

Непрерывные, дискретные и цифровые сигналы

Представление сигналов

1. Графически

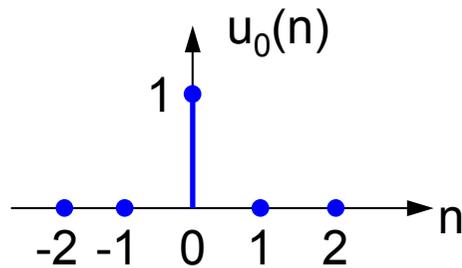


$T=1/f_d$ – шаг дискретизации, f_d - частота дискретизации, q – шаг квантования

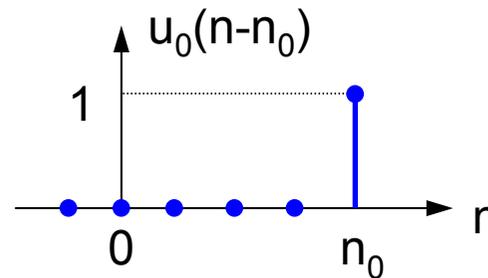
Непрерывные, дискретные и цифровые сигналы

2. Набор чисел: $0, 0.5, 0.25, 0.125..$
3. Аналитически: $x(n)=1/2^n, n=0, 1, 2..$
4. Рекуррентно: $x(n)=x(n-1)/2, x(0)=1, n=0, 1, 2..$

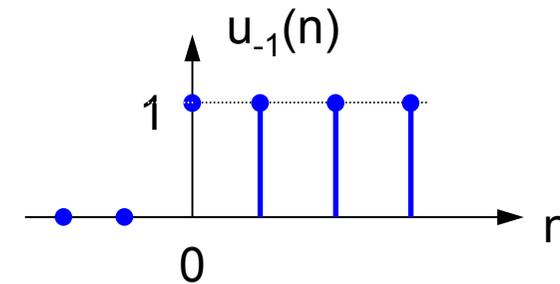
Примеры последовательностей:



единичный импульс



единичный импульс,
задержанный на n_0 отсчетов



единичный скачок

если задана $a(n), -\infty < n < \infty$, то

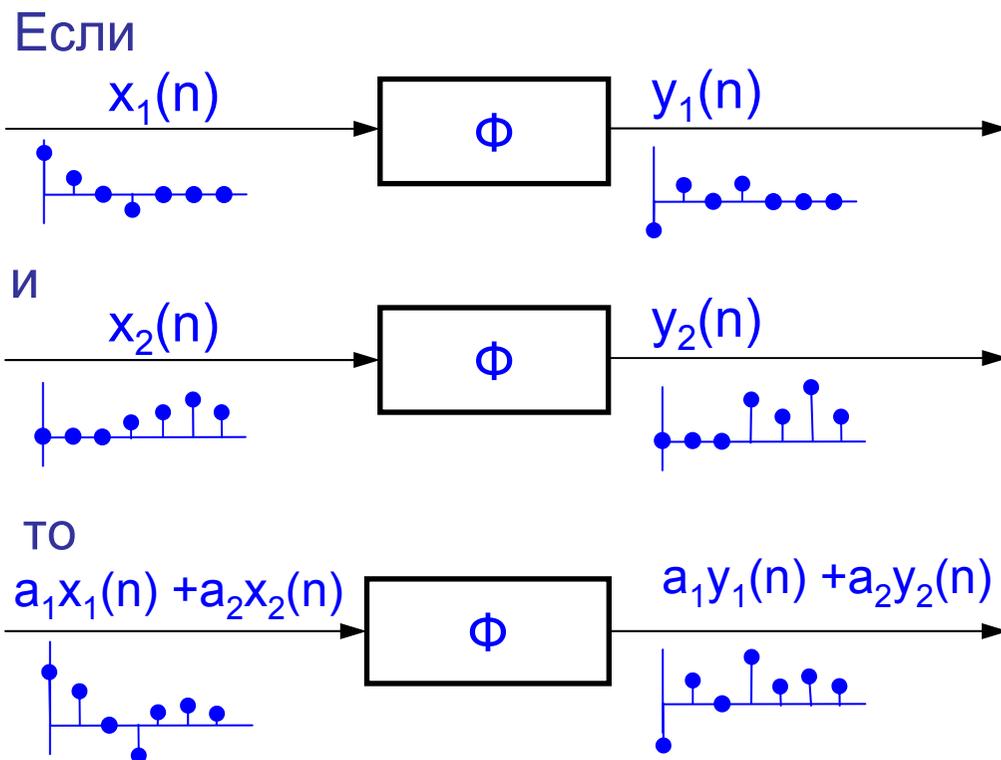
$$a(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)u_0(n-m)$$

Линейные системы с постоянными параметрами (ЛПП)

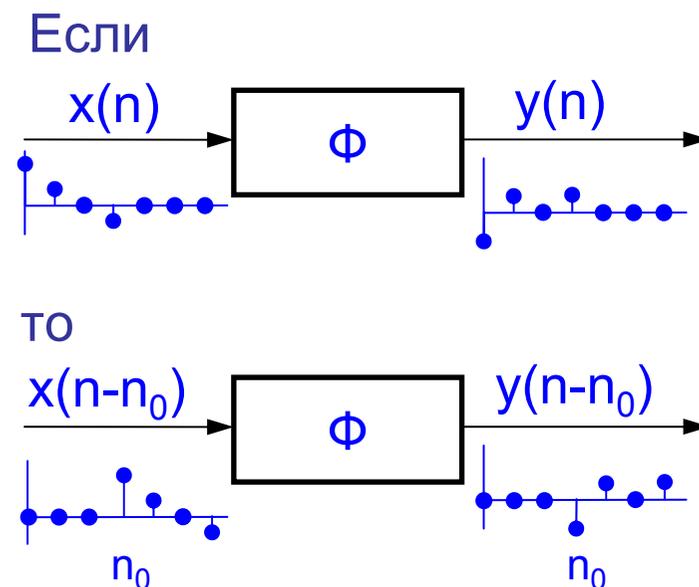


Свойства ЛПП

Линейность



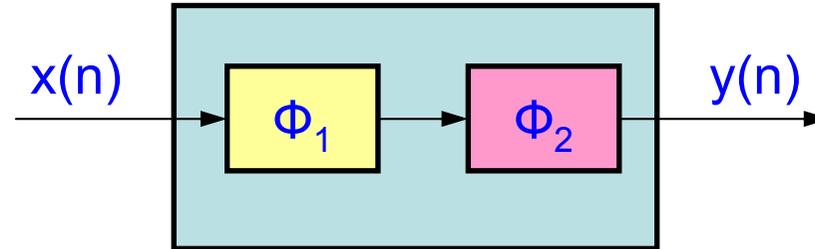
Инвариантность задержки



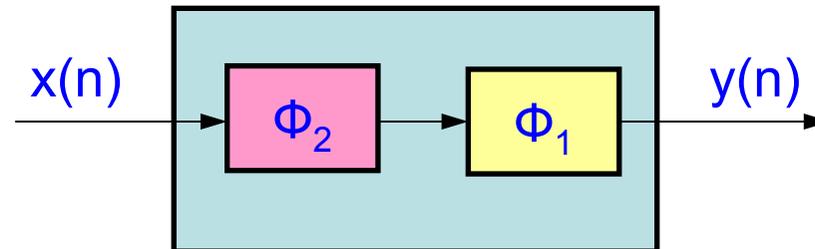
Свойства ЛПП

Коммутативность (перестановка):

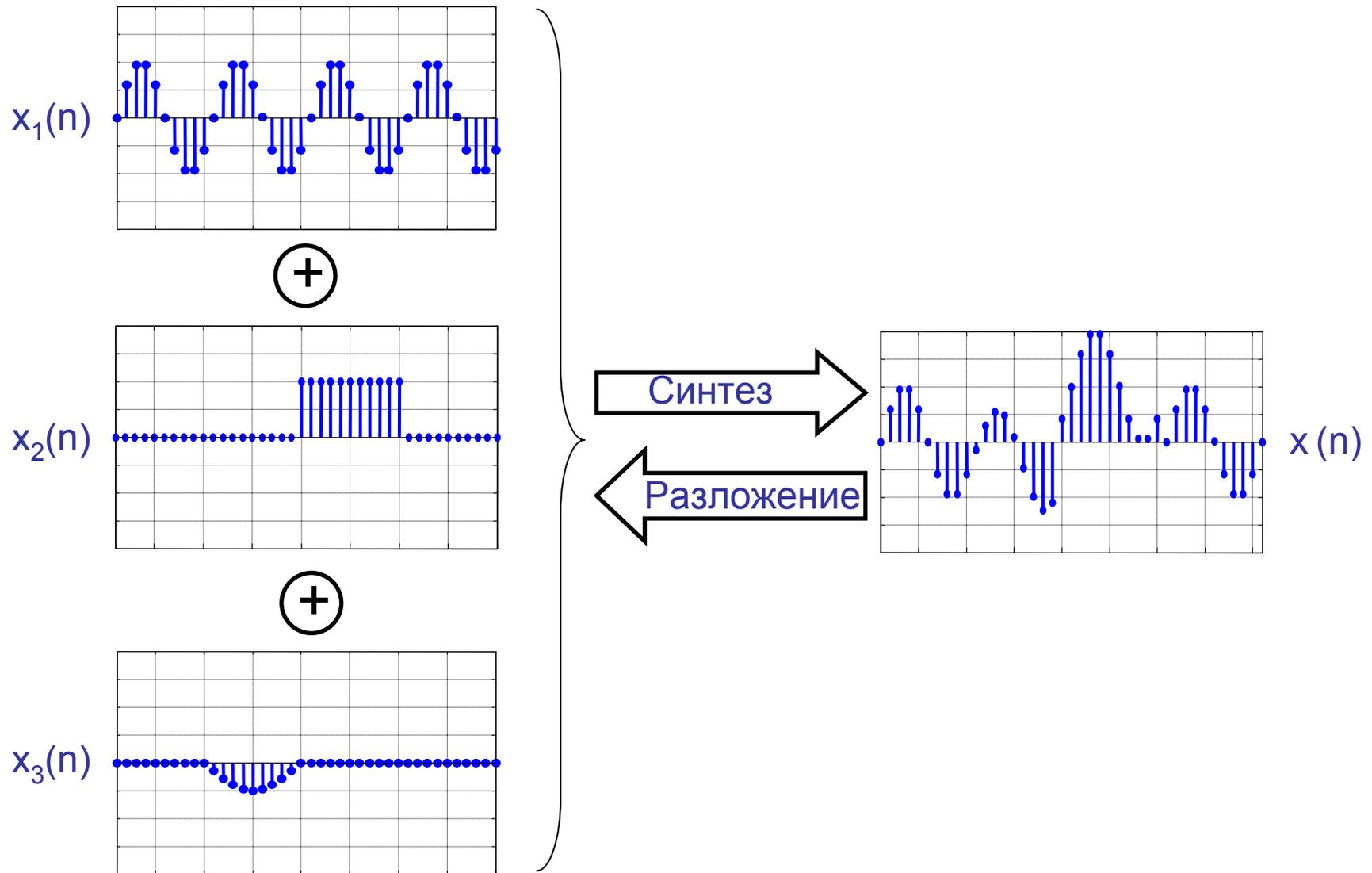
Если



ТО



Суперпозиция



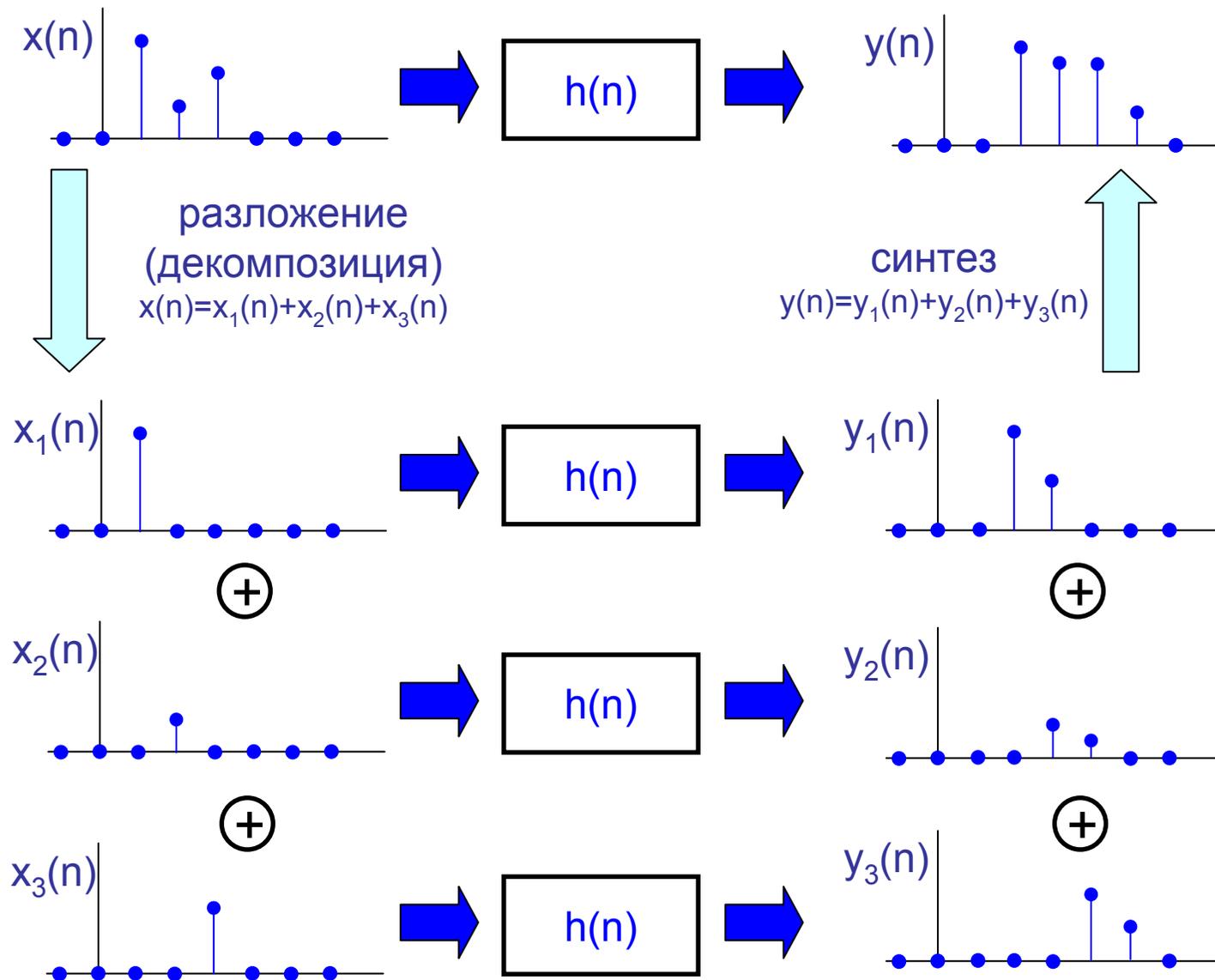
Импульсная характеристика

$h(n)$ – импульсная характеристика – отклик системы на единичный импульс $u_0(n)$



Характеристики ЛПП полностью определяются ее импульсной характеристикой

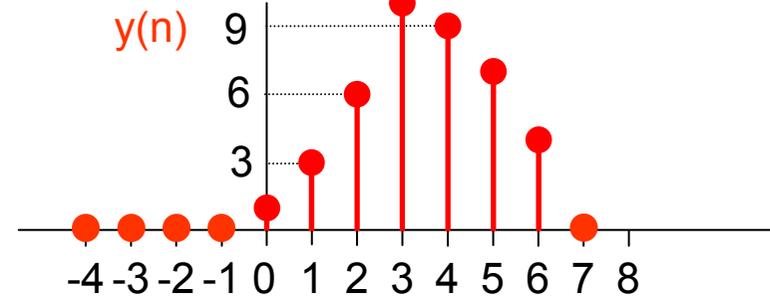
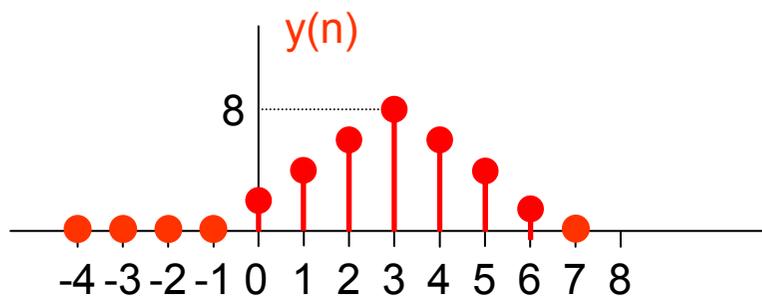
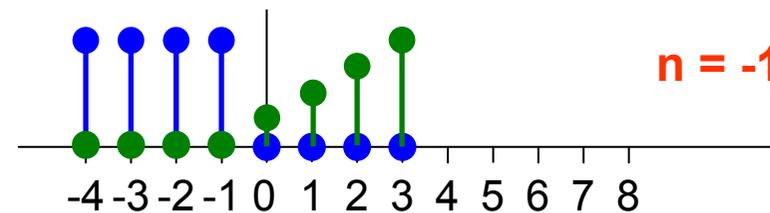
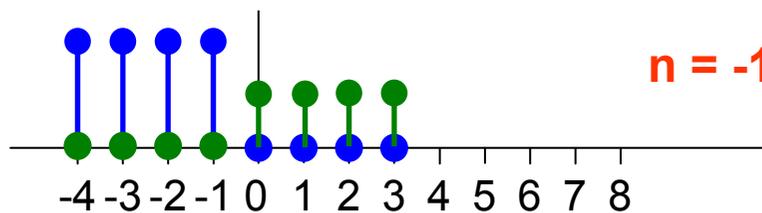
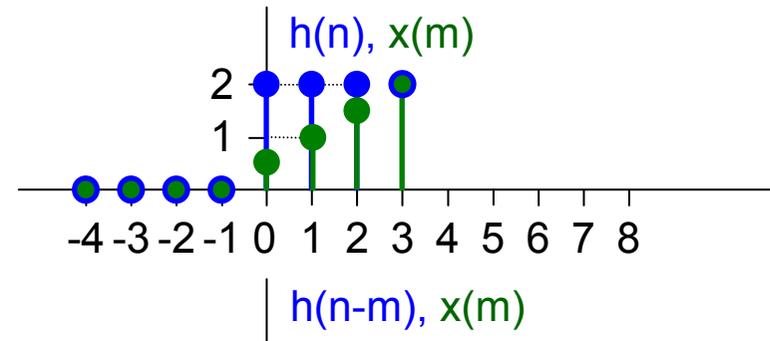
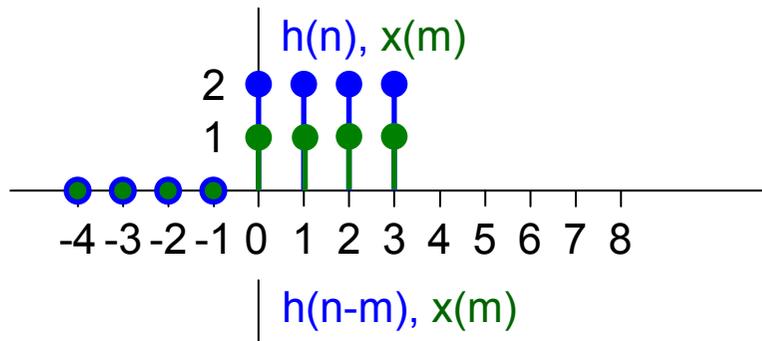
Фундаментальная концепция ЦОС



Свертка

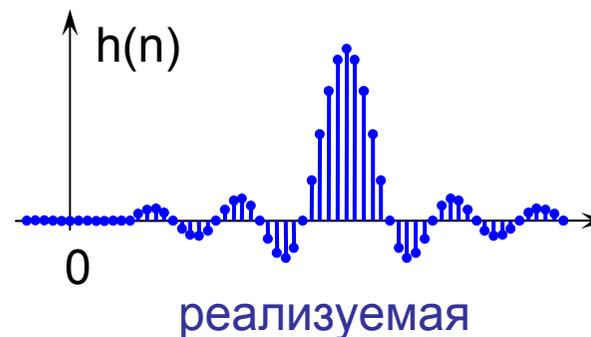
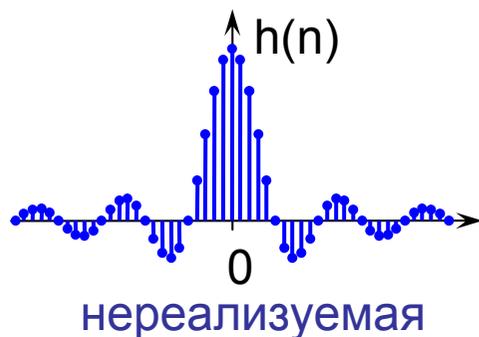
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m-n) \cdot h(m),$$

где $h(\cdot)$ – импульсная характеристика, $*$ – оператор свертки.



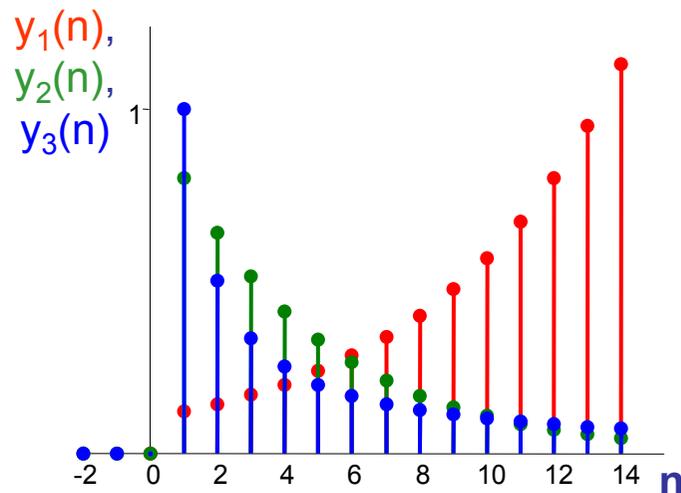
Физическая реализуемость ЛПП

Если $h(n)=0$ при $n<0$



Условие устойчивости ЛПП

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$



$y_1(n)=0.1 \cdot 2^{0.25n} \cdot u_{-1}(n)$ - не устойчивая

$y_2(n)=0.8^n \cdot u_{-1}(n)$ - устойчивая

$y_3(n)=1/n \cdot u_{-1}(n)$ - ?

Разностные уравнения

Назначение:

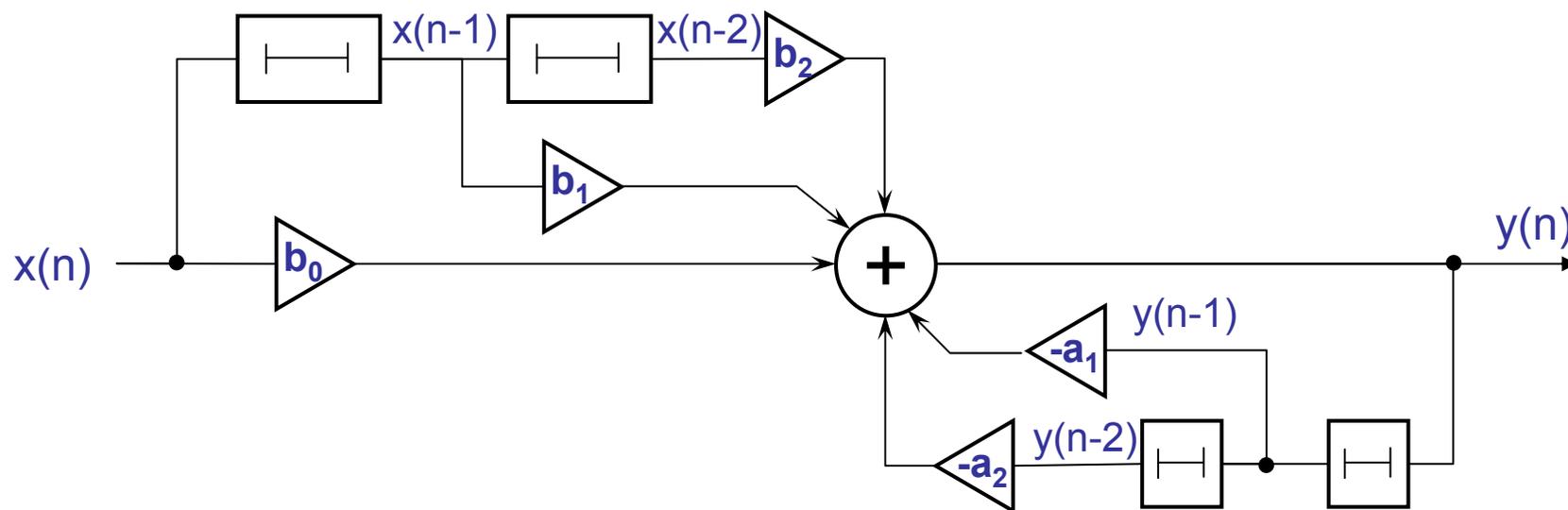
- временной анализ дискретных систем;
- способ построения системы;
- порядок, нули, собственные частоты.

Разностное уравнение M-го порядка:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i), \quad n \geq 0, \quad a_M \neq 0$$

Пример ЛПП 2-го порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$



Частотная характеристика ЛПП

Пусть $x(n) = e^{j\omega n}$ – дискретный комплексный гармонический сигнал.

Тогда при прохождении его через ЛПП с ИХ $h(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = \underbrace{e^{j\omega n}}_{x(n)} \cdot \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{-j\omega m}}_{H(e^{j\omega})}$$

Частотная характеристика ЛПП:

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega+2\pi k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Преобразование Фурье для дискретных сигналов

Для непрерывных сигналов:

$$X_H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_H(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x_H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Для дискретных сигналов:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

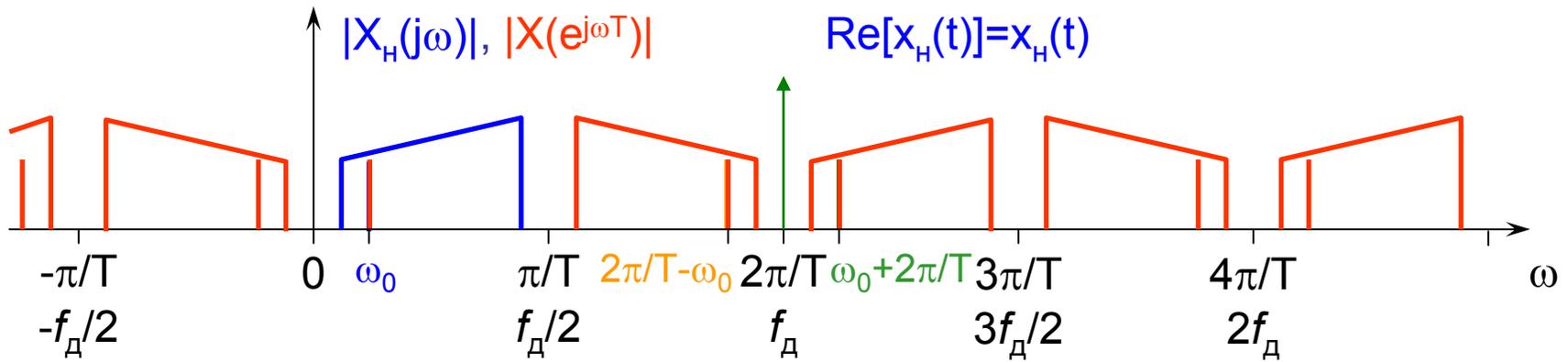
т.к. $X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega + 2\pi k})$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$X(e^{j\omega})$ непрерывная и
периодичная (период 2π)

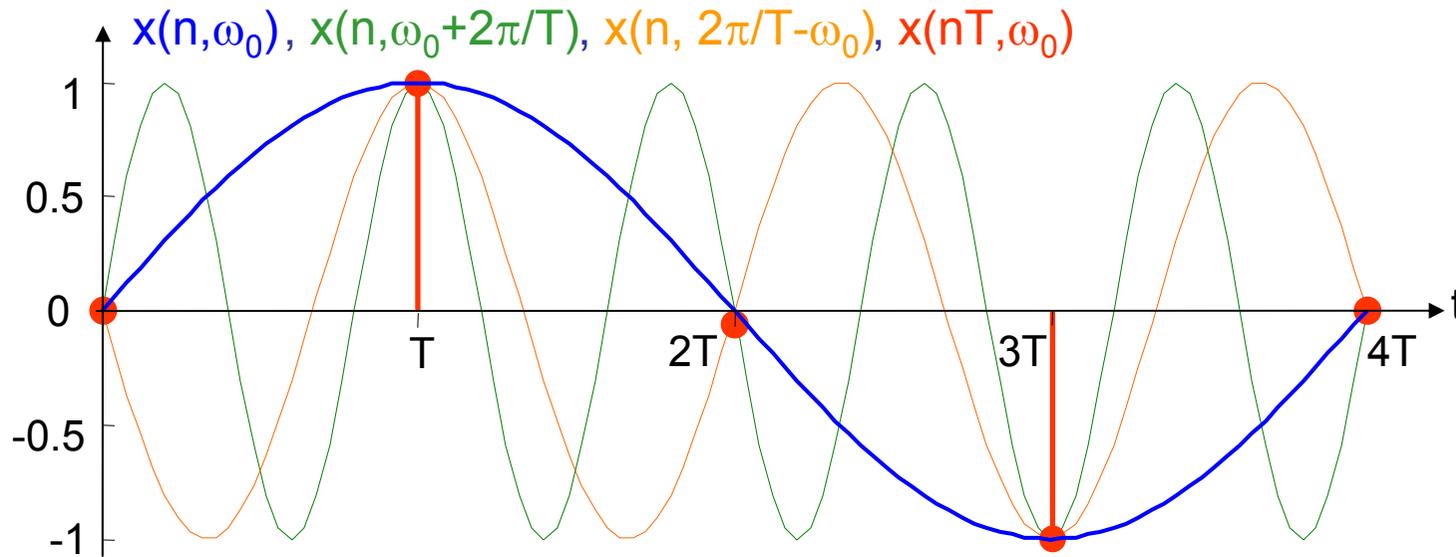
Свойства ПФ для дискретных сигналов

Свойство	Последовательность $x(n)$ $y(n)$	Преобразование Фурье $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. Линейность	$a \cdot x(n) + b \cdot y(n)$	$a \cdot X(e^{j\omega}) + b \cdot Y(e^{j\omega})$
2. Задержка	$x(n - n_0)$	$e^{j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$
3. Частотный сдвиг	$e^{j\omega_0 n} \cdot x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. Свертка	$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
5. Произведение	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$

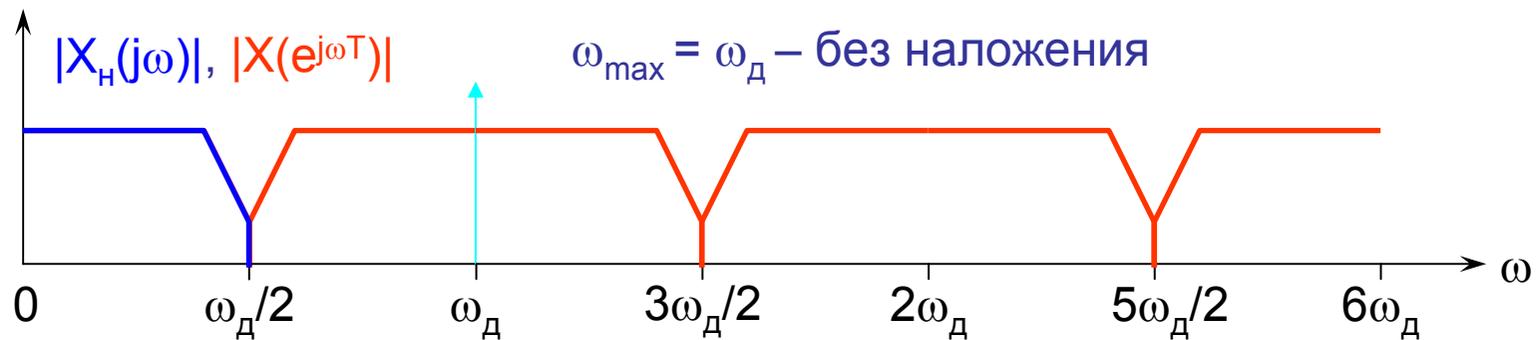
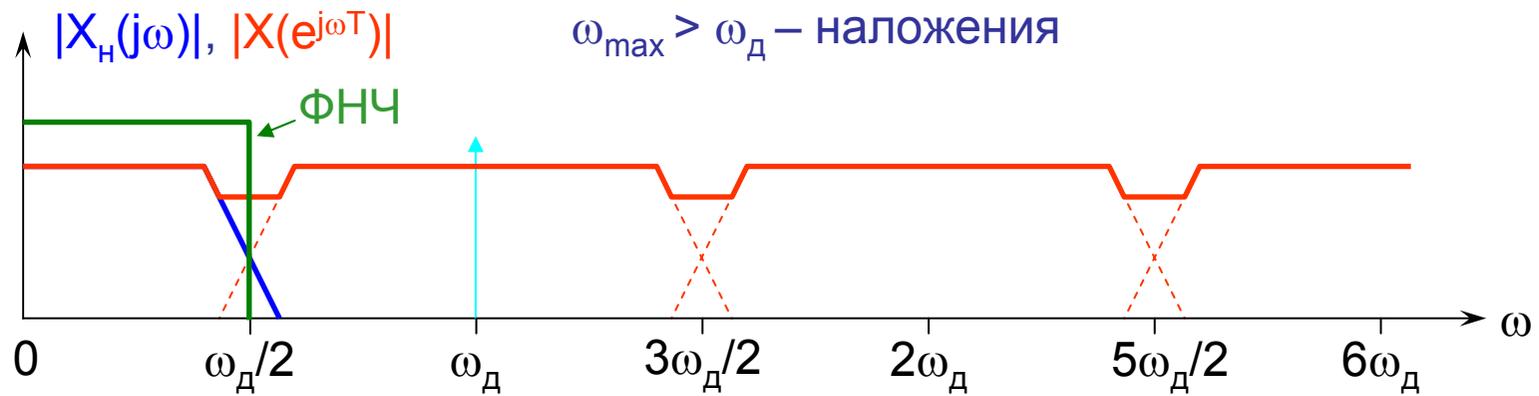
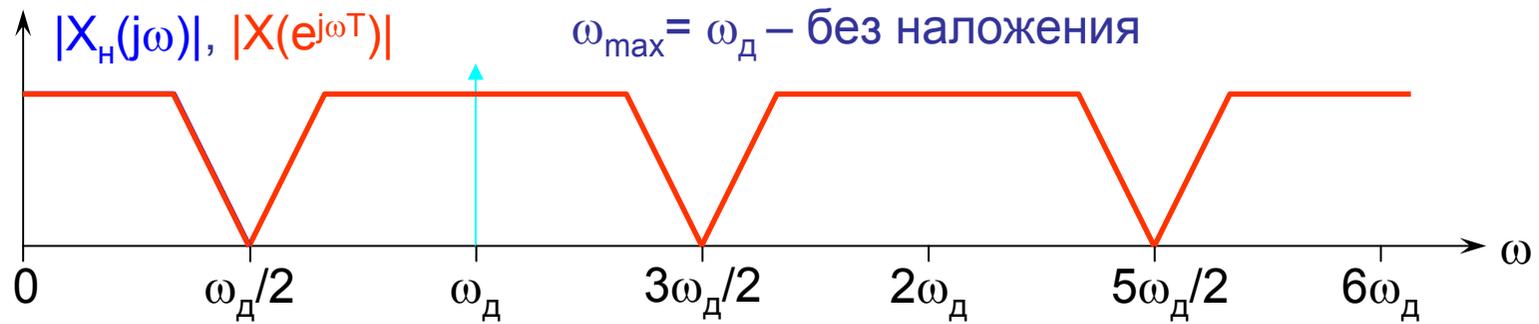
Соотношение между ПФ дискретных и непрерывных сигналов



$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right)$$



Эффект наложения спектров (aliasing)



Z-преобразование

Применяется для описания, синтеза и анализа ЛПП

Преобразование Лапласа

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Z-преобразование

$$X(\sigma, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-\sigma n} \cdot e^{-j\omega n}$$

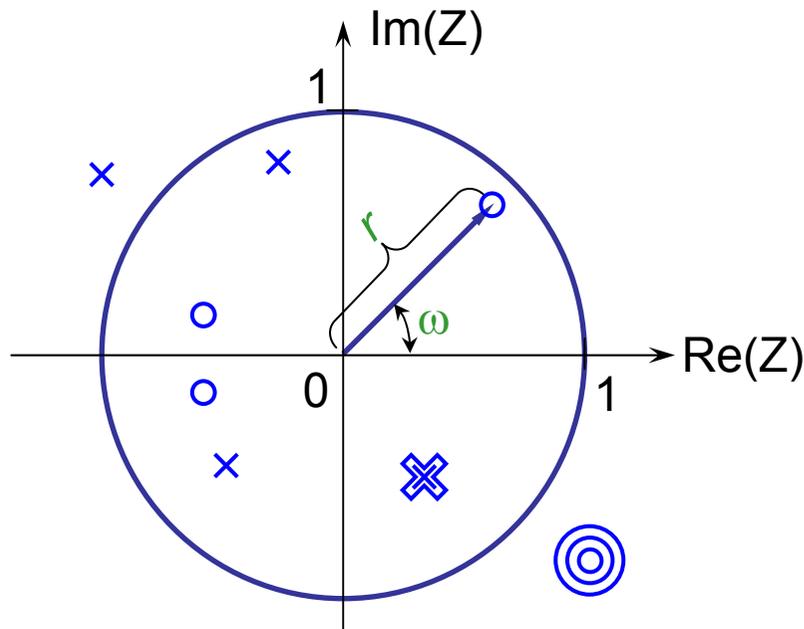
$$e^{-\sigma n} = r^{-n}, \quad \sigma = \ln(r)$$

$$X(r, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$$

Z-плоскость

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}, \quad z = r e^{j\omega}, \quad r\text{-радиус, } \omega\text{-угол, } e^{j\omega} \text{ - единичная окружность}$$



ЛПП устойчива, если все полюса находятся внутри единичной окружности:

$$r_p < 1$$

Для любой ЛПП $X(z)$ можно представить в виде:

$$X(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}},$$

где z_i – нули;
 p_i – полюса.

