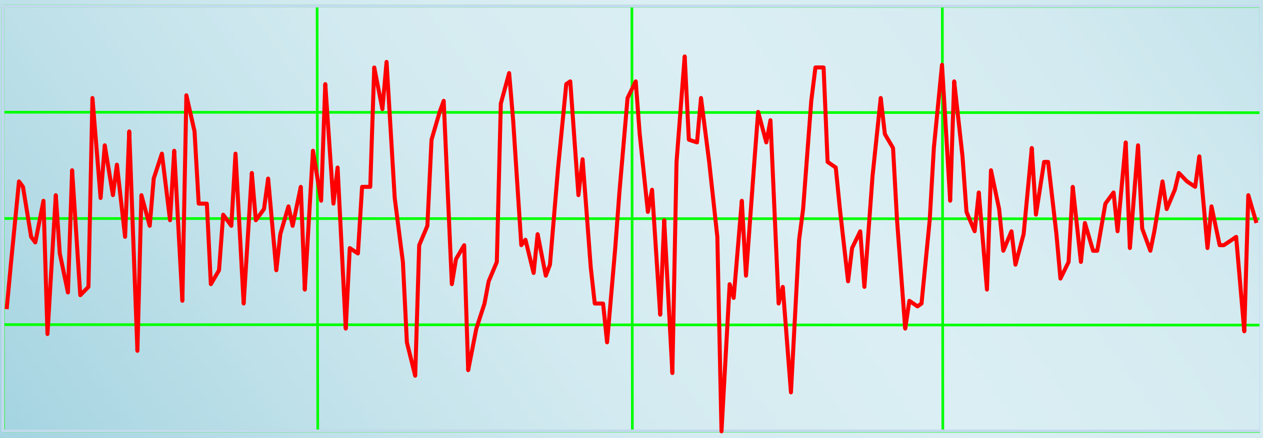
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Быстров Н.Е.

Тематические лекции
Часть 1

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ



Великий Новгород
2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Быстров Н.Е.

Тематические лекции
Часть 1

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Великий Новгород
2011

ББК 32.841
УДК 621.396.1

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Рассветалов Л.А.

Быстров Н.Е. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие / ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2011 г.

Тематические лекции представляют собой учебное пособие по 1 части дисциплины "Радиотехнические цепи и сигналы". В учебном пособии рассматриваются вопросы общей теории сигналов и их спектральных представлений. Излагаются основы корреляционного анализа детерминированных сигналов. Приводятся элементы спектрального анализа дискретных сигналов. Рассматриваются методы модуляции радиосигналов, и производится анализ узкополосных сигналов. Излагается теория случайных сигналов.

Изучение материала рекомендуется сопровождать лабораторными занятиями, которые имеются в составе курса.

Учебное пособие отвечает образовательным стандартам и предназначено для подготовки бакалавров по направлению 210300.62 - «Радиотехника»

Учебное пособие одобрено советом института Электронных и Информационных Систем Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

Содержание

Введение

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» («РТЦ и С») является фундаментальной дисциплиной при подготовке специалистов по направлению «Радиотехника».

Целью курса РТЦ и С является изучение основных сведений и понятий, связанных со свойствами и характеристиками сигналов, а также их преобразованием в радиотехнических цепях. Важнейшей задачей курса является установление взаимосвязи методов математического описания сигналов и радиотехнических цепей с физической стороной изучаемых процессов.

В техническом плане радиотехника объединяет разнообразные устройства, предназначенные для передачи и приема информации в рамках определенной системы посредством электромагнитных волн. К числу таких систем относятся:

- системы звукового и телевизионного радиовещания;
- системы наземной и космической радиосвязи, в том числе сотовая радиосвязь;
- радионавигационные системы глобального позиционирования;
- радиолокационные системы ближнего и дальнего радиуса действия;
- системы радиоуправления и радиотелеметрического контроля разнообразными объектами.

В научном плане радиотехника занимается оптимизацией радиотехнических устройств и систем с целью повышения помехоустойчивости и электромагнитной совместимости.

Радиотехника опирается на следующие фундаментальные понятия – сообщение, сигнал, цепь и распространение радиоволн.

Содержанием изучаемой дисциплины РТЦ и С являются основополагающие вопросы радиотехники, связанные с изучением спектральных и корреляционных свойств аналоговых и дискретных сигналов, с теорией модуляции и демодуляции радиосигналов, с методами преобразования и оптимальной обработки сигналов при воздействии помех. Большое значение в курсе уделяется анализу процессов, протекающих в радиотехнических цепях, разнообразного вида и назначения.

Следует особо подчеркнуть роль компьютера, внесшего радикальные изменения в изучение многих вопросов радиотехники. С их помощью осуществляется моделирование, анализ, оптимизация и синтез цепей и сигналов, что позволяет глубже усвоить теоретические основы радиотехники.

В результате изучения дисциплины РТЦ и С студент должен:

- иметь представление:
  - о формах и свойствах детерминированных и случайных сигналов;
  - о структурах и характеристиках радиотехнических цепей;
  - о принципах функционирования радиотехнических устройств и систем.
- усвоить современные методы:
  - спектрального и корреляционного анализа сигналов;
  - преобразования сигналов в линейных и нелинейных радиотехнических цепях;
  - синтеза сигналов и радиотехнических цепей с требуемыми характеристиками.
- овладеть основными положениями теории:
  - аналоговой и цифровой обработки сигналов;
  - оптимальной фильтрации сигналов при воздействии помех;
  - обеспечения помехоустойчивости при передаче и приеме сигналов.
- приобрести навыки:
  - самостоятельной работы с научно-технической литературой;
  - использования вычислительной техники для решения радиотехнических задач.

1 Основы общей теории радиотехнических сигналов

Главной задачей радиотехнической системы является передача информации от отправителя к потребителю по разнообразным каналам связи. Под информацией понимают сведения, о каком либо явлении, событии или объекте. Информация, выраженная в определенной форме, представляет собой сообщение. Сообщение с помощью датчиков преобразуется в сигнал. Сигнал является материальным носителем сообщения. Во многих случаях сигнал отображает временные процессы, происходящие в некоторой системе, и поэтому описанием конкретного сигнала может быть функция времени.

1.1 Основные принципы передачи и приема информации

Каналом передачи информации является совокупность технических средств, предназначенных для передачи и приема сигналов. В некоторых приложениях, сигнал является низкочастотным колебанием и поэтому он может передаваться с помощью проводных или кабельных каналов связи. Высокочастотные радиосигналы могут распространяться в свободном пространстве. Канал передачи информации с помощью электромагнитных волн называется радиотехническим каналом связи.

В процессе передачи и приема сигналы подвергаются различным преобразованиям. Рассмотрим типовые преобразования применительно к обобщенной функциональной схеме радиотехнического канала, представленной на рис. 1.1.1.

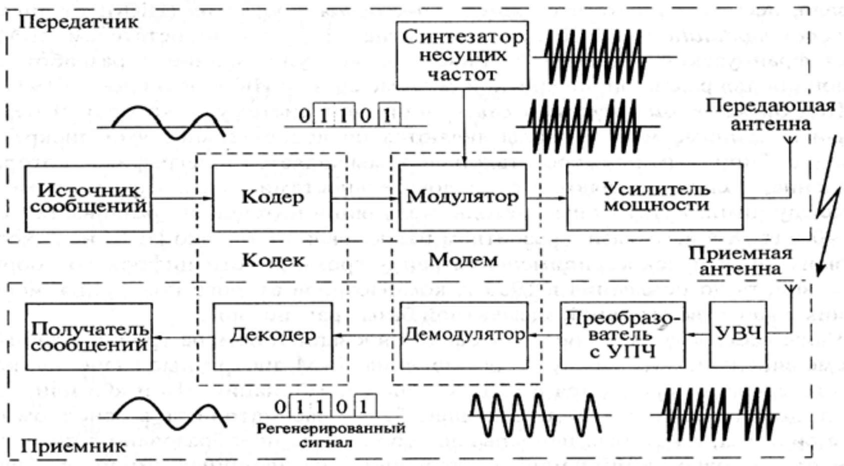


Рис. 1.1.1

На передающей стороне канала сообщение преобразуется в сигнал. Преобразователем может служить микрофон при передаче речи или музыки, светочувствительная матрица при передаче изображений и другие преобразователи физических процессов в электрический сигнал. Кодирующее устройство (кодер) выполняет функцию преобразования исходного сигнала сообщения в сигнал другой формы, более пригодной для последующей модуляции и передачи по каналу связи. Чаще всего кодирующее устройство выполняет функцию преобразования аналогового сигнала в цифровой и обеспечивает помехоустойчивое кодирование информации.

Процесс модуляции заключается в изменении одного или нескольких параметров высокочастотного колебания по закону сигнала сообщения. Наиболее распространены амплитудная, частотная и фазовая модуляции, которые имеют ряд разновидностей. Модулированный сигнал поступает в усилитель мощности радиосигнала. В тракте усилителя мощности осуществляется перенос модулированного радиосигнала на несущую частоту излучения. Несущая частота излучения назначается в зависимости от назначения системы передачи информации. Подразделение радиоволн на диапазоны и области их использования представлены в таблице 1.1.1.

Табл. 1.1.1.

Используемые термины	Диапазон радиочастот	Диапазон длин волн	Области использования
Сверхдлинные. Мириаметровые.	< 30 кГц	100 - 10 км	Телеграфия. Дальняя радионавигация
Длинные. Километровые.	30 - 300 кГц	10 - 1 км	Радиовещание
Средние. Гектометровые.	300 - 3000 кГц	1000 - 100 м	Радиовещание
Короткие. Декаметровые.	3 -30 МГц	100 - 10 м	Радиовещание, Мобильная радиосвязь
Ультракороткие. Метровые	30- 300 МГц	10 - 1 м	УКВ ЧМ вещание, Телевизионное вещание, Мобильная радиосвязь
Дециметровые. (L, S-диапазоны)	0.3 – 3 ГГц	100 - 10 см	Телевизионное вещание, Космическая радиосвязь, Сотовая радиосвязь, Радиолокация
Сантиметровые. (C,X, K-диапазоны)	3 -30 ГГц	10 -1 см	Космическая радиосвязь, Радиолокация, Радионавигация, Радиоастрономия
Миллиметровые	30 - 300 ГГц	10 -1 мм	Космическая радиосвязь, Радиолокация, Радиоастрономия
Субмиллиметровые	300 - 3000 ГГц	1 - 0.1 мм	Радиолокация, Радиоастрономия

Антенна приемника улавливает ничтожную долю энергии излученного сигнала. Поэтому приемный тракт содержит усилитель высокой частоты (УВЧ), который обеспечивает необходимое усиление сигналов на несущей частоте. Далее усиленный сигнал поступает на преобразователь частоты и усилитель сигналов на промежуточной частоте (УПЧ), в котором осуществляется основное усиление сигналов для обеспечения приема достоверной информации. При приеме полезных сигналов одновременно присутствуют и мешающие сигналы, т.е. помехи самой различной природы. Принимаемый сигнал искажается под воздействием помех. Помехи возникают как в среде распространения сигналов, так и в технических устройствах, выполняющих необходимые преобразования сигналов. В первом случае помехи называются внешними, во втором - внутренними. Внутренние помехи образуются из-за теплового и дробового эффектов работы усилительных элементов. Они называются шумами приемного тракта радиотехнических устройств. Выделение полезных сигналов или максимальное подавление помех является одной из основных задач обработки сигналов. Поэтому проблема усиления в приемнике неотделима от проблемы выделения сигнала на фоне помех. Усиленный и выделенный из помех сигнал поступает на демодулятор сигналов. На выходе демодулятора получаем закодированный сигнал сообщения, который поступает в декодирующее устройство (декодер). Под декодированием понимают извлечение информационных сведений из принимаемых сигналов и преобразование этих сведений в форму, удобную для восприятия и дальнейшего использования.

Разнообразие помеховой обстановки требуют разработки достаточно совершенных радиотехнических систем. Выбор сигнала имеет принципиальное значение, поскольку от их вида зависят многие качественные показатели радиотехнической системы. Задача приема сигналов состоит в наилучшем воспроизведении сообщений, заключенном в сигнале, искаженном помехами. Таким образом, центральной задачей при разработке радиотехнических систем является проблема повышения помехоустойчивости приема сигналов. Под помехоустойчивостью понимают способность радиотехнических систем поддерживать на заданном уровне показатели качества при воздействии различного вида помех. Помехи радиоизлучения создают проблему электромагнитной совместимости радиотехнических систем. Под электромагнитной совместимостью понимают совокупность мер, направленных на исключение взаимных помех радиотехническим системам. Взаимные помехи между радиотехническими системами устраняют рациональным распределением частот, улучшением качества работы передатчика за счет снижения внеполосных излучений, применением направленных антенн.

1.2 Общая характеристика сигналов и цепей

Сигналы могут быть объектами теоретических исследований только в том случае, если указан способ их математического описания. Математическая модель сигнала позволяет проводить классификацию сигналов, выполнять их сравнение, моделировать системы обработки сигналов. Выбор математического аппарата определяется простотой и удобством его использования при анализе и обработке сигналов.

Классификация сигналов. На основании существенных признаков математических моделей на рис. 1.2.1. приведена общепринятая классификация сигналов.

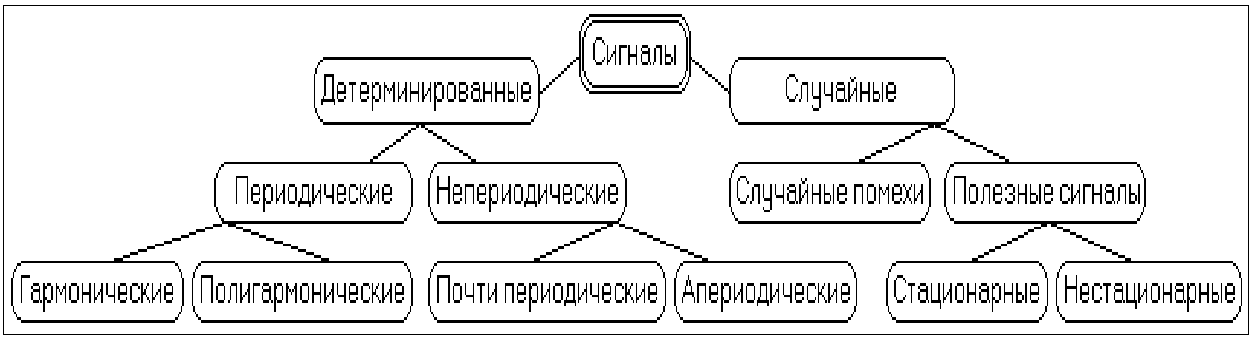


Рис. 1.2.1.

С информационной точки зрения сигналы разделяются на две крупных группы: детерминированные и случайные. Детерминированными называют сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени являются априорно известными или могут быть описаны математическими формулами. К случайным относят сигналы, мгновенные значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. Обычно выделяют два класса детерминированных сигналов: периодические и непериодические. К периодическим сигналам относят гармонические и полигармонические сигналы. К непериодическим сигналам относят почти периодические и апериодические сигналы. Почти периодические сигналы близки по своей форме к полигармоническим. Они также представляют собой сумму двух и более гармонических сигналов, но не с кратными, а с произвольными частотами. Апериодические сигналы составляют основную группу непериодических сигналов и задаются произвольными функциями времени.