Примеры Z-преобразования

$x(n)$	$Z[x(n)]$
$u_0(n)$	1
$u_{-1}(n)$	$1/(1-z^{-1})$
$(-1)^n$	$1/(1+z^{-1})$
n	$z^{-1}/(1+z^{-1})^2$
n^2	$(z^{-1}-z^{-2})/(1+z^{-1})^3$
a^n	$1/(1-az^{-1})$

$x(n)$	$Z[x(n)]$
$e^{j\omega n}$	$1/(1-e^{j\omega}z^{-1})$
na^{n-1}	$z^{-1}/(1-az^{-1})^2$
$a^n \sin(n\tau)$	$\frac{az^{-1} \sin \tau}{1 - 2az^{-1} \cos \tau + a^2 z^{-2}}$
$a^n \cos(n\tau)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \tau}{1 - 2az^{-1} \cos \tau + a^2 z^{-2}}$

Связь Z-преобразования и преобразования Фурье

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

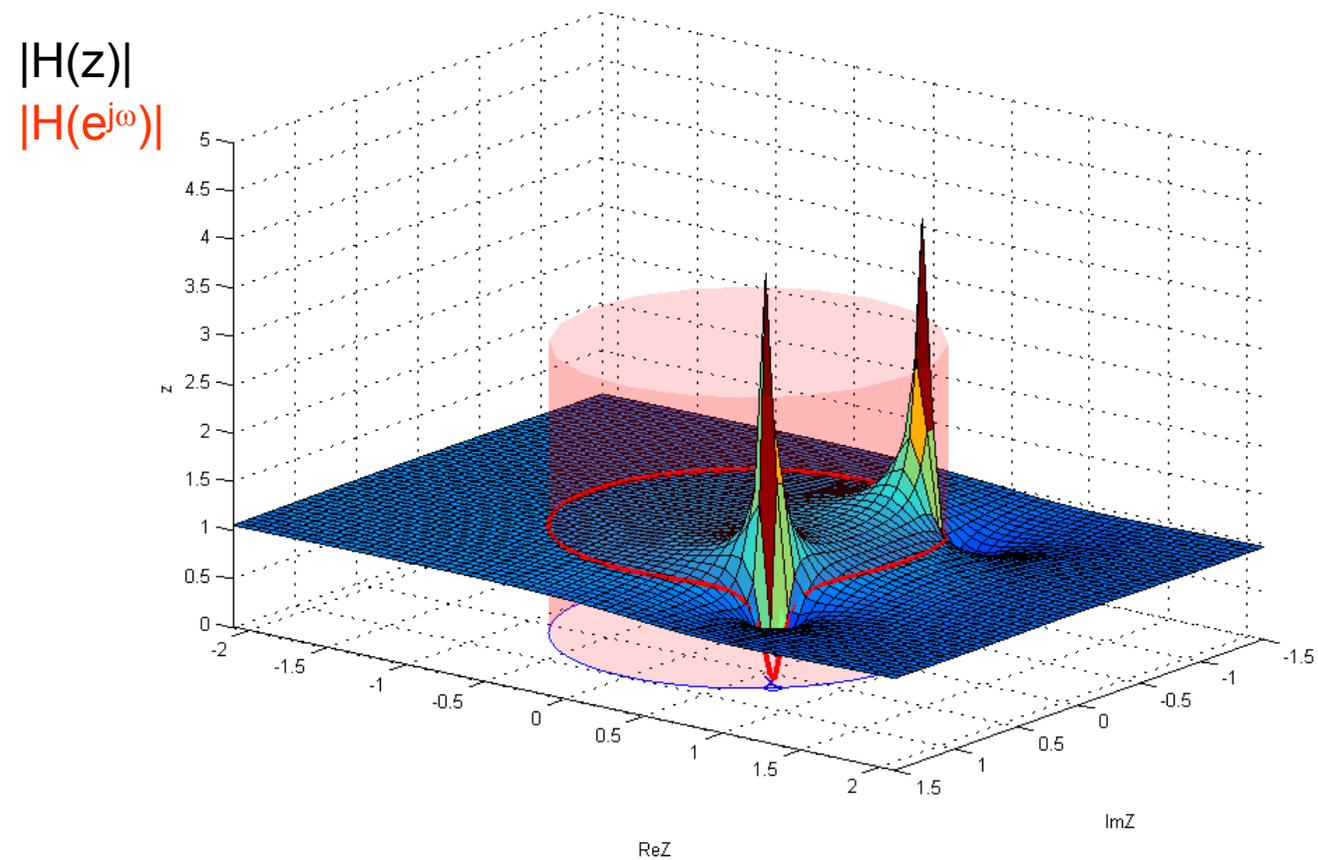
Пример

$$Z_1 = e^{j\pi/4} = 0.707 + j \cdot 0.707$$

$$Z_2 = e^{-j\pi/4} = 0.707 - j \cdot 0.707$$

$$\rho_1 = 0.9 \cdot e^{j\pi/4} = 0.636 + j \cdot 0.636$$

$$\rho_2 = 0.9 \cdot e^{-j\pi/4} = 0.636 - j \cdot 0.636$$



Основные свойства Z-преобразования

Свойство	Последовательность $x(n)$ $y(n)$	Z-преобразование $X(z)$ $Y(z)$
1. Линейность	$a \cdot x(n) + b \cdot y(n)$	$a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$
2. Задержка	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \cdot X(z)$
3. Частотный сдвиг	$a^n \cdot x(n)$	$X(z/a)$
4. Свертка	$x(n) * y(n)$	$X(z) \cdot Y(z)$
5. Произведение	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) \cdot Y(z/v) \cdot v^{-1} dv$

Обратное Z-преобразование

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Способы вычисления:

1. Деление числителя на знаменатель
2. Разложение на простые дроби
3. Использование теоремы о вычетах
4. Таблица Z-преобразований

Одностороннее Z-преобразование

Предназначено для анализа физически реализуемых систем

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Основное отличие – в свойстве задержки

$$X(z) = z^{-n_0} X_1(z) + x_1(-n_0) + x_1(-n_0 + 1)z^{-1} + \dots + x_1(-1)z^{-(n_0-1)},$$

где $x_1(-n_0), x_1(-n_0 + 1), \dots, x_1(-1)$ - начальные условия

При нулевых начальных условиях:

$$X(z) = X_1(z)z^{-n_0} \quad \text{- аналогично двустороннему Z-преобразованию}$$

Решение РУ с помощью Z-преобразования

Пример: решить РУ $y(n) = x(n) + ay(n-1)$, $y(-1) = K$, $x(n) = e^{j\omega n} u_{-1}(n)$

Решение: $Y(z) = X(z) + a[Y(z)z^{-1} + K]$ - Z-преобразование от обеих частей

$$Y(z) = \frac{X(z) + aK}{1 - az^{-1}}, \quad x(n) = e^{j\omega n} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - e^{j\omega} z^{-1})(1 - az^{-1})} = \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{a/(a - e^{j\omega})}{1 - az^{-1}} + \frac{-e^{j\omega}/(a - e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}$$

$$y(n) = \square^{-1}(Y(z)) = \left[a^{n+1} K + \frac{a^{n+1}}{a - e^{j\omega}} - \frac{-e^{j\omega(n+1)}}{a - e^{j\omega}} \right] u_{-1}(n)$$

Общий случай решения РУ порядка L

$$y(n) = \sum_{i=0}^L a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^L b_i y(n-i), \quad x(n) = 0 \text{ при } n < 0$$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^L a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^L b_i [z^{-1} Y(z) + Y(-i) + Y(1-i) z^{-1} + \dots]$$

Пример вычисления обратного Z-преобразования

$$X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1}$$

1. Деление числителя на знаменатель:

$$30z^2 \left| \begin{array}{l} 6z^2 - z - 1 \\ \hline 5 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{35}{36}z^{-2} + \dots \end{array} \right.$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} = x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + \dots = 5 + \frac{5}{6} + \dots$$

$$x(n) = \left\{ 5, \frac{5}{6}, \frac{35}{36}, \dots \right\}$$

2. Разложение на простые дроби:

$$Z^{-1} \left(\frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}} \right) = \alpha_i p_i^n$$

$$p_1 = 1/2, \quad p_2 = -1/3$$

$$X(z) = \frac{30z^2}{6(z-1/2)(z+1/3)} = \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x(n) = \begin{cases} 3(1/2)^n + 2(-1/3)^n, & \text{при } n \geq 0 \\ 0, & \text{при } n < 0 \end{cases}$$

Пример вычисления обратного Z-преобразования

3. Использование теоремы вычетов

$$x(n) = \sum_{z \in c_1} \text{res} \left[X(z) \cdot z^{n-1} \right]$$

Определение вычета $f(z)$ в полюсе порядка m :

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right]$$

При $m=1$ и $f(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$: $\text{Res } f(a) = \frac{p(a)}{g'(a)}$

$$X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} \Rightarrow f(z) = \frac{30z^2 z^{n-1}}{6z^2 - z - 1} \quad p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = -\frac{1}{3};$$

$$\text{Res } f(1/2) = \frac{30 \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2)^{n-1}}{2 \cdot 6 \cdot 1/2 - 1} = 3 \cdot (1/2)^n; \quad \text{Res } f(-1/3) = \frac{30 \cdot (-1/3)^2 \cdot (-1/3)^{n-1}}{-2 \cdot 6 \cdot 1/3 - 1} = 2 \cdot (-1/3)^n;$$

$$x(n) = \text{Res } f(1/2) + \text{Res } f(-1/3) = \begin{cases} 3 \cdot (1/2)^n + 2 \cdot (-1/3)^n, & \text{ї дє } n \geq 0 \\ 0, & \text{ї дє } n < 0 \end{cases}$$

Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье размерностью N:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0, 1 \dots N-1$$

$X_p(k)$ – периодическая последовательность с периодом N

Обратное дискретное преобразование Фурье:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0, 1 \dots N-1$$

$x_p(n)$ – периодическая последовательность с периодом N

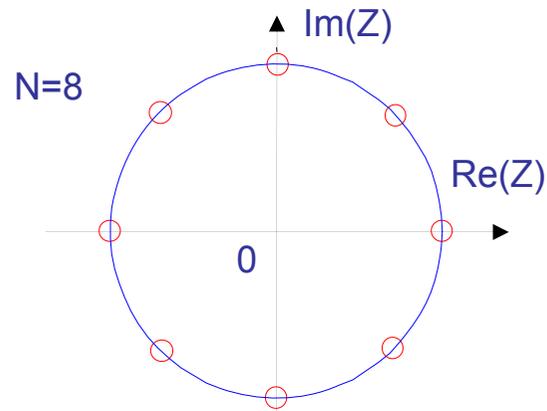
Связь Z-преобразования и ДПФ

Пусть $x(n) = \begin{cases} x_p(n), & \text{при } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{при других } n \end{cases}$ – конечная последовательность

Тогда $X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$

Полагая $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0, 1..N-1$

$$X_p(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



Связь ДПФ и ПФ

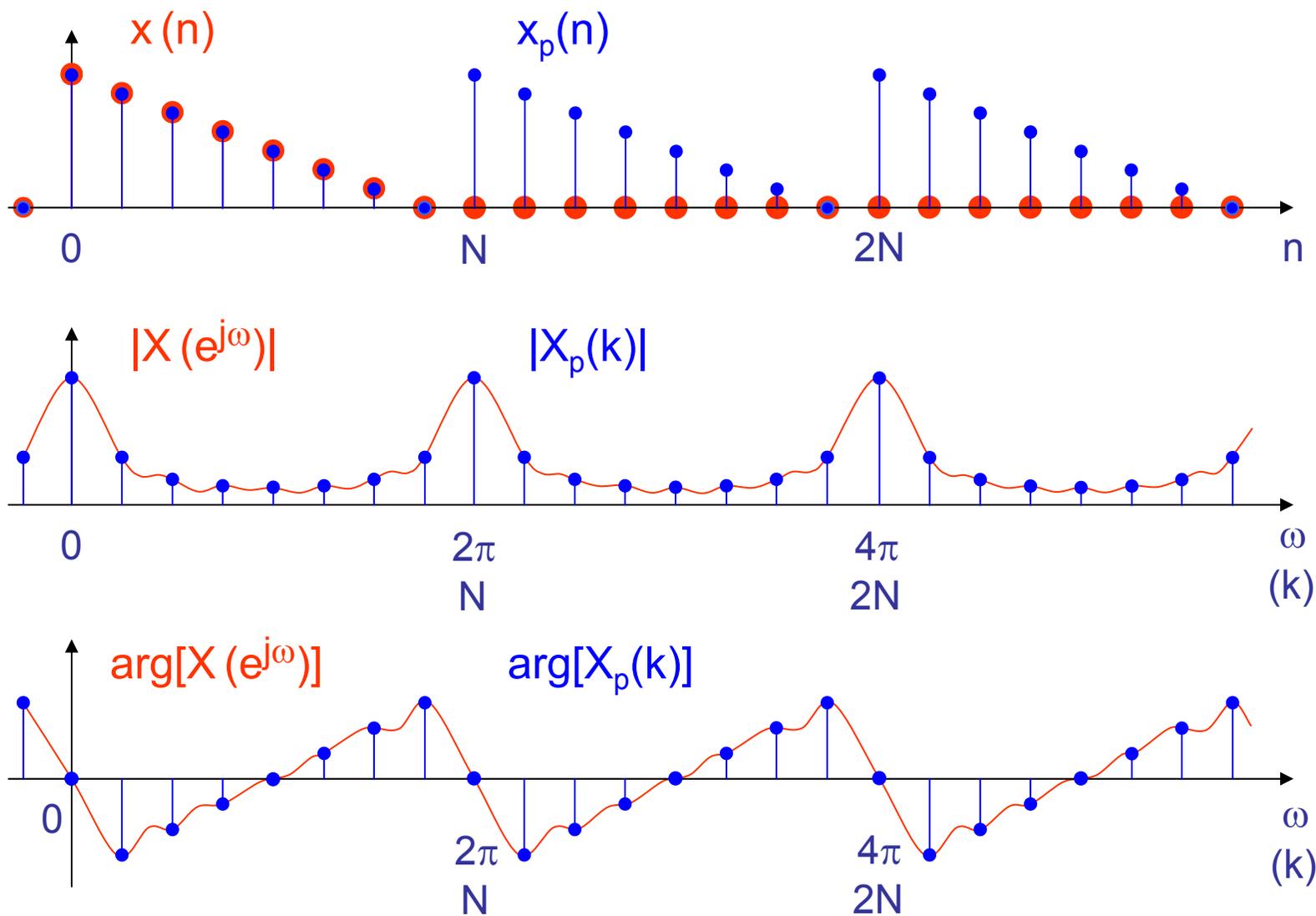
$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}_{x(n)} z^{-n} = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} X_p(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}}
 \end{aligned}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot \Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right),$$

где: $\Phi(\omega) \square \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}, \quad \Phi(0)=1 \Rightarrow:$

$$X(e^{j2\pi k/N}) = X(k)$$

Связь ПФ и ДПФ (пример)



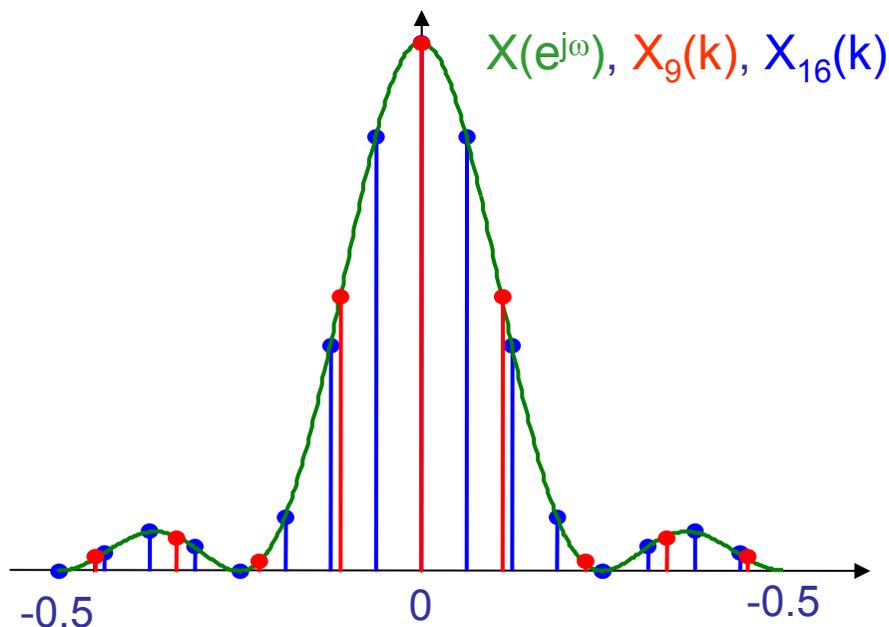
Дополнение нулями

$x(n)$ – конечная последовательность длины N , $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_l} = X\left(e^{j(2\pi/L)l}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j(2\pi/L)ln}, \quad \omega_l = 2\pi l / L, \quad l = 0, 1, \dots, L-1$$

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq L-1, \end{cases} \quad \hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \hat{x}(n) \cdot e^{-j(2\pi/L)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j(2\pi/L)kn}$$

$$\hat{X}(k) = X\left(e^{-j(2\pi/L)k}\right)$$

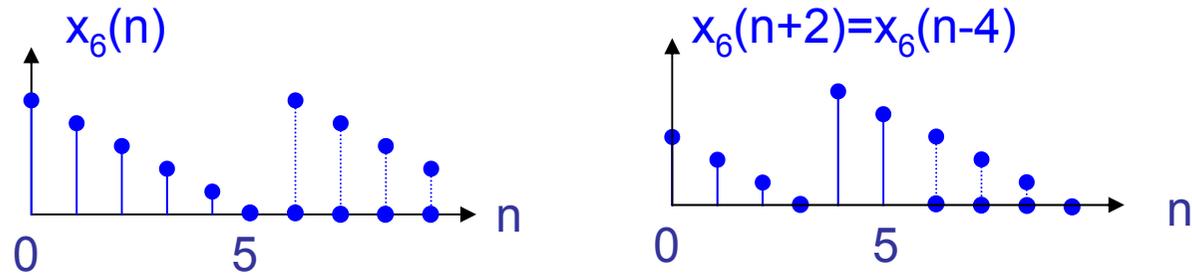


Основные свойства ДПФ

Свойство	Последовательности с периодом N $x_N(n), y_N(n)$	N-точечное ДПФ $X_N(k) Y_N(k)$
1. Линейность	$a \cdot x_N(n) + b \cdot y_N(n)$	$a \cdot X_N(k) + b \cdot Y_N(k)$
2. Задержка	$x_N(n - n_0)$	$X_N(k) e^{-\frac{2\pi}{N} n_0 k}$
3. Частотный сдвиг	$x_N(k) e^{-\frac{2\pi}{N} n_0 k}$	$X_N(k - n_0)$
4. Свертка	$x_N(n) * y_N(n)$	$X_N(k) \cdot Y_N(k)$
5. Произведение	$x_N(n) \cdot y_N(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_N(m) Y_N(k - m)$

Основные свойства ДПФ

Циклический сдвиг конечной последовательности



Если $x_N(n)$, $y_N(n)$ - действительные

6. Симметрия:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[X_N(k)] = \operatorname{Re}[X_N(N-k)] \\ \operatorname{Im}[X_N(k)] = -\operatorname{Im}[X_N(N-k)] \\ |X_N(k)| = |X_N(N-k)| \\ \arg X_N(k) = -\arg X_N(N-k) \end{cases}$$

Пусть $z_N(n)=x_N(n)+jy_N(n)$

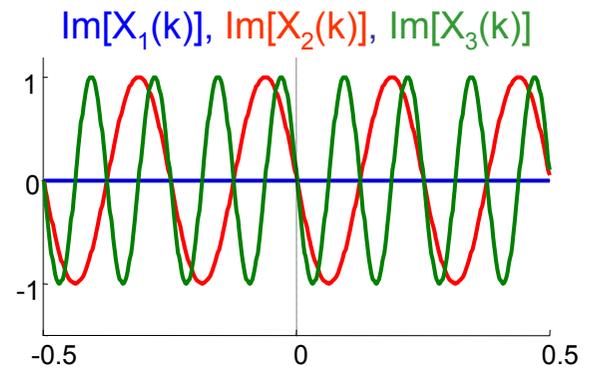
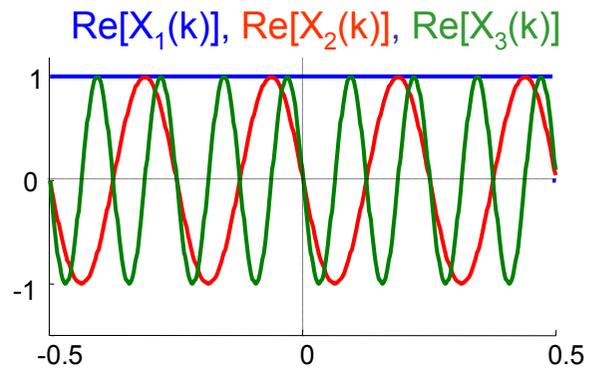
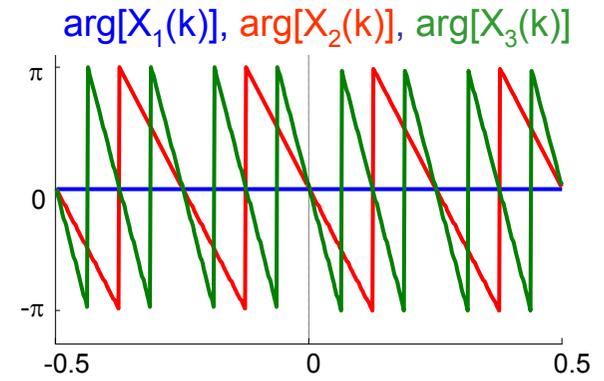
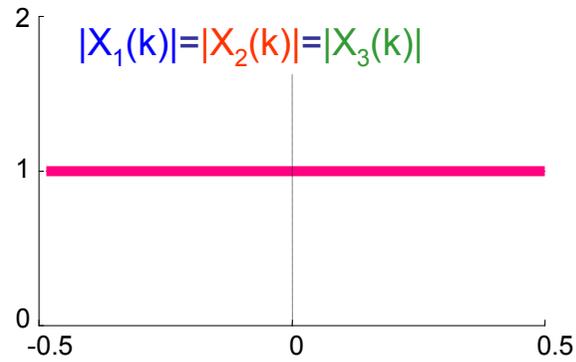
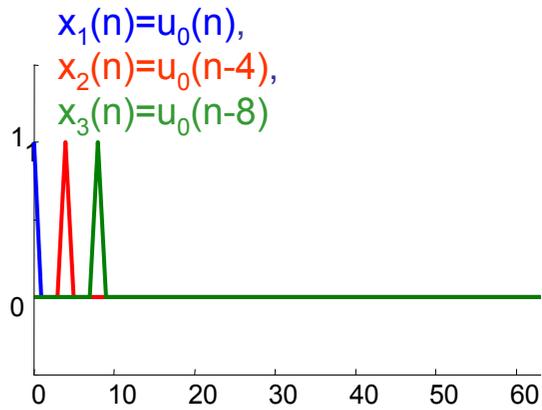
$$\operatorname{Re}[X_N(k)] = 1/2(\operatorname{Re}[Z_N(k)] + \operatorname{Re}[Z_N(N-k)])$$

$$\operatorname{Im}[X_N(k)] = 1/2(\operatorname{Im}[Z_N(k)] - \operatorname{Im}[Z_N(N-k)])$$

$$\operatorname{Re}[Y_N(k)] = 1/2(\operatorname{Im}[Z_N(k)] + \operatorname{Im}[Z_N(N-k)])$$

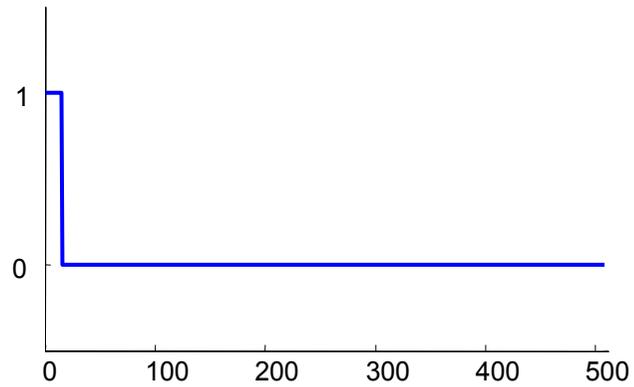
$$\operatorname{Im}[Y_N(k)] = 1/2(\operatorname{Re}[Z_N(N-k)] - \operatorname{Re}[Z_N(k)])$$

Примеры ДПФ

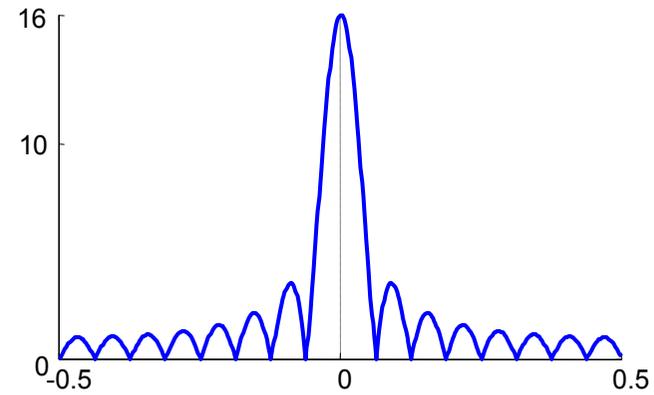


Примеры ДПФ

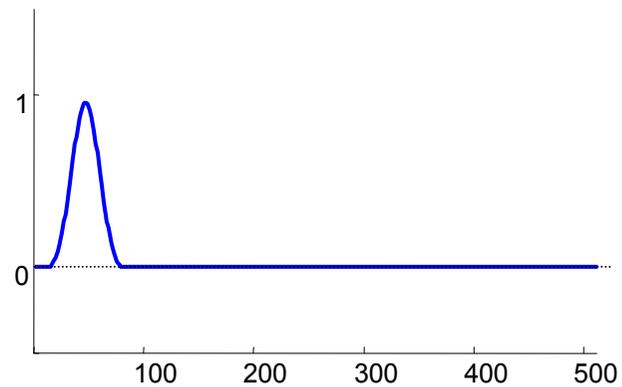
$$x(n) = u_{-1}(n),$$



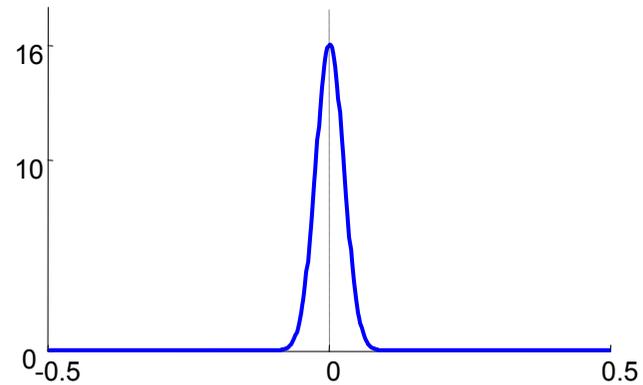
$$|X(k)|$$



$$x(n)$$



$$|X(k)|$$

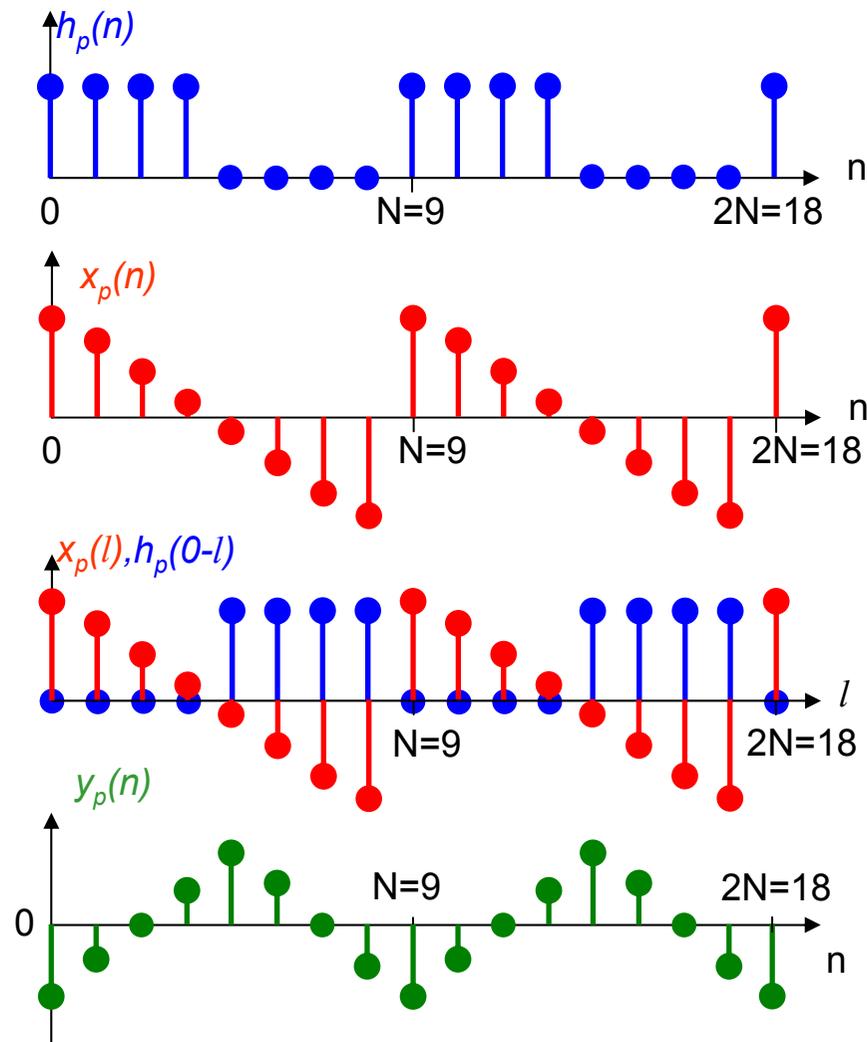


Свертка последовательностей

1. Циклическая (периодическая, круговая);
2. Линейная (апериодическая);
3. Секционированная;
4. Быстрая (на основе БПФ, на основе разложения на короткие, на основе структурных свойств, на основе ТЧП)

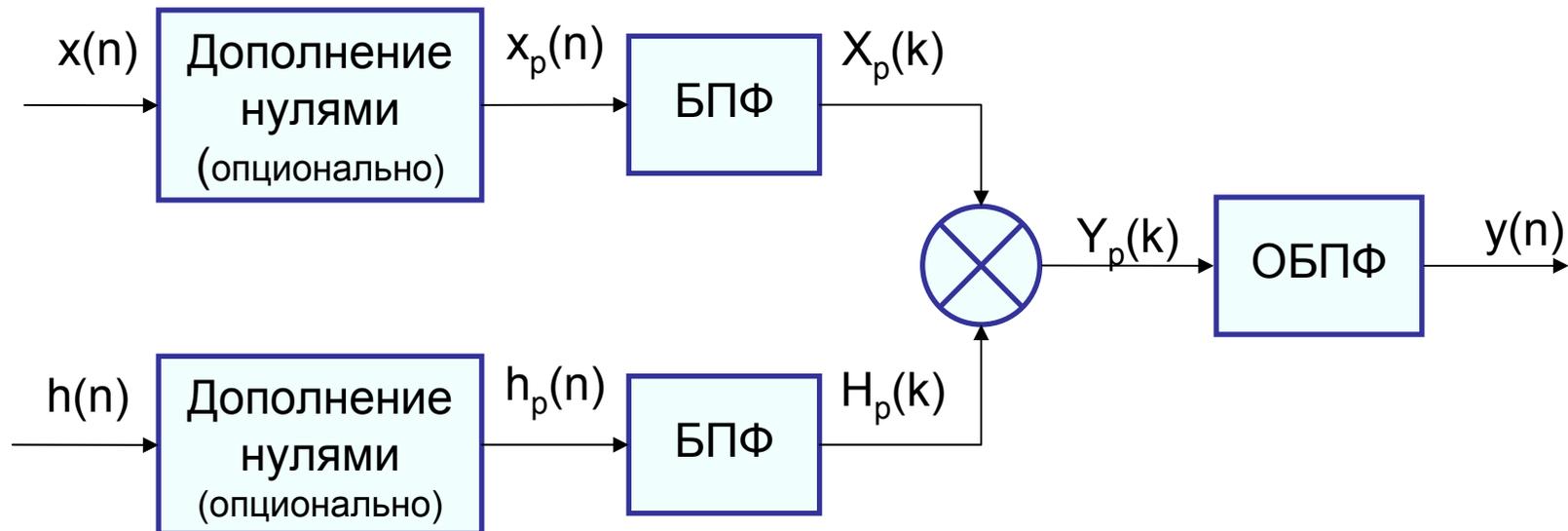
Циклическая свертка

$$y_p(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l)$$



Быстрая свертка на основе БПФ

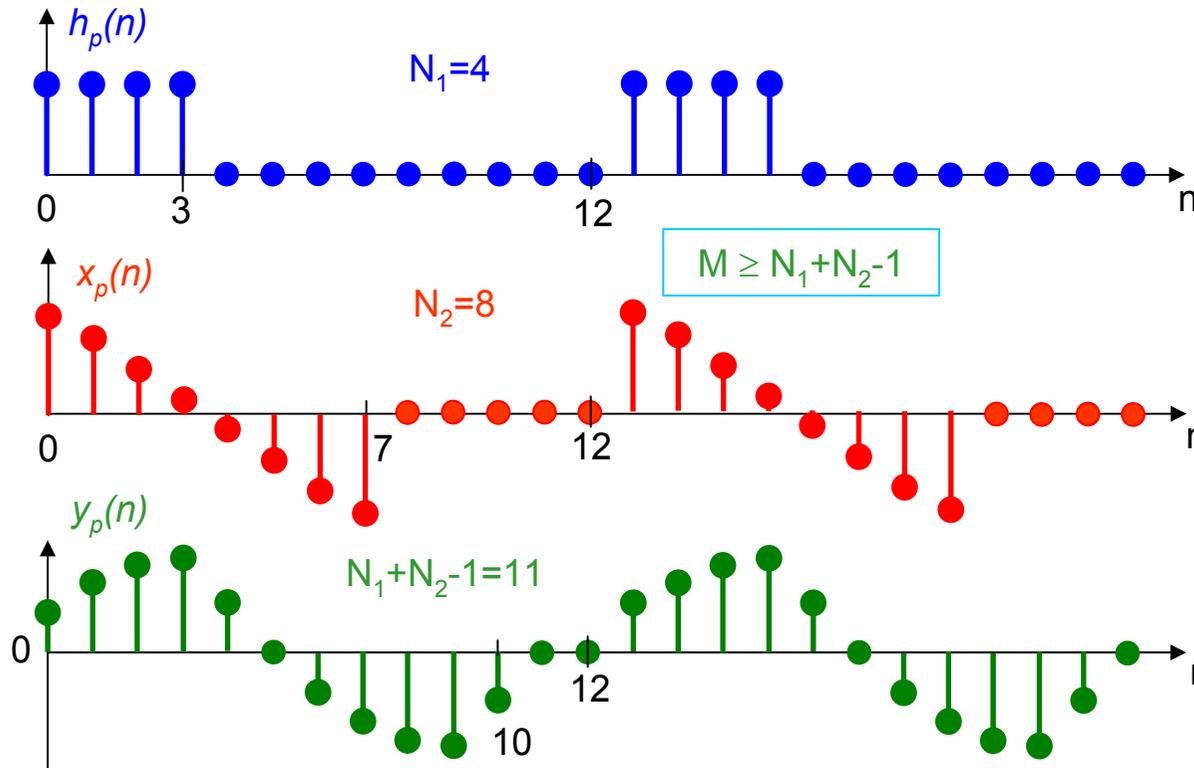
$$y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(k) = X(k) \cdot H(k)$$



Для БПФ по основанию 2 выигрыш в кол. операций умножения
 $\approx N / (\log_2 N + 1)$

Линейная свертка

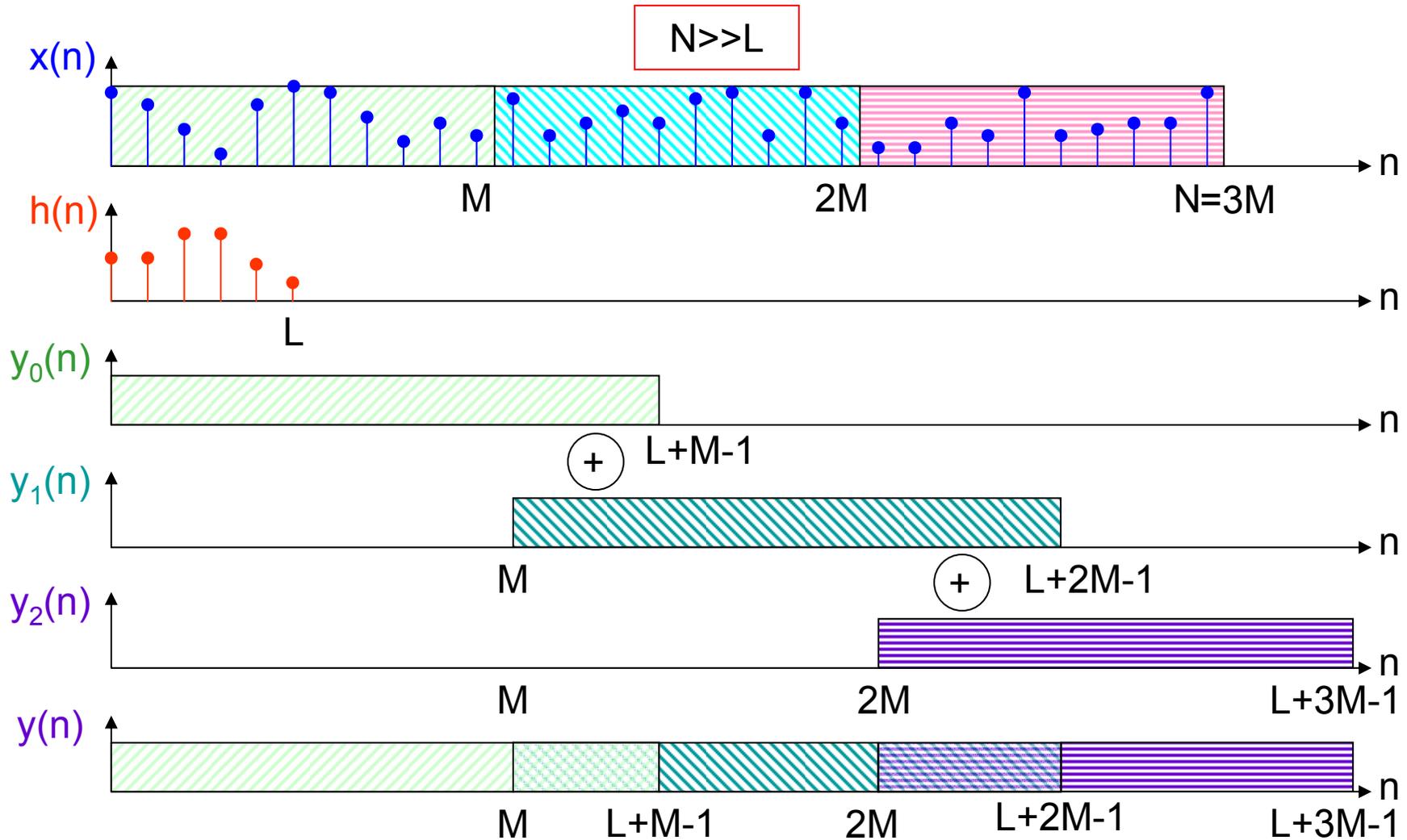
$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-n-1} x(m)h(n-m), \quad n = 0, 1, \dots, N_1 + N_2 - 1$$



Секционированные свертки

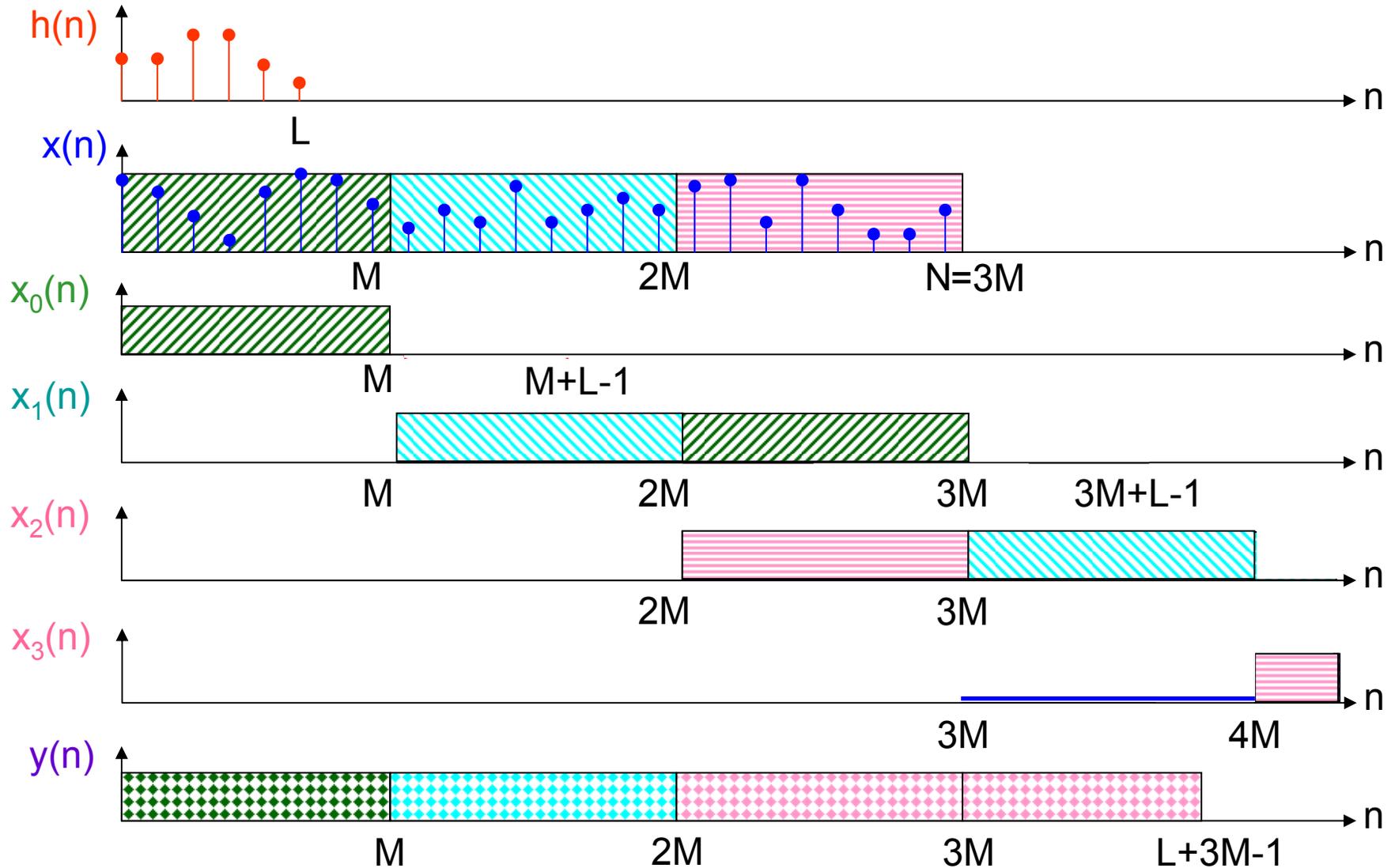
Для свертки последовательностей значительно различающихся по длине

1. Метод перекрытия с суммированием



Секционированные свертки

2. Метод перекрытия с накоплением



Раздел 2. Цифровые фильтры

Классификация

По импульсной характеристике:

- С конечной импульсной характеристикой (КИХ,КИО)
- С бесконечной импульсной характеристикой (БИХ, БИО)

По реализации:

- рекурсивные $y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots]$
- нерекурсивные $y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots]$

По назначению:

- Фильтрация во временной области (Сглаживание, удаление постоянной составляющей, изменение формы, ...)
- Фильтрация в частотной области (фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосовые (ПФ), режекторные (РФ), многочастотные, фазовые (всепропускающие),...)

По свойству адаптации:

- Неадаптивные
- Адаптивные

По скорости дискретизации:

- Неизменяющие частоту дискретизации
- Изменяющие частоту дискретизации (дециматоры, интерполяторы)

Структурные схемы цифровых фильтров

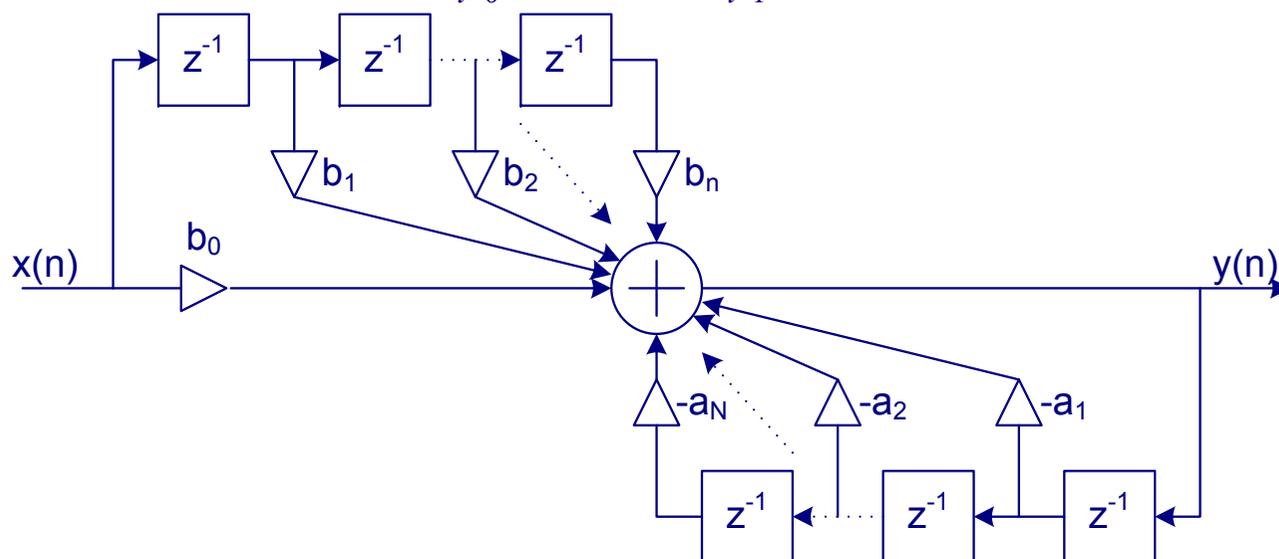
Рекурсивные фильтры

Прямая форма 1

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}; \quad a_0 = 1;$$

$$Y(z) \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}; \quad \sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i);$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$



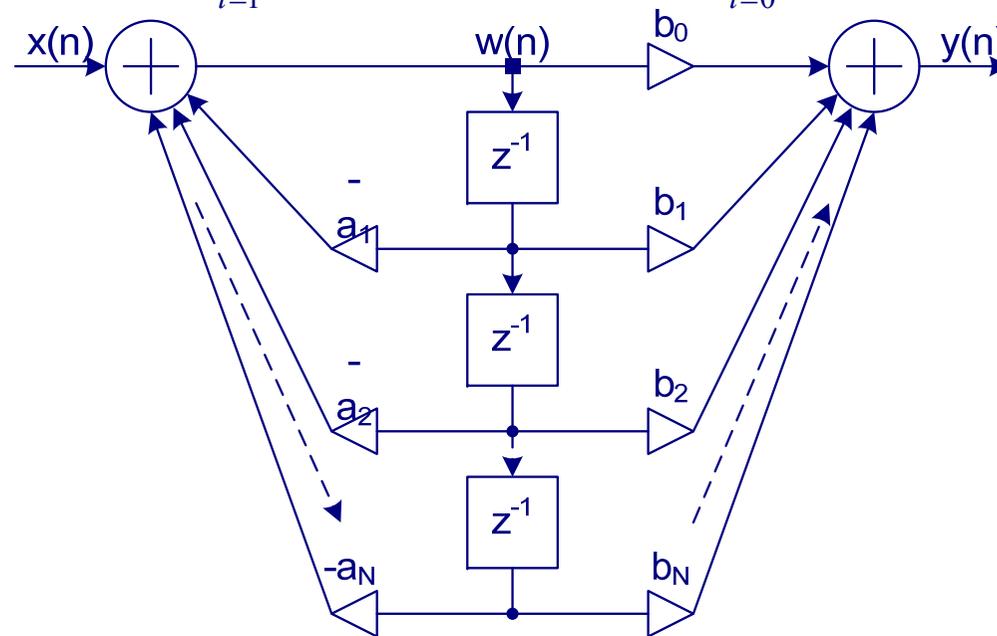
Структурные схемы рекурсивных фильтров

Прямая форма 2 (каноническая)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \cdot \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} = H_1(z) \cdot H_2(z);$$

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}; \quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i};$$

$$w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i w(n-i); \quad y(n) = \sum_{i=0}^N b_i w(n-i)$$

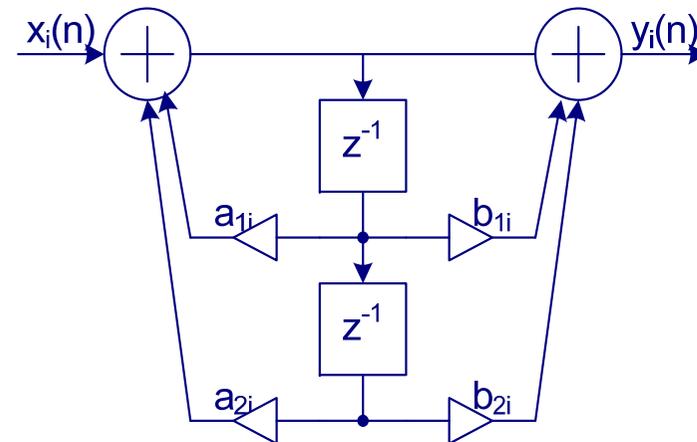
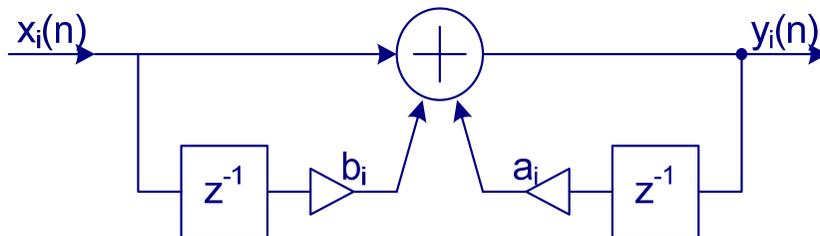
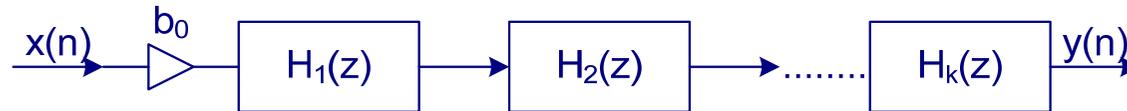


Структурные схемы рекурсивных фильтров

Каскадная форма

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = b_0 \prod_{i=1}^K H_i(z);$$

где $H_i(z) = \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}}$; либо $H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}$;



Структурные схемы рекурсивных фильтров

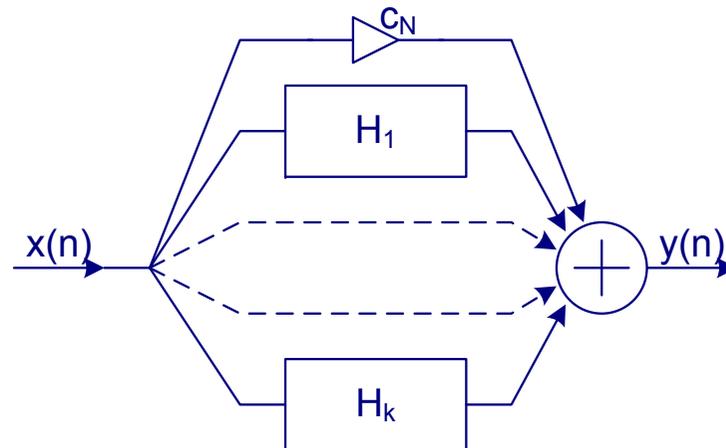
Параллельная форма

$$H(z) = c + \sum_{i=1}^K H_i(z);$$

$$c = \frac{b_N}{a_N};$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i}}{1 + a_{1i}z^{-1}};$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}};$$

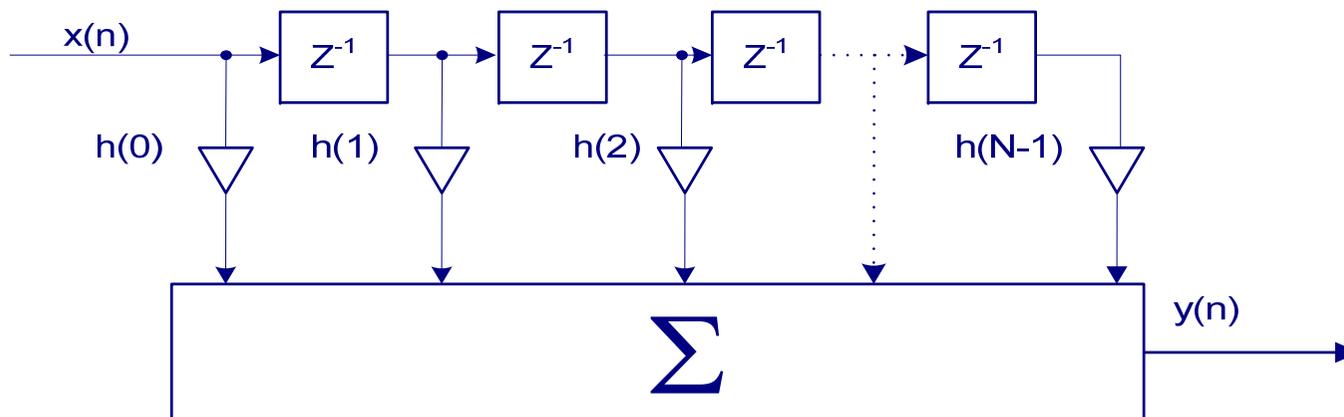


Структурные схемы нерекурсивных фильтров

Прямая форма

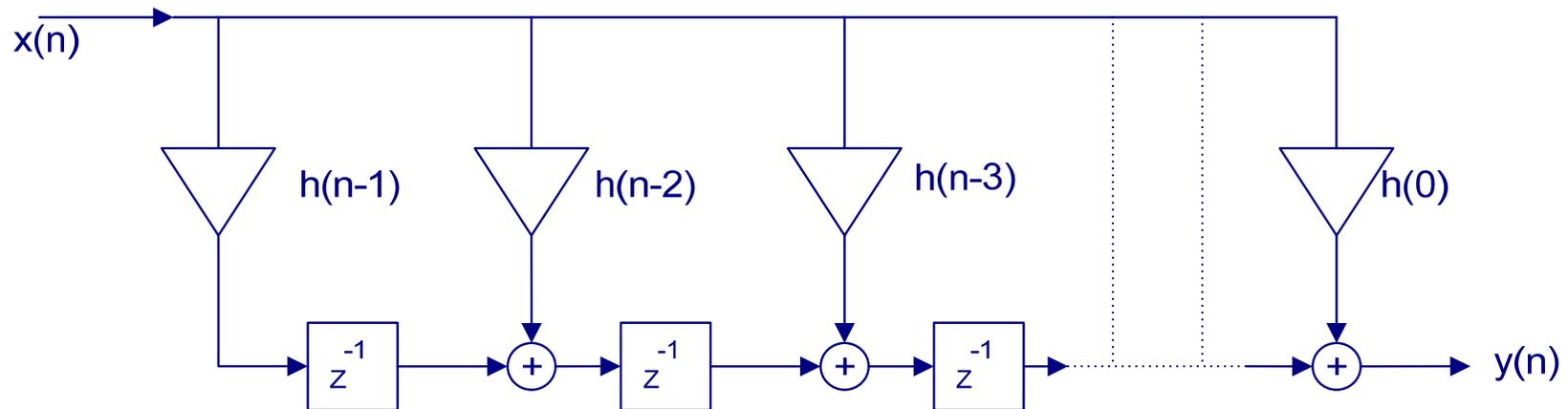
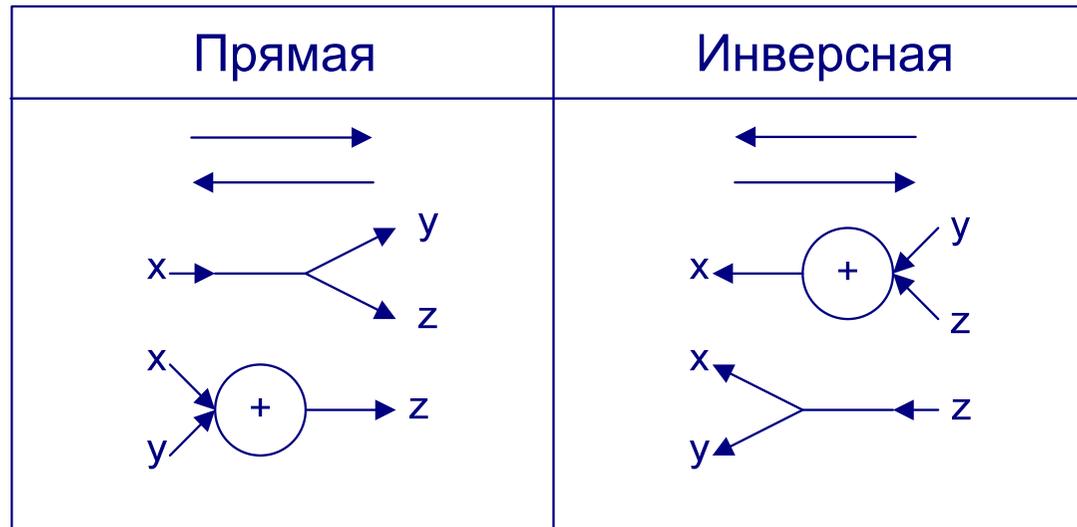
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)z^{-i};$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i)$$



Фильтр с многоотводной линией задержки
(трансверсальный фильтр)

Инверсная форма ЦФ

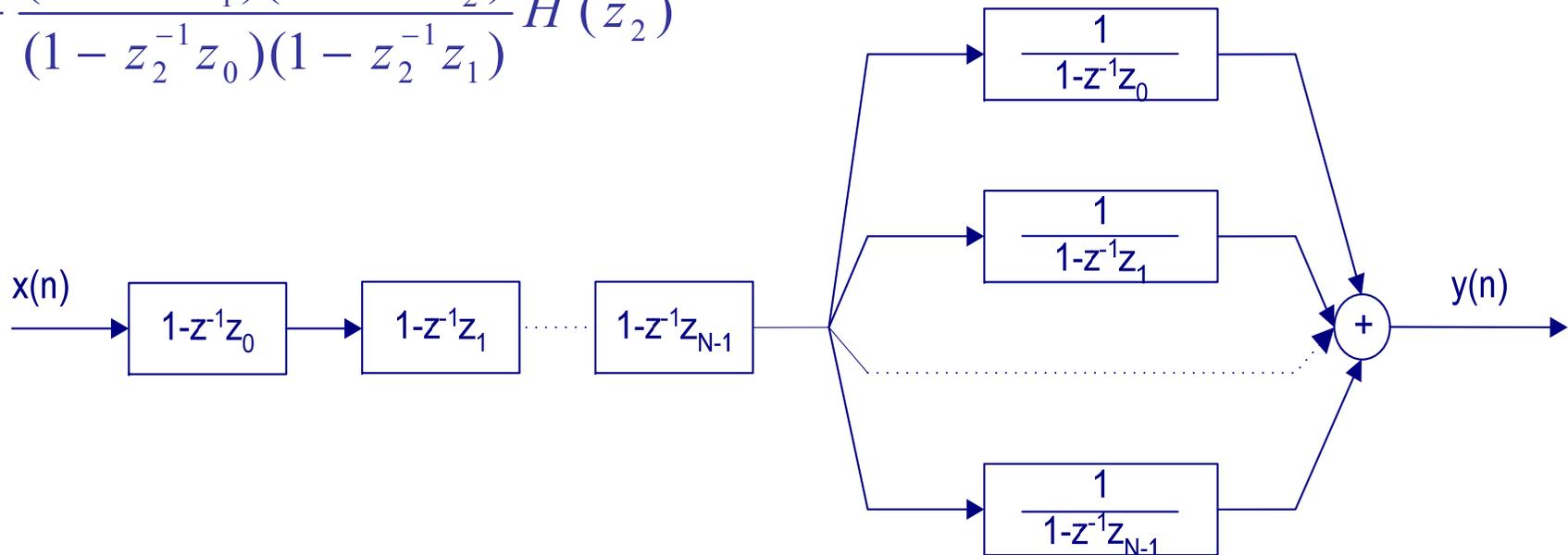


КИХ фильтр на основе интерполяционной формулы Лагранжа

$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z^{-1}z_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{A_m}{1 - z^{-1}z_m}; \quad \text{где } A_m = \frac{H(z_m)}{\prod_{n=0, n \neq m}^{N-1} (1 - z_m^{-1}z_n)}$$

Для N=3:

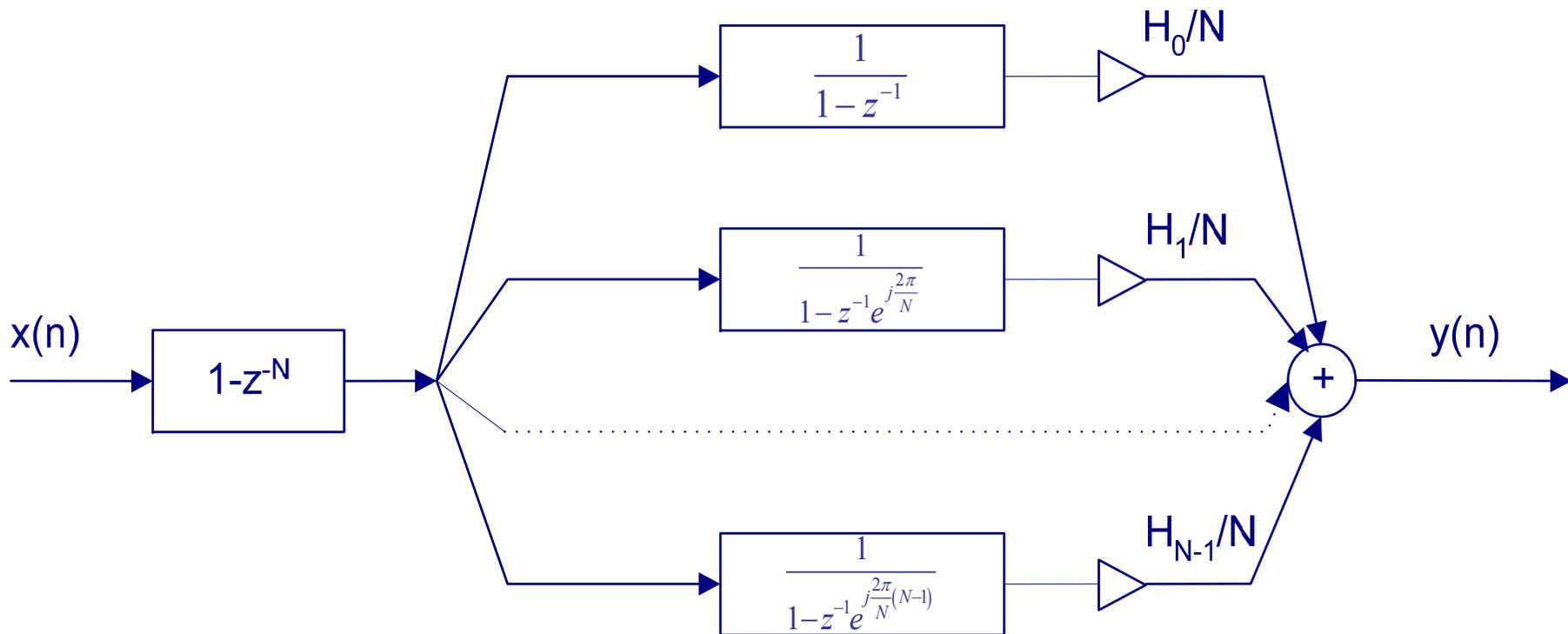
$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1}z_1)(1 - z^{-1}z_2)}{(1 - z_0^{-1}z_1)(1 - z_0^{-1}z_2)} H(z_0) + \frac{(1 - z^{-1}z_1)(1 - z^{-1}z_2)}{(1 - z_1^{-1}z_0)(1 - z_1^{-1}z_2)} H(z_1) + \frac{(1 - z^{-1}z_1)(1 - z^{-1}z_2)}{(1 - z_2^{-1}z_0)(1 - z_2^{-1}z_1)} H(z_2)$$



Фильтр с частотной выборкой

Получается из ЦФ на основе формулы Лагранжа при: $Z_n = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$, $n=0,1\dots N$

При этом $\prod_{n=0}^{N-1} [1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n}] = 1 - z^{-N}$; $A_m = \frac{1}{N} H(e^{j\frac{2\pi}{N}m})$ - отсчет ЧХ



Лестничные (решетчатые) фильтры

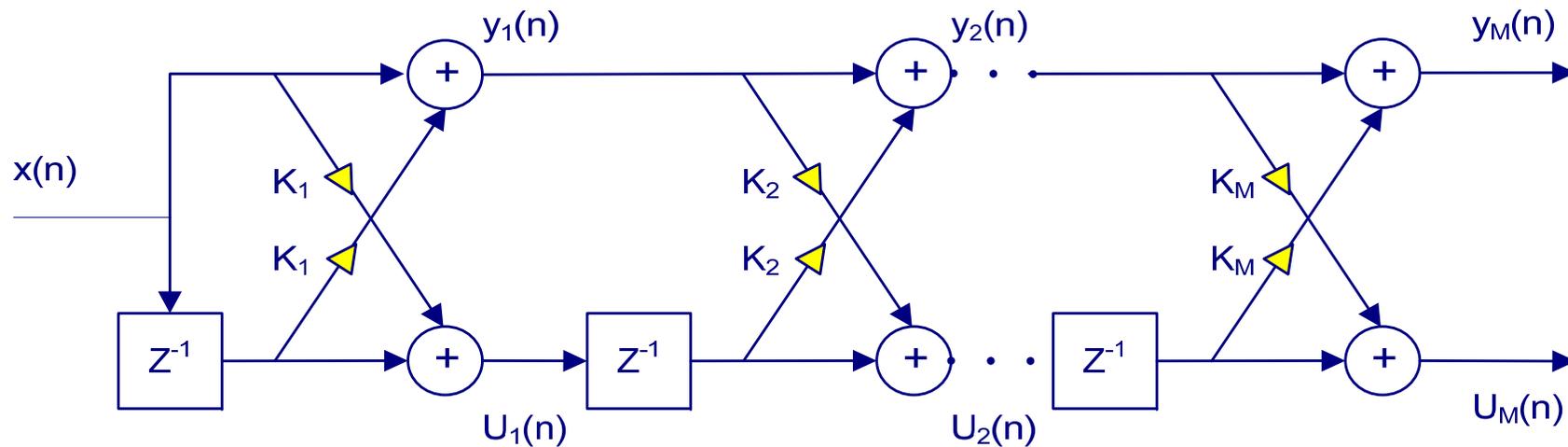
Применение:

- анализ и синтез речи;
- компрессия и декомпрессия данных;
- адаптивная фильтрация.

Физическая модель: каскадное соединение цилиндров разного диаметра. Коэффициенты фильтра представляют часть энергии волны, отраженной от границ раздела цилиндров разного диаметра.

Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none">• нечувствительны к погрешностям коэффициентов• при увеличении порядка фильтра не требуется перерасчет коэффициентов имеющихся звеньев• легко обеспечивается устойчивость БИХ-структур	<p>больше вычислительные затраты по сравнению со структурами прямой формы</p>

Нерекурсивный решетчатый фильтр



$$y_i(n) = y_{i-1}(n) + K_i u_i(n-1), \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

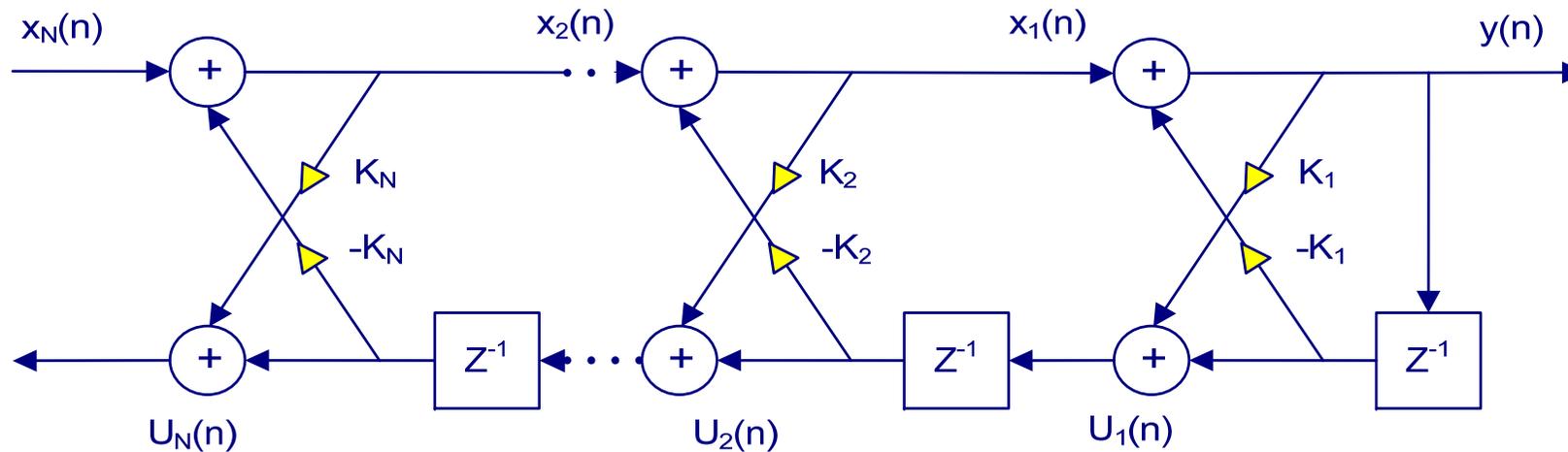
$$u_i(n) = K_i y_{i-1}(n) + u_{i-1}(n-1), \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

для первого звена:

$$y_0(n) = x(n)$$

$$u_0(n) = x(n)$$

Рекурсивный решетчатый фильтр



$$x(n) = x_N(n)$$

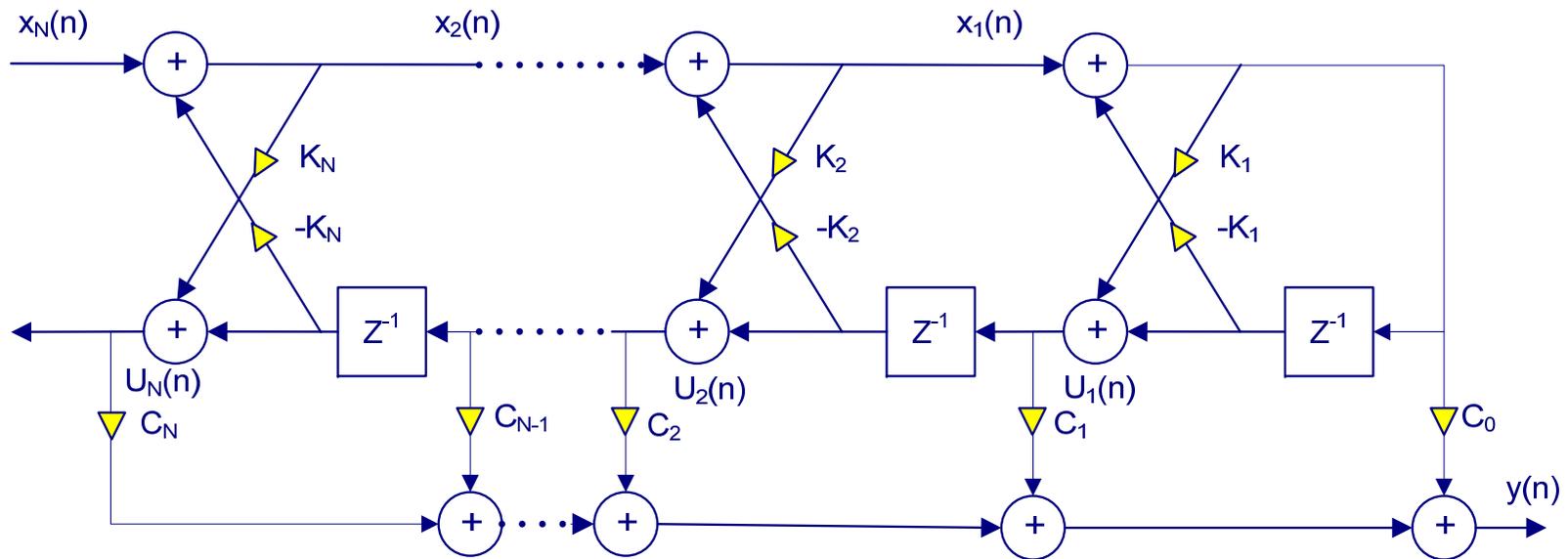
$$x_{i-1}(n) = x_i(n) - K_i u_{i-1}(n-1), \quad i = N, N-1, \dots, 1$$

$$u_i(n) = K_i x_{i-1}(n) + u_{i-1}(n-1), \quad i = N, N-1, \dots, 1$$

$$y(n) = x_0(n) = x_1(n) - K_1 y(n-1)$$

$$K_0 = 1$$

Лестнично-решетчатый фильтр



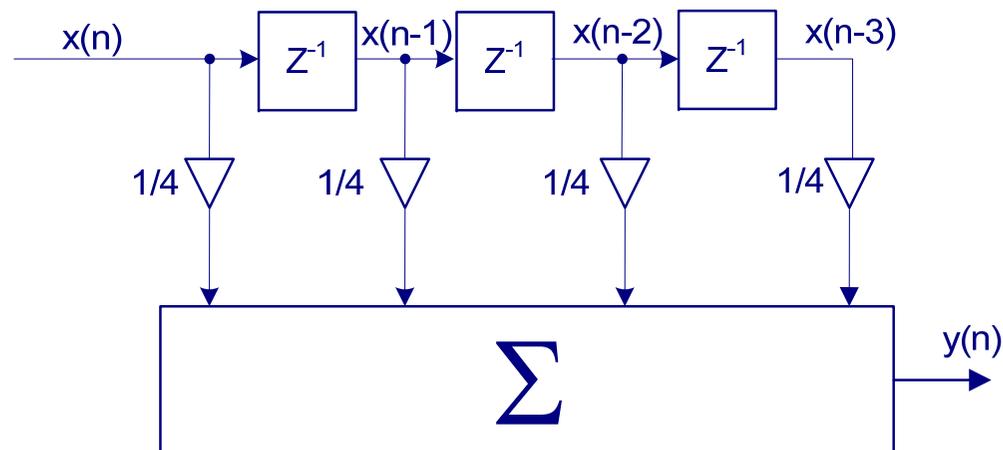
Фильтры скользящего среднего

Преимущества: оптимальный фильтр для подавления случайного шума, простота реализации