Случайные сигналы можно разделить на случайные помехи и случайные полезные сигналы. Случайные помехи весьма разнообразны. К ним можно отнести и шумы приемного тракта устройства обработки. Случайные полезные сигналы подразделяют на стационарные и нестационарные. Случайные стационарные сигналы сохраняют свои статистические характеристики во времени. Что касается случайных нестационарных сигналов, то их общепринятой классификации не существует.

Типы сигналов. Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания.

Аналоговый сигнал описывается непрерывной функцией непрерывного аргумента. Пример графического отображения аналогового сигнала приведен на рис. 1.2.2.

Рис. 1.2.2.

Аналоговые сигналы непрерывны во времени и принимают произвольные мгновенные значения в определенном интервале амплитуд.

Дискретный сигнал по своим значениям также является непрерывной функцией, но определен только в дискретные моменты времени. Пример дискретного сигнала приведен на рис. 1.2.3.

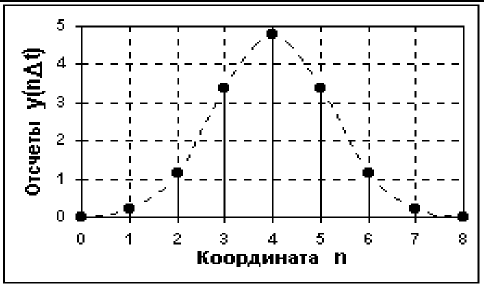


Рис. 1.2.3.

Чаще всего дискретный сигнал получен дискретизацией аналогового сигнала и его значения в точности равны значениям аналогового сигнала. Величина, обратная шагу дискретизации, называется частотой дискретизации.

Цифровой сигнал квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Пример дискретного сигнала приведен на рис. 1.2.4. По существу, цифровой сигнал по своим значениям является разновидностью дискретного сигнала при округлении его значений до определенных квантованных уровней.

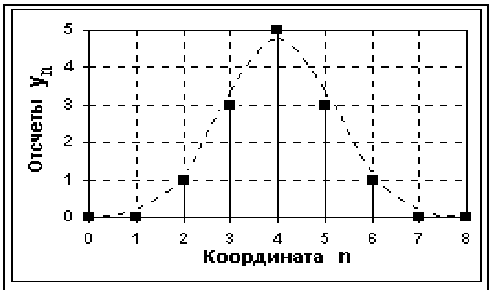


Рис. 1.2.4.

Процесс преобразования бесконечных по значениям аналоговых отсчетов в конечное число значений, представленных цифровыми кодами, называется квантованием по уровню. Цифровые коды являются последовательностью чисел, представленных чаще всего в двоичной системе исчисления. В общем случае представление непрерывного сигнала набором дискретных отсчетов приводит к определенной потере полезной информации. Однако правильно выбранный интервал дискретизации во времени позволяет свести к минимуму потери информации. Очевидно, что и при квантовании сигнала возникают ошибки округления отсчетов, которые называют шумами или ошибками квантования.

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) предоставляет широкие возможности по передаче, приему и преобразованию сигналов, в том числе и те, которые не могут быть реализованы с помощью аналоговой техники. Обобщенная схема системы цифровой обработки сигналов приведена на рис. 1.2.5.

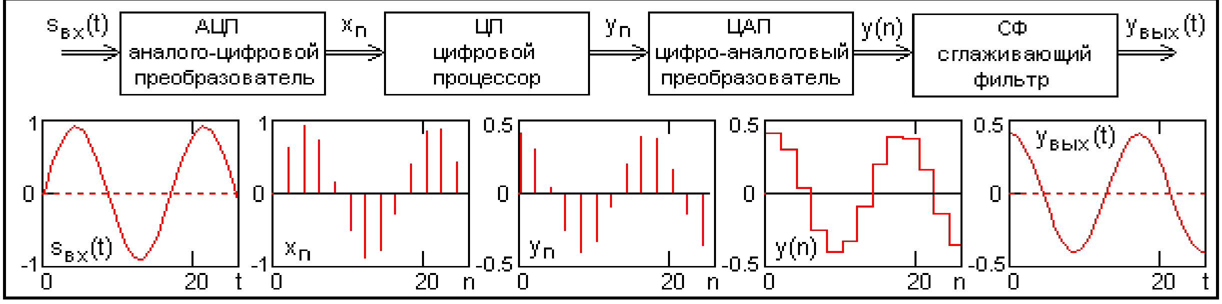


Рис. 1.2.5.

Аналоговый сигнал поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП), где осуществляется дискретизация сигнала во времени и представление отсчетов сигнала в виде кодов. Как правило, они используют двоичную систему представления при равномерной шкале с определенным числом разрядов. Увеличение числа разрядов повышает точность измерений и расширяет динамический диапазон измеряемых сигналов. Однако увеличение количества разрядов снижает скорость дискретизации и увеличивает стоимость аппаратуры. Обработка цифровых сигналов выполняется либо специальными цифровыми процессорами, либо на универсальных компьютерах. Восстановление непрерывной структуры сигнала на выходе дискретной системы осуществляется с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и сглаживающего фильтра. Основные характеристики ЦАП (разрядность и частота дискретизации) аналогичны характеристикам АЦП.

Классификация радиотехнических цепей. Радиотехнические цепи и элементы, используемые для преобразования сигналов, можно разбить на следующие классы:

- линейные цепи с постоянными параметрами;
- линейные цепи с переменными параметрами;
- нелинейные цепи.

Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции. При действии на линейную цепь нескольких сигналов поведение цепи можно определить путем наложения решений, найденных для каждого отдельного сигнала. Другими словами, сумма эффектов от каждого сигнала совпадает с эффектом от суммы этих сигналов. В линейной цепи не возникают колебания с новыми частотами.

В линейных цепях с переменными параметрами один или несколько параметров изменяются во времени, но параметры не зависят от входного сигнала. Подобные цепи часто называют параметрическими. В параметрических цепях возникают сложные колебания, имеющие различные частоты.

Цепь является нелинейной, если в ее состав входят элементы, характеристики которых зависят от уровня сигнала. К нелинейным цепям принцип суперпозиции неприменим. В нелинейной цепи помимо основной частоты сигнала возникают колебания с другими частотами.

Строго говоря, все физические системы, с которыми имеет дело радиотехника, в той или иной степени нелинейные. Однако в ряде случаев нелинейностью систем можно пренебречь и свести задачу к анализу линейных систем.

Рассмотренные классы цепей являются цепями с сосредоточенными параметрами. Свойства сосредоточенных цепей не зависят от конфигурации соединительных проводников. На частотах в несколько тысяч мегагерц обычные электрические цепи использоваться уже не могут. На смену им приходят системы с распределенными параметрами.

Этапы исследования радиотехнической цепи. Как правило исследование любой радиотехнической цепи разбивается на четыре этапа:

- составление математической модели сигнала и исследуемой цепи;
- выбор метода анализа цепи (временной, частотный и т.п.);
- исследование полученных решений;
- проведение экспериментов и сравнение результатов с теоретическими характеристиками.

Отмеченный путь анализа базируется на временном представлении свойств сигналов и цепей. В равной мере применим, а порой более удобен анализ в частотной области, когда сигналы описываются их спектрами, а цепи частотными характеристиками.

1.3 Геометрические методы в теории сигналов

Для анализа сигналов широко используется математика векторов в линейном пространстве. Рассмотрим произвольный сигнал $s(t)$, заданный на интервале времени $[0,\ T]$. Произведем дискретизацию исходного сигнала с равномерным шагом Δ и представим его $N = T/\Delta$ последовательными выборками: $s_n = s(t_n),\ t_n = n \cdot \Delta,\ n = 1, 2\ ...\ N$. В таком представлении величина $s = (s_1,\ s_2,\ ...\ ,s_N)$ может рассматриваться в виде N-мерного вектора в N-мерном линейном Евклидовом пространстве.

Введем понятие длины сигнала или нормы сигнала. Согласно теореме Пифагора для N-мерного векторного пространства норма задается выражением:

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} s_n^2}\ . \qquad (1.3.1)$$

Если устремить шаг дискретизации Δ к нулю, то вектора становятся бесконечной размерности, и мы приходим к определению нормы для непрерывных во времени сигналов:

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt}\ . \qquad (1.3.2)$$

На рис. 1.3.1 приведены изображения сигналов в виде векторов и их нормы при различных размерностях пространства.

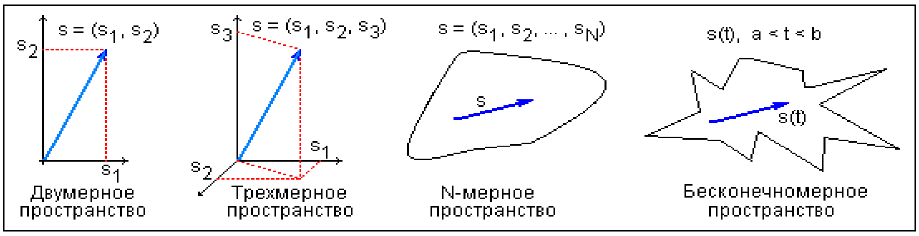


Рис. 1.3.1.

Норма сигнала характеризует его расстояние относительно начала координат.

Теперь введем понятие расстояния или метрики между сигналами. Метрика определяется нормой разности двух сигналов:

$$d(s,v) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} [s_n - v_n]^2} = \|s - v\|. \qquad (1.3.3)$$

Пример метрики для двух векторов в двумерном пространстве приведен на рис. 1.3.2.

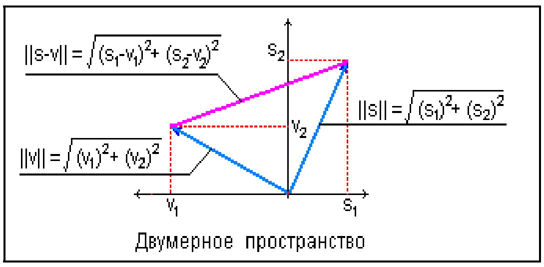


Рис. 1.3.2.

Для непрерывных во времени сигналов сумма в равенстве (1.3.3) заменяется интегралом:

$$d(s,v) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - v(t)\right]^2 dt}\ . \qquad (1.3.4)$$

Другой важной геометрической характеристикой является скалярное произведение двух сигналов, которое снова может трактоваться как предельная форма скалярного произведения двух N-мерных векторов:

$$(s, v) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot v(t) dt . \tag{1.3.5}$$

Это же характеристика может быть определена с помощью длины векторов и косинуса угла между ними:

$$(s, v) = \|s\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\varphi). \tag{1.3.6}$$

Скалярное произведение сигналов отражает степень их связи или сходства по форме и положению в пространстве сигналов. На основании этого скалярное произведение называют также корреляцией сигналов. Физическая сущность скалярного произведения сигналов u(t) и v(t) в двумерном пространстве представлена на рис. 1.3.3.

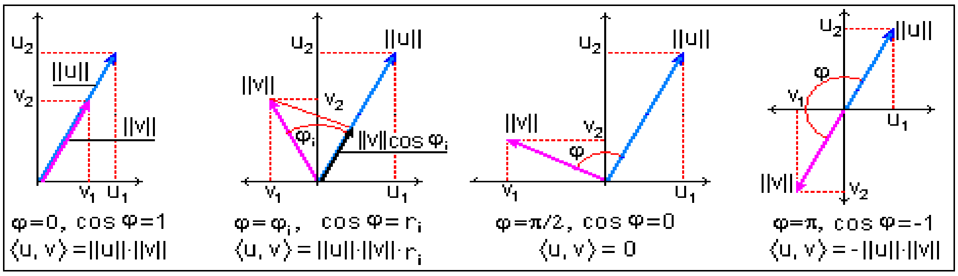


Рис. 1.3.3.

Скалярное произведение это произведение длины одного вектора на проекцию второго вектора по направлению первого вектора.

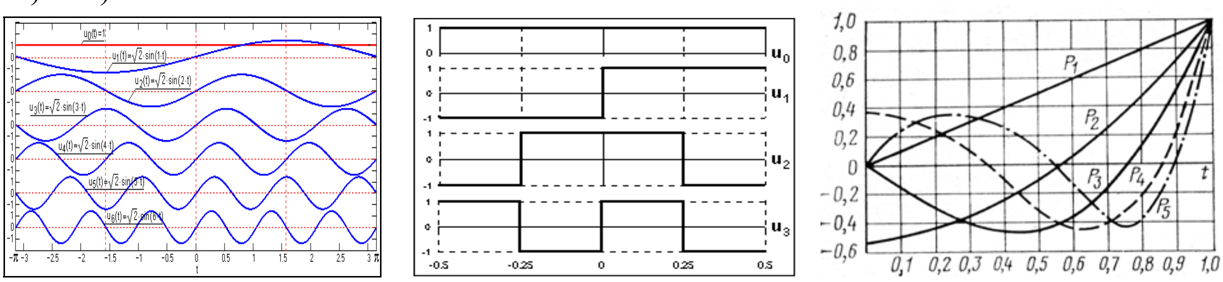
Для скалярного произведения справедливо неравенство Коши-Буняковского :

$$|(s, v)| \le \|s\| \cdot \|v\|. \tag{1.3.7}$$

При рассмотрении выражения (1.3.4) квадрата метрики сигналов можно записать:

$$d^2(s, v) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - v(t)]^2 dt = \|s\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \|s\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\varphi). \tag{1.3.8}$$

При $\varphi = 0$ $(\cos\ \varphi = 1)$ сигналы совпадают по направлению и расстояние между ними минимально. При $\varphi = \pi$ $(\cos\ \varphi = -1)$ сигналы называются противоположными и расстояние между сигналами максимально. При $\varphi = \pi/2$ $(\cos\ \varphi = 0)$ сигналы "перпендикулярны друг другу" и проекции сигналов друг на друга равны 0. Такие сигналы называют ортогональными. Ортогональные сигналы имеют нулевое скалярное произведение. Для примера система нескольких первых ортогональных гармонических функций с кратными частотами, функций Уолша и Лежандра изображена на рис. 1.3.4 -а), -б) и -в) соответственно.



а) б) в)

Рис. 1.3.4.

Таким образом, векторное отображение сигналов позволяет наглядно представлять взаимодействия сигналов, степени их различия и подобия.

1.4 Динамическое представление сигналов

Радиотехнические сигналы описываются разнообразными функциями времени $s(t)$. Оперировать с разнообразными по виду сигналами при анализе прохождения их через радиотехнические цепи весьма затруднительно. Чтобы упростить ряд положений теории сигналов, реальные сигналы аппроксимируют другими, менее сложными. Выбор элементарных сигналов зависит от решаемой задачи.

Начнем рассмотрение с динамического представления сигналов. Наиболее распространены два способа динамического представления сигнала.

В первом способе, изображенном на рис. 1.4.1 -а), в качестве элементарных сигналов используются ступенчатые функции, возникающие через равные промежутки времени Δ. Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на интервале времени Δ.

При втором способе элементарными сигналами служат прямоугольные импульсы, длительностью Δ. Прямоугольные импульсы примыкают друг к другу и образуют последовательность, вписанную в форму исходного сигнала. Диаграмма динамического представления сигнала представлена на рис. 1.4.1 -б).