Недостаток: плохие фильтрующие свойства в частотной области

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$

Для $M=4$:
$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)}{4}$$

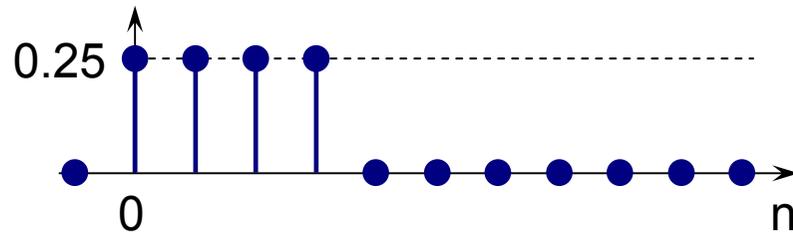


Фильтры скользящего среднего

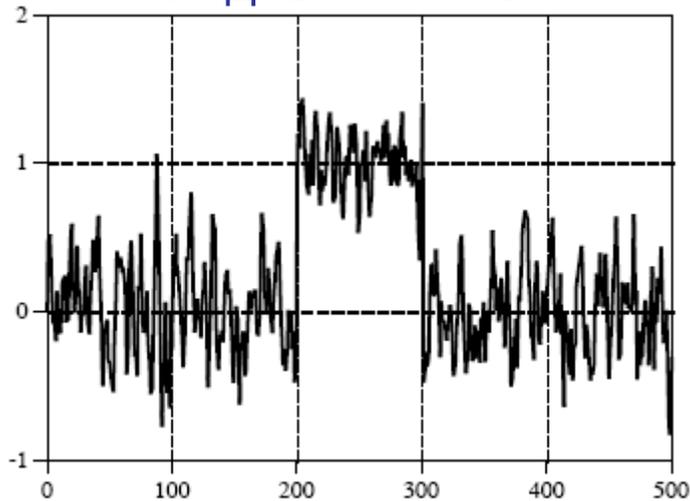
Импульсная характеристика:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M}, & \text{при } n = 0..M-1 \\ 0, & \text{при других } n \end{cases}$$

Для $M=4$:

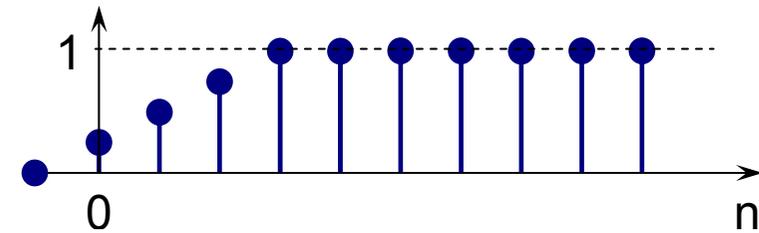


исходный сигнал

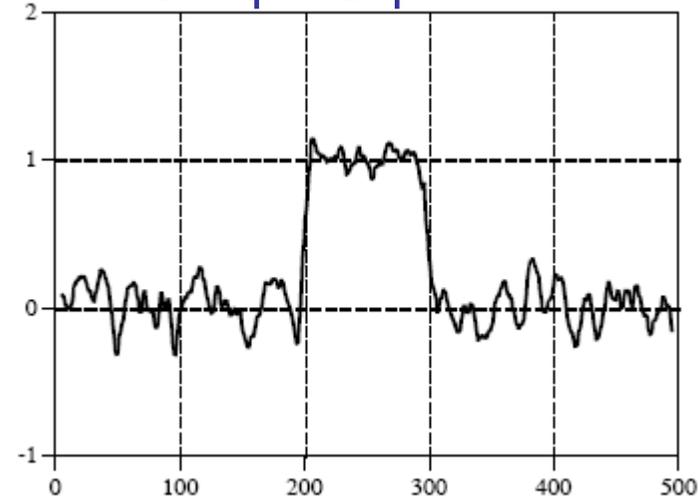


Переходная характеристика:

$$H(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{M}, & \text{при } n = 0..M-1 \\ 0, & \text{при других } n \end{cases}$$



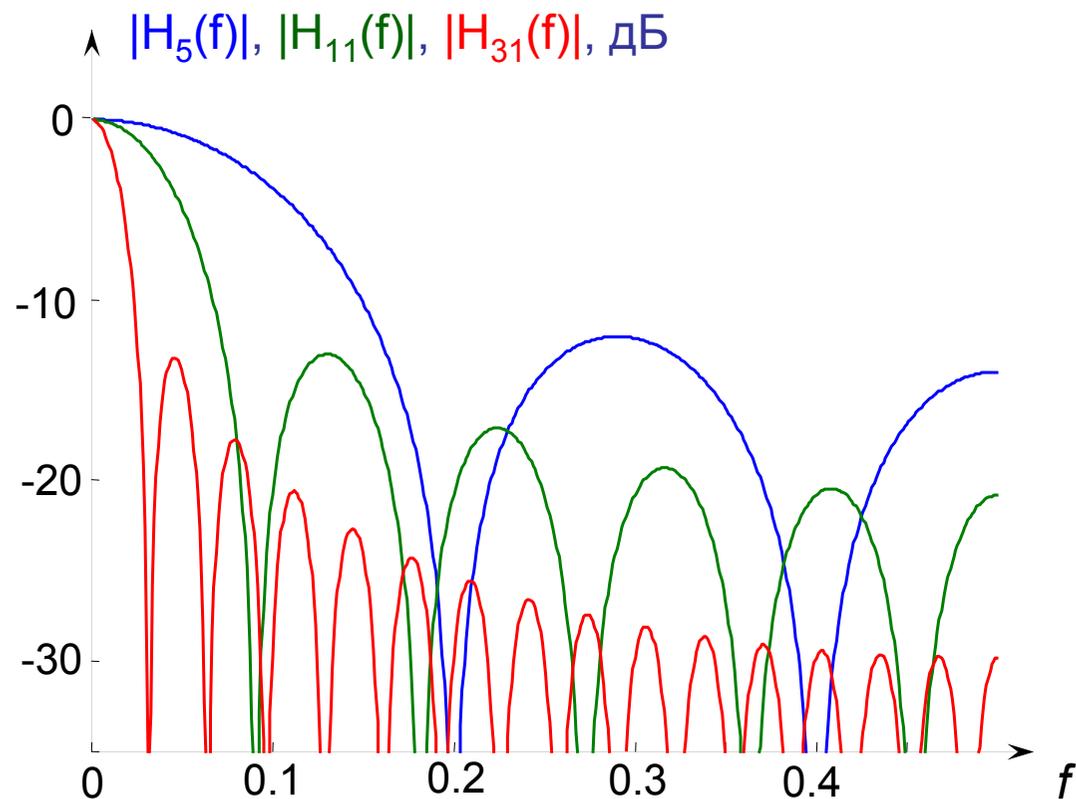
после фильтра $M=11$



Фильтры скользящего среднего

Частотная характеристика:

$$H_M(f) = \frac{\sin(M\pi f)}{M \sin(\pi f)}$$



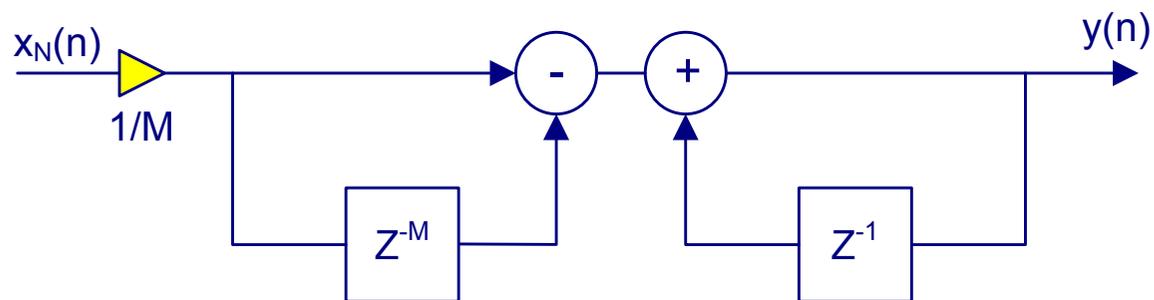
Фильтры скользящего среднего

Рекурсивная форма реализации фильтра:

$$y(n) = \frac{1}{M} (x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-M+1))$$

$$y(n+1) = \frac{1}{M} \left(x(n+1) + \underbrace{x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-M+2) + x(n-M+1)}_{My(n)} - x(n-M+1) \right)$$

$$y(n) = \frac{1}{M} (x(n) - x(n-M)) + y(n-1)$$



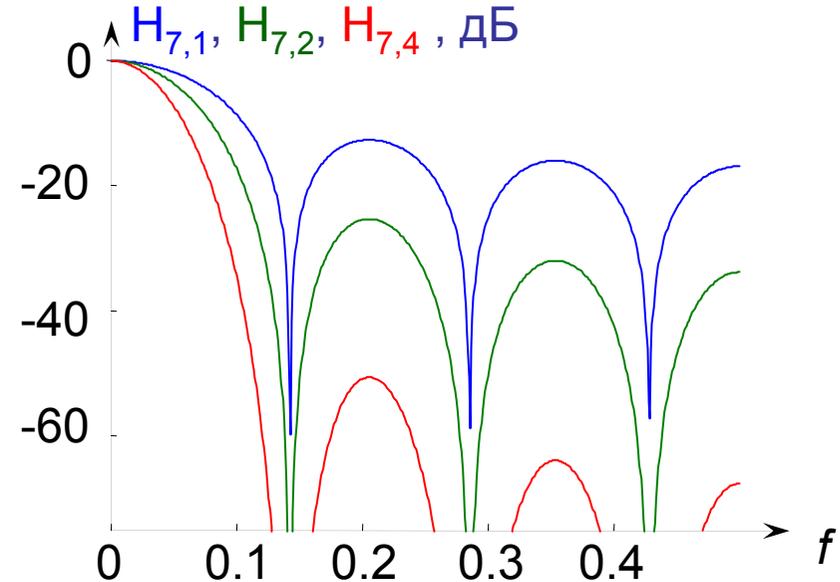
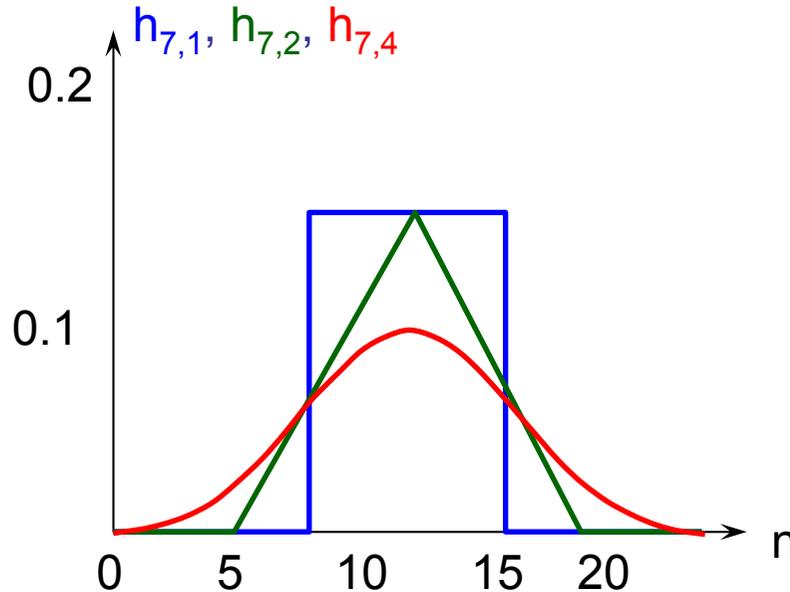
Фильтры скользящего среднего

Каскадное соединение фильтров:



Частотная характеристика:

$$H_{M,L}(f) = \left(\frac{\sin(M \pi f)}{M \sin(\pi f)} \right)^L$$



Общая характеристика КИХ-фильтров

Преимущества:

- абсолютно устойчивы;
- физически реализуемы;
- линейные ФЧХ, произвольные АЧХ;
- простой расчет шумов дискретизации;
- возможность использования БПФ.

Недостатки:

- большой порядок при высоких требованиях к скатам АЧХ.
- возможна некрatная шагу дискретизации задержка в фильтре

Основные методы расчета:

- взвешивание;
- частотная выборка;
- оптимизация по Чебышеву.

Порядок расчета:

- аппроксимация АЧХ, расчет коэффициентов, выбор порядка;
- выбор схемы построения;
- расчет шумов квантования, выбор разрядности данных и коэф-тов;
- проверка моделированием.

КИХ-фильтры с линейной фазой

$h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ - отсчеты ИХ фильтра (действительные).

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\Theta(\omega)} \quad - \text{ЧХ фильтра}$$

$\Theta(\omega) = -\alpha\omega$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - ЛФХ фильтра $\alpha \square const$ - фазовая задержка

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega}$$

$$\text{Re:} \quad \pm |H(e^{j\omega})| \cos \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n$$

$$\text{Im:} \quad \pm |H(e^{j\omega})| \sin \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n$$

$$\frac{\text{Im}}{\text{Re}} : \quad \frac{\sin \alpha\omega}{\cos \alpha\omega} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n} \quad (*)$$

КИХ-фильтры с линейной фазой

1. $\alpha=0$

$$0 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega n}$$

$$h(n) = \begin{cases} h(0) - \text{произвольное} \\ 0, \text{ при } n > 0 \end{cases}$$

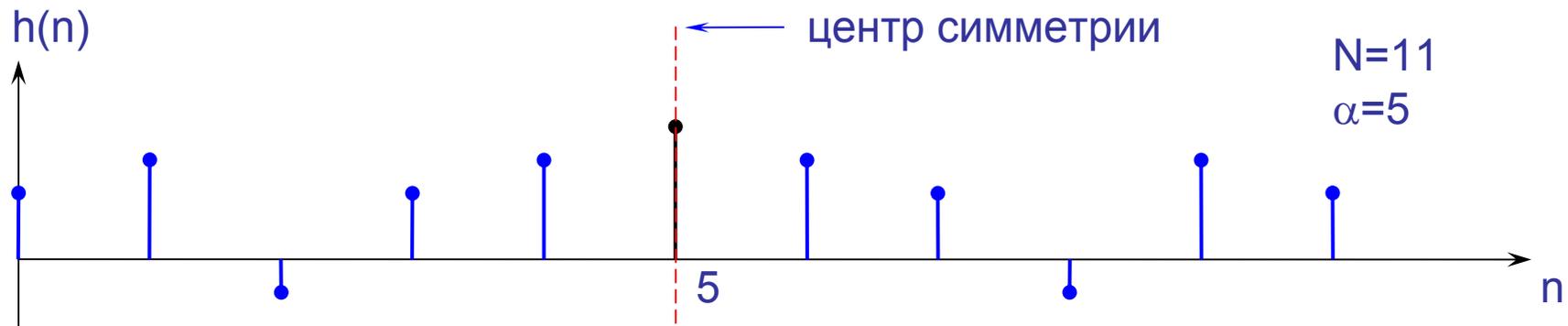
2. $\alpha \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \alpha \omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \alpha \omega$$

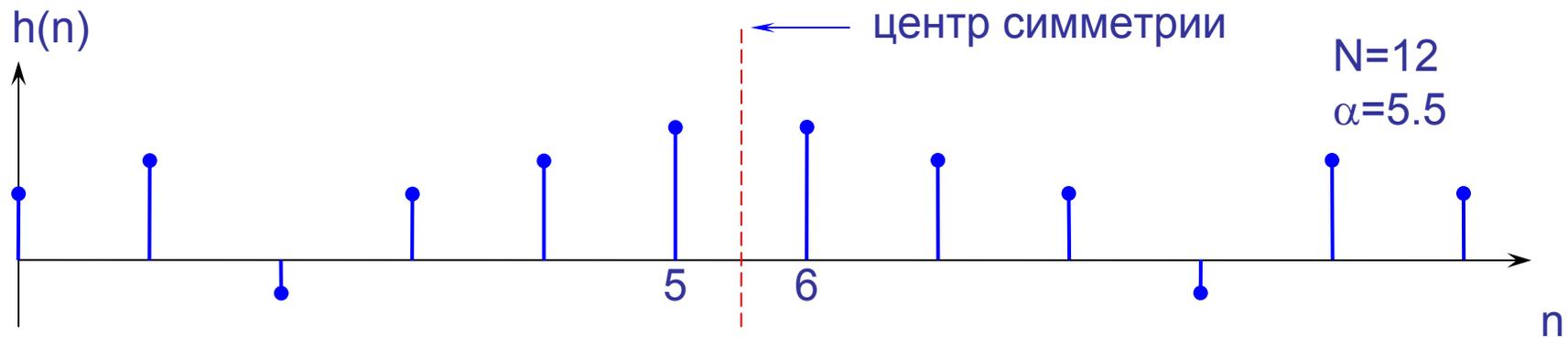
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\alpha - n)\omega] = 0$$

Откуда:
$$\begin{cases} \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases}$$

КИХ-фильтры с линейной фазой



а) Фильтр вида 1: четная симметрия, N -нечетное



б) Фильтр вида 2: нечетная симметрия, N -четное

КИХ-фильтры с линейной фазой

$h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ - отсчеты ИХ фильтра (действительные).

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\Theta(\omega)} \quad \text{- ЧХ фильтра}$$

$$\Theta(\omega) = \beta - \alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad \alpha, \beta \square const \quad \text{- фазовая задержка}$$

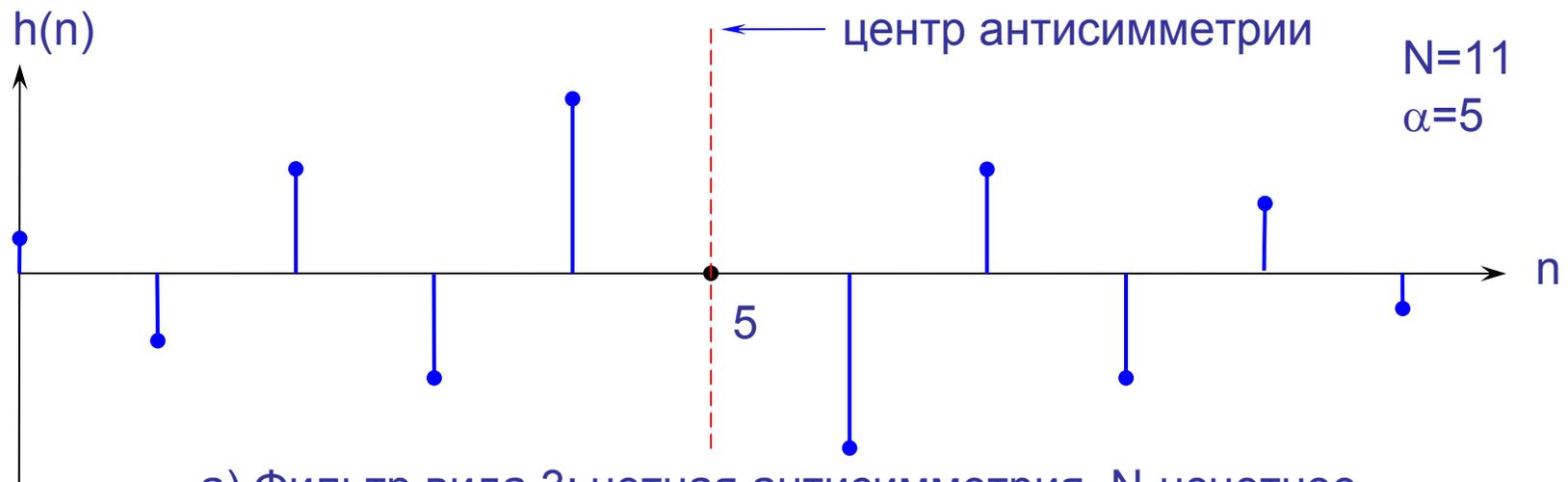
1. $\alpha=0$

$$h(n) = \begin{cases} h(0) - \text{произвольное} \\ 0, \text{ при } n > 0 \end{cases}$$

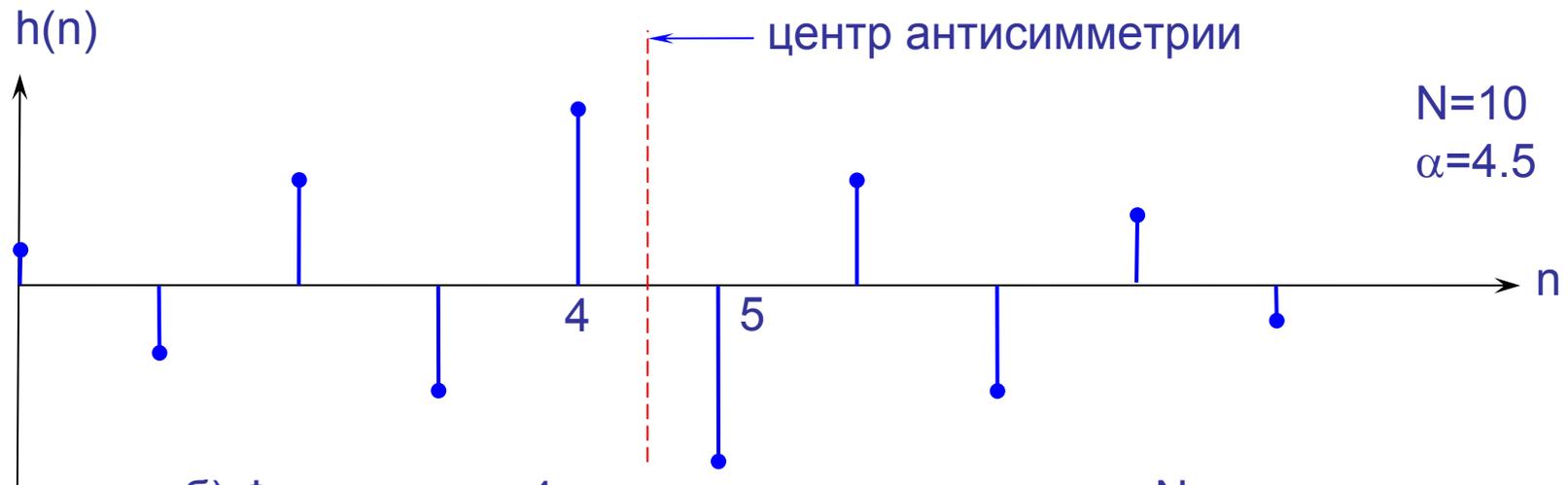
2. $\alpha \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{N-1}{2} \\ \beta = \pm \frac{\pi}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \end{array} \right. \quad \text{Для нечетных } N: \quad h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

КИХ-фильтры с линейной фазой



а) Фильтр вида 3: четная антисимметрия, N -нечетное



б) Фильтр вида 4: нечетная антисимметрия, N -четное

Импульсные и частотные характеристики КИХ-фильтров с ЛФХ

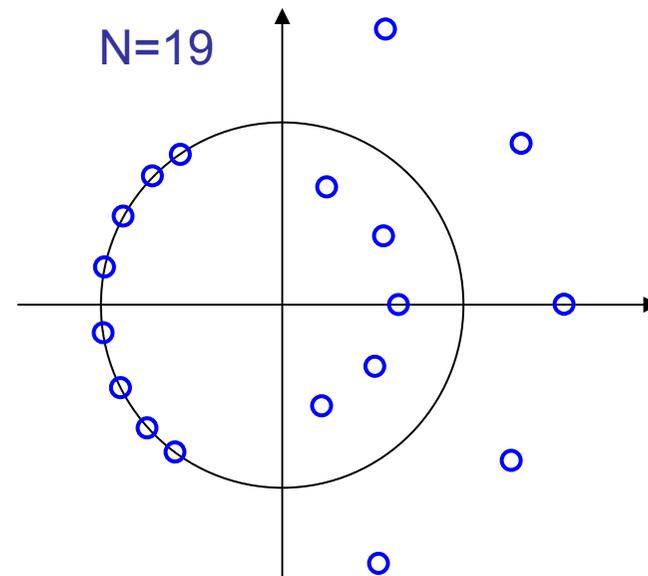
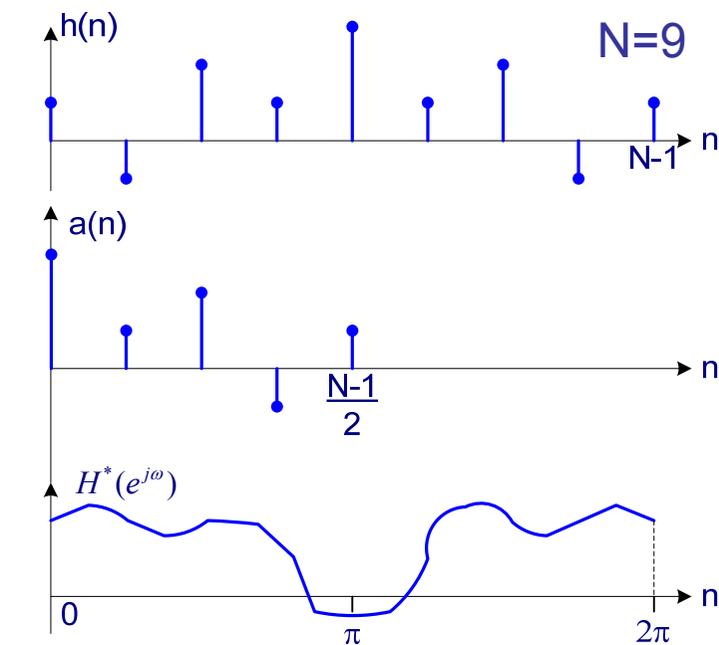
Вид 1. N -нечетное, $h(n)$ -симметричная

$$h(n) = h(N-1-n) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega n$$

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$$

$$n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$



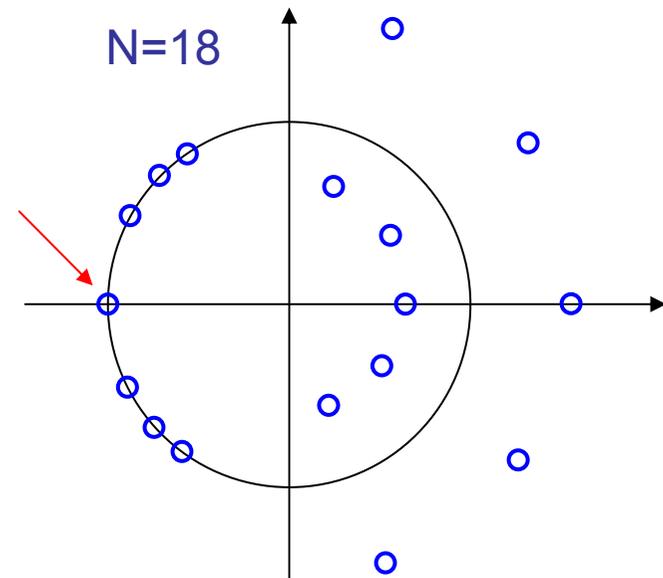
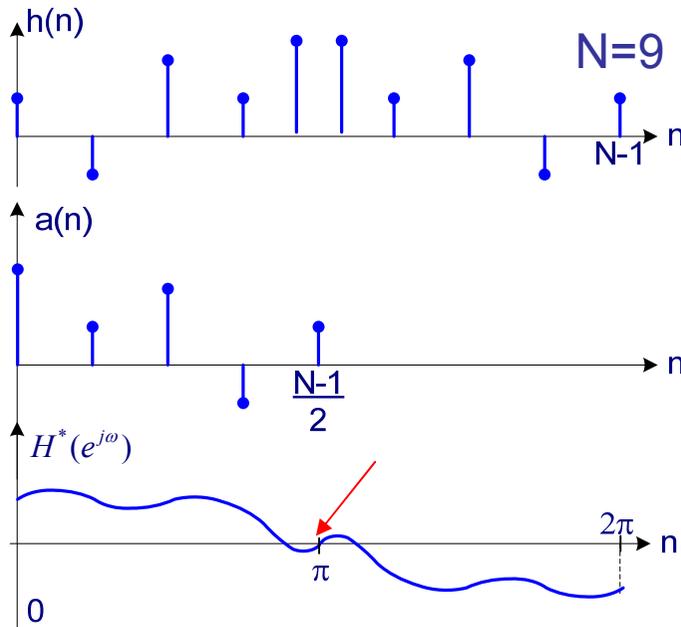
Импульсные и частотные характеристики КИХ-фильтров с ЛФХ

Вид 2. N -четное, $h(n)$ -симметричная

$$h(n) = h(N-1-n) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$



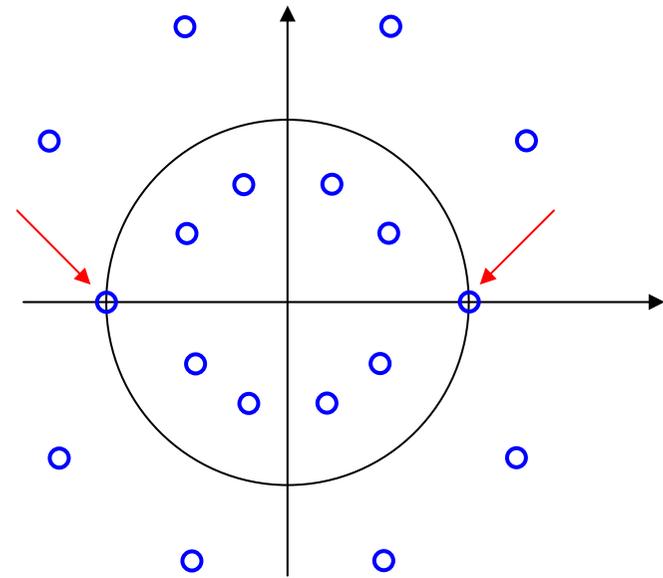
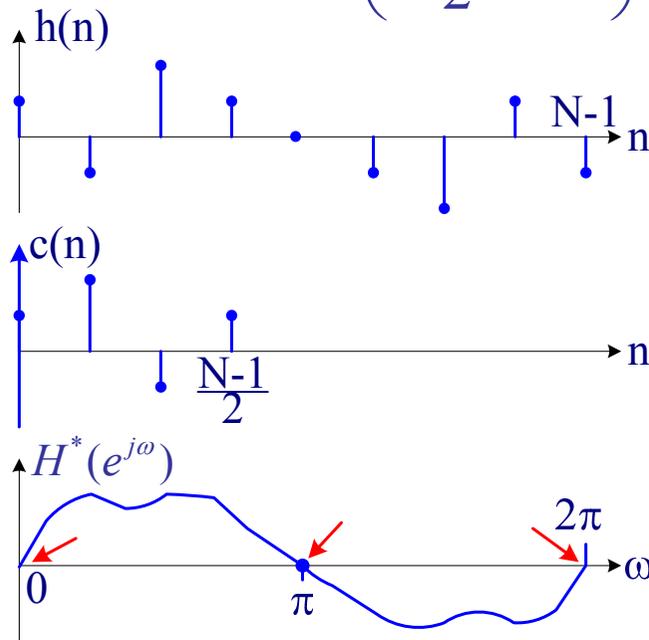
Импульсные и частотные характеристики КИХ-фильтров с ЛФХ

Вид 3. N -нечетное, $h(n)$ -антисимметричная

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$H(e^{j\omega}) = -j \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$



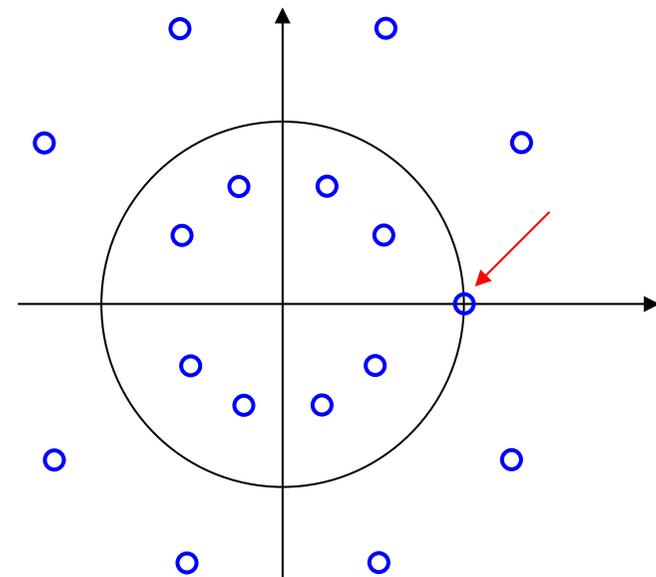
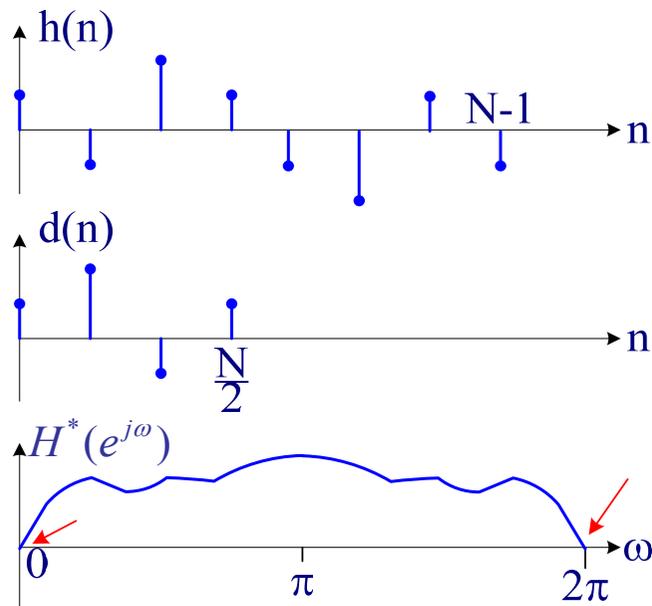
Импульсные и частотные характеристики КИХ-фильтров с ЛФХ

Вид 4. N -четное, $h(n)$ -антисимметричная

$$h(n) = -h(N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$$H(e^{j\omega}) = -j \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$



Проектирование КИХ-фильтров методом взвешивания

Задача проектирования

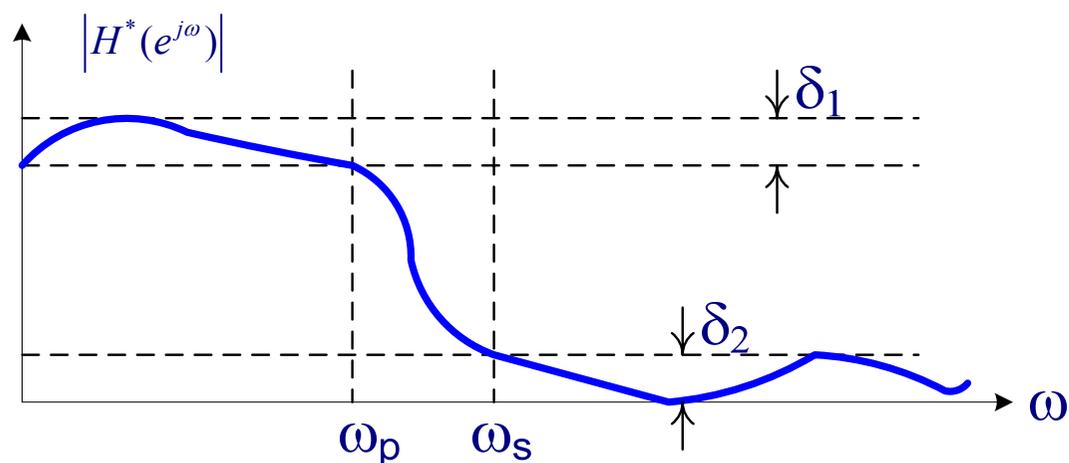
Заданы требования к АЧХ:

δ_1 – неравномерность в полосе пропускания (ПП);

δ_2 – неравномерность в полосе заграждения (ПЗ);

ω_p – граничная частота полосы пропускания;

ω_s – граничная частота полосы заграждения.



Определить:

N-порядок фильтра,

$h(n)$, $n=0, 1 \dots N-1$ – коэффициенты фильтра

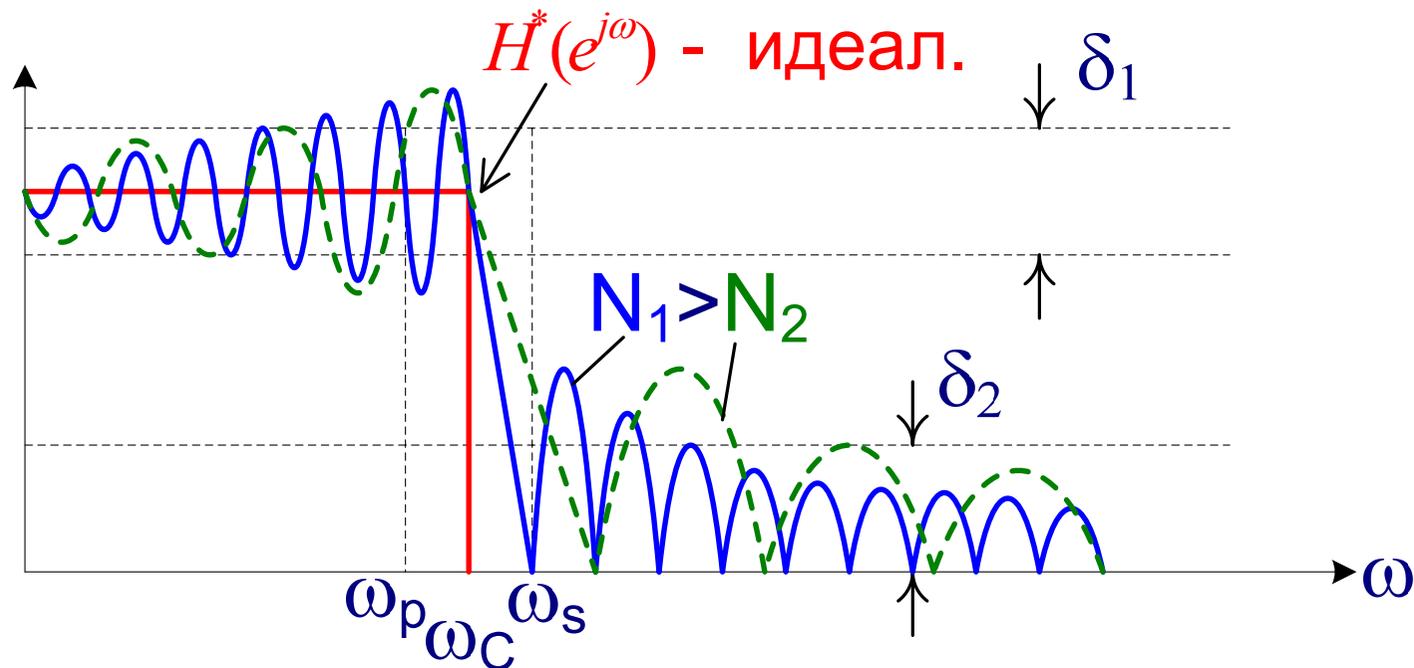
Явление Гиббса

Поскольку:
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

то:
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если $H(e^{j\omega})$ идеальная, то имеются два затруднения:

1. $h(n)$ – бесконечная \Rightarrow усечение до $\pm N/2$
2. Физически нереализуемая \Rightarrow сдвиг на $N/2$ вправо

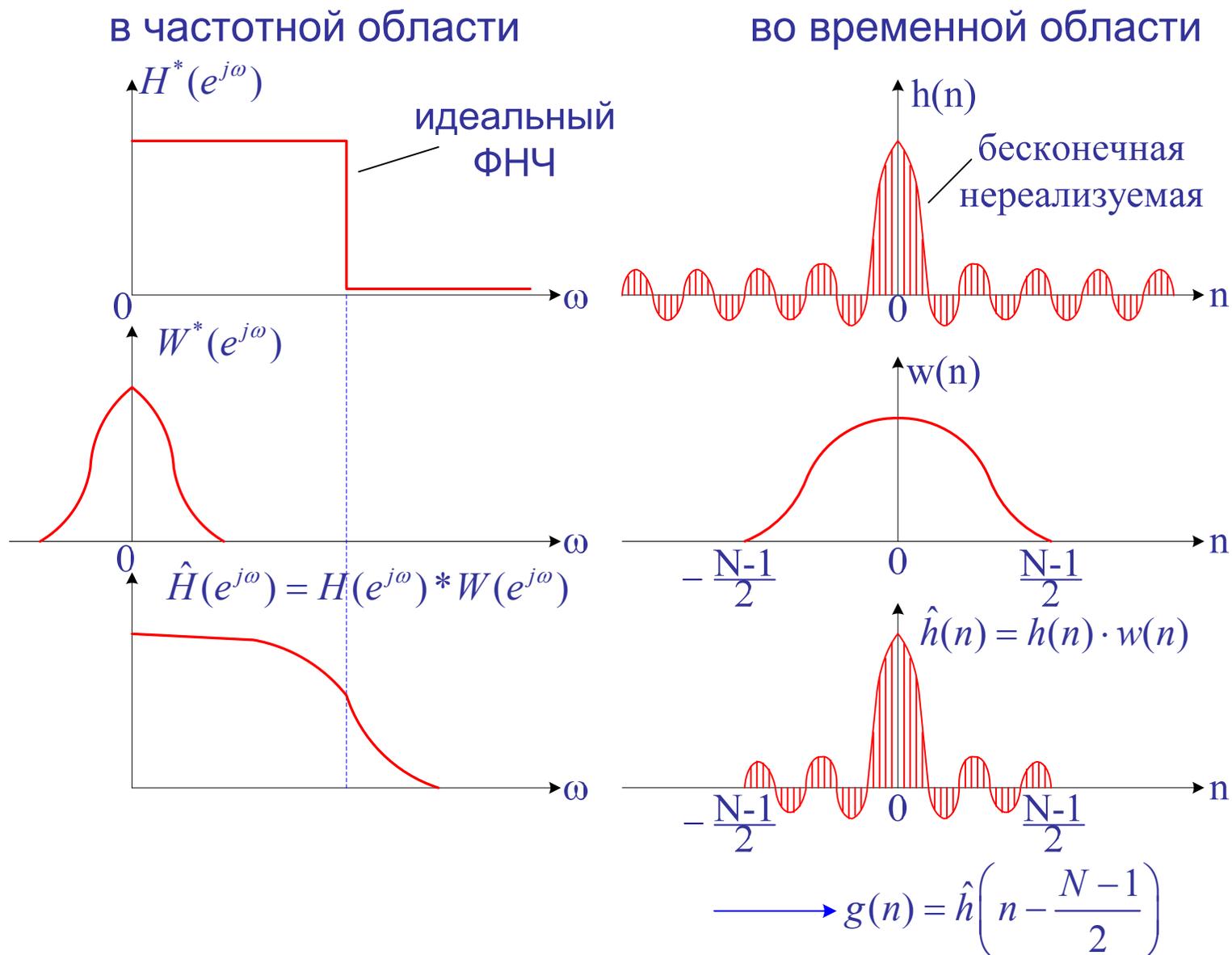


Проектирование КИХ-фильтров методом взвешивания

Операции метода взвешивания

Способ 1	Способ 2
1. выбрать N и $w(n)$	1. выбрать N и $w(n)$
2. вычислить $W(e^{j\omega})$	2. $\hat{h}(n) = h(n) \cdot w(n)$
3. $\hat{H}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$	3. $\hat{H}(e^{j\omega}) = \text{ДПФ}[\hat{h}(n)]$
4. проверка $\delta_1, \delta_2, w_p, w_s$	4. проверка $\delta_1, \delta_2, w_p, w_s$
5. $\hat{h}(n) = \text{ОДПФ}[\hat{H}(e^{j\omega})]$	

Проектирование КИХ-фильтров методом взвешивания



Основные виды оконных функция

Требования к окнам:

- минимальный уровень боковых лепестков (min пульсаций АЧХ фильтра);
- минимальная ширина главного лепестка АЧХ окна (min ширина переходной полосы фильтра).

1. Прямоугольное окно

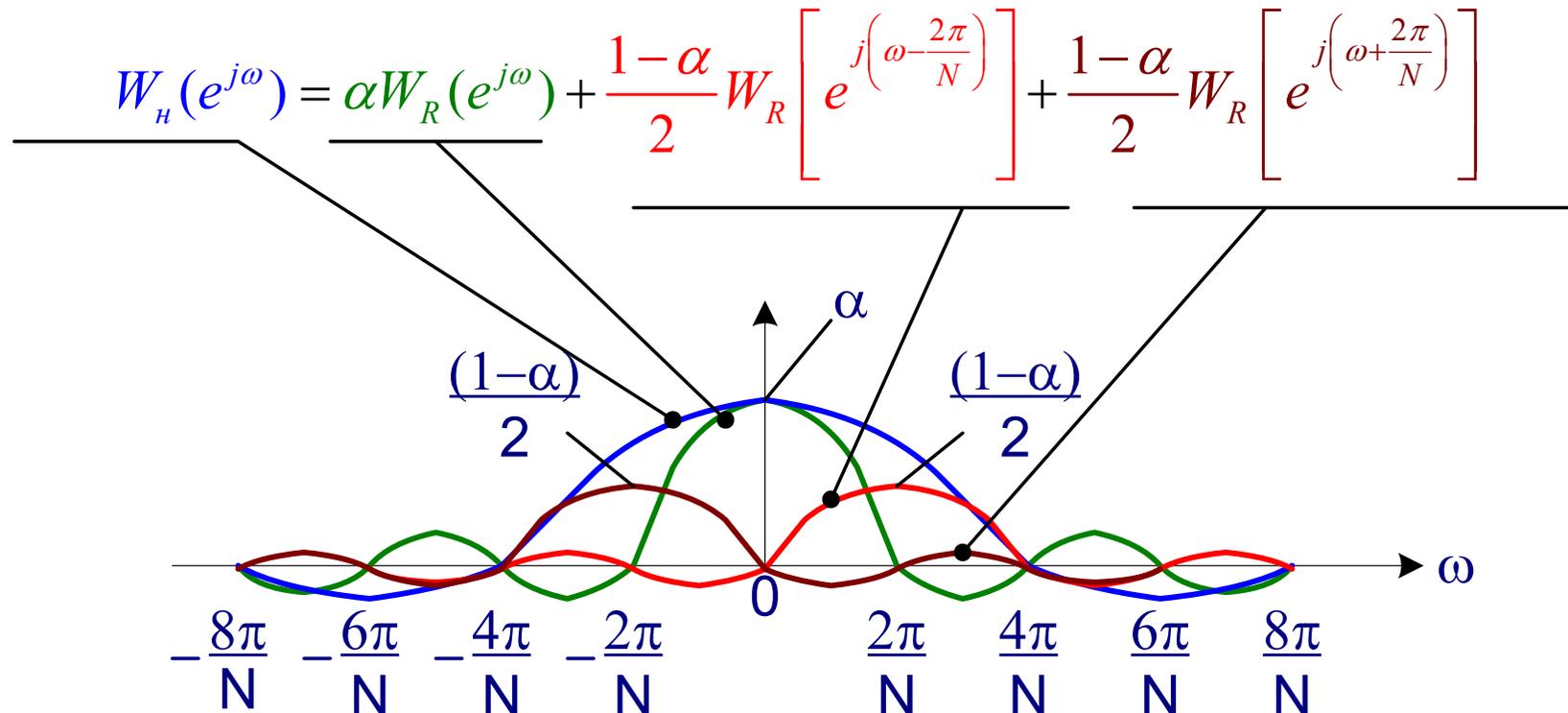
$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{остальные } N \end{cases}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega \frac{N}{2})}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

Основные виды оконных функция

2. Обобщенное окно Хемминга

$$w_H(n) = w_R(n) \left[\alpha + (1-\alpha) \cos \frac{2\pi n}{N} \right]$$



Основные виды оконных функция

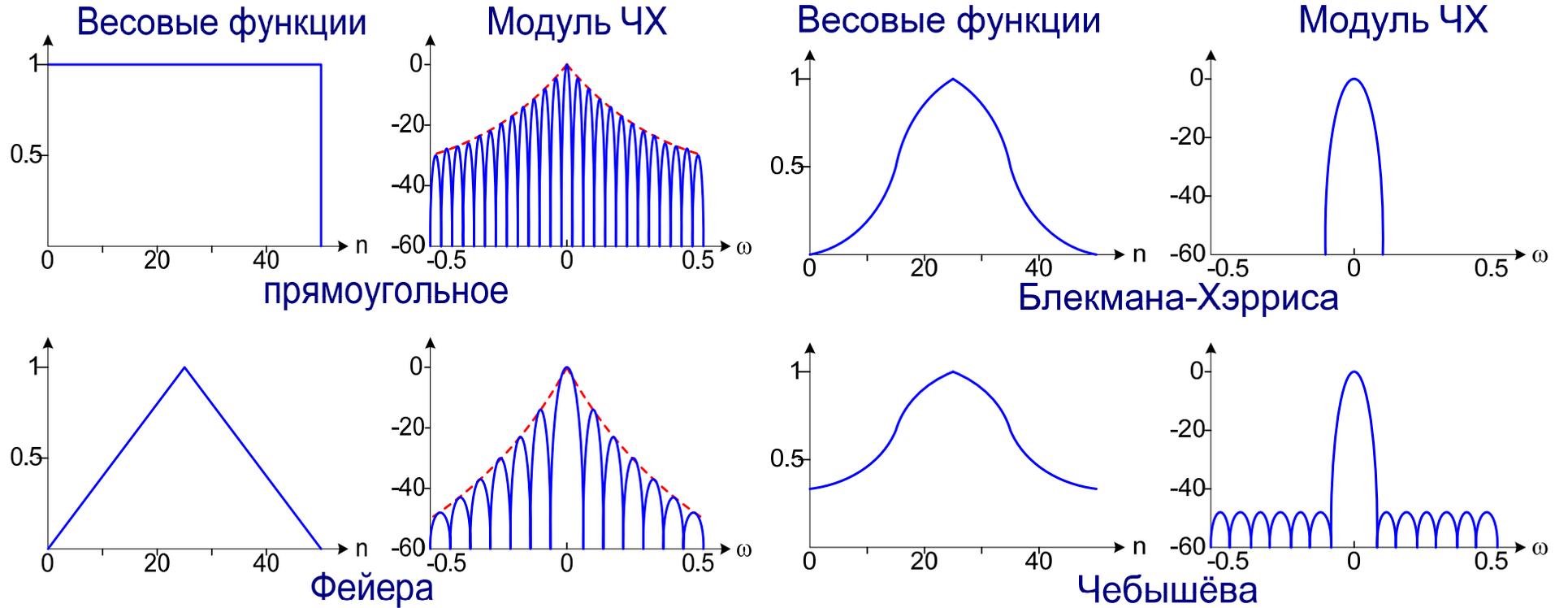
3. Окно Кайзера

$$w_K(n) = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{2n}{N-1}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}$$
$$W_K(e^{j\omega}) \sim \frac{\sin\left[\beta \sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}\right]}{\sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}}$$

4. Окно Ланцоша

$$w_L(n) = \left\{ \frac{\sin\left[\frac{2\pi n}{N-1}\right]}{\frac{2\pi n}{N-1}} \right\}^L$$

Весовые функции окон и их ЧХ



Основные характеристики некоторых окон

Вид окна	Максимальный уровень бокового лепестка, дБ	Асимптотическая скорость спада бокового лепестка, дБ/октава	Эквивалент ширины полосы
1. Прямоугольное	-13.3	-6	1.00
2. Треугольное	-26.5	-12	1.33
3. Ханна	-31.5	-18	1.50
4. Хемминга	-43	-6	1.36
5. Наттола	-98	-6	1.80
6. Гауссовское	-42	-6	1.39
7. Чебышёва	-50	0	1.39

Проектирование методом частотной выборки

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Leftrightarrow x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

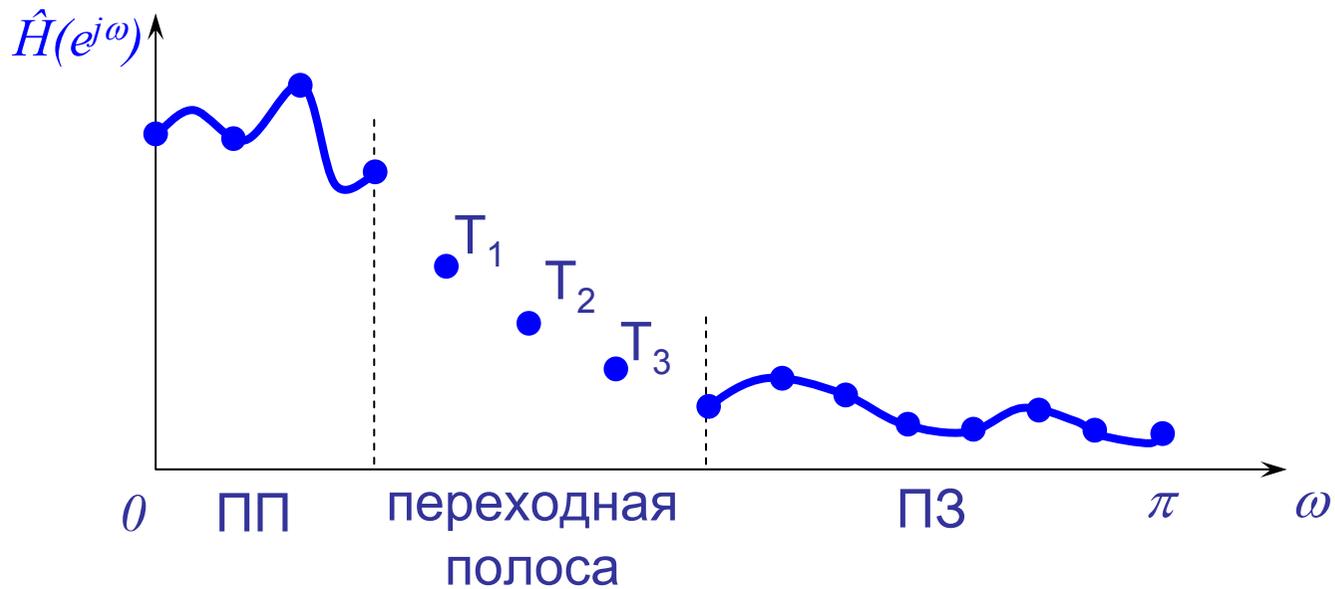
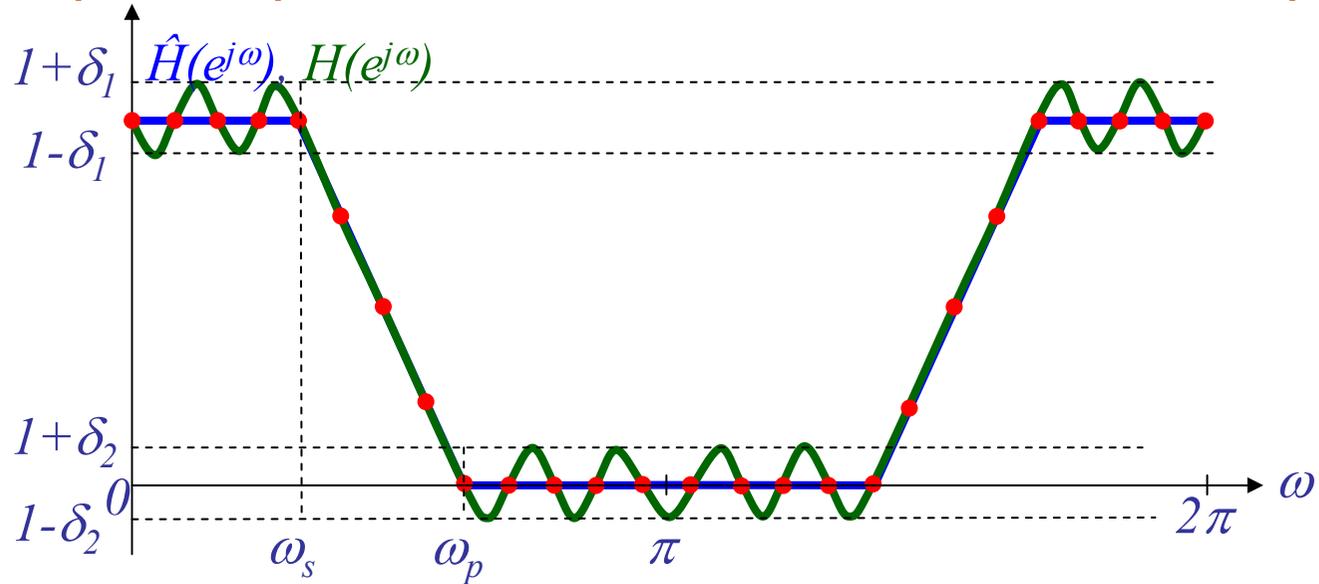
ДПФ

ОДПФ

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{1-z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

1. Произвести дискретизацию в N равноотстоящих точках на единичной окружности
2. По этим точкам интерполировать непрерывную ЧХ

Проектирование методом частотной выборки



Проектирование оптимальных КИХ-фильтров

Критерий оптимальности:

Min. max. ошибки аппроксимации

Вид аппроксимации ЧХ:

Чебышевская $\left(\sum a(n) \cos \omega n\right)$

Процедура оптимизации:

Итерационный алгоритм замены

Аппроксимация ЧХ фильтра

$$H^*(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega})P(e^{j\omega})$$

Вид фильтра	$Q(e^{j\omega})$	$P(e^{j\omega})$
Вид 1	1	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{a}(n) \cos \omega n$
Вид 2	$\cos(\omega/2)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{b}(n) \cos \omega n$
Вид 3	$\sin \omega$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} \tilde{c}(n) \cos \omega n$
Вид 4	$\sin(\omega/2)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{d}(n) \cos \omega n$

Постановка задачи проектирования

$D(e^{j\omega})$ - заданная ЧХ фильтра (идеальная);

$W(e^{j\omega})$ - весовая функция ошибки аппроксимации.

Взвешенная функция ошибки аппроксимации

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [D(e^{j\omega}) - H^*(e^{j\omega})]$$

т.к. $H^*(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega})P(e^{j\omega})$ то: $E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}) \left[\frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} - P(e^{j\omega}) \right]$

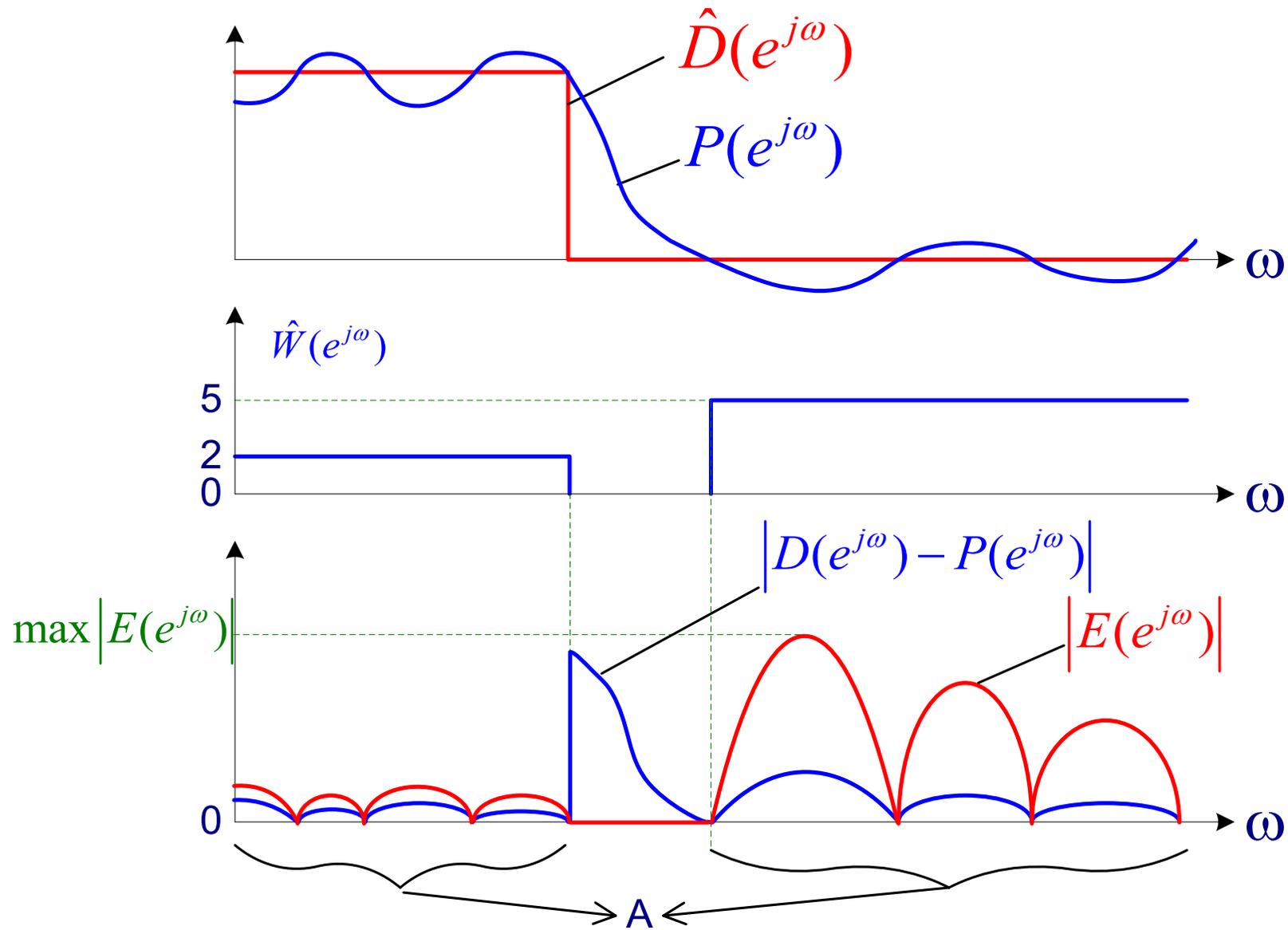
Обозначая: $\hat{W}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega})$ и $\hat{D}(e^{j\omega}) = \frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})}$

Получим: $E(e^{j\omega}) = \hat{W}(e^{j\omega}) [\hat{D}(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})]$

$$\max_{\omega \in A} |E(e^{j\omega})| \rightarrow \min_{\substack{\tilde{a}(n), \tilde{b}(n) \\ \tilde{c}(n), \tilde{d}(n)}}$$

- критерий оптимальности

Графическая интерпретация задачи проектирования

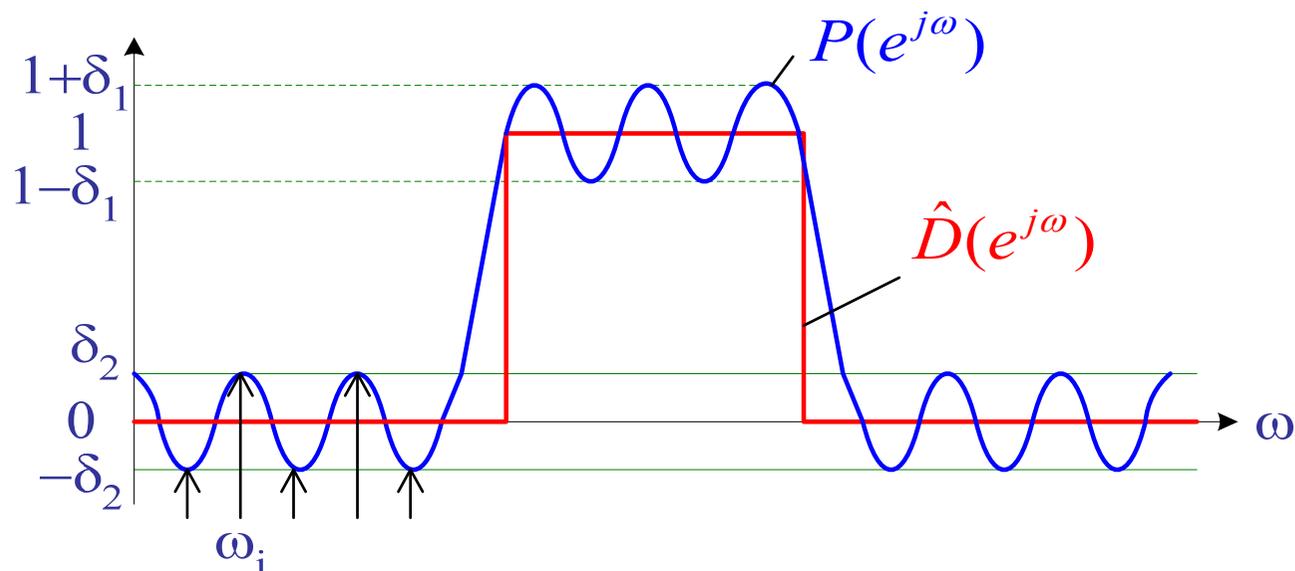


Теорема Чебышева

Если $P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{r-1} a(n) \cos \omega n$, то необходимое и достаточное условие, что $P(e^{j\omega})$ наилучшая аппроксимация по минимальному критерию функции $\hat{D}(e^{j\omega})$, состоит в наличии не менее $r+1$ экстремума функции $E(e^{j\omega})$ в области A т.е. для $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < \omega_{r+1}$

$$E(e^{j\omega_i}) = -E(e^{j\omega_{i+1}}), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$E(e^{j\omega}) = \max_{\omega \in A} E(e^{j\omega})$$



Решение задачи оптимизации

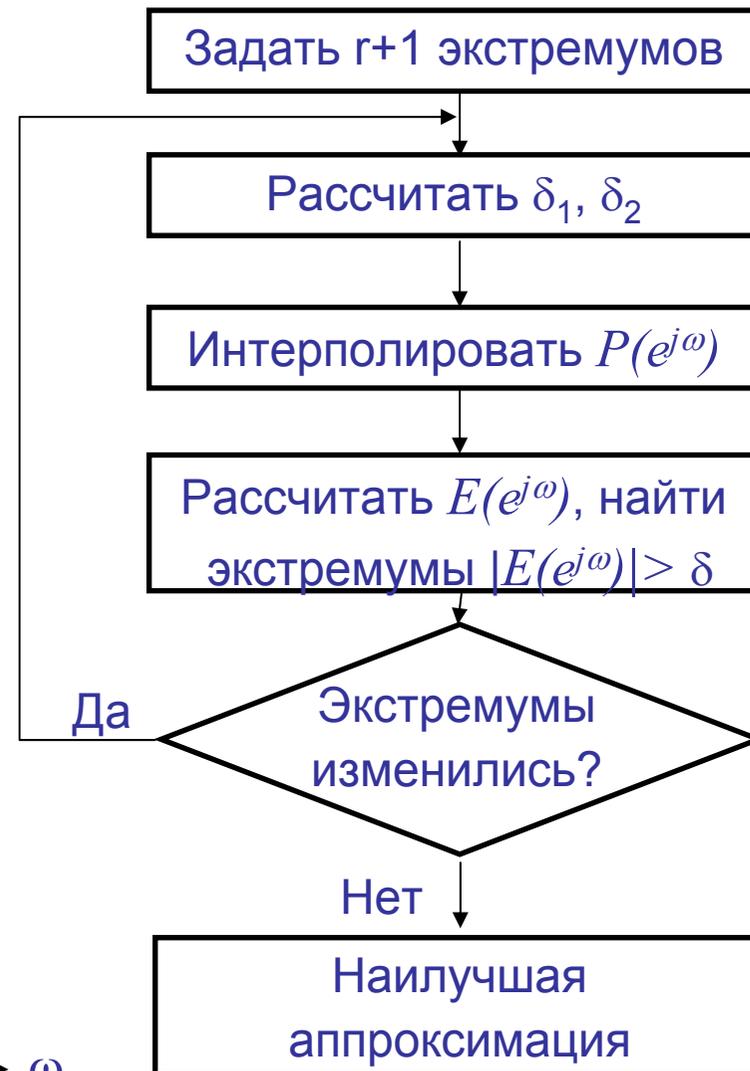
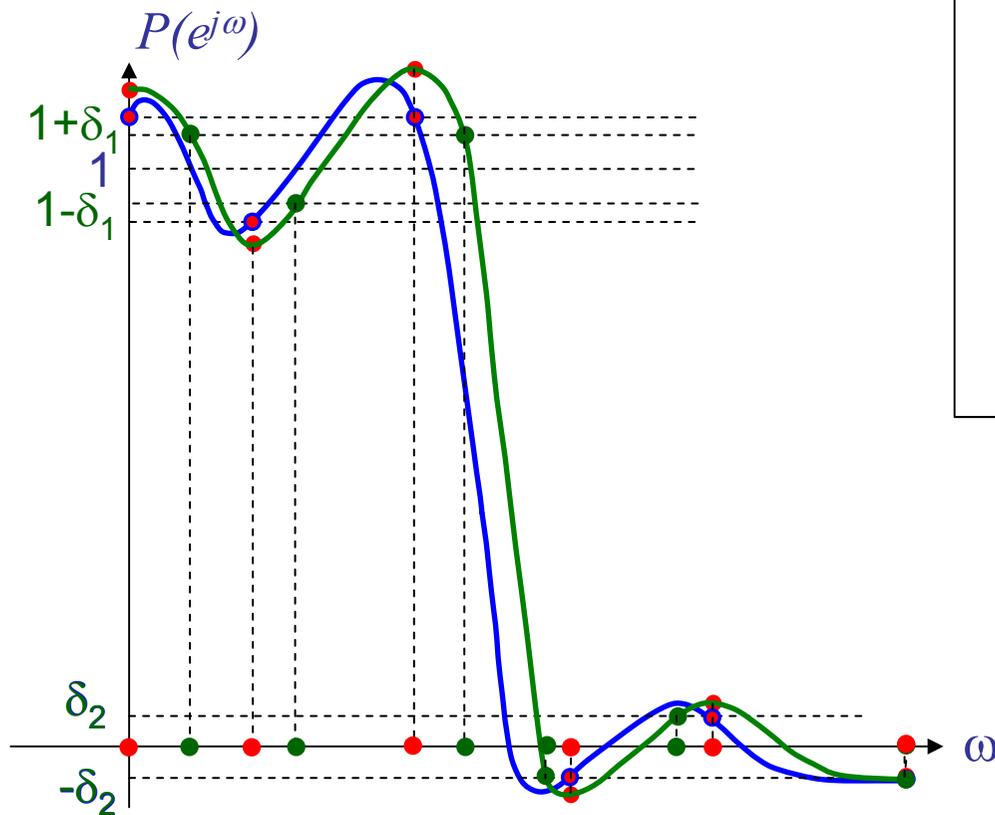
$$\left\{ \begin{array}{l} H^*(e^{j\omega_i}) = \frac{\pm\delta_K}{W(e^{j\omega})} + D(e^{j\omega}) \\ \left. \frac{dH^*(e^{j\omega})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r \end{array} \right.$$

Сущность итерационного алгоритма :

Избежать решения системы нелинейных уравнений относительно экстремальных частот путем итерационной процедуры их уточнения и решения системы из $r+1$ линейных уравнений относительно r коэффициентов и погрешности δ .