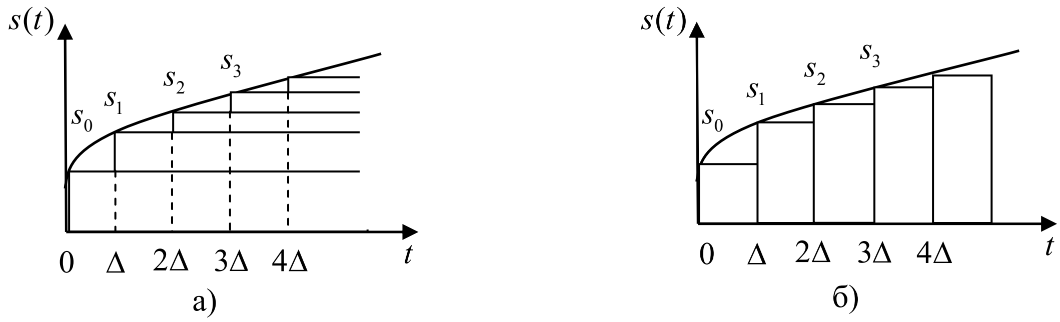


Рис. 1.4.1.

Рассмотрим первый способ динамического представления сигнала, когда элементами разложения служат ступенчатые функции включения или Хевисайда:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} . \qquad (1.4.1)$$

Для определенности будем полагать, что при $t < 0$ сигнал $s(t) = 0$. Обозначим через $(s_{0,}\ s_1\ , s_2\ , s_3\ ...)$ последовательность значений сигнала, полученных через равные интервалы времени Δ. Текущее значение сигнала в любой момент времени приближенно равно сумме ступенчатых функции, задаваемых выражением:

$$s(t) \approx s_0 \cdot \sigma(t) + (s_1 - s_0) \cdot \sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1) \cdot \sigma(t - 2 \cdot \Delta) + ... =$$

$$= s_0 \cdot \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \cdot \sigma(t - k \cdot \Delta). \qquad (1.4.2)$$

Если интервал времени Δ устремить к нулю, то получим первую форму динамического представления сигнала:

$$s(t) = s_0 \cdot \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \cdot \sigma(t - \tau) d\tau . \qquad (1.4.3)$$

Перейдем ко второму способу динамического представления сигнала, когда элементами разложения служат короткие импульсы. Обозначим через $\{s_k\}$ значение сигнала на k-м отсчете времени $t_k = k \cdot \Delta$. Элементарный k-й импульс можно представить в виде соотношения:

$$\eta_k(t) = s_k \cdot [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)]. \qquad (1.4.4)$$

Тогда исходный сигнал можно описать суммой таких элементарных импульсов:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \cdot \Delta . \qquad (1.4.5)$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках. Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим функцию вида:

$$\lim_{\Delta \to 0} [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \cdot \frac{1}{\Delta} = \delta(t - \tau). \qquad (1.4.6)$$

Полученная функция называется дельта-функцией или функцией Дирака.

Математическое описание дельта-функции задается выражением:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}. \qquad (1.4.7)$$

Значение дельта-функции всюду равно нулю, за исключением точки $t = 0$.

Дельта-функция характеризуется уникальным интегральным свойством вида:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}. \qquad (1.4.8)$$

Сопоставляя (1.4.8) с (1.4.1), можно видеть взаимосвязь функций Хэвисайда и Дирака:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \qquad (1.4.9)$$

На основании (1.4.5) и свойства (1.4.6), получаем вторую форму динамического представления сигнала:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau . \qquad (1.4.10)$$

В завершении сформулируем фильтрующее свойство δ - функции, которое задается выражением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0). \qquad (1.4.11)$$

Если непрерывный сигнал $s(t)$ умножить на дельта-функцию $\delta(t - t_0)$, заданную в момент времени t_0, и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывного сигнала в той точке, где сосредоточен дельта-импульс.

1.5 Разложение сигнала в системе ортогональных базисных функций

Рассмотрим еще один способ приведения разнообразных сигналов $s(t)$ к единому виду. Такую возможность предоставляет теория функционального анализа, позволяющая выразить произвольный сигнал в виде ряда суммы определенных элементарных базисных функций.

Произвольный сигнал $s(t)$, заданный на интервале $\lfloor a, b \rfloor$, может быть разложен в ряд по упорядоченной системе ортогональных базисных функций $u_n(t)$:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot u_n(t). \qquad (1.5.1)$$

Приведенное выражение называется обобщенным рядом Фурье сигнала в выбранном базисе ортогональных функций.

Система ортогональных функций на интервале $\lfloor a,\ b \rfloor$ будет ортонормированной, если все функции системы имеют единичную норму, т.е. выполняются условия:

$$(u_m, u_n) = \int_a^b u_m(t) \cdot u_n(t) dt = \begin{cases} 1, & если\ m = n \\ 0, & если\ m \neq n \end{cases}, \tag{1.5.2}$$

Система ортогональных функций всегда может быть превращена в ортонормированную путем нормировки, т.е. деления всех функций на их норму. Интервал определения сигнала должен совпадать с интервалом ортогональности базисных функций. Согласование интервалов легко достигается путем изменения масштаба базисных функций по оси времени. Сам сигнал, разлагаемый в ряд должен быть интегрируемым.

Для нахождения значений коэффициентов c_n умножим обе части выражения (1.5.1) на базисную функцию $u_m(t)$ с произвольным номером m и проинтегрируем результаты по переменной t, при этом получим:

$$\int_a^b s(t) \cdot u_m(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b u_n(t) \cdot u_m(t) dt. \tag{1.5.3}$$

Ввиду ортонормированности функций $u_n(t)$ и $u_m(t)$ (1.5.2), в правой части этого равенства остается только один член суммы с номером $n = m$. Поэтому из (1.5.3) следует важное соотношение:

$$c_n = \int_a^b s(t) \cdot u_n(t) dt. \tag{1.5.4}$$

Совокупность коэффициентов Фурье c_n носит название спектра сигнала $s(t)$. Произведение $c_n \cdot u_n(t)$ определяется как спектральная составляющая сигнала. Тем самым ряд Фурье представляет сигнал в виде суммы спектральных составляющих. Это означает, что вся информация, заключенная в сигнале, может быть представлена в виде счетной совокупности чисел. Зная систему базисных функций можно по совокупности этих чисел достаточно точно воспроизвести сигнал.

<u>Оптимальность разложения сигнала по ортогональному базису.</u>

Бесконечный обобщенный ряд Фурье (1.5.1) в правой части равенства сходится к функции $s(t)$ так, что среднеквадратическая ошибка аппроксимации равна нулю. При практическом использовании количество членов обобщенного ряда Фурье (1.5.1) ограничивается определенным значением N, при этом для любого значения N совокупность коэффициентов ряда Фурье обеспечивает наименьшую среднеквадратическую погрешность приближение к заданному сигналу.

Пусть сигнал $s(t)$ представлен в конечной системе коэффициентов обобщенного ряда Фурье:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(t). \tag{1.5.5}$$

Выберем коэффициенты c_n так, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку аппроксимации:

$$\sigma^2 = \left\| s(t) - \tilde{s}(t) \right\|^2 = \int_a^b \left(s(t) - \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(t) \right)^2 dt \Rightarrow \min \tag{1.5.6}$$

В развернутой форме ошибку аппроксимации можно представить в виде:

$$\sigma^2 = \int_a^b \left(s^2(t) - 2s(t) \cdot \sum_{n=0}^{N} c_n u_n + \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_n^2 c_m^2 u_n^2 u_m^2 \right) dt. \tag{1.5.7}$$

Поскольку σ^2 является функцией коэффициентов c_n, то для ее минимизации нужно положить равными нулю частные производные:

$$\frac{d\sigma^2}{dc_n} = 0, \;\; n = 0, \; 1, \; 2, \; \dots, \; N. \qquad (1.5.8)$$

С учетом представления (1.5.7), получаем, что производные от всех слагаемых, не содержащих коэффициенты c_n, равны нулю. Поскольку рассматриваемая базисная система функций ортогональна, то при $n \neq m$ значения в третьем слагаемом также равны нулю. В результате остается только два не равных нулю слагаемых. Поэтому условие минимизации среднеквадратической ошибки аппроксимации будет определяться выражением:

$$\frac{d}{dc_n}\int_a^b \left(-2s(t)\cdot c_n u_n + c_n^2 u_n^2\right)dt = 0. \qquad (1.5.9)$$

После дифференцирования получаем:

$$2\int_a^b s(t)\cdot u_n dt = 2c_n \cdot \int_a^b u_n^2 dt = 2c_n \cdot \|u_n\|^2. \qquad (1.5.10)$$

Далее принимая во внимание единичную норму базисных функций, приходим к важному соотношению:

$$c_n = \int_a^b s(t)\cdot u_n(t)\,dt. \qquad (1.5.11)$$

Таким образом, коэффициенты обобщенного ряда Фурье обеспечивают минимум ошибки аппроксимации сигнала. Выбирая значения N достаточно большим, всегда можно снизить среднеквадратическую ошибку до любой приемлемо малой величины.

К системам базисных функций, которые используются при разложении сигналов, предъявляют следующие основные требования:

- базисные функции должны иметь достаточно простую аналитическую форму;
- коэффициенты разложения должны вычисляться относительно просто;
- для любого сигнала ряды разложения должны сходиться;
- при ограничении ряда погрешность представления сигнала должна быть минимальной.

Проиллюстрируем разложение сигнала в ряд Фурье на примере треугольного импульса, заданного на интервале времени $(-1, +1)$. В качестве базисной системы выберем ортогональные функций Лежандра, вид которых был приведен на рис. 1.3.4 -в). Функции Лежандра описываются выражением вида:

$$P(t,n) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n, \qquad (1.5.12)$$

где n - номер базисной функции.

Коэффициенты ряда Фурье в соответствии с (1.5.11) определяются по выражению:

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} s(t)\cdot P(t,n)\,dt. \qquad (1.5.13)$$

Первые шесть коэффициентов принимают следующие значения: $c_n = (0.5, \; 0, \; -0.625, \; 0, \; 0.187, \; 0)$. Спектр сигнала приведен на рис. 1.5.1-а).

В соответствии с (1.5.5) аппроксимация сигнала вычисляется по выражению:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{5} c_n \cdot P(t,n). \qquad (1.5.14)$$

На рис. 1.5.1-б) показана диаграмма анализируемого сигнала (сплошная линия) и восстановленный сигнал, полученный при шести членах ряда Фурье.

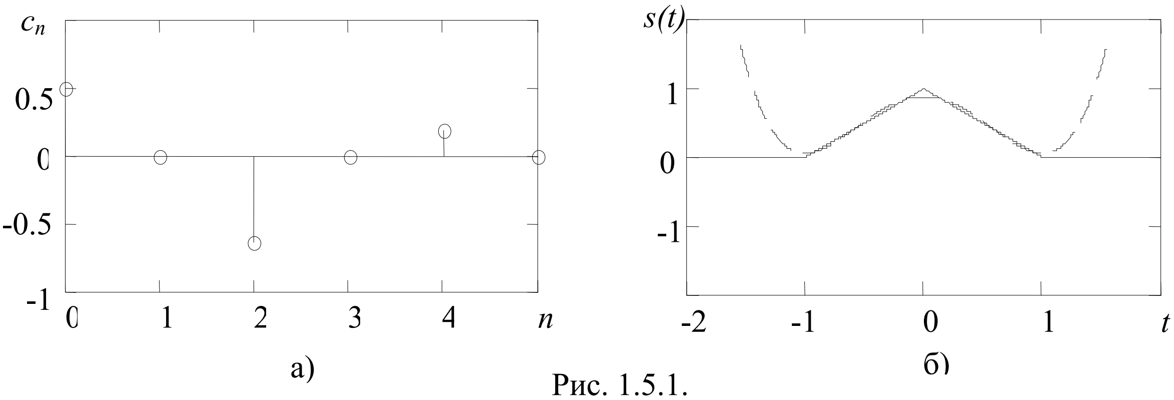


Рис. 1.5.1.

При заданном числе членов ряда Фурье мы имеет некоторую погрешность аппроксимации сигнала. Практически важно так выбрать систему базисных функций, чтобы обеспечить заданную точность аппроксимации при минимальном числе членов ряда Фурье. Аппроксимация произвольного сигнала, заданного на конечном интервале времени, осуществляется рядом Фурье только на заданном интервале времени. Вне этого интервала анализируемый и восстановленный сигналы могут не совпадать.

1.6 Энергетические характеристики детерминированных сигналов

Основными энергетическими характеристиками сигналов являются их мощность и энергия. Все физические сигналы являются вещественными, Однако в теории сигналов широко используются понятием комплексного сигнала $s(t)=a(t)+jb(t)$. Для комплексного сигнала мгновенная мощность задается выражением:

$$p(t)=s(t)\cdot s^*(t)=[a(t)+jb(t)]\cdot[a(t)-jb(t)]=a^2(t)+b^2(t)=|s(t)|^2, \qquad (1.6.1)$$

т.е. функция распределения мгновенной мощности равна квадрату функции его модуля, а для вещественных сигналов - квадрату функции амплитуд.

Интегрированием выражения (1.6.1) по соответствующему интервалу времени вычисляется значение средней мощности сигналов:

$$P_T=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt. \qquad (1.6.2)$$

В радиотехнике используется также понятие энергии сигнала. Энергия сигнала равна интегралу от мощности по всему временному интервалу определения сигнала:

$$E_s=\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,dt. \qquad (1.6.3)$$

Из сравнения выражений (1.6.3) и (1.3.2) следует, что энергия и норма сигналов связана соотношениями:

$$E_s=\|s(t)\|^2, \qquad \|s(t)\|=\sqrt{E_s}. \qquad (1.6.4)$$

Вычислим энергию суммы двух произвольных сигналов:

$$E_{uv}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(t)+v(t)\right]^2 dt=E_u+E_v+2\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot v(t)\,dt. \qquad (1.6.5)$$

Как следует из этого выражения, энергия сигналов не обладает свойством аддитивности. Энергия суммарного сигнала, кроме суммы энергий составляющих сигналов, содержит в себе и так называемую энергию взаимодействия сигналов или взаимную энергию:

$$E_{uv}=2\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot v(t)dt. \qquad (1.6.6)$$

Отметим, что энергия и мощность суммы ортогональных сигналов обладают свойством аддитивности, т.к. имеют нулевое значение скалярного произведения и, соответственно, нулевую энергию взаимодействия.

Энергия сигнала, представленного в форме обобщенного ряда Фурье.

Допустим, что сигнал $s(t)$ разложен в обобщенный ряд Фурье (1.5.1). Тогда энергию сигнала можно определить в соответствии с преобразованием:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n u_m u_n dt = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m c_n \int_{-\infty}^{\infty} u_m u_n dt . \quad (1.6.7)$$

В этом выражении в силу ортонормированности базисной системы отличны от нуля только члены с номерами $n = m$.

Отсюда получаем важное соотношение:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 . \quad (1.6.8)$$

Это соотношение называют ***равенством Парсеваля.***

Таким образом, энергия сигнала может быть определена через сумму энергий спектральных составляющих обобщенного ряда Фурье. Составляющие спектра пропорциональны квадратам амплитуд и не зависят от фазовых соотношений. Выражение (1.6.8) позволяет получить распределение энергии сигнала по частотам спектральных составляющих.