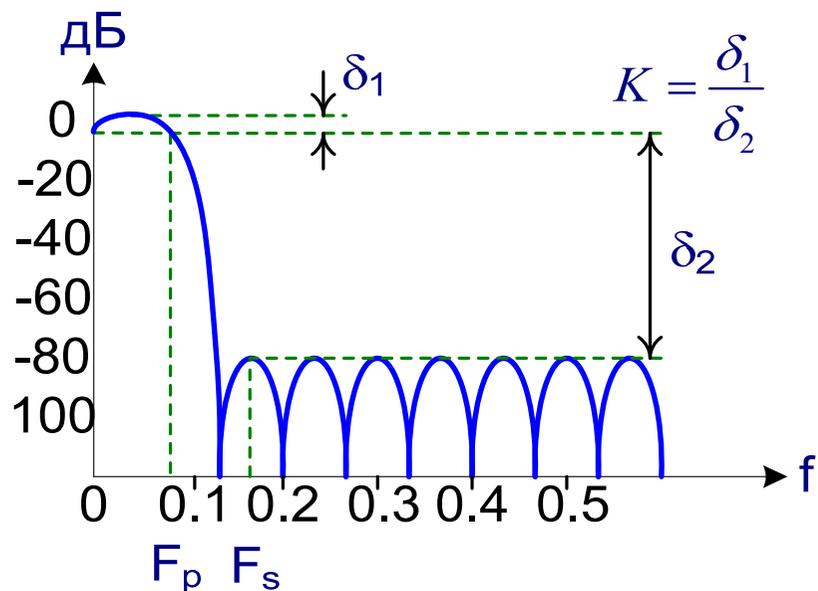
Процедура проектирования оптимальных фильтров

1. Задание $D(e^{j\omega})$, $W(e^{j\omega})$ и N
2. Пересчет $\hat{D}(e^{j\omega})$, $\hat{W}(e^{j\omega})$ и $P(e^{j\omega})$
3. Решение задачи аппроксимации
4. Расчет ИХ фильтра $h(n)$



Свойства оптимальных ФНЧ

Параметры оптимального ФНЧ:
 N, F_p, F_s, K



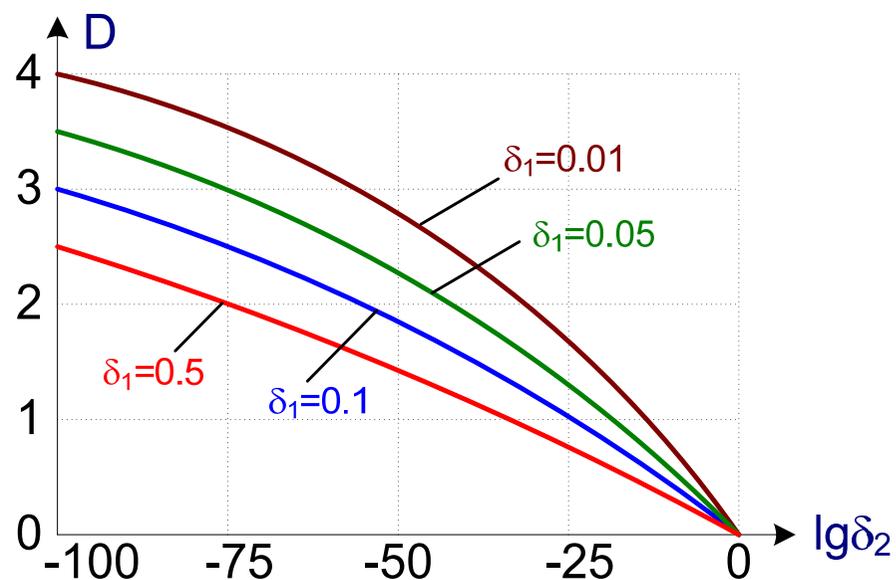
Ширина переходной полосы:

$$\Delta F = F_s - F_p$$

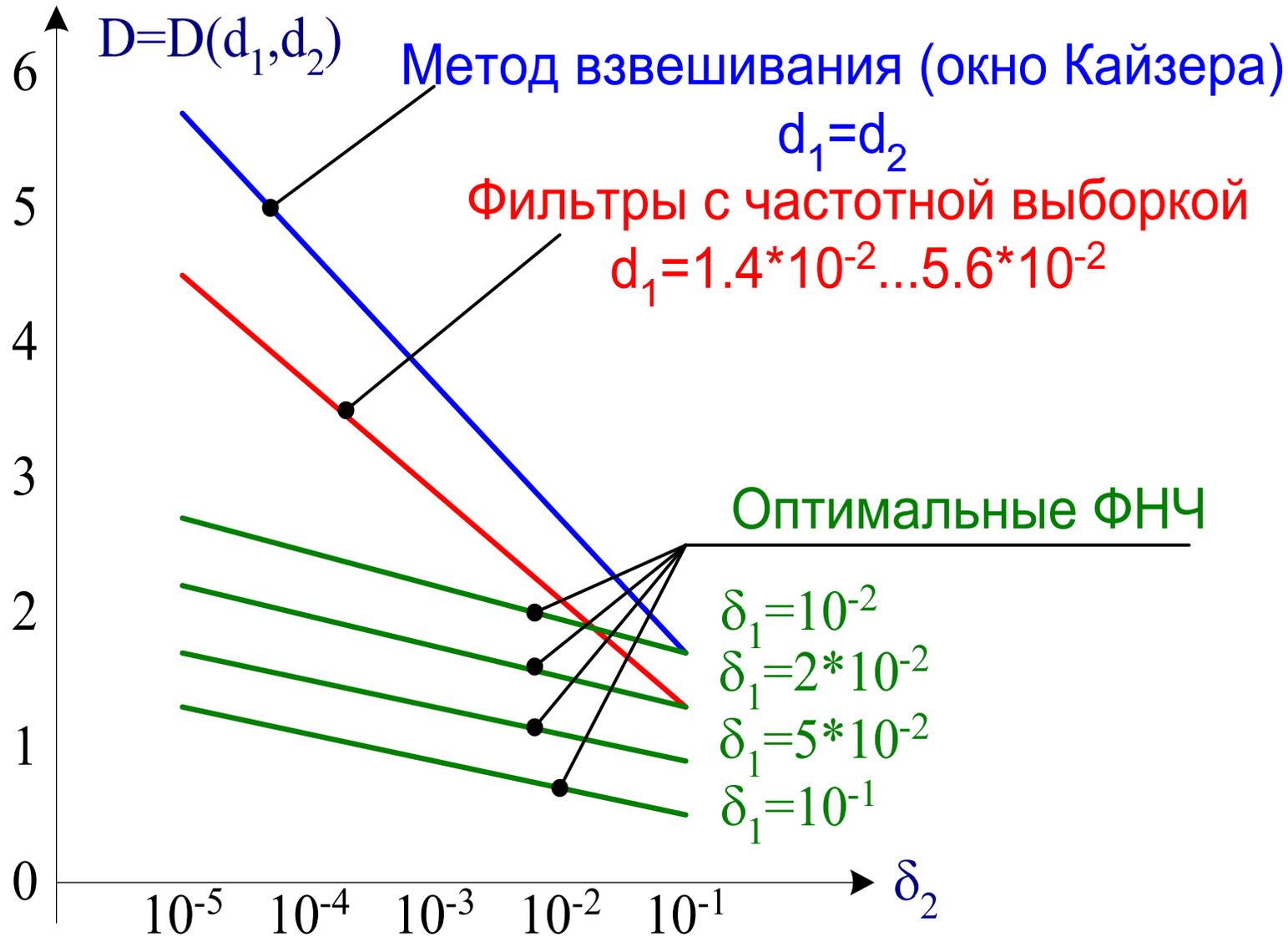
Оценка качества фильтра -
 нормированная ширина переходной
 полосы

$$D = (N-1)\Delta F$$

При $N \rightarrow \infty$ (>50) D не зависит от N

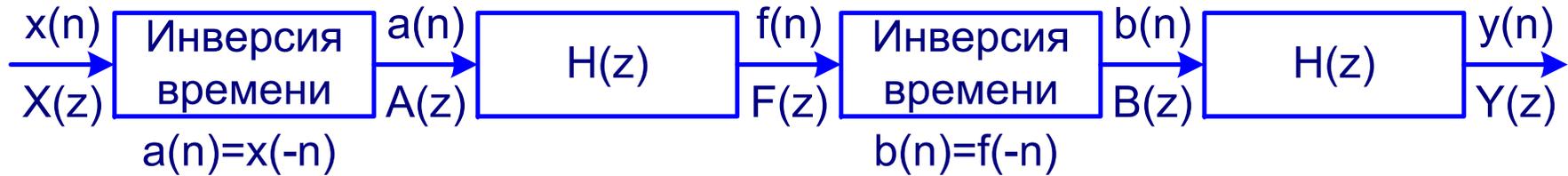


Сравнение КИХ ФНЧ, спроектированных разными методами



БИХ-фильтры с линейной ФЧХ

Метод 1



$$A(z) = X(z^{-1})$$

$$F(z) = H(z)A(z) = H(z)X(z^{-1})$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z)$$

$$Y(z) = H(z)B(z) = X(z)H(z)H(z^{-1})$$

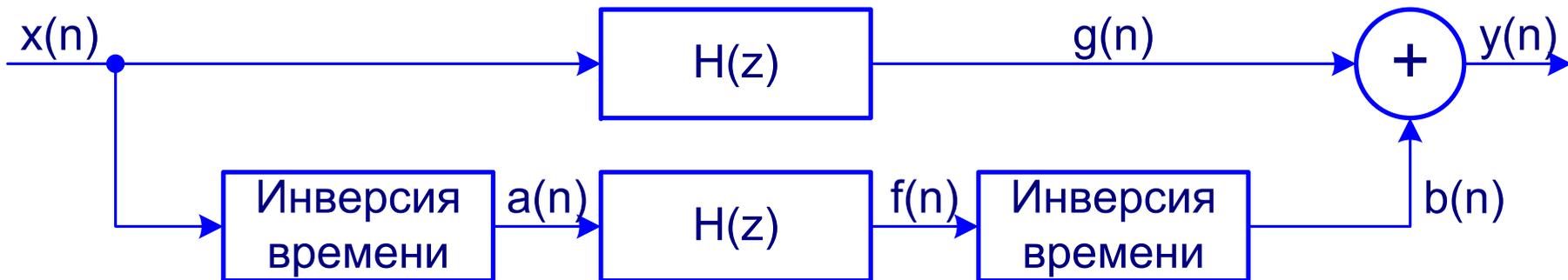
$$H_{\text{ЭКВ}}(z) = Y(z) / X(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$H_{\text{ЭКВ}}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$$

$$\beta(e^{j\omega}) = 0$$

БИХ-фильтры с линейной ФЧХ

Метод 2



$$A(z) = X(z^{-1}) \quad F(z) = H(z)X(z^{-1})$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z)$$

$$G(z) = H(z)X(z)$$

$$Y(z) = B(z) + G(z) = X(z) \left[H(z) + H(z^{-1}) \right]$$

$$H_{\text{ЭКВ}}(z) = H(z) + H(z^{-1})$$

$$H_{\text{ЭКВ}}(e^{j\omega}) = 2 \left| H(e^{j\omega}) \right| \cos \varphi(\omega)$$

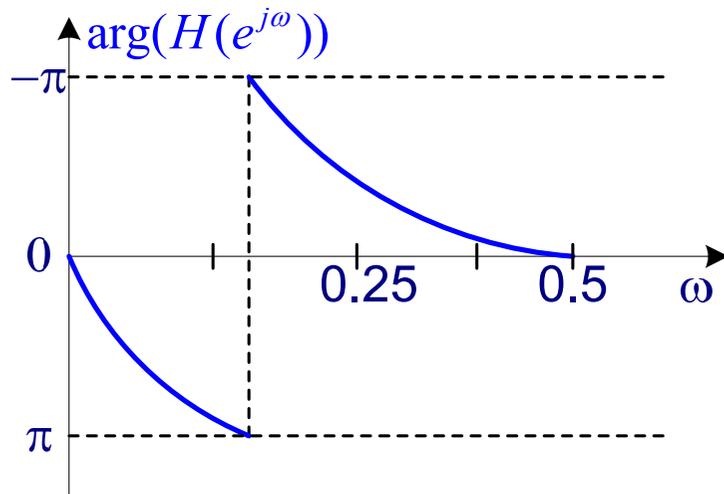
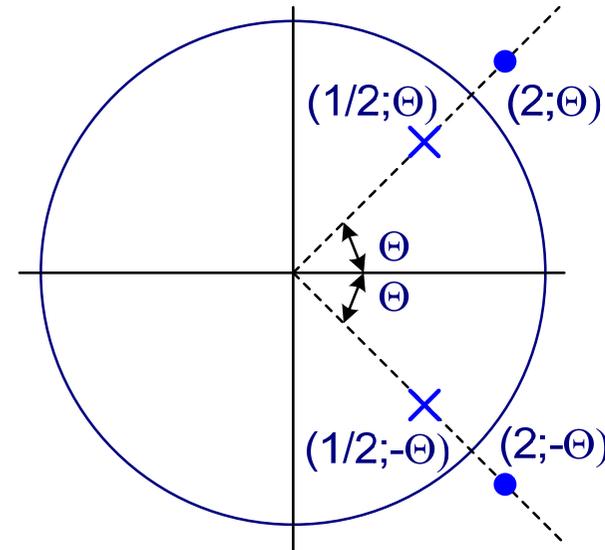
Все пропускающие фильтры

Назначение: линеаризация ФЧХ.

Необходимое условие:

должен существовать нуль $p = re^{j\Theta}$

для каждого полюса $z = \frac{1}{r}e^{j\Theta}$



$$H(z) = \frac{\left[z - \frac{1}{r}e^{j\Theta} \right] \left[z - \frac{1}{r}e^{-j\Theta} \right]}{(z - re^{j\Theta})(z - re^{-j\Theta})} = \frac{z^2 - \frac{2}{r}z \cos \Theta + \frac{1}{r^2}}{z^2 - 2rz \cos \Theta + r^2} =$$

$$= \frac{r^2 z^2 - 2rz \cos \Theta + 1}{r^2 (z^2 - 2rz \cos \Theta + r^2)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = const$$

Классификация методов расчета БИХ-фильтров

Задача аппроксимации АЧХ, ФЧХ, ГЗ или ИХ за счет выбора коэффициентов фильтра.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}; \quad a_0 = 1;$$

3 группы методов расчета:

- расчет ЦФ по фильтрам непрерывного времени;
- прямые методы расчета разложения и количества нулей и полюсов в Z-плоскости;
- оптимизация при наличии ограничений.

Расчет ЦФ по фильтрам непрерывного времени

Аналоговые фильтры-прототипы: Баттерворта, Чебышева I и II рода, Кауэра-Золотарева (эллиптические).

Системная функция:
$$H(S) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i S^i}{\sum_{i=1}^N a_i S^i} = \frac{\prod_{i=0}^M (S + c_i)}{\prod_{i=1}^N (S + d_i)}$$

дифференциальное уравнение:
$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(\psi)}{dt^i}$$

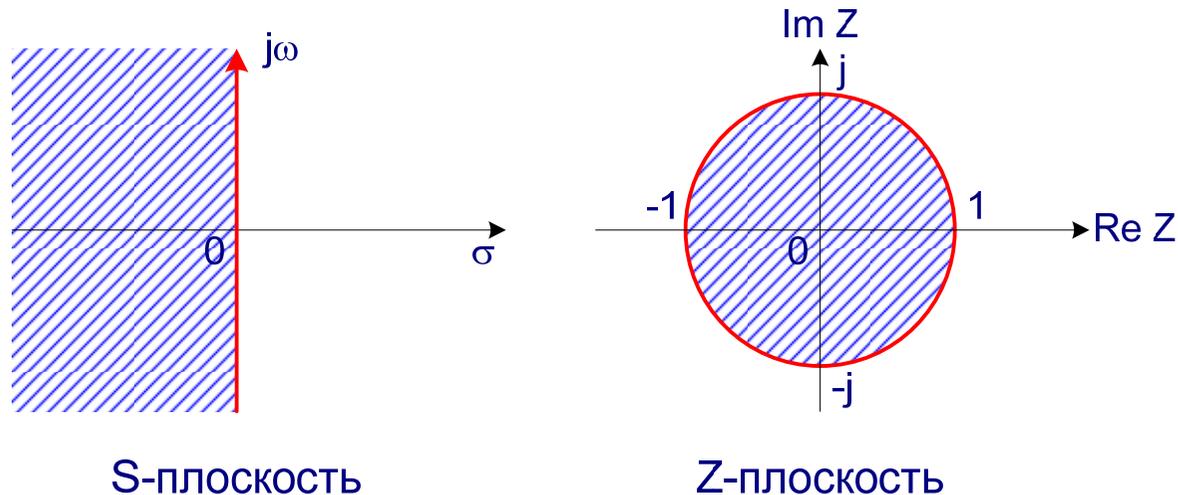
Методы дискретизации аналоговых фильтров:

1. Отображение дифференциалов;
2. Инвариантного преобразования ИХ;
- 3. Билинейного преобразования;**
4. Согласованного Z-преобразования.

Метод билинейного преобразования

Условия однозначного преобразования аналоговых фильтров в цифровые

1. Ось $j\Omega$ должна отображаться в единичную окружность в Z -плоскости (сохранение частотно-избирательных свойств).
2. Левая полуплоскость S -плоскости должна отображаться внутрь единичной окружности (сохранение устойчивости)



Условия 1 и 2 удовлетворяются отображением:

$$S = \frac{2}{T} \cdot \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} \Leftrightarrow z = \frac{2/T + S}{2/T - S} \quad \text{- билинейное преобразование}$$

Метод билинейного преобразования

При $S=j\Omega$ - частотная ось S-плоскости:

$$z = \frac{\frac{2}{T} + j\Omega}{\frac{2}{T} - j\Omega} \Rightarrow |z| = 1$$

$\begin{matrix} \Omega \rightarrow 0, z \rightarrow 1 \\ \Omega \rightarrow \infty, z \rightarrow -1 \end{matrix}$

- 1^{ое} условие выполняется

Полагая $S=\sigma+j\Omega$:

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega} \Rightarrow \text{при } \sigma < 0, |z| < 1$$

- 2^{ое} условие выполняется

Аналоговый фильтр с $H(S)$ преобразуется в цифровой с $H(z)$:

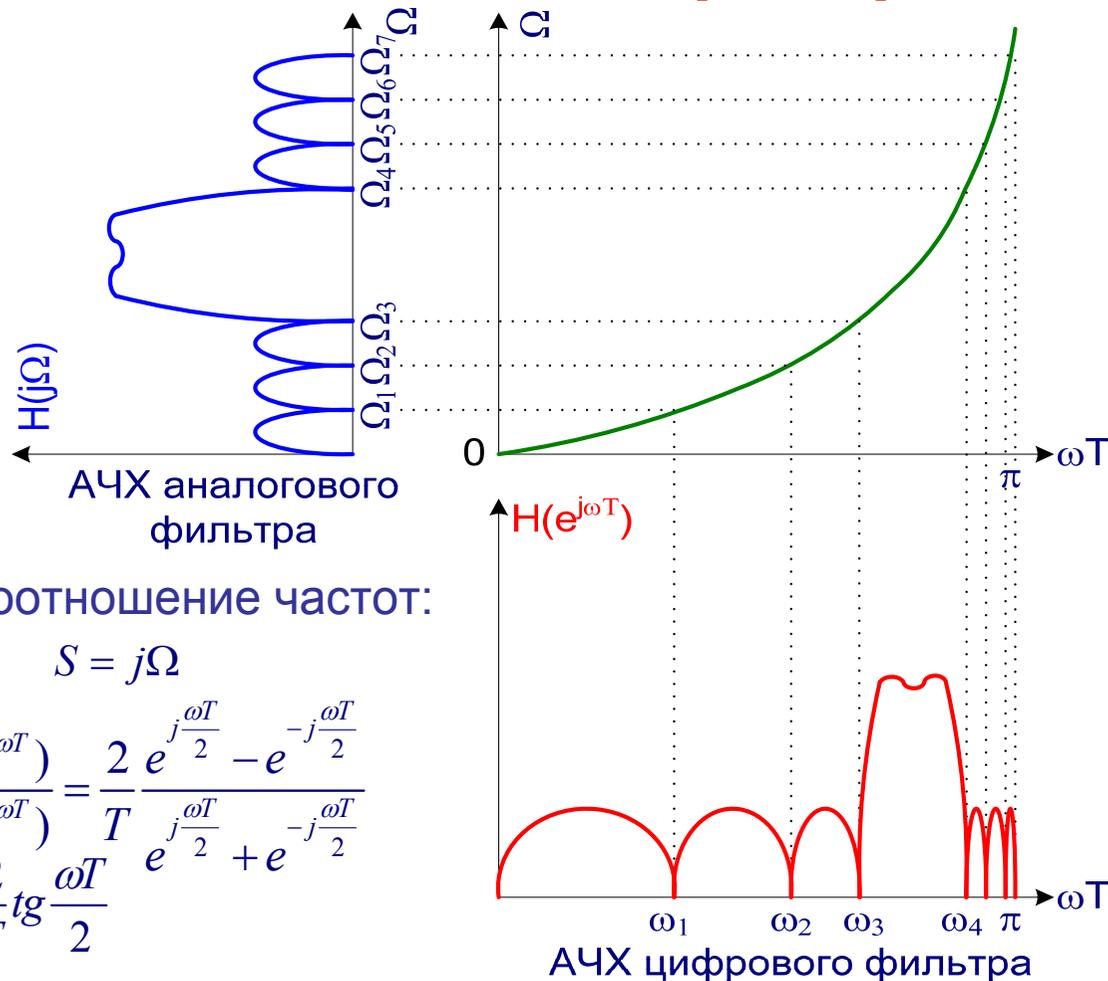
$$H(z) = H(S) \Big|_{S = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Порядок знаменателя сохраняется, а порядок числителя может возрастать

$$H(S) = \frac{1}{S+a} \quad H(z) = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} = \frac{1+z^{-1}}{\frac{2}{T} + a + z^{-1} \left(a - \frac{2}{T} \right)}$$

Нуль $H(S)$ при $S \rightarrow \infty$
отображается в $z = -1$

Метод билинейного преобразования



Нелинейное соотношение частот:

$$z = e^{j\omega T} \quad S = j\Omega$$

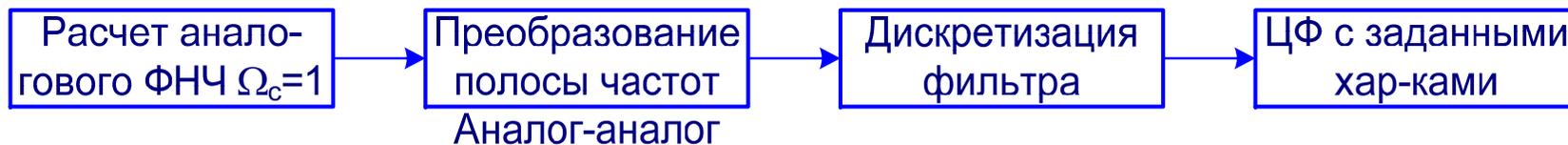
$$j\Omega = \frac{2}{T} \cdot \frac{(1 - e^{-j\omega T})}{(1 + e^{-j\omega T})} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

- для фильтров с почти ступенчатой ЧХ нелинейная связь частотных шкал может быть скомпенсирована;
- ни ФЧХ, ни импульсная характеристики аналогового и цифрового фильтра не совпадают

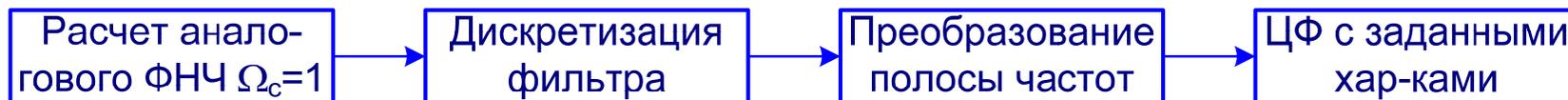
Частотные преобразования

Метод 1



Преобразование частот аналоговых фильтров

Метод 2



Преобразование частот цифровых фильтров

Частотные преобразования

Преобразование полосы частот по методу 1

Ω_L - нижняя частота среза;

Ω_U - верхняя частота среза.

Вид преобразования	Замена переменной
1. ФНЧ \rightarrow ФНЧ	$S \rightarrow S/\Omega_U$
2. ФНЧ \rightarrow ФВЧ	$S \rightarrow \Omega_U/S$
3. ФНЧ \rightarrow ПФ	$S \rightarrow \frac{S^2 + \Omega_U\Omega_L}{S(\Omega_U - \Omega_L)}$
4. ФНЧ \rightarrow РФ	$S \rightarrow \frac{S(\Omega_U - \Omega_L)}{S^2 + \Omega_U\Omega_L}$

Уровень пульсаций в полосе пропускания и полосе задержки не изменяется;
С теоретической и расчетной точки зрения оба метода равноценны.

Сравнение КИХ и БИХ-фильтров

Оптимальные КИХ-фильтры - эллиптические БИХ.

На обработку 1 отсчета требуется МАС операций (мин.):

$$\left[\frac{N+1}{2} \right] \text{ - операций МАС для КИХ-фильтра } N\text{-го порядка}$$

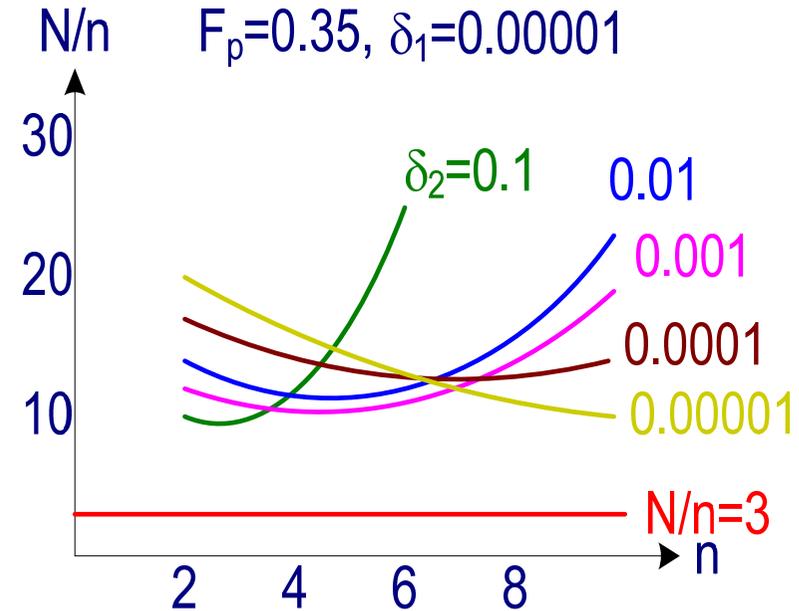
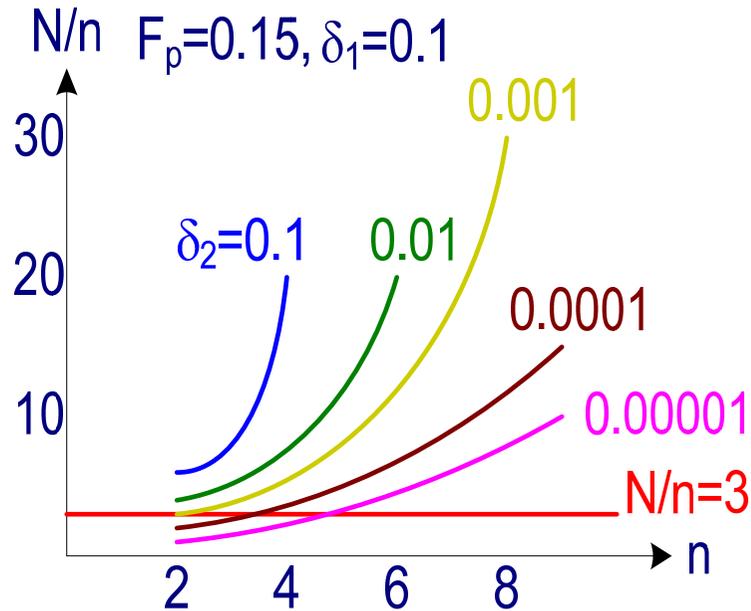
$$\left[\frac{3n+3}{2} \right] \text{ - операций МАС для БИХ-фильтра } n\text{-го порядка}$$

Для фильтров одинаковой вычислительной сложности:

$$\frac{3n+3}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$\frac{N}{n} \approx 3 + \frac{1}{n}$$

Сравнение КИХ и БИХ-фильтров



1. При $F_p > 0.3$ БИХ-фильтр лучше при любых δ_1 , δ_2 , n .
2. При $n \geq 7$ БИХ-фильтр лучше при любых δ_1 , δ_2 , F_p .
3. КИХ-фильтр лучше при большой δ_1 и малой δ_2 .
4. КИХ-фильтр лучше при линейной ФЧХ.

Фильтры изменяющие частоту дискретизации

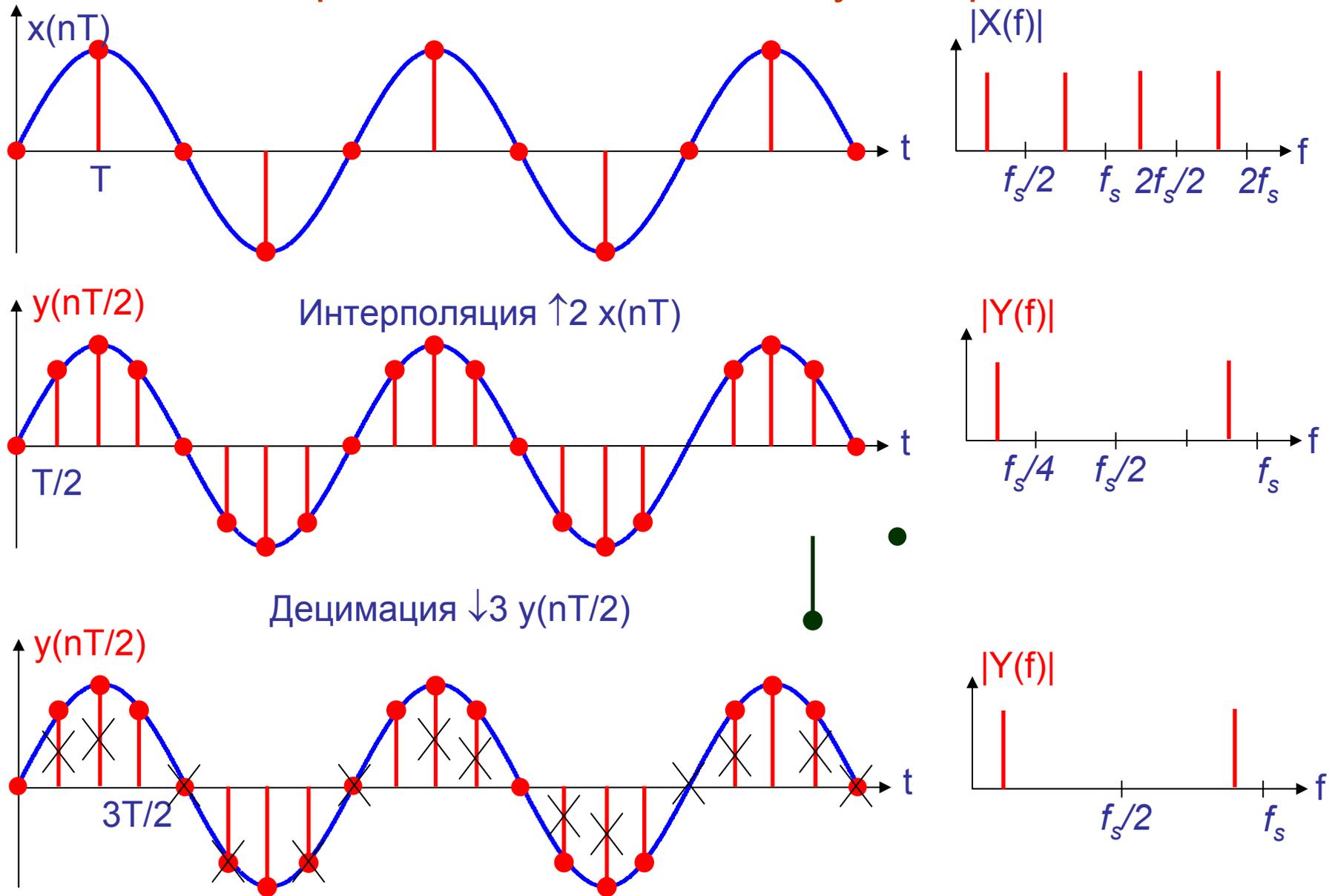
Характерная особенность: различная скорость потока данных на входе и выходе.

Применения:

- преобразование частоты дискретизации между цифровыми аудиосистемами;
- узкополосные ФНЧ и полосовые фильтры;
- сжатие полосы частот при цифровой обработке речевых сигналов;
- трансмультиплексоры (преобразование ВРК-ЧРК);
- квадратурная модуляция;
- восстанавливающие и ограничивающие фильтры в цифровых аудиосистемах;
- узкополосный анализ спектра в сонарных системах и вибрационном анализе.

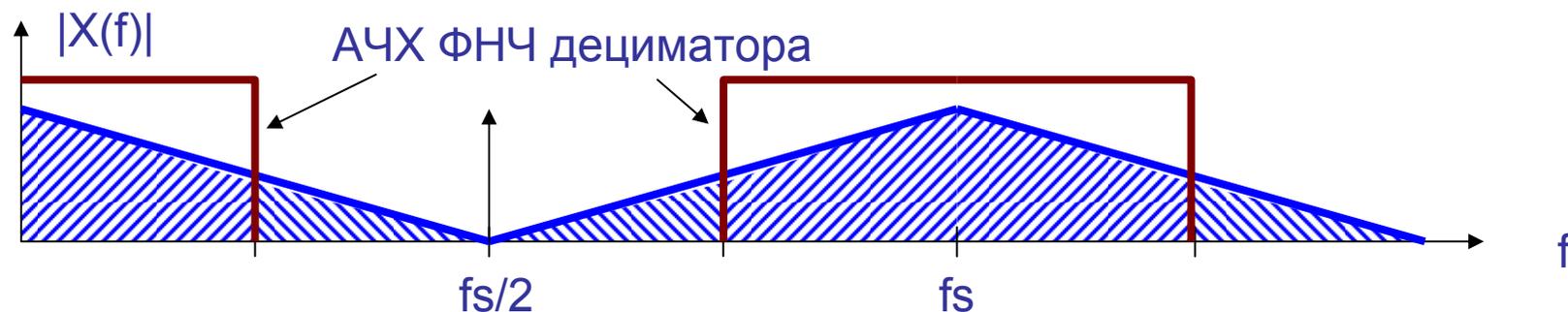
Основные операции: прореживание (децимация) и интерполяция.

Фильтры изменяющие частоту дискретизации

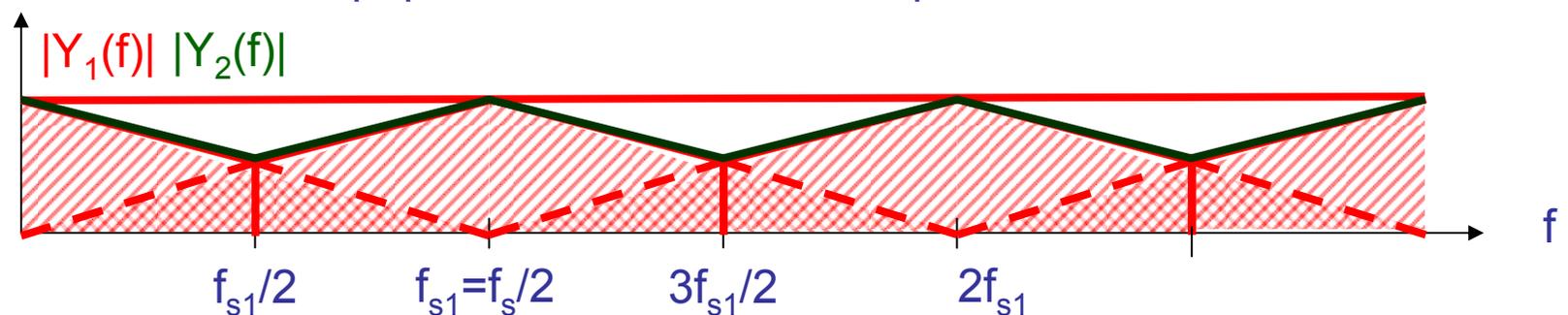


Фильтры изменяющие частоту дискретизации

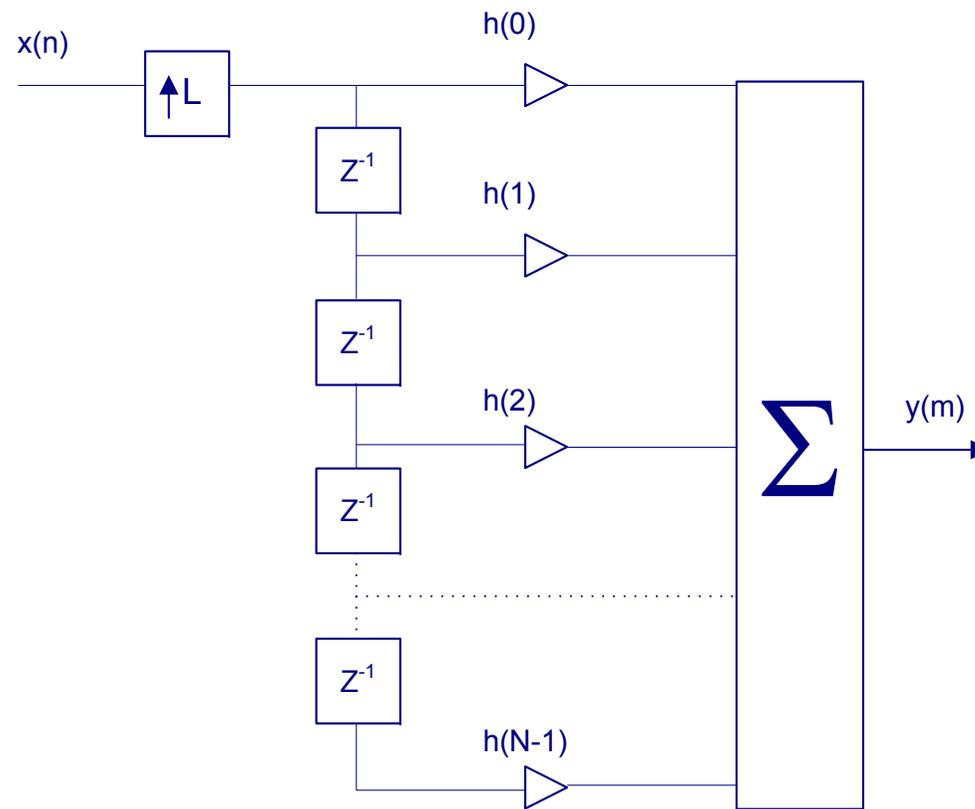
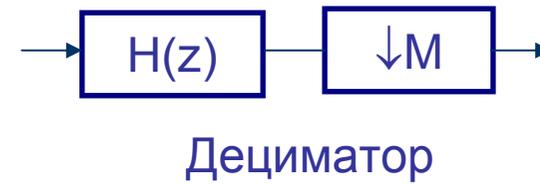
Для устранения наложения при прореживании и для снижения искажений в спектре при интерполяции необходимо выполнять низкочастотную фильтрацию, согласованную с коэффициентом изменения частоты дискретизации.



Прореживание сигнала в 2 раза

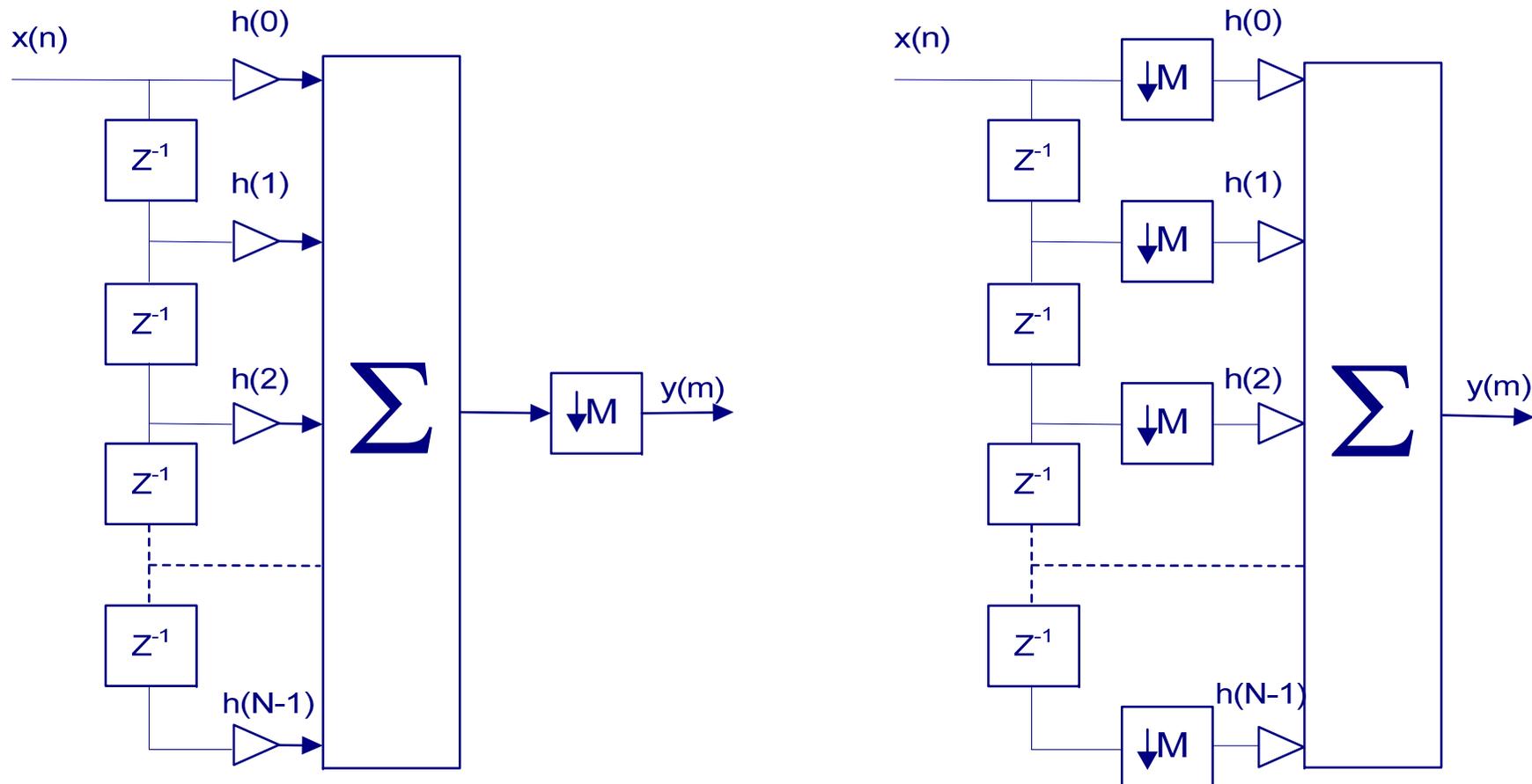


Фильтры изменяющие частоту дискретизации



Интерполирующий фильтр

Фильтры изменяющие частоту дискретизации



Прореживающий фильтр

В отличие от рекурсивных, нерекурсивные структуры дециматоров обеспечивают возможность работы умножителей на частоте выходного сигнала. При больших частотах дискретизации, в дециматорах часто используют гребенчатые фильтры.

Спектральный анализ

Методы цифрового спектрального анализа

Основные приложения:

- радиолокация, радионавигация, радиоастрономия;
- гидроакустика, гидролокация;
- системы распознавания речи;
- сжатие полосы речевых сигналов;
- вибрационный анализ.

Спектральный анализ – это измерение, которое дает точные или приближенные значения Z - преобразования дискретного сигнала в заданном множестве точек Z - плоскости.

Различают “мгновенный” спектр и оценку спектральной плотности мощности.

Разновидности спектрального анализа:

- вычисление “мгновенного” спектра с использованием окон;
- оценивание СПМ классическими методами;
- оценивание СПМ параметрическими методами;
- оценивание блочных данных;
- рекурсивное оценивание;
- многомерный спектральный анализ.

Алгоритмы БПФ

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – метод вычисления ДПФ $\{x(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$ – комплексный сигнал.

$$\text{ДПФ: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{nk} \quad \text{где } W = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ - множитель вращения}$$

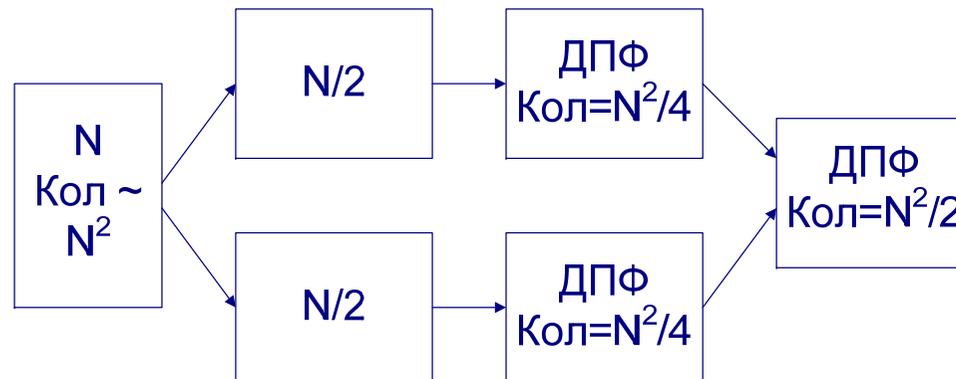
$\{W^{nk}\}$ периодична по n и k с периодом N :

$$W^{(n+mN)(k+lN)} = (W_N)^{nk}, \text{ где } m, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, W_N \text{ - множитель вращения с периодом } N.$$

Количество операций для ДПФ размерности N :

$(N-1)^2$ – комплексных умножений, $N(N-1)$ – комплексных сложений.

Основная идея БПФ – разбиение длинной последовательности на короткие.



Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Пусть N – степень 2.

Разобьем $\{x(n)\}$ на $\{x_1(n)\}$ – четные отсчеты, $\{x_2(n)\}$ – нечетные отсчеты.

$$x_1(n) = x(2n), x_2(n) = x(2n+1), \text{ для } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) \cdot W_N^{(2n+1)k}$$

Поскольку $W_N^2 = [e^{-j\frac{2\pi}{N}}]^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$ то $X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{nk}}_{X_1(k)} + W_N^k \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{nk}}_{X_2(k)}$

Тогда $X(k) = X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k)$

Вычисление $X_1(k)$ и $X_2(k)$ – $2N^2/4$ МАС + объединение $X_1(k)$ и $X_2(k)$ – N МАС

Всего $N^2/2 + N \rightarrow N^2/2$ при больших N

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Доопределение $X(k)$ для $k \geq N/2$ на основании периодичности $N/2$ точечных ДПФ:

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ X_1(k - \frac{N}{2}) + W_N^k \cdot X_2(k - \frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

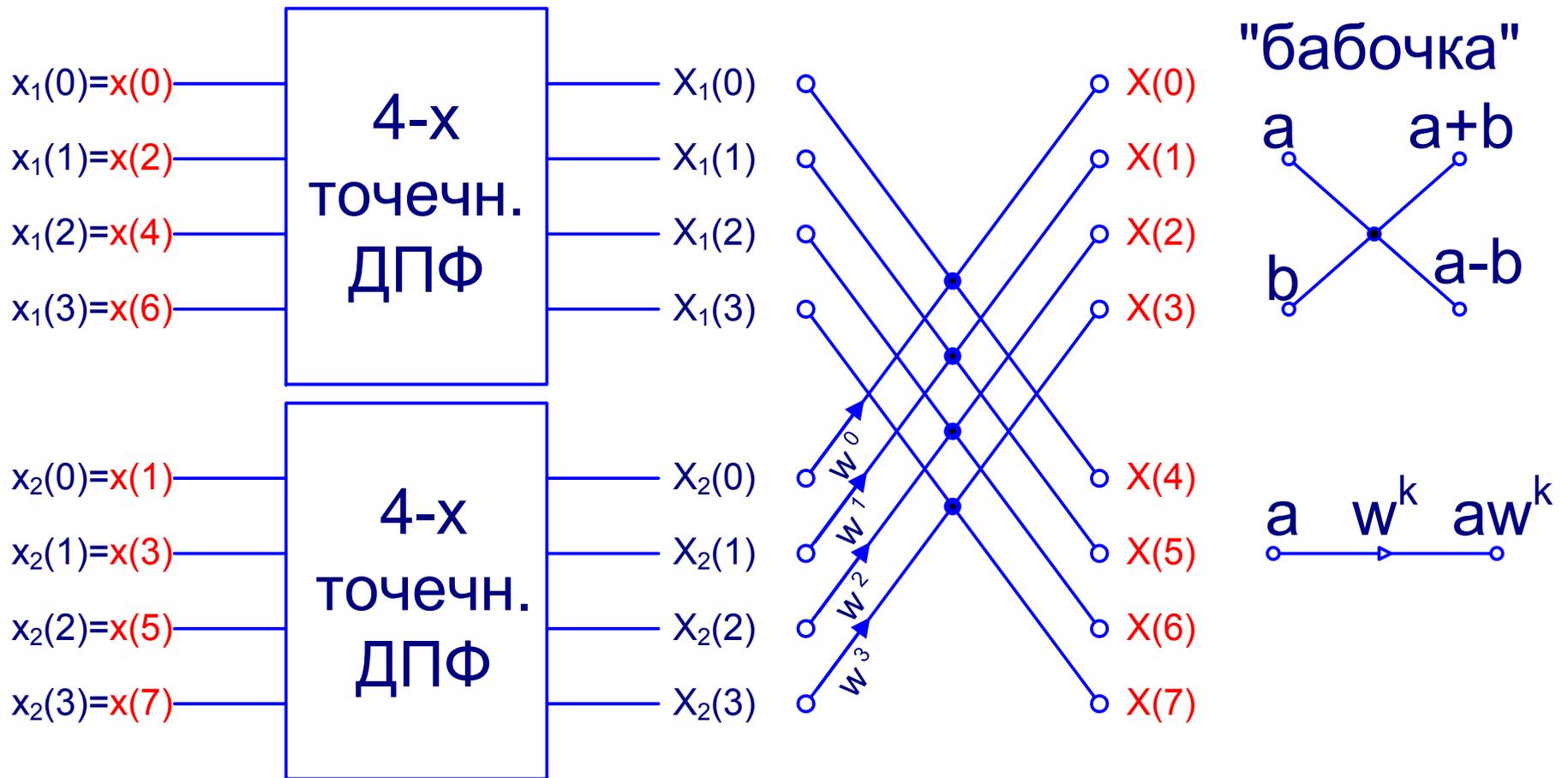
Из-за W_N^k - период $X(k)$ не равен периоду $X_1(k)$.

$$\text{Т.к. } W_N^k = -W_N^{k - \frac{N}{2}} \quad \text{то } X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ X_1(k - \frac{N}{2}) - W_N^{k - \frac{N}{2}} \cdot X_2(k - \frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

Пример алгоритма БПФ размерности 8 по основанию 2 с прореживанием по времени

Разложение ДПФ размерности 8 на два ДПФ размерности 4.

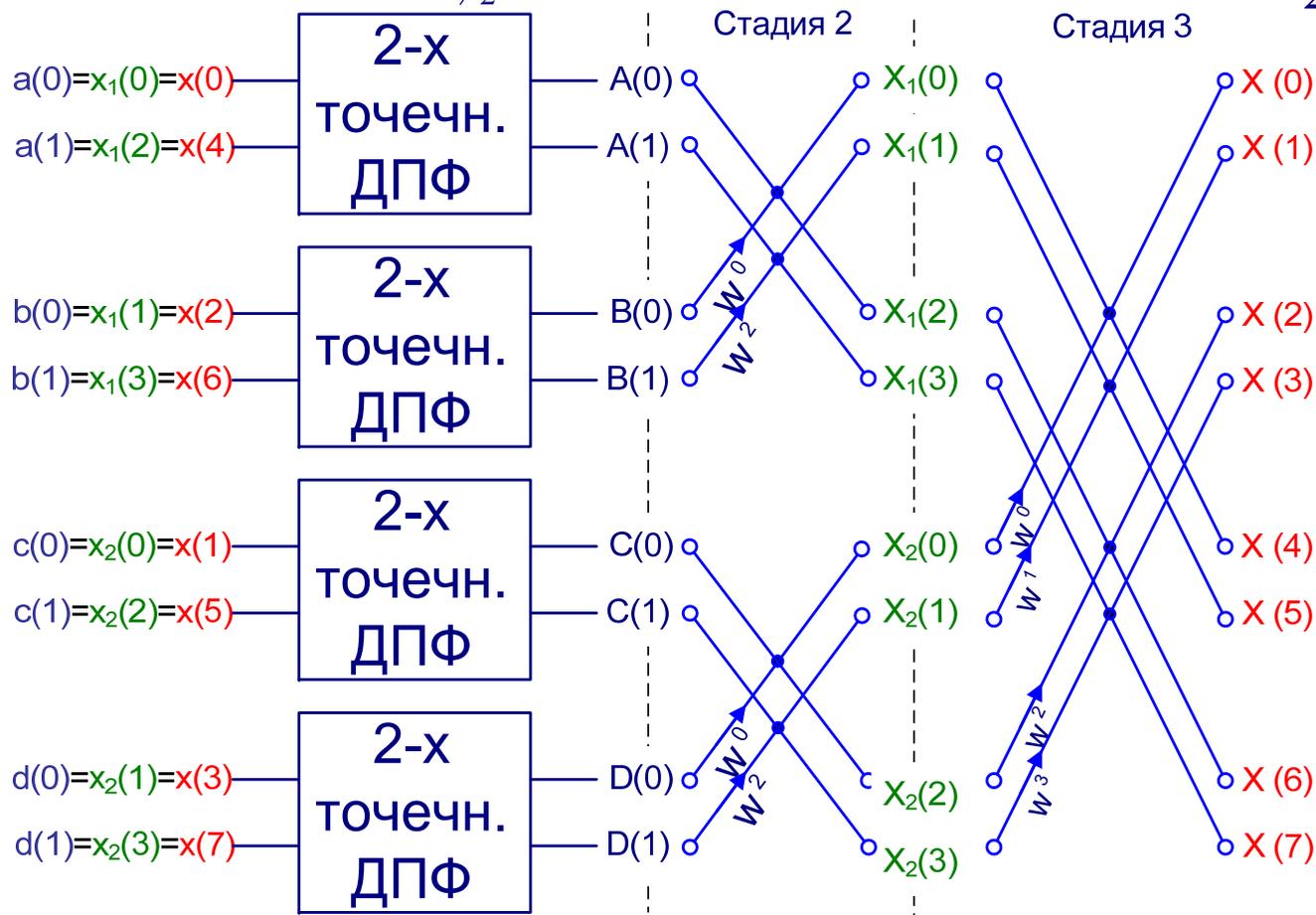
Стадия 3



Пример алгоритма БПФ размерности 8 по основанию 2 с прореживанием по времени

Стадия 2 $X_1(k) = A(k) + W_{N/2}^k \cdot B(k) = A(k) + W_N^{2k} \cdot B(k), 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$

$X_2(k) = C(k) + W_{N/2}^k \cdot D(k) = C(k) + W_N^{2k} \cdot D(k), 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$

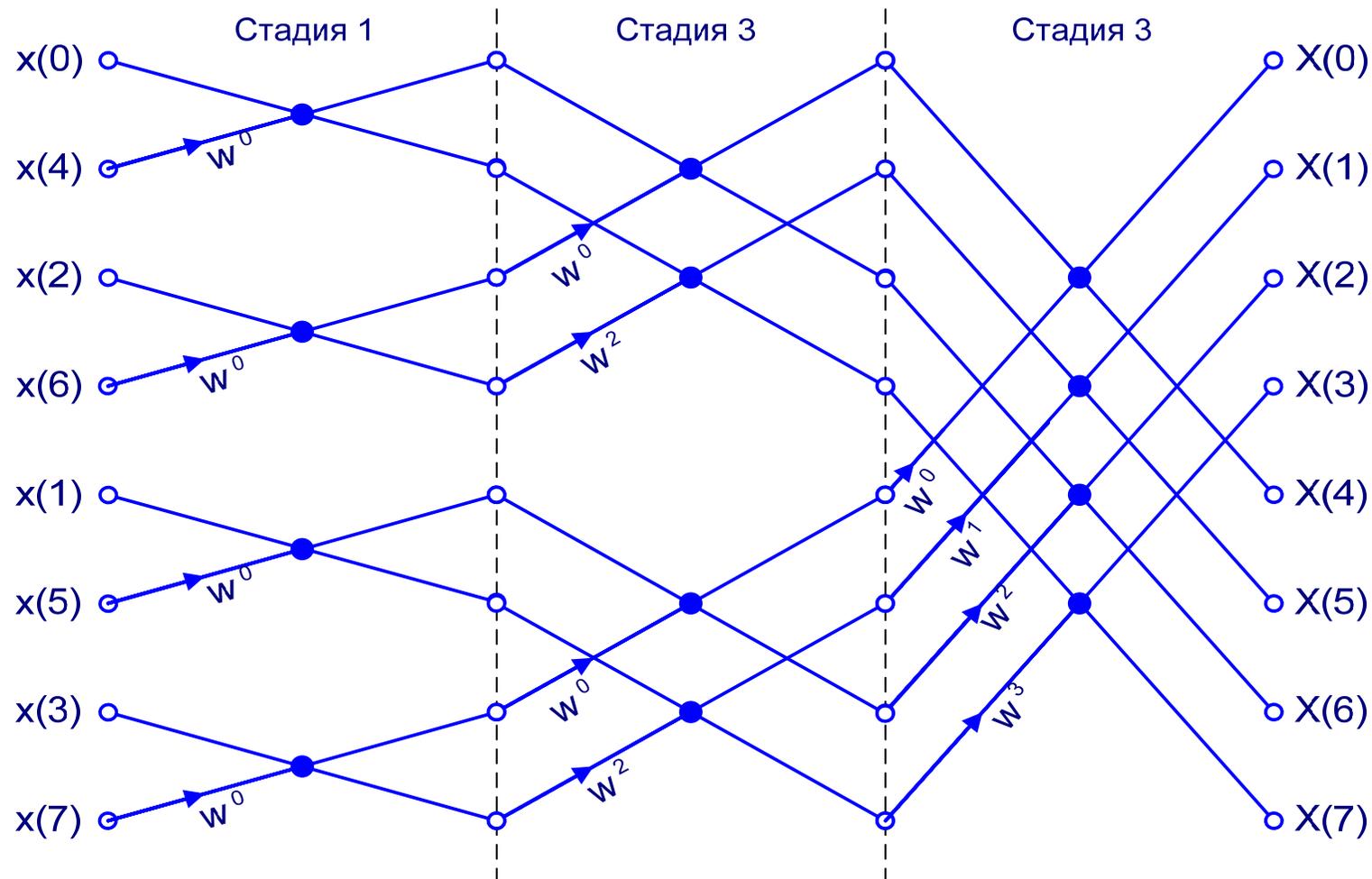


Направленный граф алгоритма БПФ размерности $N = 8$ по основанию 2 с прореживанием по времени и с замещением (алгоритм Кули-Тьюки).

Стадия 1

$$F(0) = f(0) + f_1 \cdot W_N^0 = f(0) + f(1);$$

$$F(1) = f(0) + f_1 \cdot W_N^{N/2} = f(0) - f(1);$$

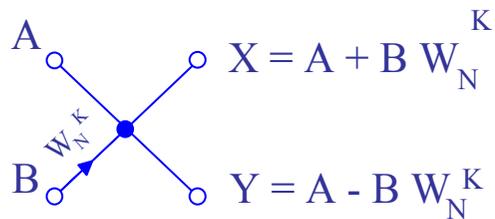


Свойства алгоритма БПФ по основанию 2

1. Алгоритм состоит из этапов. На каждом этапе происходит изменение размерности БПФ вдвое по сравнению с предыдущим.

$$K_{\text{эт}} = \log_2 N$$

2. На каждом этапе необходимо выполнить $N/2$ операций "бабочка".



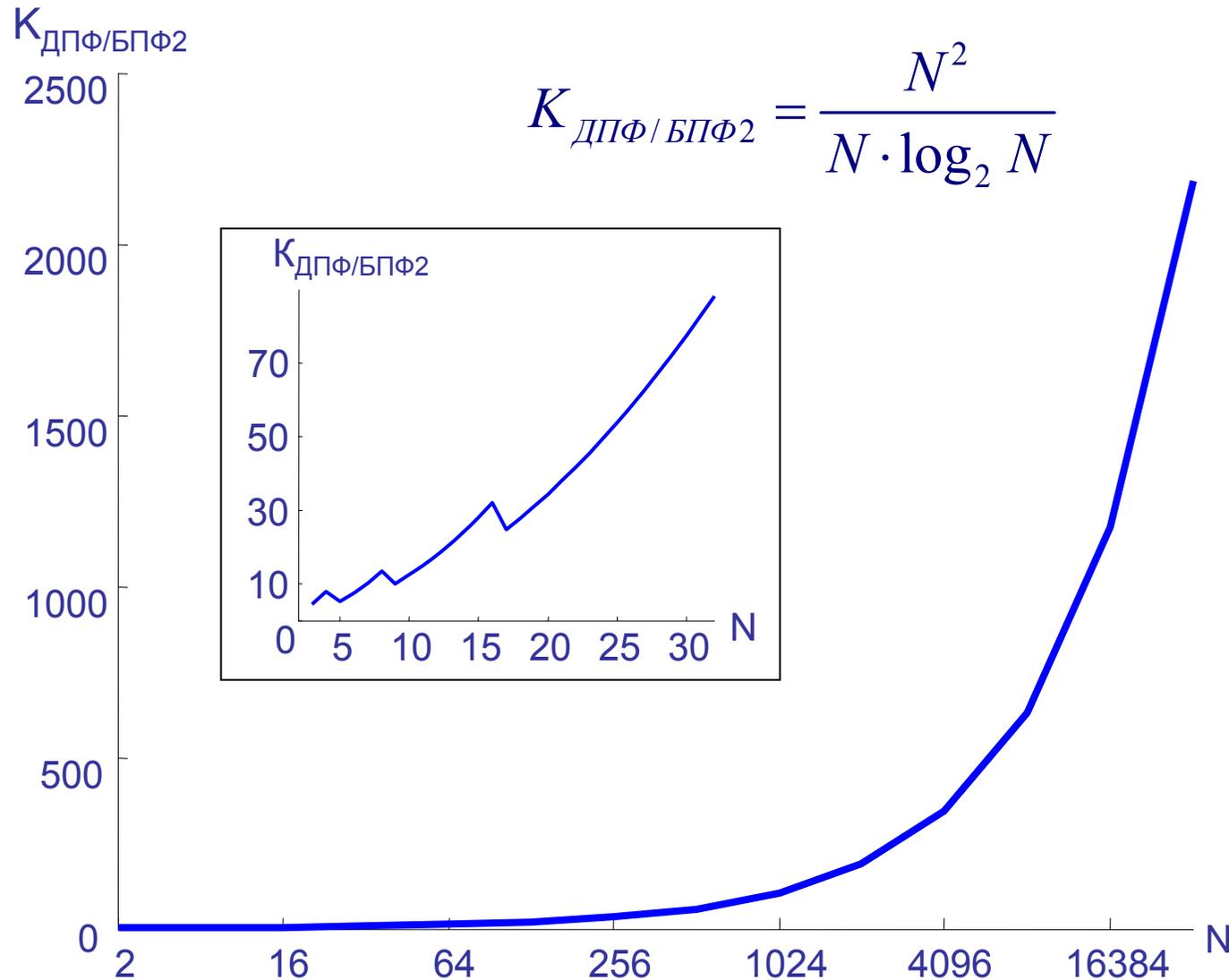
2 операции комплексного сложения и
1 операция комплексного умножения

3. Общее число базовых операций "бабочка":

$$K_{\text{оп}} = \frac{N}{2} \cdot \log_2 N$$

4. Для вычисления базовой операции достаточно иметь одну дополнительную ячейку для хранения произведения. Остальные результаты размещаются в освободившиеся ячейки. Это алгоритм с замещением.

Сравнение вычислительных затрат



Выигрыш в количестве операций алгоритма БПФ₂ по сравнению с ДПФ в зависимости от размерности N

Перестановка данных и двоичная инверсия

Для алгоритма по основанию 2 и прореживанием по времени закон чередования входных отсчетов описывается двоично-инверсным порядком.

Пример: $N = 8 \Rightarrow L = \log_2 8 = 3$

№ п/п	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоич.-инверс. номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Способы получения поворачивающих множителей

1. Табличный – требует много памяти, но имеет наибольшее быстродействие
2. Последовательный – не требует много памяти, но имеет низкое быстродейст.
3. Рекуррентный $W_N^K = W_N^{K-L} \cdot W_N^L$ с изменением шага от этапа к этапу и с начальным условием $W_N^0 = 1$ на каждом этапе

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Входная последовательность разбивается на 2 половины:

$$x_1(n) = x(n), \quad \text{при } n = 0, 1, 2 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$x_2(n) = x(n + \frac{N}{2}), \quad \text{при } n = 0, 1, 2 \dots \frac{N}{2} - 1$$

Тогда N-точечное ДПФ последовательности $\{x(n)\}$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) \cdot W_N^{(n+\frac{N}{2})k}$$

$$\text{Т.к. } W_N^{\frac{N}{2}k} = e^{-j\pi k} \quad \text{то} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + e^{-j\pi k} \cdot x_2(n)] \cdot W_N^{nk}$$

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Поскольку $W_N^{\frac{N}{2}k} = e^{-j\pi k} = \pm 1$ то $X(k)$ для четных и нечетных k :

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] \cdot W_N^{2nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{[x_1(n) + x_2(n)]}_{f(n)} \cdot W_{N/2}^{nk}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) - x_2(n)] \cdot W_N^{n(2k+1)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{\{[x_1(n) - x_2(n)] \cdot W_N^n\}}_{g(n)} \cdot W_{N/2}^{nk}$$

$X(2k)$ получаются из $N/2$ -точечных ДПФ последовательности:

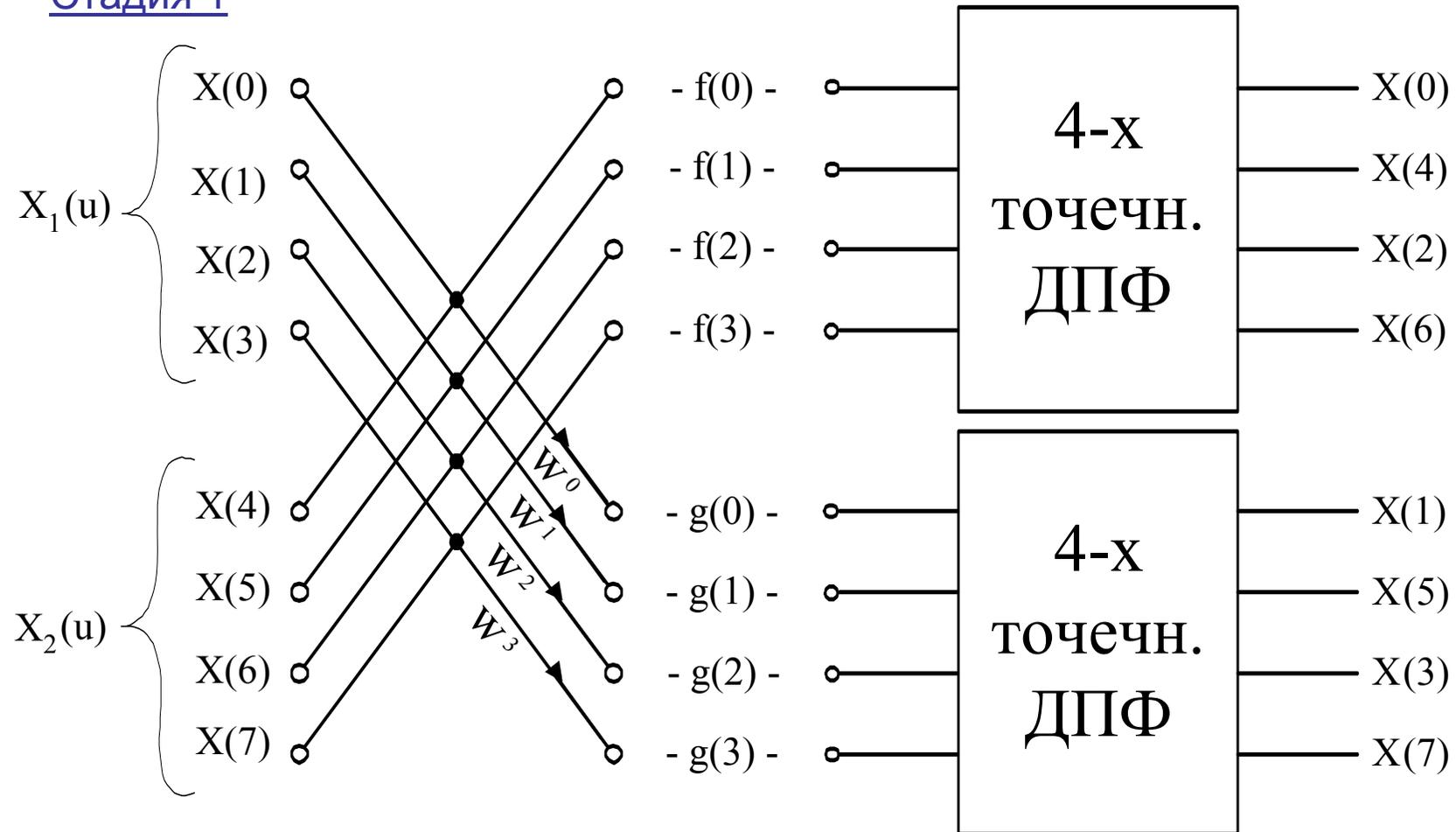
$$f(n) = x_1(n) + x_2(n); \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

$X(2k+1)$ получаются из $N/2$ -точечных ДПФ последовательности:

$$g(n) = [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

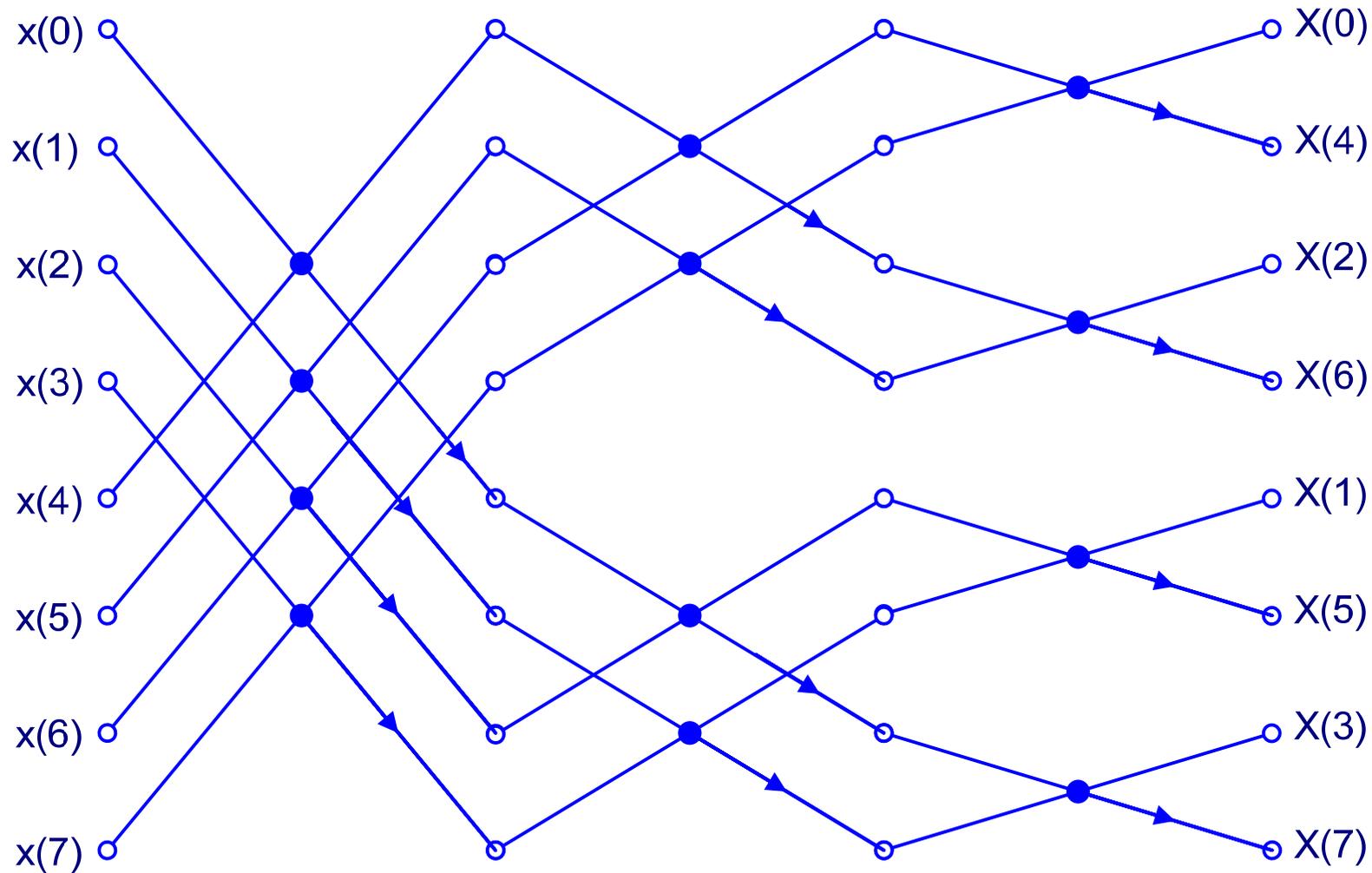
Пример построения алгоритма БПФ размерности 8 с прореживанием по частоте

Стадия 1



Алгоритмы БПФ по основанию 2

Направленный граф алгоритма БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте.



Различия алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и по частоте

по времени

по частоте

1. Порядок следования входных отсчетов:

двоично-инверсный

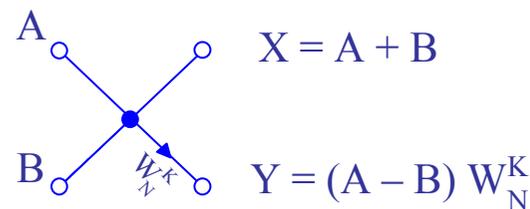
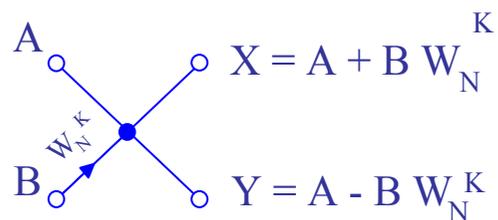
прямой

2. Порядок следования выходных отсчетов:

прямой

двоично-инверсный

3. Базовая операция “бабочка”



Вычисление обратного ДПФ по алгоритму прямого

Обратное ДПФ $\{x(n)\}$ для последовательности $\{X(k)\}$, $k=0, 1, \dots, N-1$

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W^{-nk} \quad \text{- обратное ДПФ}$$

$$N \cdot x^*(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W^{nk}}_{\text{ДПФ послед-ти } X^*(k)} \quad * \text{ - знак комплексного сопряжения}$$

Тогда:

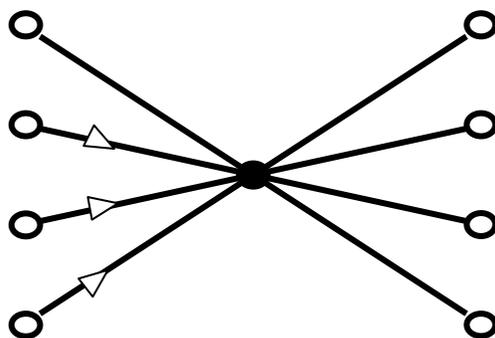
$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W^{nk} \right]^*$$

Т.о. можно использовать алгоритмы БПФ для вычисления ДПФ и ОДПФ

Алгоритмы БПФ по основанию 4

По аналогии с основанием 2 можно построить алгоритмы БПФ по основанию 4. ДПФ размерности 4 не требует операций комплексного умножения, так

как умножение на $W = \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4}\right)$ выполняется перестановкой реальной и мнимой компонент



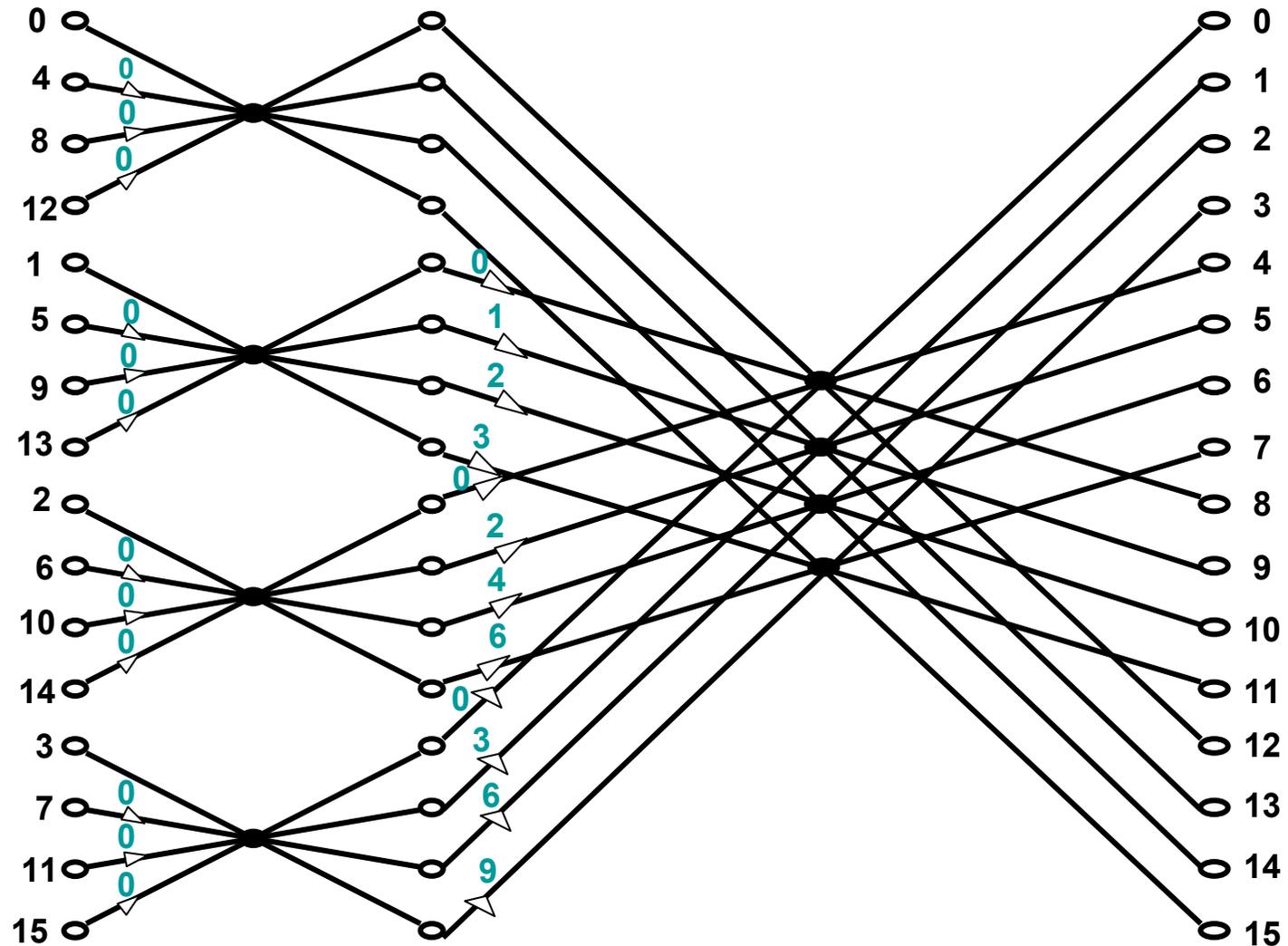
**3 комплексных
умножения**

**12 комплексных
сложений**

Операция «бабочка» по основанию 4 с прореживанием по времени

Выигрыш по количеству операций комплексного умножения по сравнению с алгоритмом БПФ по основанию 2 около 25%.