Выразим величину среднеквадратической ошибки аппроксимации в зависимости от числа членов ряда Фурье:

$$\sigma^2 = E_s - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 . \quad (1.6.9)$$

Из выражения (1.6.9) вытекает ***неравенство Бесселя***

$$E_s \geq \sum_{n=0}^{N} c_n^2 , \quad (1.6.10)$$

которое означает, что энергия приближенной копии сигнала $\tilde{s}(t)$, полученной в результате аппроксимации многочленом (1.5.5), меньше или равна энергии исходного $s(t)$. Из неравенства Бесселя (1.6.10) следует, что с увеличением числа N членов ряда Фурье ошибка аппроксимации (1.6.9) уменьшается.

2 Спектральный анализ периодических сигналов

Возможность разложения сигналов в обобщенные ряды Фурье по различным системам ортогональных функций имеет большое значение в теории радиотехники. Среди многообразных систем ортогональных функций особое место занимают гармонические функции. Совокупность гармонических компонент сигнала образуют его спектр. Рассмотрим особенности и различные формы спектрального разложения периодических сигналов.

2.1 Тригонометрическая форма спектрального представления сигналов

Произвольный периодический сигнал $s(t)$, заданный на бесконечном интервале времени, описывается выражением:

$$s(t) = s(t \pm nT)\ ,\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.1.1}$$

где T - период повторения сигнала.

Зададим на отрезке времени $\lfloor -T/2,\ T/2 \rfloor$ ортонормированный базис, образованный гармоническими функциями

$$\begin{aligned} u_0 = 1/\sqrt{T}\ ,\quad u_1 &= \sqrt{2/T}\sin\left(2\pi/T \cdot t\right), & u_2 &= \sqrt{2/T}\cos\left(2\pi/T \cdot t\right), \\ u_3 &= \sqrt{2/T}\sin\left(4\pi/T \cdot t\right), & u_4 &= \sqrt{2/T}\cos\left(4\pi/T \cdot t\right), \\ u_5 &= \sqrt{2/T}\sin\left(6\pi/T \cdot t\right), & u_6 &= \sqrt{2/T}\cos\left(6\pi/T \cdot t\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

с основной частотой $\omega_1 = 2\pi/T$ и с кратными частотами $\omega_k = k \cdot \omega_1,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Если какой либо периодический сигнал представлен в виде суммы ортогональных гармонических колебаний с кратными частотами, то говорят, что осуществлено спектральное разложение этого сигнала. Найдем спектральное разложение периодического сигнала (2.1.1) в базисе ортогональных периодических гармонических функций u_k вида (2.1.2).

Как отмечалось ранее, произвольный сигнал может быть представлен обобщенным рядом Фурье

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot u_k(t), \tag{2.1.3}$$

где коэффициенты разложения c_k определяются по формуле

$$c_k = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot u_k(t)\, dt\ . \tag{2.1.4}$$

С учетом рассматриваемого гармонического базиса (2.1.2) коэффициенты разложения (2.1.4) можно представить в виде:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt\ ;\quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\cos\left(k\cdot\omega_1 t\right)dt\ ;\quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\sin\left(k\cdot\omega_1 t\right)dt\ . \tag{2.1.5}$$

Тогда тригонометрическая синусно-косинусная форма ряда Фурье для периодического сигнала будет описываться выражением:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(k\cdot\omega_1 t\right) + b_k \sin\left(k\cdot\omega_1 t\right)\right] \tag{2.1.6}$$

Таким образом, спектр сигнала содержит постоянную составляющую и бесконечный набор гармоник с частотами, кратными основной частоте.

Для примера рассмотрим спектральное разложение сигнала, представляющего собой последовательность периодических прямоугольных видеоимпульсов. Временная диаграмма смещенного во времени сигнала представлена на рис. 2.1.1.

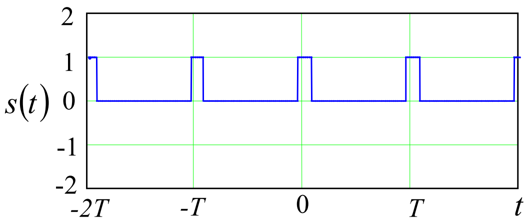


Рис. 2.1.1.

Значения первых 20 коэффициентов a_k и b_k в разложении (2.1.6) для анализируемого сигнала изображены на рис. 2.1.2 -а) и -б) соответственно.

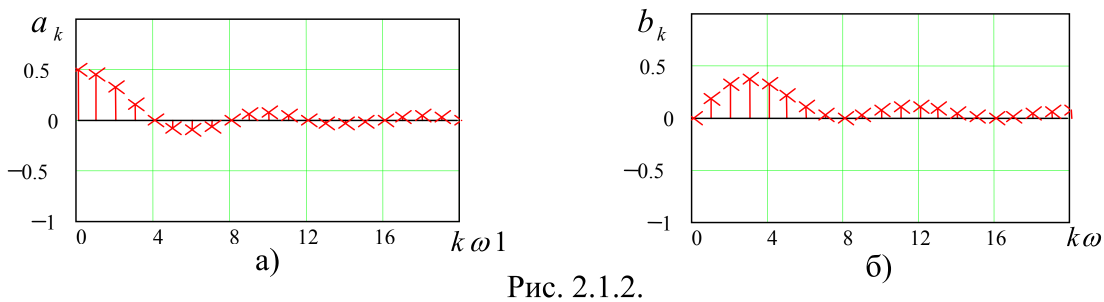


Рис. 2.1.2.

Спектр периодического сигнала является линейчатым или дискретным, так как он состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам. Расстояния между гармониками равны основной частоте. Четный сигнал имеет только косинусоидальные, а нечетный сигнал - только синусоидальные компоненты спектра.

Каждую гармонику спектра можно описать ее амплитудой A_k и начальной фазой φ_k:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \varphi_k = -arctg(b_k / a_k). \tag{2.1.7}$$

Это позволяет коэффициенты ряда Фурье записать в виде:

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k) \quad \text{и} \quad b_k = A_k \sin(\varphi_k). \tag{2.1.8}$$

Подставив эти выражения в (2.1.6), получим вторую эквивалентную вещественную форму тригонометрического ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \cdot \omega_1 t + \varphi_k). \tag{2.1.9}$$

Ряд (2.1.9) представляет собой разложение периодического сигнала $s(t)$ на сумму вещественных элементарных гармонических функций с весовыми коэффициентами, значения которых есть не что иное, как амплитуды соответствующих гармонических колебаний с кратными частотами $\omega_k = k \cdot \omega_1$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Спектр амплитуд косинусных гармоник при таком отображении называется амплитудно-частотным составом сигнала, а спектр фазовых углов гармоник - фазовым спектром сигнала. Совокупность амплитудных значений этих гармоник образует односторонний (только для положительных частот) спектр сигнала.

Вид амплитудного и фазового спектра последовательности периодических прямоугольных видеоимпульсов представлен на рис. 2.1.3 -а) и -б) соответственно.

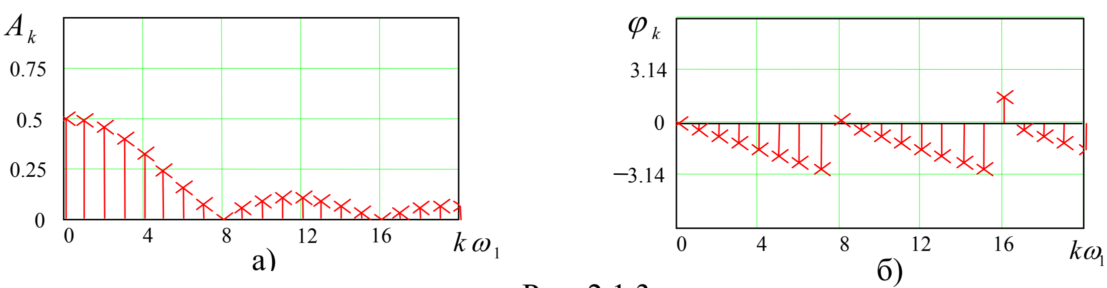


Рис. 2.1.3.

2.2 Комплексная форма спектрального представления сигналов

Спектральное разложение периодического сигнала можно выполнить, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\exp\left(jk\cdot\omega_1 t\right)\right\},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \qquad (2.2.1)$$

Функции этой системы периодичны с периодом T и ортонормированны на отрезке времени $\left[-T/2,\ T/2\right]$. В данном случае ряд Фурье произвольного периодического сигнала принимает вид

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \exp\left(jk\cdot\omega_1 t\right). \qquad (2.2.2)$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются по выражению

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\exp\left(-jk\cdot\omega_1 t\right)dt\,. \qquad (2.2.3)$$

Выражение (2.2.2) представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. Спектр сигнала содержит компоненты на отрицательной полуоси частот. Подынтегральную функцию экспоненты в выражении (2.2.3) можно разложить на косинусную и синусную составляющие и выразить комплексный спектр в виде действительной и мнимой части:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\left[\cos\left(k\omega_1 t\right) - j\sin\left(k\omega_1 t\right)\right]dt = Cre_k - jCim_k\,. \qquad (2.2.4)$$

Форма действительной и мнимой части спектра анализируемой последовательности прямоугольных импульсов приведена на рис. 2.2.1 -а) и -б) соответственно.

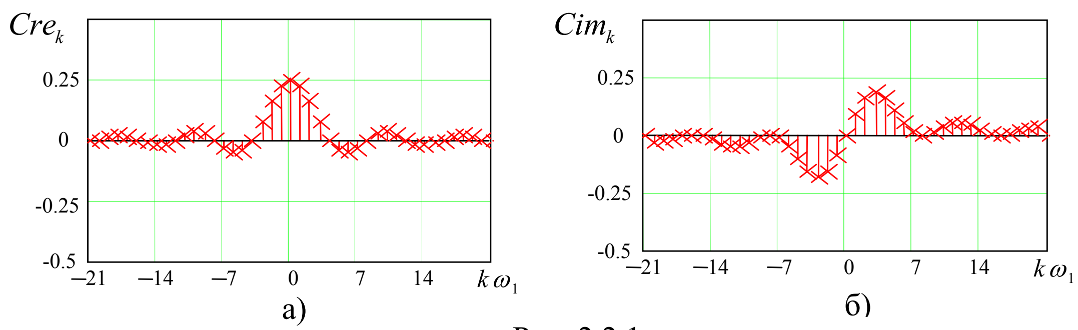


Рис. 2.2.1.

Действительная часть спектра $Cre_k = \mathrm{Re}\left(C_k\right)$ является четной функцией, а мнимая часть спектра $Cim_k = -\mathrm{Im}\left(C_k\right)$ является нечетной функцией. Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, то все значения $Cim_k = -\mathrm{Im}\left(C_k\right)$ равны нулю, т.к. четные функции ортогональны синусным гармоникам. Следовательно, спектр функции будет представлен только вещественными коэффициентами. Напротив, при нечетности функции $s(t)$ обнуляются все значения коэффициентов $Cre_k = \mathrm{Re}\left(C_k\right)$, т.к. нечетные функции ортогональным косинусным гармоникам. В этом случае спектр является чисто мнимым.

Комплексный спектр может быть также представлен в виде модуля и аргумента комплексной экспоненты:

$$\left|C_k\right| = \sqrt{Cre_k^2 + Cim_k^2}\,,$$

$$\varphi_k = -arctg\left(Cim_k / Cre_k\right), \qquad (2.2.5)$$

$$C_k = \left|C_k\right|\cdot\exp\left(j\varphi_k\right).$$

Слагаемые в ряде Фурье (2.2.2) с положительными и отрицательными частотами являются комплексно-сопряженными и объединяются в пары вида:

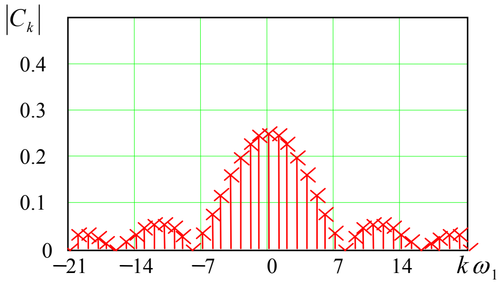
$$C_k \exp\left(jk\omega_1 \cdot t\right) + C_{-k} \exp\left(-jk\omega_1 \cdot t\right) = 2 \cdot \left|C_k\right| \cdot \cos\left(k\omega_1 \cdot t + \varphi_k\right). \qquad (2.2.6)$$

С учетом свойства (2.2.6) получаем вторую форму записи комплексного ряда Фурье:

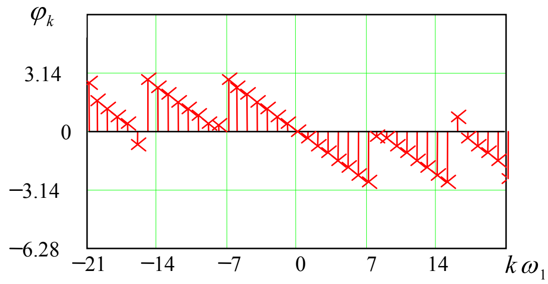
$$s\left(t\right) = C_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left|C_k\right| \cdot \cos(k\omega_1 \cdot t + \varphi_k). \qquad (2.2.7)$$

Модуль спектра $\left|C_k\right|$ называют двусторонним спектром амплитуд, а аргумент спектра φ_k - двусторонним спектром фаз. Для четных сигналов отсчеты фазового спектра могут принимать только значения 0 или π, для нечетных соответственно ±π/2.

Вид спектра последовательности прямоугольных импульсов в амплитудном и фазовом представлении показан на рис. 2.2.2-а) и -б) соответственно.



а)



б)

Рис. 2.2.2.

Спектр амплитуд всегда представляет собой четную функцию, а спектр фаз нечетную. Очевидно, что форма спектра сигнала зависит как от вида сигнала, так и его параметров (длительности, скважности). При задержке сигналов изменяется только фазовый спектр, а амплитудный спектр сохраняет свою форму.

Принято говорить, что спектральная диаграмма сигналов имеет лепестковую структуру. Различают главный лепесток и боковые лепестки спектра. Спектральные гармоники следуют через интервал частот $\omega_1 = 2\pi/T$. С увеличением периода T основная частота уменьшается и спектр становиться плотнее. Форма огибающей частотного спектра остается неизменной. Спектр амплитуд прямоугольного импульса обращается в нуль на частотах $\omega_m = 2\pi \cdot m/\tau_u$. Следовательно, чем меньше длительность импульса, тем шире главный лепесток спектра. В области главного лепестка число спектральных гармоник определяется скважностью импульса $q = T/\tau_u$. Разные сигналы различаются, прежде всего, шириной главного лепестка спектра и скоростью спаданию боковых лепестков. Компоненты спектра в области боковых лепестков называют высшими гармониками.

2.3 Взаимосвязь тригонометрической и комплексной форм рядов Фурье

Ряд Фурье в комплексной форме (2.2.2) можно получить из тригонометрического ряда, если воспользоваться формулой Эйлера для преобразования косинусоидальных составляющих ряда (2.1.9). Из сопоставления выражений (2.1.9) и (2.2.2) следует, что коэффициенты тригонометрического ряда выражаются через коэффициенты комплексного ряда и наоборот:

$$A_k = 2\left|C_k\right|; \quad a_k = 2Cre_k = 2\,\mathrm{Re}\left(C_k\right); \quad b_k = 2 \cdot Cim_k = 2 \cdot \mathrm{Im}\left(C_k\right) \qquad (2.3.1)$$

$$\left|C_k\right| = 1/2 \cdot \left|A_k\right|; \quad C_k = 1/2 \cdot \left(a_k - jb_k\right); \quad C_{-k} = 1/2 \cdot \left(a_k + jb_k\right); \qquad (2.3.2)$$

Таким образом, тригонометрический и комплексный ряды Фурье можно рассматривать как два способа представления спектра одного и того же сигнала.

2.4 Эффект Гиббса

При расчетах спектров периодических сигналов вычисление бесконечной суммы ряда Фурье вызывает определенные трудности и не всегда требуется. Часто ограничиваются суммированием конечного количества слагаемых. Одним из важных достоинств ряда Фурье является то, что при ограничении количества слагаемых до любого конечного числа K обеспечивается наилучшее по среднеквадратической погрешности приближение к исходному сигналу. Однако при ограничении ряда Фурье появляются пульсации в форме восстановленного сигнала. Этот эффект носит название эффекта Гиббса. В качестве примера на рис. 2.4.1 приведены диаграммы восстановления сигнала типа меандр при увеличении количества членов ряда.

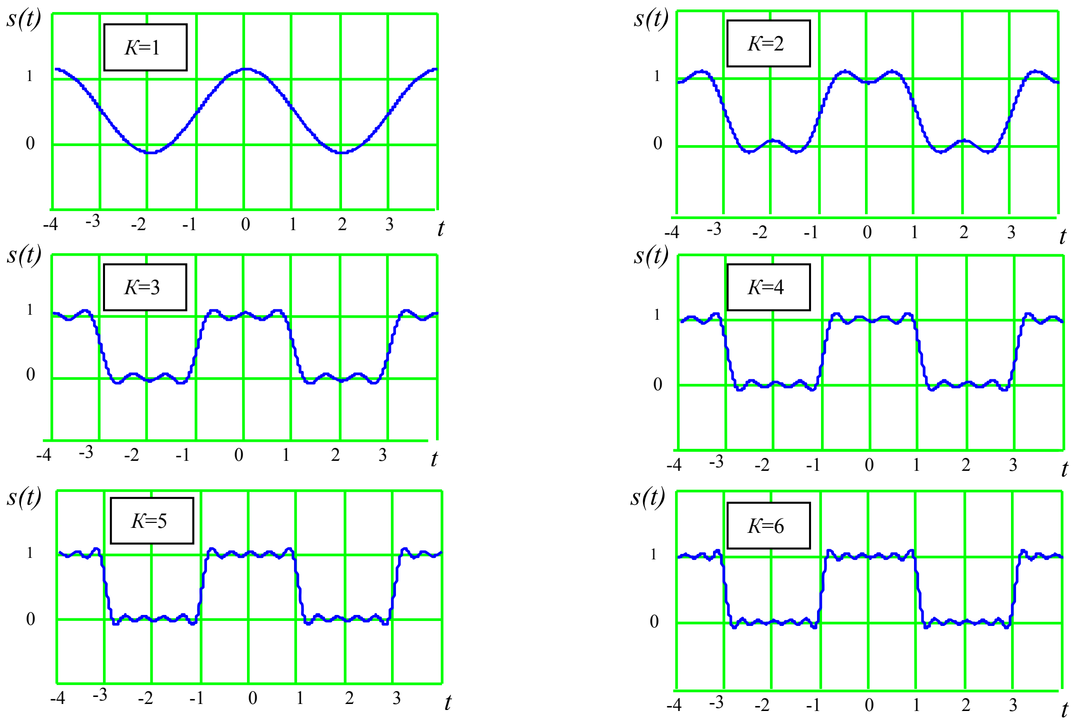


Рис. 2.4.1.

Из приведенных графиков нетрудно заметить, как с увеличением числа суммируемых гармоник все точнее восстанавливается сигнал везде кроме резких переходов. В окрестности резкого изменения сигнала суммирование ряда Фурье дает наклонный участок, причем крутизна наклона возрастает с ростом числа суммируемых гармоник. На примыкающих к перепадам участках возникают заметные пульсации. Амплитуда этих пульсаций не уменьшается с ростом числа суммируемых гармоник. Пульсации лишь сжимаются по частоте, приближаясь к точке скачка. Предельные значения максимальных выбросов по обе стороны от резких перепадов и следующих за ними обратных выбросов достигают соответственно 9% и 5% значения амплитуды изменения сигнала. Погрешность восстановления сигнала зависит и от формы его спектра. При заданном числе гармоник спектра погрешность тем больше, чем шире главный лепесток спектра. Чем выше скорость спадания боковых лепестков спектра, тем меньше погрешность восстановления сигнала.

В теории сигналов наряду со спектральным представление сигналов широко используется гармонический синтез - получение заданных сигналов сложной формы путем суммирования ряда гармонических составляющих их спектра.

3 Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектры непериодических сигналов конечной длительности (финитных) могут быть получены из уравнений для рядов Фурье как предельные значения функций суммирования при увеличении периода T до бесконечности. Рассмотрим особенности спектрального представления непериодических сигналов.

3.1 Спектральное представление непериодических сигналов

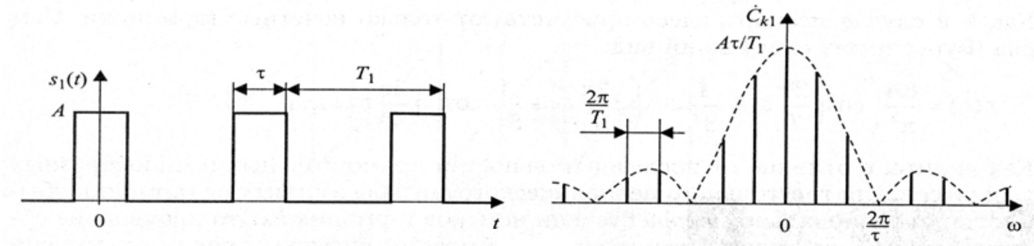
Пусть $s(t)$ - одиночный импульсный сигнал конечной длительности τ. Дополним его мысленно такими же импульсами, периодически следующими через некоторый интервал времени T. В результате получим периодический сигнал $s_{пер}(t)$, который можно представить в виде комплексного ряда Фурье

$$s_{пер}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \exp(j\omega_k \cdot t) \tag{3.1.1}$$

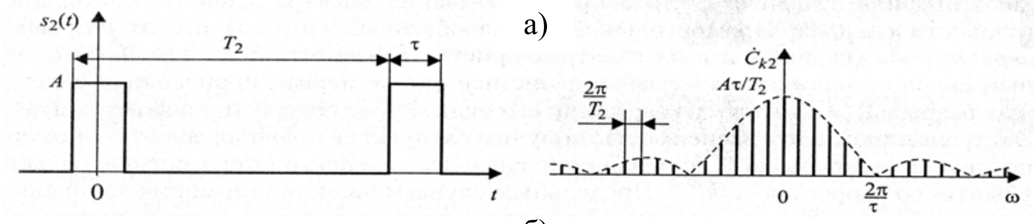
с коэффициентами, определяемыми выражением

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \exp(-j\omega_k \cdot t)\, dt, \tag{3.1.2}$$

где $\omega_k = k \cdot \omega_1 = k \cdot 2\pi/T$ - дискретные значения частот. Вид периодического сигнала и его спектр изображен на рис. 3.1.1-а). Отметим, что спектральные составляющие дискретного спектра разнесены по частоте на величину $\omega_1 = 2\pi/T_1$



а)



б)

Рис. 3.1.1.

Увеличение периода повторения импульсов в два раза не влияет на результаты вычисления функции (3.1.2), т.к. длительность импульса не изменилась. Однако, спектральные составляющие дискретного спектра пойдут в два раза чаще и, за счет множителя $1/T$, в 2 раза уменьшаются значения спектра. Новые гармоники располагаются в интервалах между гармониками первого ряда. Пример изменения спектра при увеличении периода T в 2 раза приведен на рис. 3.1.1-б). Если устремить к бесконечности период повторения T, то периодическая последовательность импульсов $s_{пер}(t)$ станет одиночным импульсом $s(t)$, а в спектре частоты соседних гармоник окажутся сколь угодно близкими. Подставив соотношение (3.1.2) в формулу (3.1.1) получим

$$s_{пер}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \exp(-j\omega_k \cdot t)\, dt \right] \cdot \exp(j\omega_k \cdot t). \tag{3.1.3}$$

В пределе, при значении $T \to \infty$, частота следования импульсов $\omega_1 = 2\pi/T \to 0$ и превращается в $d\omega$, а дискретную переменную ω_k можно представить непрерывной переменной ω - текущей частотой. В результате этого суммирование амплитудных значений заменятся интегрированием, а выражение (3.1.3) запишется в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp(-j\omega \cdot t) dt \right] \exp(j\omega \cdot t) d\omega . \qquad (3.1.4)$$

Интеграл в скобках есть комплексная функция частоты

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp(-j\omega \cdot t) dt . \qquad (3.1.5)$$

Поскольку интеграл (3.1.5) отражает непрерывную последовательность спектральных составляющих с бесконечно малыми амплитудами, то функцию $S(\omega)$ называют спектральной плотностью сигнала или просто спектром непериодического сигнала (последнее название не совсем корректно).

Используя (3.1.5) в выражении (3.1.4), получаем интегральное преобразование:

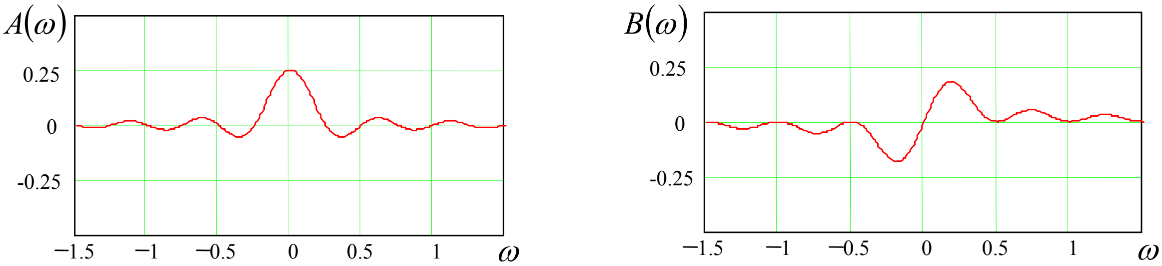
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(j\omega \cdot t) d\omega , \qquad (3.1.6)$$

Полученные соотношения носят фундаментальный характер в теории сигналов. Формулу (3.1.5) называют прямым преобразованием Фурье, а формулу (3.1.6) - обратным преобразованием Фурье.

Если $s(t)$ - вещественный сигнал, то его спектральная плотность (3.1.5) может быть представлена выражением:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \cos(j\omega \cdot t) dt - j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \sin(j\omega \cdot t) dt = A(\omega) - j \cdot B(\omega) . \qquad (3.1.7)$$

Пример спектральной плотности прямоугольного импульса, заданной в виде вещественной $A(\omega)$ и мнимой $B(\omega)$ части, приведен на рис. 3.1.2 -а) и -б) соответственно.



а) Рис. 3.1.2. б)

Вещественные четные сигналы имеют вещественную четную спектральную плотность, представленную только спектральной функцией $A(\omega)$, а вещественные нечетные сигналы имеют нечетную и только мнимую спектральную плотность, представленную спектральной функцией $B(\omega)$.

Как правило, спектральная плотность $S(\omega)$ описывается в виде модуля и аргумента спектральной функции:

$$S(\omega) = |S(\omega)| \cdot \exp[j\varphi(\omega)], \qquad (3.1.8)$$

где: амплитудный и фазовый спектр задается выражениями:

$$|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \qquad (3.1.9)$$

$$\varphi(\omega) = arctg(-B(\omega)/A(\omega)). \qquad (3.1.10)$$

Пример графического изображения спектральной плотности прямоугольного импульса в виде модуля и аргумента спектральной функции приведен на рис. 3.1.3.

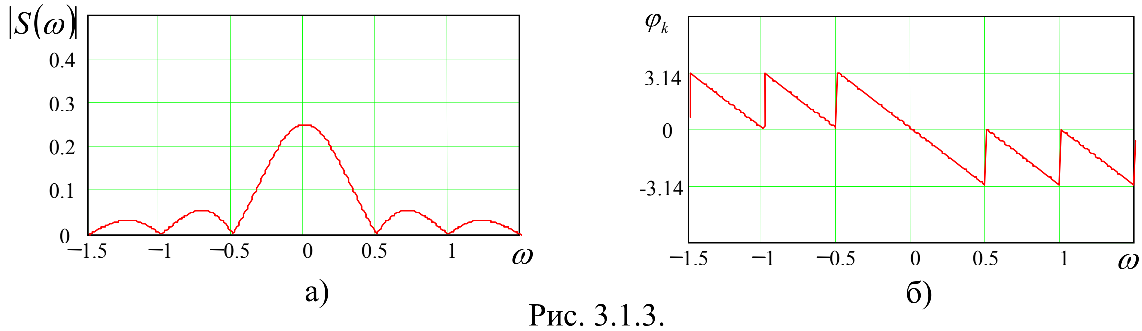


Рис. 3.1.3.

Физический смысл понятия спектральной плотности.

Рассмотрим малый интервал частот $\Delta\omega$, образующий окрестность выбранного значения частоты ω_0. В пределах этого интервала будет содержаться спектральные составляющие, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому можно найти комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала:

$$A_{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot\exp(-j\omega_0 t)\,dt = \frac{\Delta\omega}{\pi}\cdot S(\omega_0). \qquad (3.1.11)$$

Как следует из выражения (3.1.11), спектральная плотность есть коэффициент пропорциональности между шириной малого интервала частот $\Delta\omega$ и отвечающей ему комплексной амплитудой A_{ω_0} эквивалентного гармонического сигнала с частотой ω_0.

Таким образом, спектральная плотность $S(\omega)$ характеризует интенсивность сплошного распределения амплитуд гармоник непериодического сигнала вдоль оси частот ω. В этом состоит основное отличие спектральной плотности непериодического сигнала от дискретного спектра периодического сигнала, в котором каждая гармоническая составляющая имеет вполне определенное значения частоты и амплитуды.

Между спектральной функцией $S(\omega)$ одиночного импульса и коэффициентами C_k, ряда Фурье для периодической последовательности таких импульсов существует простая связь:

$$C_k = \frac{1}{T}S(\omega_k). \qquad (3.1.12)$$

Дискретный спектр периодического сигнала и спектральная плотность непериодического сигнала имеют разные размерности. Размерность амплитудного спектра периодического сигнала совпадает с размерностью самого сигнала [В], а размерность спектральной плотности определяется отношением размерности сигнала к размерности частоты [В/Гц].

Поскольку анализируемый непериодический сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ взаимно-однозначно связаны прямым и обратным интегральными преобразованиями Фурье, то зная спектральную плотность сигнала, можно определить и его энергию:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (3.1.13)$$

Выражение (3.1.13) называют ***равенством Парсеваля*** – значение энергии сигнала, вычисленное во временной и частотной области равны между собой. Можно определить и энергию сигнала в ограниченном диапазоне частот:

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} |S(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (3.1.14)$$

Таким образом, спектральная плотность характеризует распределение энергии сигнала по частоте.