Алгоритм БПФ по основанию 4 размерности 16



Принцип построения алгоритма БПФ с произвольным основанием

Если N – составное число, то одномерный массив отсчетов можно записать в виде матрицы размерности $N=M \times L$.

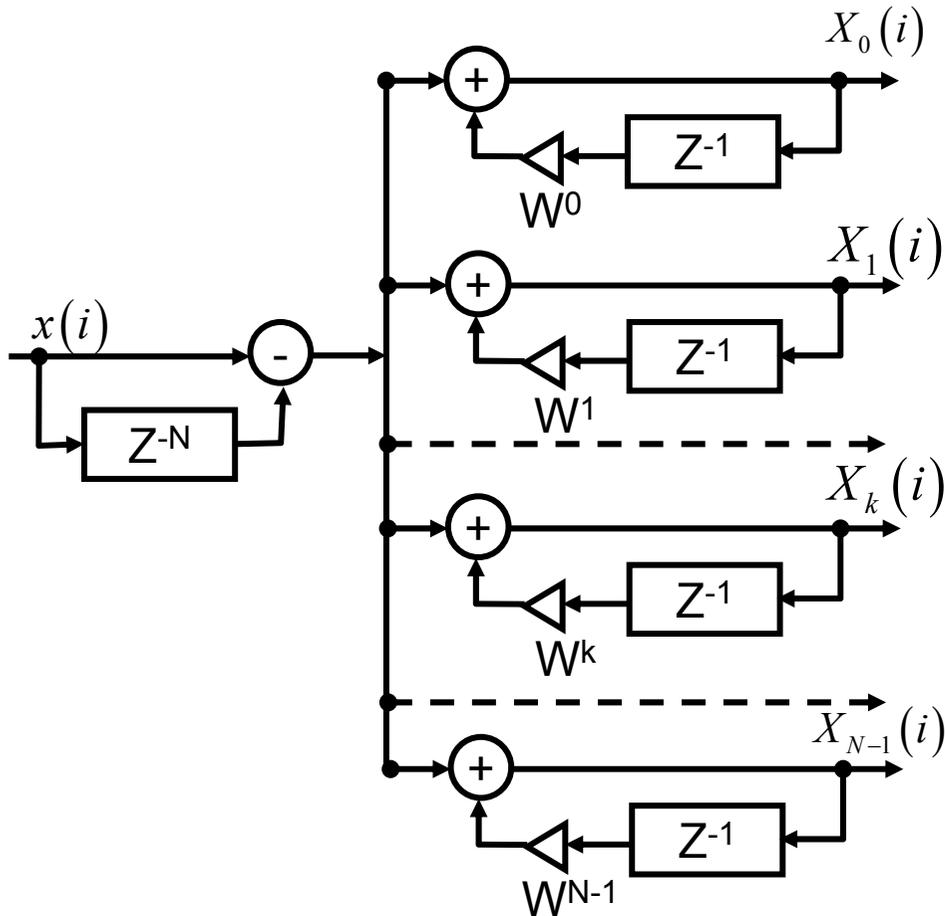
Алгоритм вычисления ДПФ размерности N :

- ❖ Преобразовать одномерный массив в матрицу (заполнение по строкам!) $n = m \cdot L + l$, $n = 0..N-1$, $m = 0..M-1$ (№ столбца), $l = 0..L-1$ (№ строки).
- ❖ Вычислить ДПФ каждого столбца $X_c(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m, l) \cdot W_M^{mk}$, $k = 0..M-1$, $l = 0..L-1$
- ❖ Умножить элементы матрицы $\tilde{X}_c(k, l) = X_c(k, l) \cdot W_N^{kl}$, $k = 0..M-1$, $l = 0..L-1$
- ❖ Вычислить ДПФ каждой строки $X_r(k, i) = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{X}_c(k, l) \cdot W_L^{li}$, $k = 0..M-1$, $i = 0..L-1$
- ❖ Преобразовать матрицу в одномерный массив (считывание по строкам!).

Если размерность строки или столбца - составное число, разбиение можно повторить.

Для произвольных составных N наиболее быстрый алгоритм со смешанным основанием – АВПФ (алгоритм Винограда преобразования Фурье).

Сравнение БПФ и гребенки фильтров.



Анализатор спектра в виде гребенки фильтров

Гребенка фильтров:

- ✓ выдает N спектральных отсчетов в каждый момент времени;
- ✓ Требуется N операций умножения-накопления на 1 отсчет сигнала.

БПФ без перекрытия:

- ✓ Выдает N спектральных отсчетов через N отсчетов сигнала;
- ✓ Требуется $\frac{1}{2} \cdot \log_2 N$ операций умножения-накопления на 1 отсчет сигнала.

БПФ с перекрытием:

- ✓ Выдает N отсчетов через $\frac{N}{K}$ отсчетов сигнала;
- ✓ Требуется в K раз больше операций

Использование «окон» при спектральном анализе

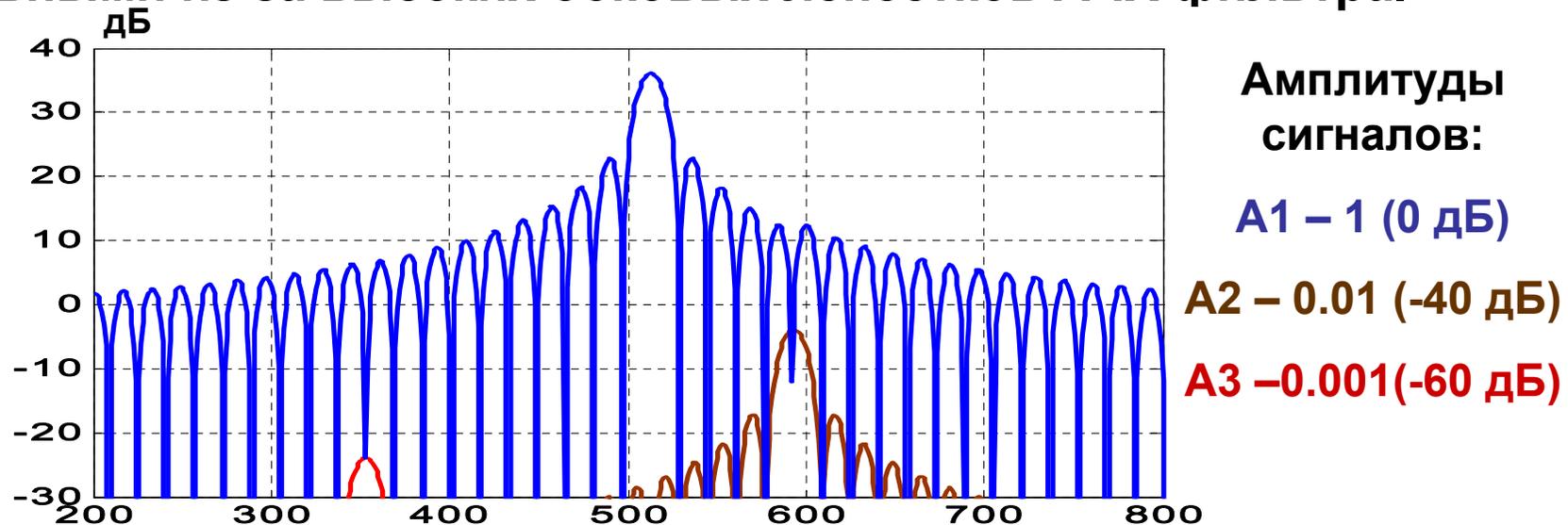
Импульсная характеристика
одного из гребенки фильтров:

$$h(n) = \begin{cases} \exp\left(j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{остальные } n \end{cases}$$

Частотная характеристика
(без фазового множителя):

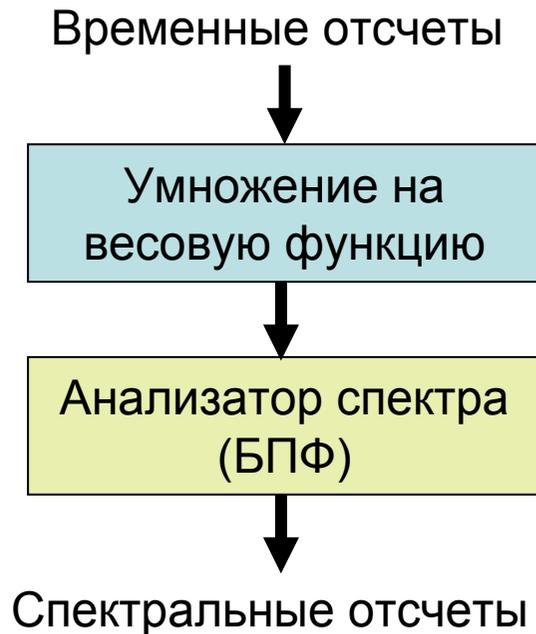
$$H(e^{j\omega}) \approx \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} \quad k=0, 1 \dots N-1$$

Проблема: маскировка слабых спектральных компонент сильными из-за высоких боковых лепестков АЧХ фильтра.



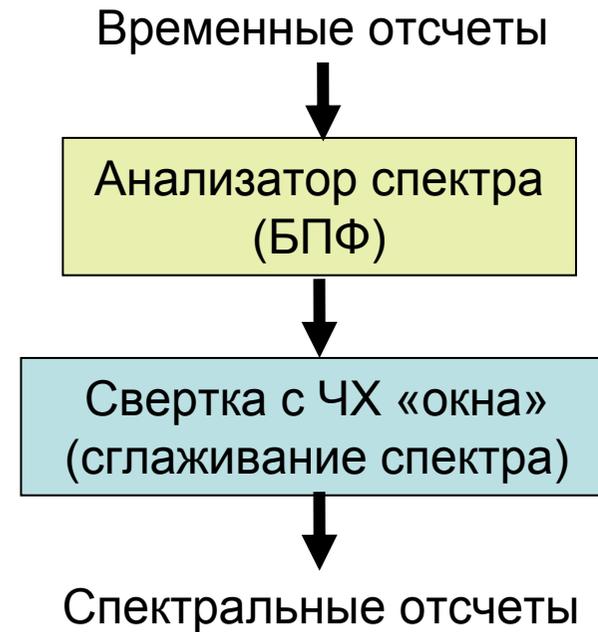
Использование «окон» при спектральном анализе

Во временной области –
умножение сигнала на весовую
функцию «окна».



1 умножение на отсчет для всех
видов окон

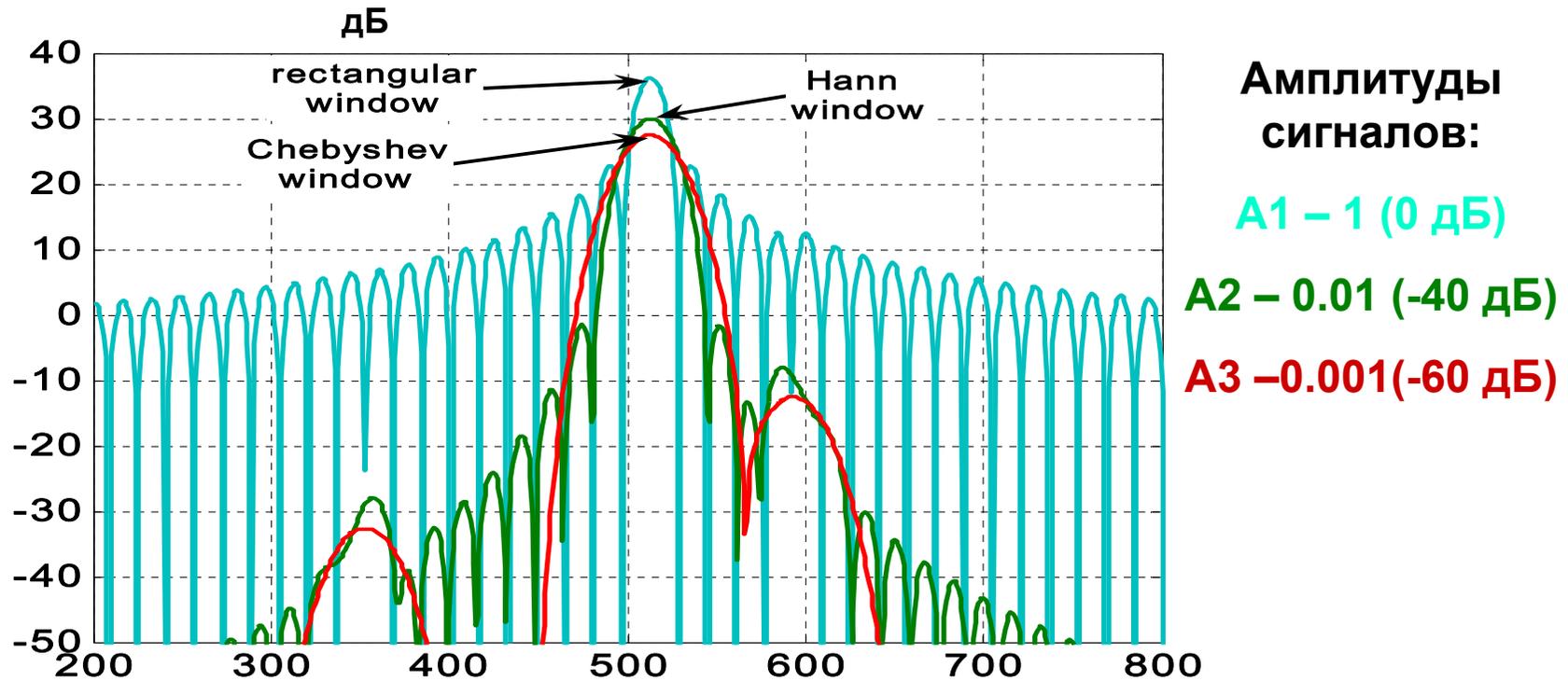
В спектральной области – свертка
спектра сигнала с частотной
характеристикой «окна».



Для окна Ханна порядок фильтра -3
(окно Хэмминга – без умножений).

Для окна Блэкмана порядок
фильтра - 5.

Использование «окон» при спектральном анализе



Стратегия выбора «окна» по одному из параметров:

- по скорости спада БЛ – при большой разнице амплитуд и частот;
- по максимальному уровню БЛ – при разных амплитудах и неизвестных (распределенных в большом диапазоне) частотах;
- по ширине основного лепестка АЧХ – при сопоставимых амплитудах и близко расположенных частотах.

Классические методы спектрального оценивания

Задача: получить оценку спектральной плотности мощности сигнала с минимальной среднеквадратической ошибкой по зашумленной реализации конечной длительности.

Основные характеристики:

✓ **Диапазон анализируемых частот**

Определяется частотой дискретизации F_s :

- от 0 до $\frac{1}{2} F_s$ для действительных сигналов;
- от $-\frac{1}{2} F_s$ до $+\frac{1}{2} F_s$ для комплексных сигналов.

✓ **Разрешающая способность по частоте**

Определяется эффективной шириной главного лепестка ЧХ окна B_e :

$$B_e = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |W(k)|}{\max_{k \in [0, N-1]} (|W(k)|)}$$

✓ **Достоверность**

Определяется относительной среднеквадратической ошибкой Q оценки СПМ

$$Q(k) = \frac{\langle |S(k) - \bar{S}(k)|^2 \rangle}{\langle |S(k)|^2 \rangle}, \quad k=0,1..N-1$$

Классические методы спектрального оценивания

Особенность оценки СПМ при наличии шума:

При увеличении размерности БПФ ошибка оценки СПМ не уменьшается, так как определяется спектральной плотностью шума.

Для ее снижения необходимо усреднение спектральных оценок.

При ограниченной длине реализации случайного процесса:

- ✓ Повышение достоверности оценки приводит к ухудшению разрешающей способности;
- ✓ Повышение разрешающей способности приводит к потере достоверности оценки.

Если влияние шума пренебрежимо мало, то $B_e \cdot T_e \approx 1$

T_e - эффективная длительность реализации.

Если необходимо усреднение оценок СПМ для повышения достоверности, то $Q \cdot T_e \cdot B_S \approx 1$

$$B_S = \frac{\left[\sum_{k=0}^{N-1} W(k) \right]^2}{\sum_{k=0}^{N-1} [W(k)]^2} \quad \text{- статистическая ширина полосы «окна»}$$

Периодограммный метод оценки СПМ

Последовательность операций:

1. Реализация процесса длиной L отсчетов разбивается на M сегментов размером N отсчетов каждый

$$x_m(n), \quad n=0,1,..N-1, \quad m=1,2..M.$$

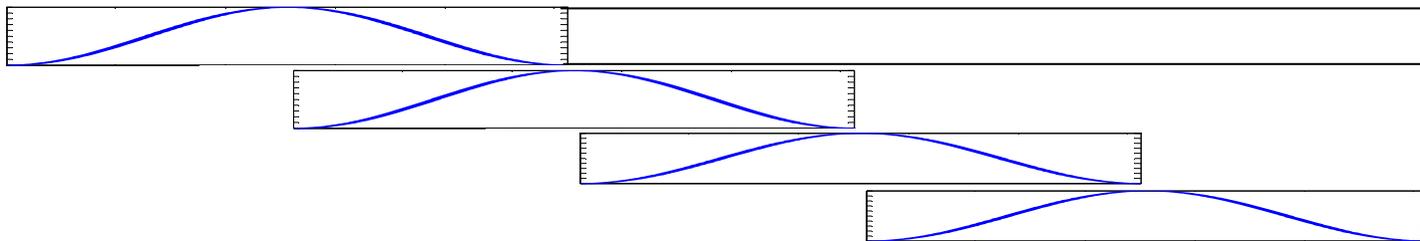
2. Вычисляется БПФ от каждого сегмента

$$X_m(k), \quad k=0,1,..N-1, \quad m=1,2..M.$$

3. Усредняется оценка СПМ

$$P_X(k) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M X_m(k) \cdot X_m^*(k), \quad k=0,1..N-1$$

Для снижения потерь из-за взвешивания функцией «окна» применяется перекрытие сегментов на $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4}$.



Увеличение длины сегмента соответствует улучшению разрешающей способности и снижению достоверности (возрастанию ошибки), и наоборот.

Коррелограммный метод оценки СПМ

Основан на дискретном аналоге теоремы Винера-Хинчина.

Последовательность операций:

1. Вычислить АКФ реализации процесса в диапазоне $[0, N-1]$ дискретных задержек:

$$R_X(m) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) \cdot x^*(n-m), \quad m = 0, 1..N-1.$$

2. Вычислить ДПФ размерности N от АКФ с использованием «окна»:

$$P_X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} R_X(m) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot m\right), \quad k = 0, 1..N-1.$$

Увеличение диапазона задержек АКФ соответствует улучшению разрешающей способности, и снижению достоверности (возрастанию ошибки), и наоборот.

Рекомендуется: начинать оценку СПМ с высокой достоверности, продвигаясь в направлении более высокого разрешения по частоте.

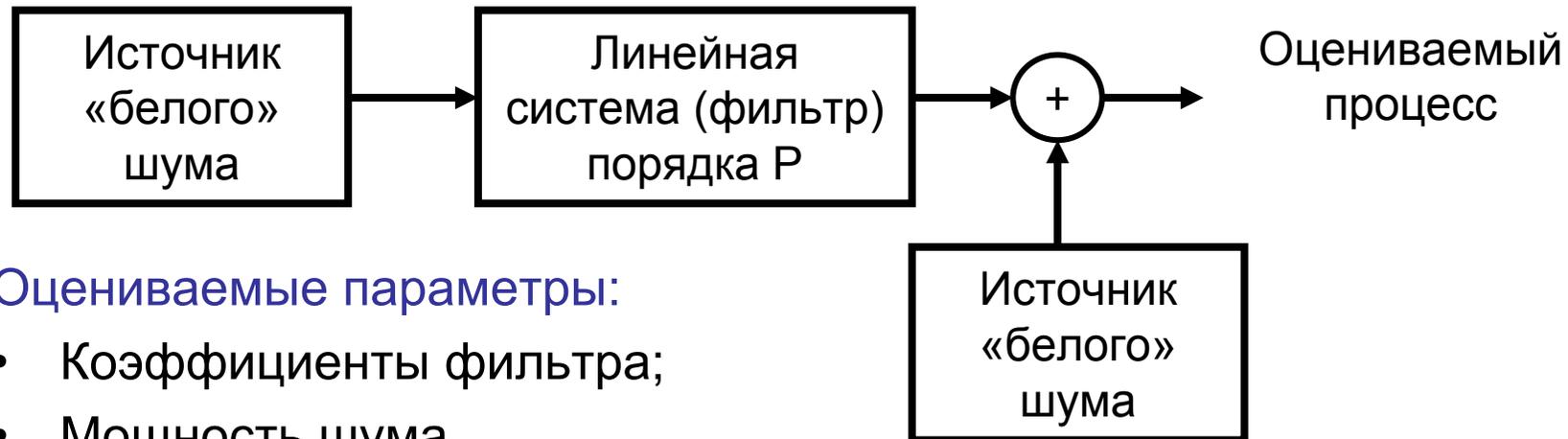
Параметрические методы спектрального оценивания

Основные недостатки классических методов:

- низкое разрешение, ограниченное длительностью сигнала;
- маскировка слабых сигналов боковыми лепестками «окон».

Возможность устранения этих недостатков – в использовании априорной информации об оцениваемом процессе.

Задача оценки СПМ сводится к оценке небольшого числа параметров модели.

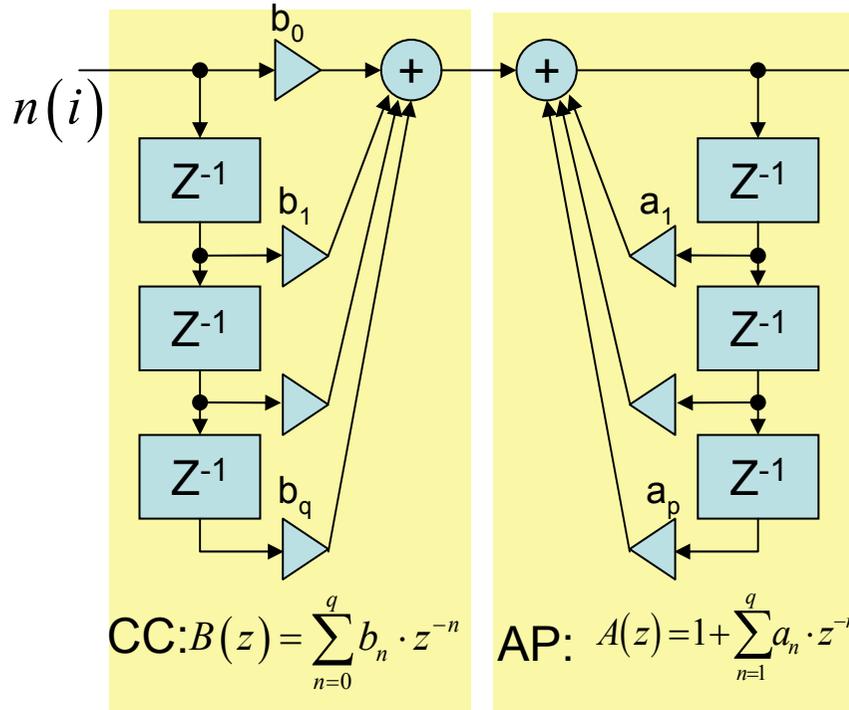


Оцениваемые параметры:

- Коэффициенты фильтра;
- Мощность шума.

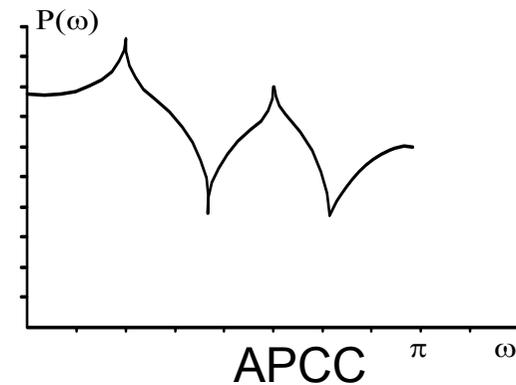
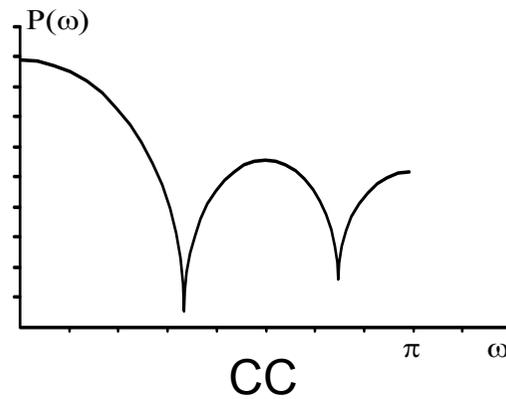
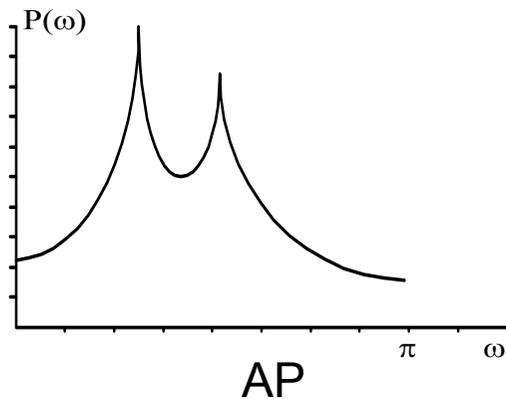
Параметрические методы спектрального оценивания

Модели авторегрессии (АР) и скользящего среднего (СС):



$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{n=0}^q b_n \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n}}{1 + \sum_{n=1}^p a_n \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n}}$$

$$P_x(e^{j\omega}) = \rho \cdot \frac{\left| \sum_{n=0}^q b_n \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p a_n \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n} \right|^2}$$



Параметрические методы спектрального оценивания

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{n=1}^p a_n \cdot r_x(m-n), & m > 0 \\ -\sum_{n=1}^p a_n \cdot r_x(-m) + \rho, & m = 0 \\ r_x^*(-m), & m < 0 \end{cases}$$

**Связь
параметров
АР – модели и
значений АКФ
процесса**

Записываем эти уравнения для $0 \leq m \leq p$ в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(-p+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Нормальное
уравнение
Юла-Уолкера
для АР –
процесса**

Параметрические методы спектрального оценивания

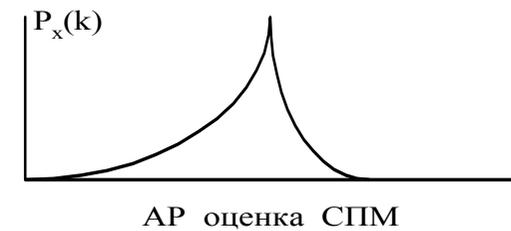
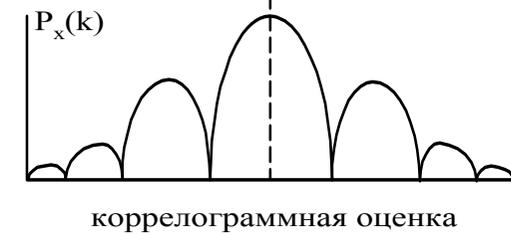
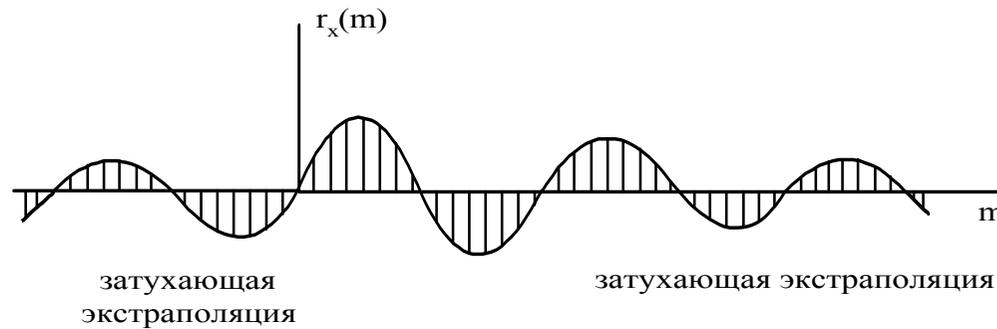
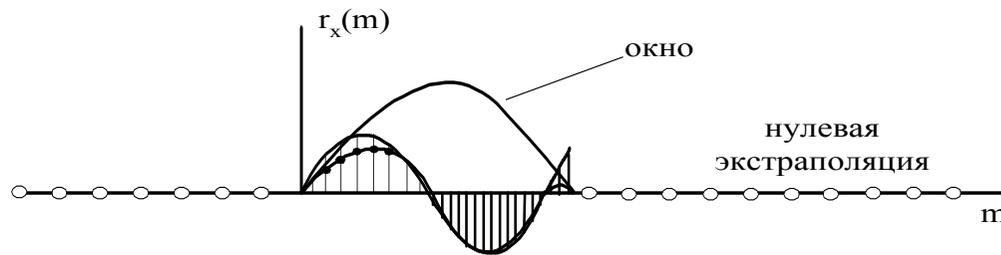
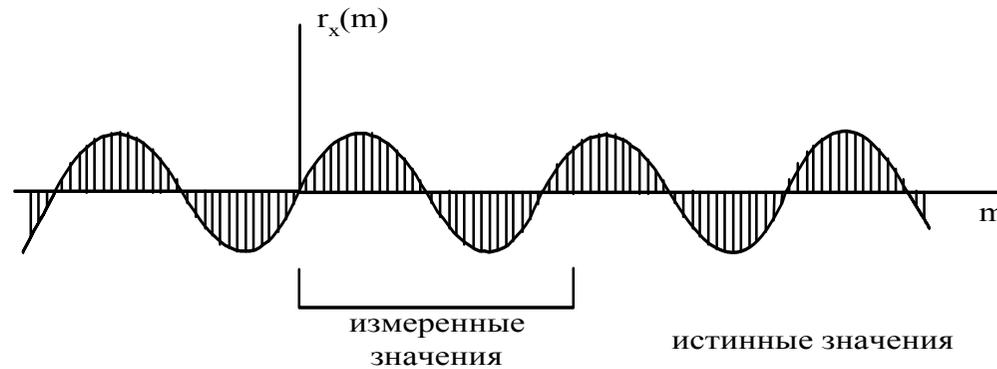
Методика построения оценки СПМ для АР- процесса:

- Рассчитываются значения АКФ : $r_x(0), r_x(1), \dots, r_x(m), \dots, r_x(p)$;
- Решается уравнение Юла-Уолкера относительно параметров АР- модели a_1, a_2, \dots, a_p и спектральной плотности ρ ;
- Вычисляется оценка СПМ:

$$P_x(e^{j\omega}) = \rho \cdot \frac{1}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p a_n \cdot e^{-j \cdot \omega n} \right|^2}$$

Параметрические методы спектрального оценивания

Взаимосвязь классических и параметрических методов оценки СПМ.



Параметрические методы спектрального оценивания

Преимущества параметрических методов:

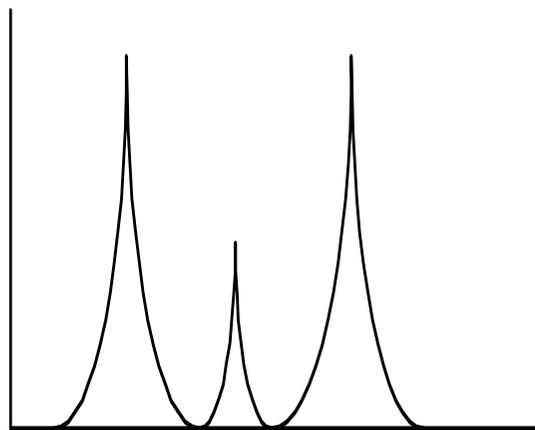
- высокое разрешение, что соответствует «длинной» АКФ;
- отсутствие боковых лепестков весовой функции «окна».

Недостатки параметрических методов:

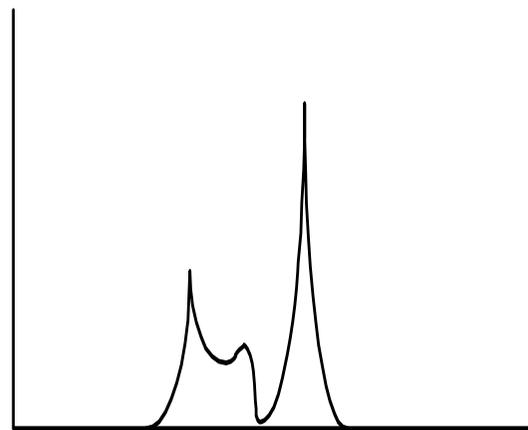
- неопределен выбор порядка модели;
- зависимость разрешения от отношения сигнал/шум

Формула Марпла
$$\Delta f = \frac{1.03}{T \cdot p \cdot (Q + 1)^{0.31}} ;$$

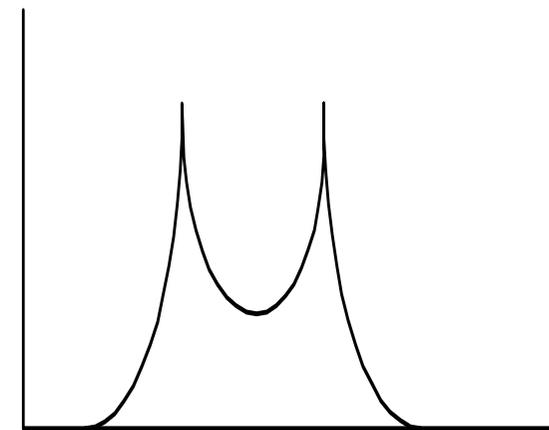
- возможная потеря устойчивости.



с / ш = 30 дБ



с / ш = 20 дБ



с / ш = 10 дБ

Параметрические методы спектрального оценивания

Сводная таблица параметрических методов оценки				
Метод	Бурга	Ковариационный	Модифицированный	Юла-Уоткера
Метод	Метод	Ковариационный	Модифицированный	Юла-Уоткера
	Рассчитывает	Не использует	Использует	Использует
	разрешение для	неудачным	характеристики	высоких
	блока данных	Порядок должен	должен быть	разрешение
	Модифицированный	либо равен	меньше, либо	других
	Юла-Уоткера	разрешение	равен 2/3	Минимальная
	устойчивые	работоспособен	предназначен	устойчивые
	высокая	для «чистых	«чистых	«вперед»
	ограничением	шуме	гармоник в	
	Смещение частот		шуме	
	Дурбина-Левинсона		Наименьшее	
	в шуме		Не подвержен	
			расщеплению	
			частот оценок	
			спектральных	
			шумов	

Параметрические методы спектрального оценивания

Общие свойства				
Метод	Берга	Ковариаци- онный	Модифиц. ковариац.	Юла- Уолкера
	Не использует взвешивание данных функцией «окна»	Не использует взвешивание данных функцией «окна»	Не использует взвешивание данных функцией «окна»	Использует взвешивание данных функцией «окна»
	Минимальная СКО предсказания «вперед» и «назад» с ограничением алгоритма Дурбина- Левинсона	Минимальная СКО предсказания «вперед»	Минимальная СКО предсказания «вперед» и «назад».	Минимальная СКО предсказания «вперед»

Параметрические методы спектрального оценивания

Преимущества				
Метод	Берга	Ковариационный	Модифицированный ковариационный	Юла-Уолкера
	Высокое разрешение для короткой длины блока данных	Разрешение выше, чем у Юла-Уолкера при коротких блоках данных	Высокое разрешение для короткой длины блока данных	Для длинных блоков данных разрешение такое же, как у других методов
	Всегда устойчивые модели	Работоспособен для P чистых гармоник в шуме	Работоспособен для P чистых гармоник в шуме	Всегда устойчивые модели
			Не подвержен расщеплению спектральных линий	

Параметрические методы спектрального оценивания

Недостатки				
Метод	Берга	Ковариационный	Модифицированный ковариационный	Юла-Уолкера
	Расположение пиков сильно зависит от начальных фаз	Может приводить к неустойчивым моделям	Может приводить к неустойчивым моделям	Работает относительно плохо для коротких блоков данных
	Подвержен расщеплению спектральных линий при высоком порядке модели	Смещение частот оценок синусоид в шуме	Расположение пиков слегка зависит от начальных фаз	Смещение частот оценок синусоид в шуме
	Смещение частот оценок синусоид в шуме		Наименьшее смещение частот оценок синусоид в шуме	

Параметрические методы спектрального оценивания

Условия несингулярности				
Метод	Берга	Ковариационный	Модифицированный ковариационный	Юла-Уолкера
	-	Порядок должен быть меньше, либо равен половине размера кадра данных	Порядок должен быть меньше, либо равен $2/3$ размера кадра данных	-

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б.. Теория и применение цифровой обработки сигналов. /пер. с англ. – Мир, 1978
2. Солонина А.И., Улахович Д.Л. и др. Основы ЦОС. Курс лекций. Изд.2-е - СПб.:Питер,2005
3. А.Б.Сергиенко. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003 г.
4. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов.– СПб.: Политехника,1998
5. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. Справочник. – М.: Радио и связь, 1985
6. Айфичер Э.С, Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание .Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004
7. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. пер. с англ. под ред. Бритова А.А. – М.: Бином, 2006.
8. Применение цифровой обработки сигналов под ред. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980
9. Введение в цифровую фильтрацию. Под ред. Богнера Г. Пер. с англ. – М.: Мир, 1976
10. Каппелини В., Константинос А.Д., Эмилини П., Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоавтомиздат, 1983
11. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов, М., Мир, 1989
12. Гольденберг К.Н., Матюшкин Б.Ю., Поляк Н.Н., Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1990
13. Карташев В. Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1982