3.2 Основные свойства преобразования Фурье

Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье:

1. Линейность: Спектр суммы сигналов равен сумме спектров этих сигналов:

$$\sum_k a_k s_k(t) \Leftrightarrow \sum_k a_k S_k(\omega). \tag{3.2.1}$$

2. Масштабирование сигнала во времени: Если $s(t) \Leftrightarrow S(\omega)$, то при изменении длительности сигнала получаем:

$$s(a \cdot t) \Leftrightarrow 1/|a| \cdot S(\omega/a). \tag{3.2.2}$$

3. Теорема запаздывания: Запаздывание сигнала на время τ_0 приводит к изменению фазочастотной функции спектра на величину $\omega \cdot \tau_0$ без изменения модуля спектра:

$$s(t-\tau_0) \Leftrightarrow S(\omega) \cdot \exp(-j\omega\tau_0). \tag{3.2.3}$$

4. Дифференцирование сигнала в частотной области:

$$s(t) = \frac{d[y(t)]}{dt} = d\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\exp(j\omega t)d\omega\right]\Big/dt = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\ [d(\exp(j\omega t))/dt]d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \cdot Y(\omega)\exp(j\omega t)d\omega. \tag{3.2.4}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала отображается в спектральной области простым умножением спектра сигнала на оператор дифференцирования сигнала в частотной области $(j\omega)$:

$$S(\omega) = j\omega \cdot Y(\omega). \tag{3.2.5}$$

Умножение на $(j\omega)$ приводит к обогащению спектра производной сигнала высокочастотными составляющими и ослаблению составляющих с низкой частотой.

5. Интегрирование сигнала в частотной области: Если имеет место выражение (3.2.4), то должна выполняться и обратная операция вида:

$$s(t) = \int y(t)dt \Leftrightarrow S(\omega) = Y(\omega)/(j\omega). \tag{3.2.6}$$

Множитель $(1/j\omega)$ называется оператором интегрирования в частотной области. При интегрировании исходного сигнала в амплитудном спектре высокие частоты ослабляются и усиливаются низкие.

6. Спектр произведения сигналов: Рассмотрим два сигнала, для которых известны их преобразования Фурье:

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \quad \text{и} \quad y(t) \Leftrightarrow Y(\omega) \tag{3.2.7}$$

Вычислим спектральную плотность произведение этих сигналов $s(t) = x(t) \cdot y(t)$:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t)\exp(-j\omega t)dt. \tag{3.2.8}$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал $y(t)$ через его спектральную плотность. В результате получим:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\xi)\exp(j\xi t)d\xi\right]\exp(-j\omega t)dt. \tag{3.2.9}$$

Изменив в (3.2.9) порядок интегрирования, будем иметь:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\xi) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j(\omega-\xi)t)\,dt\right]d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\xi) \cdot X(\omega-\xi)\,d\xi. \tag{3.2.10}$$

Интеграл, стоящий в правой части, называют сверткой функций $Y(\omega)$ и $X(\omega)$. Будем в дальнейшем символически обозначать операцию свертки выражением:

$$S(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} Y(\omega) * X(\omega). \tag{3.2.11}$$

<u>7. Спектр свертки сигналов:</u> Если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения

$$S(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega), \tag{3.2.12}$$

то сигнал соответствующий $S(\omega)$ является сверткой исходных сигналов:

$$S(\omega) \Leftrightarrow s(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\xi) \cdot y(\xi)\, d\xi . \tag{3.2.13}$$

Таким образом, свертка временных функций отображается в частотном представлении произведением Фурье-образов этих функций.

3.3 Спектральные плотности основных сигналов

Произведем анализ спектральных плотностей некоторых сигналов, часто встречающихся при решении различных задач.

<u>Прямоугольный импульс.</u> Временная диаграмма прямоугольного импульса с амплитудой A и длительностью τ, центрированного относительно начала отсчета времени приведена на рис. 3.3.1.

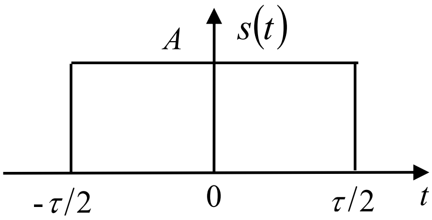


Рис. 3.3.1.

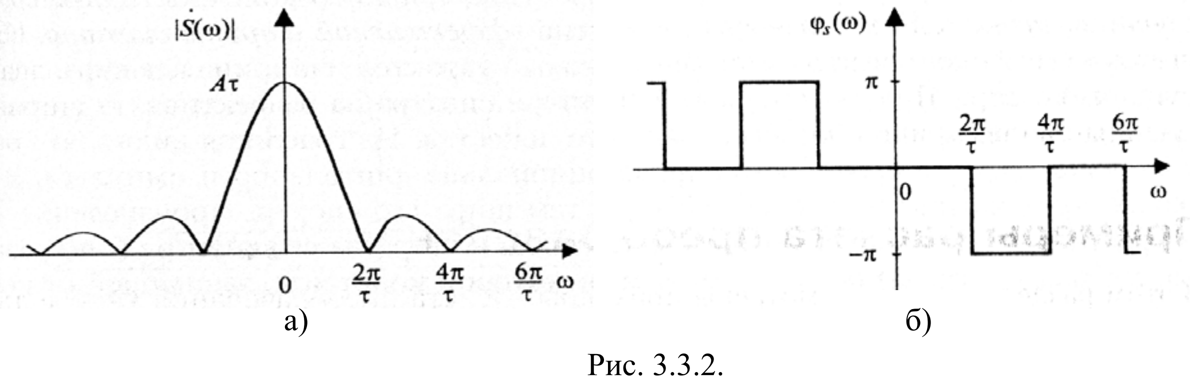
В этом случае математическое описание сигнала имеет вид:

$$s(t) = A, \ |t| \le \tau/2 . \tag{3.3.1}$$

По выражению (3.1.4) вычисляем спектральную плотность. После несложных преобразований получаем аналитическое описание спектральной плотности:

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot \exp(-j\omega t) dt = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \tag{3.3.2}$$

Амплитудный и фазовый спектр прямоугольного импульса приведен на рис. 3.3.2 -а) и -б) соответственно.



а) б)

Рис. 3.3.2.

Амплитудный спектр имеет лепестковый характер. Значение спектральной функции на нулевой частоте равно площади импульса $A \cdot \tau$, а ширина лепестков равна $2\pi/\tau$, то есть обратно пропорциональна длительности импульса. Уровень боковых лепестков спектра прямоугольного импульса убывает пропорционально значению $1/\omega$. Спектральная функция является вещественной, поэтому фазовый спектр принимает лишь значения 0, $\pm\pi$ в зависимости от знака функции $\sin(x)/x$.

Смещенный прямоугольный импульс. Рассмотрим теперь прямоугольный импульс, задержанный на время $\tau_0 = \tau/2$, как это изображено на рис. 3.3.3:

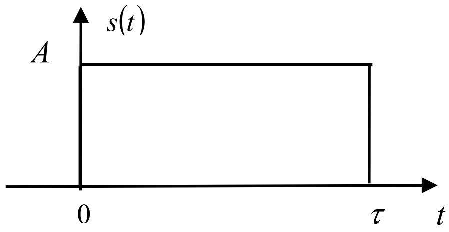
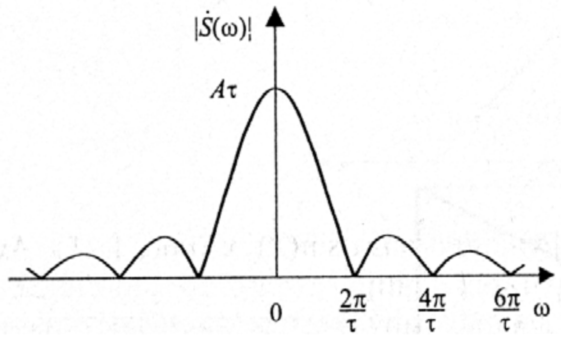


Рис. 3.3.3.

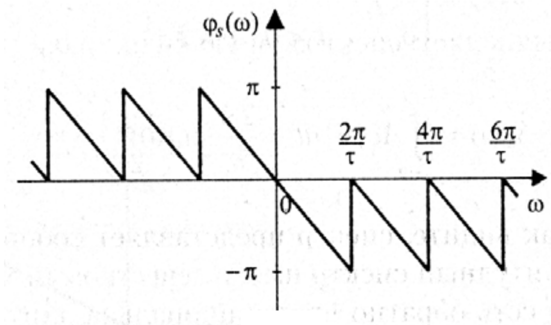
Преобразование Фурье сдвинутого во времени импульса будет определяться выражением:

$$S(\omega) = \int_0^{\tau} A \cdot \exp(-j\omega t)dt = \frac{2A}{j\omega}\left(1 - \exp(-j\omega\tau)\right) = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\exp\left(-j\frac{\omega\tau}{2}\right). \quad (3.3.3)$$

Графики амплитудного и фазового спектров приобретают вид, показанный на рис. 3.3.4 -а) и -б) соответственно.



а)



б)

Рис. 3.3.4.

Из формулы (3.3.3) и приведенных графиков видно, что после сдвига импульса во времени его амплитудный спектр не изменился, а фазовый приобрел сдвиг линейно зависящей от частоты.

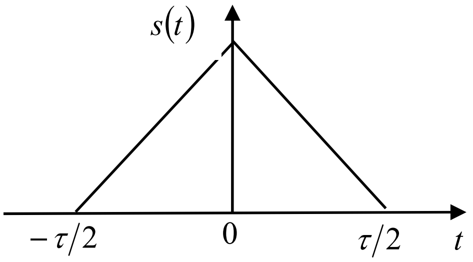
Симметричный треугольный импульс. Временное описание анализируемого сигнала задается выражением:

$$s(t) = A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\tau/2}\right), \; |t| \le \tau/2. \quad (3.3.4)$$

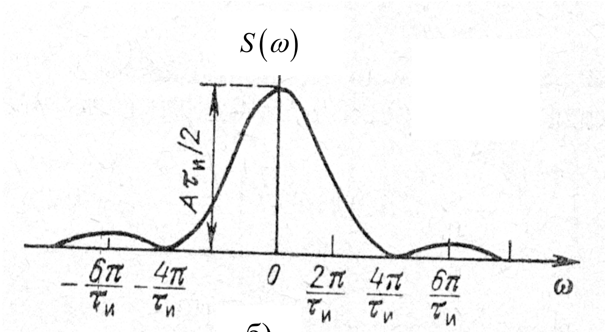
В соответствии с общим выражением преобразования Фурье, рассчитываем спектральную плотность:

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\tau/2}\right)\exp(-j\omega t)dt = \frac{A \cdot \tau}{2}\left(\frac{\sin(\omega \cdot \tau/4)}{(\omega \cdot \tau/4)}\right)^2. \quad (3.3.5)$$

В этом случае спектральная плотность оказывается не только вещественной (это следует из четности сигнала), но и неотрицательной. Поэтому фазовый спектр в данном случае чисто нулевой. Диаграмма симметричного треугольного импульса приведена на рис. 3.3.5 -а), а график амплитудного спектра изображен на рис. 3.3.5 -б). Из графика видно, что спектр также имеет лепестковую структуру. Величина главного пика спектральной плотности определяется площадью импульса и равна $S(0) = A \cdot \tau/2$, а ширина главного лепестка составляет $4\pi/\tau$.



а)



б)

Рис. 3.3.5.

Отметим, что уровень боковых лепестков спектра треугольного импульса убывает пропорционально значению $1/\omega^2$, а не $1/\omega$, как в случае прямоугольного импульса.

<u>Гауссов импульс.</u> Гауссов импульс имеет бесконечную протяженность во времени и описывается выражением вида:

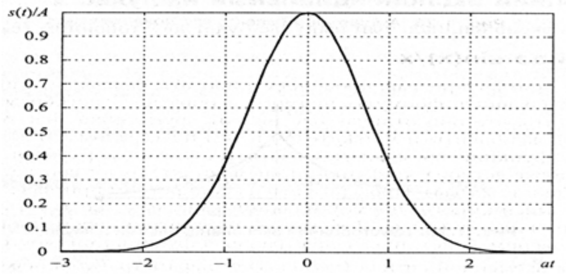
$$s(t) = A \cdot \exp\left(-\alpha \cdot t^2\right). \qquad (3.3.6)$$

Длительность Гауссова импульса равна $\tau = 3.035/\sqrt{\alpha}$ по уровню 0.1 от его амплитуды.

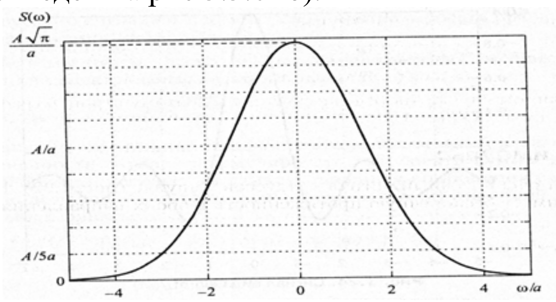
Вычисление спектральной плотности Гаусса импульса представлено выражением:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \exp\left(-\alpha \cdot t^2\right) \exp(-j\omega t)\, dt = \frac{A\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right). \qquad (3.3.7)$$

Временная диаграмма анализируемого сигнала приведена на рис. 3.3.6 -а). Поскольку сигнал является четной функцией, то его спектральная плотность вещественная. График спектральной плотности приведен на рис 3.3.6 -б).



а)



б)

Рис. 3.3.6.

Важным свойством гауссова импульса является то, что его спектральная плотность также описывается гауссовой функцией. Спектральная плотность имеет бесконечную протяженность по частоте.

<u>Интегральный синус – sinc(x).</u> Временной сигнал интегрального синуса определяется выражением:

$$s(t) = A \cdot \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T}, \qquad (3.3.8)$$

где параметр T обозначает полупериод функции $\sin(x)$.

Рассчитываем спектральную плотность анализируемого сигнала:

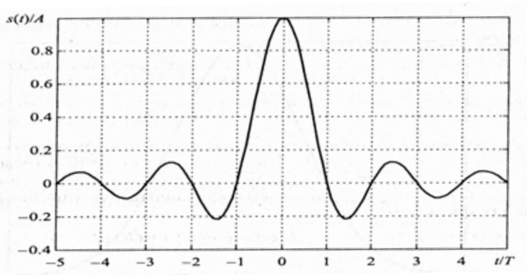
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T} \exp(-j\omega t) dt = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T} \cos(\omega \cdot t) dt =$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\omega+\pi/T\right)t}{t}dt + \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\omega-\pi/T\right)t}{t}dt\,. \qquad (3.3.9)$$

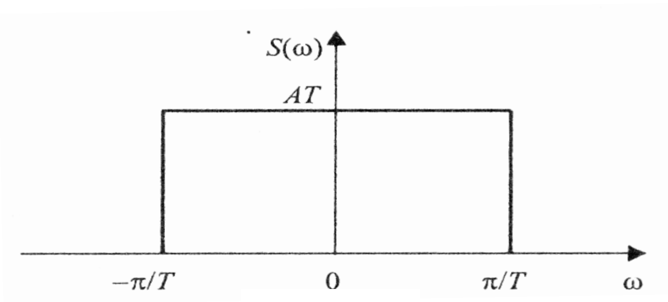
Значения каждого из двух интегралов равно $\pm\pi$ в зависимости от знака множителя $\left(\omega\pm\pi/t\right)$. Поэтому результат суммирования интегралов зависит от частоты следующим образом:

$$S\left(\omega\right)=\begin{cases}A\cdot T, & |\omega|\le\pi/T\\ 0, & |\omega|>\pi/T\end{cases}. \qquad (3.3.10)$$

Временная диаграмма сигнала приведена на рис. 3.3.7 -а), а вид спектральной плотности приведен на рис. 3.3.7 -б).



а)



б)

Рис. 3.3.7.

В начале этого раздела мы установили, что прямоугольному импульсу соответствует спектральная функция вида $\sin(\omega)/\omega$. В тоже время сигнал вида $\sin(t)/t$ имеет спектральную функцию прямоугольной формы. Это демонстрирует дуальность (симметрию) преобразования Фурье.

<u>Пачка видеоимпульсов.</u> Временная диаграмма пачки одинаковых и равностоящих видеоимпульсов изображена на рис. 3.3.8.

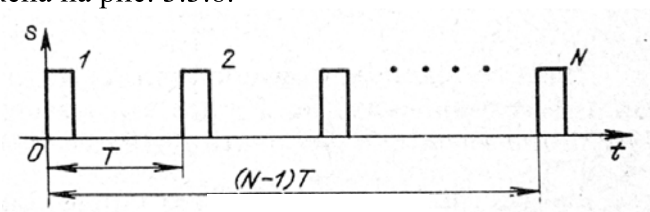


Рис. 3.3.8.

Обозначим через $S_1(\omega)$ спектральную плотность первого импульса в пачке. Тогда для n-го импульса, задержанного относительно первого на время $n\cdot T$, спектральную плотность можно представить выражением:

$$S_n(\omega)=S_1(\omega)\cdot\exp(-j\omega\cdot n\cdot T). \qquad (3.3.11)$$

В соответствии с принципом линейного суммирования спектров спектральная плотность пачки импульсов будет определяться выражением:

$$S\ (\omega)=S_1(\omega)\cdot\left[1+\cdot\exp(-j\omega\cdot T)+...+\exp(-jn\cdot\omega\cdot T)+...\exp(-j(N-1)\cdot\omega\cdot T)\right]. \qquad (3.3.12)$$

Таким образом, спектральная плотность определяется как геометрическая сумма спектральных плотностей отдельных импульсов. В качестве иллюстрации на рис. 3.3.9 -а) изображен модуль спектральной плотности пачки из 3-х прямоугольных импульсов, а на рис. 3.3.9 -б) – из 4-х импульсов при интервале между соседними импульсами $T=3\cdot\tau_u$. Штриховыми линиями показана спектральная плотность одиночного импульса, ширина главного пика которой определяется длительностью импульса.

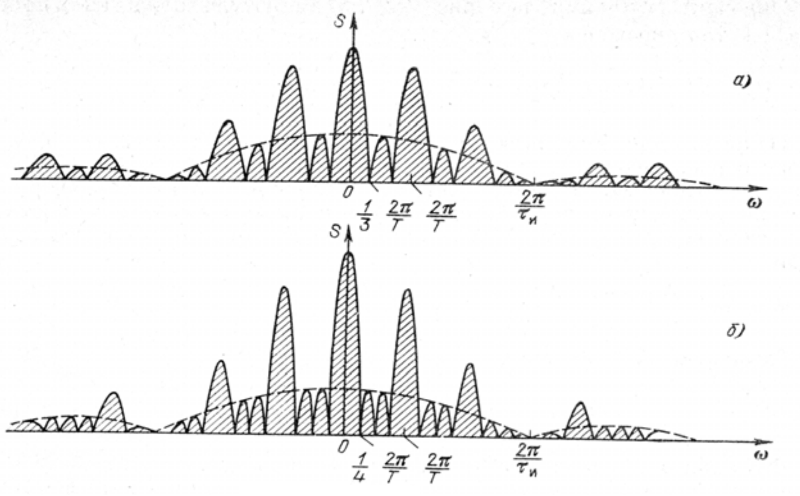


Рис.3.3.9.

Отметим характерные особенности спектральной плотности пачки импульсов. На частотах, отвечающих условию $\omega = k \cdot 2\pi/T$, каждое из слагаемых в квадратных скобках равно единице и, следовательно, справедливо соотношение:

$$S\left[k \cdot 2\pi/T\right] = N \cdot S_1\left[k \cdot 2\pi/T\right]. \qquad (3.3.13)$$

Таким образом, при частотах $\omega = k \cdot 2\pi/T$ модуль спектральной плотности в N раз больше модуля спектральной плотности одиночного импульса. Выбросы в спектральной плотности объясняются тем, что спектральные составляющие различных импульсов с указанными выше частотами складываются с фазовыми сдвигами кратными 2π. Количество пиков в спектральной плотности равно скважности следования импульсов. На частотах $\omega = 2\pi/(N \cdot T)$ спектральная плотность пачки импульсов обращается в ноль. При некоторых других частотах, для которых сумма векторов $\exp(-jn \cdot \omega \cdot T)$ равна нулю, суммарная спектральная плотность также обращается в ноль. С увеличением числа импульсов в пачке спектральная плотность все более расщепляется и в пределе при значении $N \to \infty$ принимает линейчатую структуру спектра периодического сигнала.

3.4 Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

При введении понятия преобразования Фурье были указаны условия его применимости - абсолютная интегрируемость сигнала. Однако в ряде случаев можно найти спектральные плотности сигналов, этим условиям не удовлетворяющим. Рассмотрим спектральные плотности некоторых сигналов.

Дельта-импульс. Используя фильтрующее свойство дельта-импульса можно показать:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \exp(-j\omega t)\,dt = \exp(-j\omega \cdot 0) = 1. \qquad (3.4.1)$$

Спектр дельта-импульса представляет собой константу, то есть является равномерным в бесконечной полосе частот. Это вполне согласуется с общим соотношением между длительностью сигнала и шириной его спектра: дельта-импульс имеет бесконечно малую длительность, а его спектр бесконечно широк. Из полученного результата следует, что дельта-импульс можно записать в виде обратного преобразования Фурье:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega \cdot t)\,d\omega. \qquad (3.4.2)$$

Постоянный во времени сигнал. Поскольку спектром дельта-импульса является константа, то благодаря дуальности преобразования Фурье можно сразу же сказать, что спектром постоянного во времени сигнала $s(t) = A$ будет дельта-функция частоты:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \exp(-j\omega t)\,dt = 2\pi \cdot A \cdot \delta(\omega). \qquad (3.4.3)$$

Постоянный во времени сигнал имеет спектральную компоненту только на нулевой частоте.

Гармонический сигнал. Рассмотрим спектр гармонического сигнала общего вида:

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (3.4.4)$$

Для расчета спектральной функции представим косинус в виде полусуммы комплексных экспонент и воспользуемся свойством (3.4.2). В результате приходим к следующему выражению:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \exp(-j\omega t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \frac{\exp(j\omega_0 t + j\varphi) + \exp(-j\omega_0 t - j\varphi)}{2} \exp(-j\omega t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \cdot \exp(j\varphi) \cdot \exp[-j(\omega - \omega_0)t]dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \cdot \exp(-j\varphi) \cdot \exp[-j(\omega + \omega_0)t]dt =$$

$$= \pi \cdot A \exp(j\varphi) \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot A \exp(-j\varphi) \cdot \delta(\omega + \omega_0). \qquad (3.4.5)$$

Результат представляет собой пару дельта-функций, расположенных на частотах $\pm\omega_0$. Множители при них отражают амплитуду и начальную фазу гармонического сигнала.

Комплексная экспонента. Сигнал этого вида не является вещественным и описывается выражением:

$$s(t) = A \cdot \exp(j\omega_0 t). \qquad (3.4.6)$$

Рассмотренный выше гармонический сигнал дал спектральную функцию в виде двух дельта-функций. Косинус с помощью формулы Эйлера можно представить в виде полусуммы двух комплексных экспонент. Значит, спектром комплексной экспоненты должна являться одиночная дельта-функция:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \exp(j\omega_0 t) \cdot \exp(-j\omega t)dt = 2A \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0). \qquad (3.4.7)$$

Поскольку сигнал не является вещественным, его спектр теряет свойство симметрии.

4 Спектральный анализ дискретных сигналов

Дискретными называются сигналы $s(t_n)$, заданные лишь на конечном множестве точек временной оси $t_n = n \cdot \Delta t,\ n = 0,\ 1,\ 2 \ldots N-1$, где Δt - интервал дискретизации. В дискретных точках $t_n = n \cdot \Delta t$ значения дискретного $s(t_n)$ и непрерывного сигнала $s_a(t_n)$ совпадают. Значения $s_n = s(t_n)$ называют отсчетами сигнала.

Рассмотрим спектральную плотность дискретного сигнала и установим её взаимосвязь со спектральной плотностью непрерывного сигнала.

4.1 Прямое преобразование Фурье при дискретизации сигналов

Для описания дискретного сигнала введем так называемую решетчатую функцию

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n \cdot \Delta t), \qquad (4.1.1)$$

представляющую собой периодическую последовательность дельта-импульсов. Тогда при равномерной дискретизации непрерывного сигнала дискретный сигнал можно описать выражением:

$$s(t) = s_a(t) \cdot g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t), \qquad (4.1.2)$$

Дискретный сигнал есть взвешенная сумма сдвинутых во времени дельта-импульсов. Вес каждого сдвинутого дельта-импульса определяется значением отсчета непрерывного сигнала $s_n = s_a(t_n)$.

Прямое преобразование Фурье дискретных сигналов может быть получено непосредственно из интегрального преобразования при дискретизации времени. Учитывая математическое описание дискретного сигнала (4.1.2), получаем:

$$S(\omega) = \int_0^T s(t) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt = \int_0^T \left[\sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) \right] \cdot \exp(-j\omega t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} s_n \int_0^T \delta(t - n \cdot \Delta t) \exp(-j\omega t) dt = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \exp(-j\omega \cdot n \cdot \Delta t). \qquad (4.1.3)$$

Из выражения (4.1.3) следует, что спектральная плотность дискретного сигнала представляет собой непрерывную периодическую функцию частоты, с периодом равным частоте дискретизации $\omega_D = 2\pi F_D = 2\pi/\Delta t$.

Установим теперь взаимосвязь спектральной плотности дискретного и непрерывного сигнала. Для этого представим периодическую решетчатую функцию в виде комплексного ряда Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j \cdot m \cdot \omega_D). \qquad (4.1.4)$$

Тогда на основании выражения (4.1.4) преобразование Фурье можно привести к виду:

$$S(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^T s_a(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j \cdot m \cdot \omega_D) \cdot \exp(-j\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^T s_a(t) \cdot \exp(-j(\omega - m \cdot \omega_D) t)\, dt = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_a(\omega - m \cdot \omega_D). \qquad (4.1.5)$$

Таким образом, спектральная плотность дискретного сигнала представляет собой сумму бесконечного числа сдвинутых копий спектральных плотностей непрерывного сигнала. Копии спектральных плотностей располагаются на оси частот через промежутки, равные частоте дискретизации.

Пример дискретного сигнала изображен на рис. 4.1.1, а его спектральная плотность приведена на рис. 4.1.2.

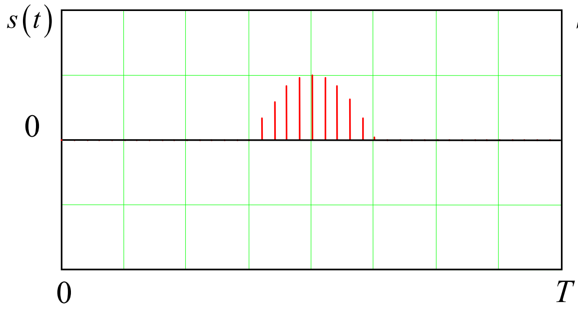


Рис. 4.1.1.

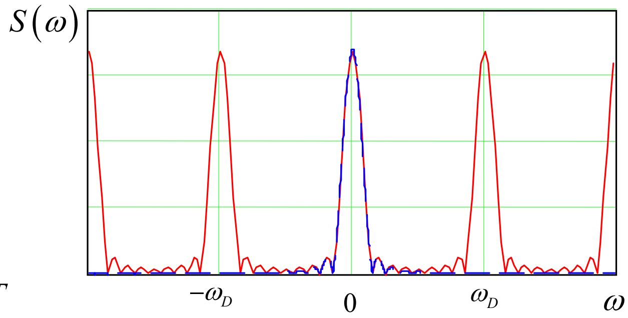


Рис. 4.1.2.

Центральную часть спектральной плотности $S(\omega)$ называют главным пиком, а границы его частотного диапазона $\omega_N = \omega_D/2 = \pi/\Delta t$ называют частотой Найквиста.

Рассмотрим теперь вопрос восстановления непрерывного сигнала. Непрерывный сигнал с некоторой точностью можно восстановить по центральной части спектра дискретного сигнала. Для выделения центральной части необходимо спектр $S(\omega)$ умножить на прямоугольную частотную весовую функцию вида:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_N \\ 0, & |\omega| > \omega_N \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Выделение центральной части с некоторой точностью определяет спектральную плотность аналогового сигнала:

$$S(\omega)\cdot W(\omega) \approx \frac{1}{\Delta t} S_a(\omega). \tag{4.1.7}$$

Выполнив обратное интегральное преобразование Фурье, получим непрерывный сигнал:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot W(\omega)\cdot \exp(j\omega\cdot t)\, d\omega. \tag{4.1.8}$$

Вид спектральной плотности дискретного сигнала и частотной весовой функции наглядно представлен на рис. 4.1.3.

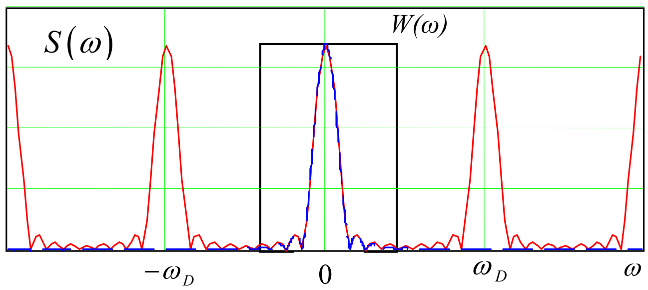


Рис. 4.1.3.

Если временные выборки взяты через недостаточный интервал, то будет эффект наложения копий спектральных плотностей. Необходимое значение частоты дискретизации сигнала определяется ***теоремой Котельникова*** - произвольный непрерывный сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен некоторой частотой $F_{\max}$., может быть полностью восстановлен по последовательности своих отсчетных значений, если интервал дискретизации удовлетворяет условию:

$$\Delta t = 1/\left(2F_{\max}\right). \qquad (4.1.9)$$

Все реальные сигналы имеют конечную длительность, и, следовательно, бесконечно протяженный спектр. Поэтому, как правило, при выделении центральной части спектра в соответствии с (4.1.7) осуществляется отбрасывание спектральных компонент боковых лепестков, а также на центральную часть спектра накладываются хвосты от соседних спектральных составляющих. Следовательно, восстановление непрерывного сигнала осуществляется с некоторой погрешностью. Погрешность восстановления определяется как энергией отброшенной части спектра сигнала, так и энергией боковых лепестков копий спектра, входящих в зону Найквиста. Погрешность восстановления зависит от ширины главного лепестка спектра и скорости спадания боковых лепестков спектральной плотности аналогового сигнала.

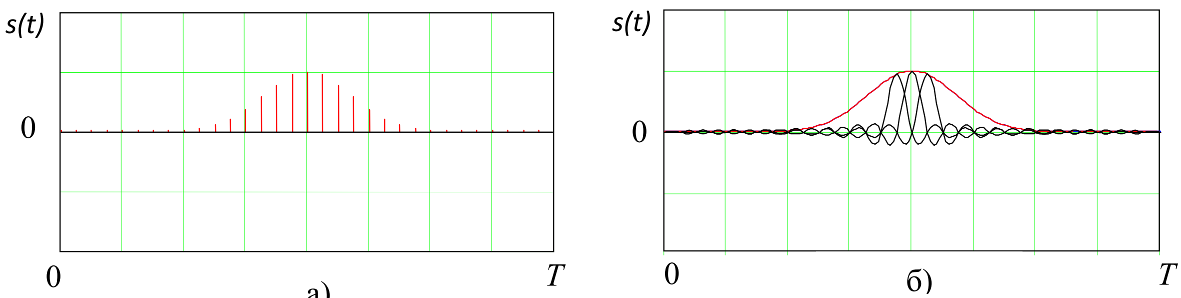
Рассмотрим теперь процесс восстановления непрерывного сигнала во временной области. Обратное преобразование Фурье от весовой частотной функции дает сигнал вида интегрального синуса:

$$W(\omega) \Leftrightarrow \sin c(\omega_N t) = \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N t}. \qquad (4.1.10)$$

Поскольку умножение спектральных плотностей двух сигналов (4.1.7) приводит к свертке этих сигналов во временной области, то получим:

$$S(\omega)\cdot W(\omega) \Leftrightarrow s_B(t) = s(t_n) * \sin c(\omega_N \cdot t_n) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n)\cdot\frac{\sin\left[\omega_N\cdot(t-n\cdot\Delta t)\right]}{\omega_N\cdot(t-n\cdot\Delta t)}. \qquad (4.1.11)$$

Таким образом, выходной сигнал представляет собой сумму сдвинутых весовых функций вида интегрального синуса, где значение веса определяется отсчетами дискретного сигнала. Эта формула носит название интерполяционного ряда Котельникова. Значение функции отсчетов интегрального синуса в каждой точке равно самому отсчету и нулю во всех остальных точках дискретного сигнала. Аналоговый сигнал в интервалах между отсчетами образуются суперпозицией значений функций отсчетов во всех точках. На рис. 4.1.4 -а) приведен дискретный сигнал, а на рис. 4.1.4 -б) представлен принцип восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам.



а) б)

Рис. 4.1.4.

Логично полагать, что искажения при восстановлении сигналов будут тем меньше, чем выше частота дискретизации. Однако чем больше значение частоты дискретизации, тем большим количеством отсчетов будут отображаться сигналы, и тем большее время будет затрачиваться на их обработку.

4.2 Обратное преобразование Фурье при дискретизации спектра

Пусть $S(\omega)$ спектральная плотность некоторого сигнала $s(t)$, заданного на интервале времени $[0,\ T]$. Применив обратное интегральное преобразование Фурье можно получить сигнал $s(t)$. Однако сигнал можно восстановить и по дискретным отсчетам его спектральной плотности $S_k = S(\omega_k)$, $\omega_k = k\cdot\Delta\omega = k\cdot 2\pi\cdot\Delta f$, где $\Delta\omega = 2\pi\cdot\Delta f$ - шаг дискретизации по частоте.

Обратное преобразование Фурье может быть получено непосредственно из интегрального преобразования при дискретизации частоты:

$$s(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} S_k\cdot\exp(jk\cdot\Delta\omega\cdot t). \qquad (4.2.1)$$

Следует отметить, что при дискретизации спектра с шагом $\Delta\omega$ восстановленный сигнал становится периодическим с периодом $T_П = 2\pi/\Delta\omega$. Если частотные выборки взять через недостаточный интервал, то будет эффект наложения восстановленных сигналов во временной области. В качестве иллюстрации на рис. 4.2.1-а) изображены дискретные значения спектральной плотности и восстановленный видеоимпульс без искажений формы, а на рис. 4.2.1-б) приведены аналогичные графики иллюстрирующие эффект наложения восстановленных сигналов.

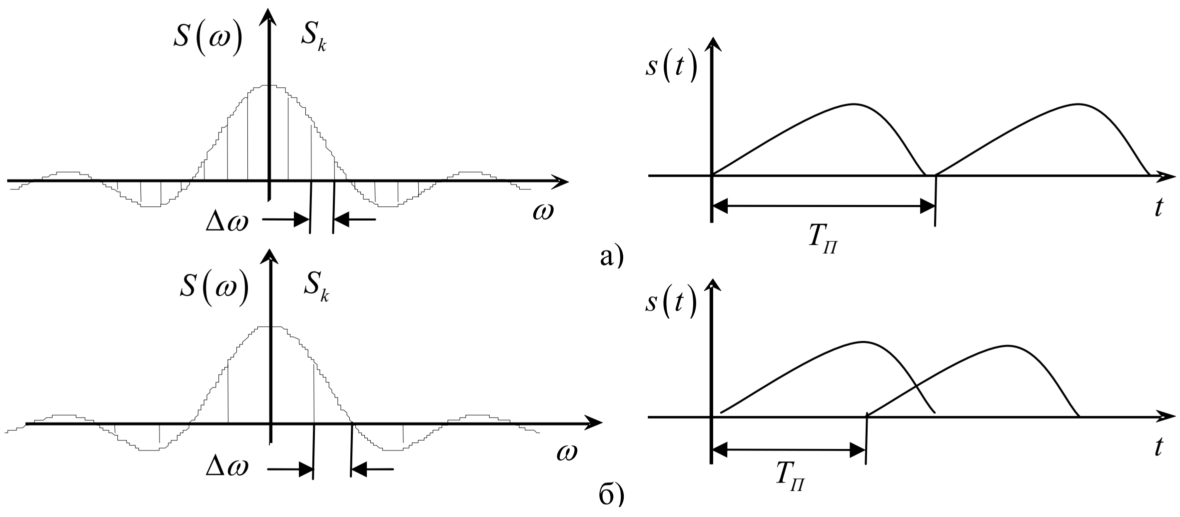


Рис. 4.2.1.

Для точного восстановления сигнала шаг дискретизации по частоте должен удовлетворять условию ***теоремы Котельникова -*** если сигнал ограниченной длительности T имеет спектральную плотность $S(\omega)$, то по частотным выборкам $S_k = S(k\cdot\Delta\omega)$, взятым через интервал частот

$$\Delta\omega = 2\pi/T = 2\pi/(N\cdot\Delta t) \qquad (4.2.2)$$

можно восстановить сигнал.

Таким образом, дискретизация сигнала по времени приводит к периодизации спектра, а дискретизация спектра по частоте - к периодизации сигнала.

Далее рассмотрим процесс восстановления непрерывного спектра. По частотным выборкам $S_k = S(k\cdot\Delta\omega)$, взятым через интервал частот $\Delta\omega = 2\pi/T$ можно восстановить непрерывный спектр сигнала. Восстановление спектра описывается рядом Котельникова:

$$S(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} S_k\cdot\frac{\sin\left[T/2\cdot(\omega-k\cdot\Delta\omega)\right]}{T/2\cdot(\omega-k\cdot\Delta\omega)}. \tag{4.2.3}$$

Как следует из приведенного выражения (4.2.3), восстановленная непрерывная спектральная плотность образуется суммой взвешенных сдвинутых частотных функций вида интегрального синуса, где веса определяются отсчетами дискретного спектра. Значения восстановленной спектральной плотности на дискретных частотах равно самому отсчету дискретного спектра. На других частотах значения восстановленной спектральной плотности образуются суперпозицией значений взвешенных частотных функций во всех точках.

4.3 Дискретное преобразование Фурье

При дискретизации сигнала с интервалом $\Delta t=1/(2F_{\max})$ общее число выборок будет равно $N=T/\Delta t=2T\cdot F_{\max}$. При дискретизации спектра с шагом $\Delta f=1/T=1/(N\cdot\Delta t)$ общее число спектральных отсчетов будет равно $N=2F_{\max}/\Delta f=2T\cdot F_{\max}$, т.е. совпадает с числом выборочных значений при дискретизации сигнала во временной области. Число выборочных значений, которыми полностью описывается сигнал, называют ***числом степеней свободы сигнала***.

Если исходный сигнал $s(t)$, заданный на интервале времени $[0,\ T]$, и его спектральная плотность $S(\omega)$ дискретизированы оптимально и представлены $N=T/\Delta t=2T\cdot F_{\max}$ отсчетами $\omega_k\cdot t_n=k\cdot 2\pi/(N\cdot\Delta t)\cdot(n\cdot\Delta t)=2\pi\cdot k\cdot n/N$, то преобразования (4.1.3) и (4.2.1) будут описываться выражениями:

$$S_k\equiv S(\omega_k)=\sum_{n=0}^{N-1} s_n\cdot\exp(-j2\pi\cdot k\cdot n/N), \tag{4.3.1}$$

$$s_n\equiv s(t_n)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} S_k\cdot\exp(j2\pi\cdot k\cdot n/N). \tag{4.3.2}$$

Полученные преобразования называют дискретными преобразованиями Фурье (ДПФ). Прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) (4.3.1) позволяет по дискретным значениям сигнала вычислять дискретные значения частотных выборок в спектре сигнала. Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) (4.3.2) позволяет по частотным выборкам в спектре сигнала получить отсчеты дискретного сигнала. Диаграммы, приведенные на рис. 4.3.1, иллюстрируют операции дискретного преобразования Фурье.

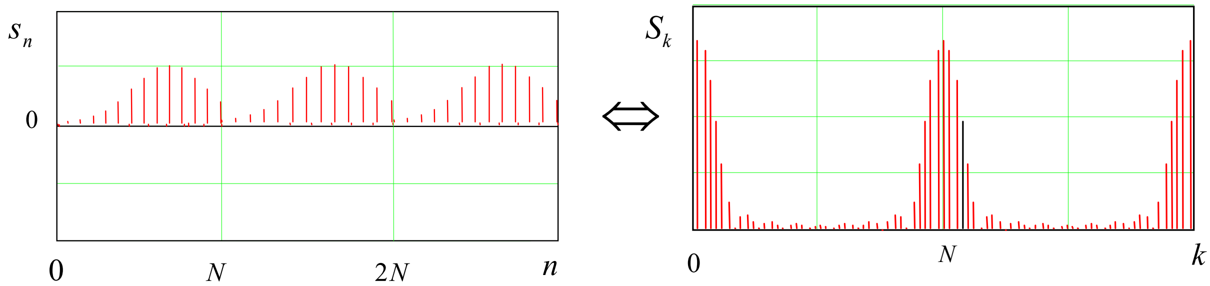


Рис. 4.3.1.

При цифровой обработке сигналов с использованием процедур ДПФ следует учитывать периодичность дискретных спектров и сигналов.

4.4 Дискретная свертка

Пусть два сигнала $u(t)$ и $v(t)$ конечной длительности заданы временными дискретными отсчетами $u_n = u(t_n)$, $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0,\ 1,\ 2\ ...N_u - 1$ и $v_n = v(t_n)$, $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0,\ 1,\ 2\ ...N_v - 1$. Дополним каждый из дискретных сигналов нулевыми отсчетами до длины $N = N_u + N_v - 1$. Тогда по аналогии с обычной сверткой аналоговых сигналов можно ввести дискретную свертку двух сигналов:

$$s(t_n) = u(t_n) * v(t_n) \Rightarrow s_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u_m \cdot v_{n-m} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} v_m \cdot u_{n-m}\,. \qquad (4.4.1)$$

Рассмотренную процедуру дискретной свертки называют апериодической или линейной сверткой дискретных сигналов. На рис. 4.4.1 приведены диаграммы иллюстрирующие процедуру вычисления свертки двух дискретных сигналов.

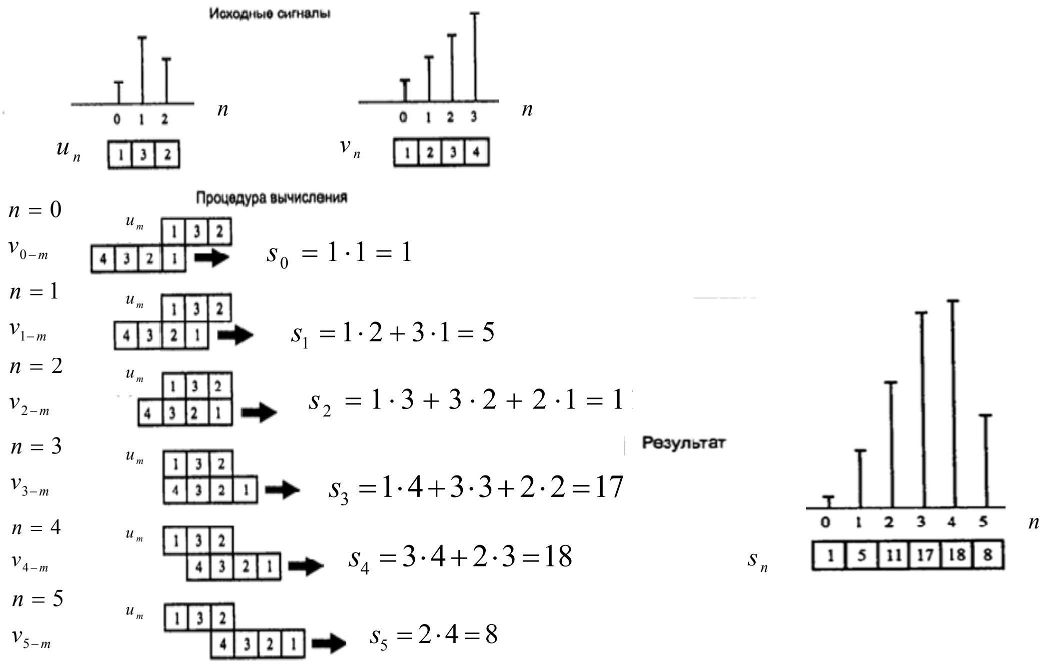


Рис.4.4.1.

Если дискретные сигналы $u_n = u(t_n)$ и $v_n = v(t_n)$ периодичны и имеют одинаковую длину $N = N_u = N_v$, то говорят о периодической или циклической свертки сигналов. Результатом свертки будет сигнал $s_n = s(t_n)$ с тем же периодом N.

Выразим дискретную свертку через ДПФ этих сигналов. Для этого определим текущие значения отсчетов сигналов как ОДПФ от соответствующих спектров:

$$u_m = \sum_{k=0}^{N-1} U_k \cdot \exp\left(j2\pi km/N\right); \qquad v_{n-m} = \sum_{l=0}^{N-1} V_l \cdot \exp\left(j2\pi l(n-m)/N\right) \qquad (4.4.2)$$

Подставив эти формулы в (4.4.1), получим:

$$s_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} U_k \cdot \exp\left(j2\pi km/N\right)\right] \cdot \left[\sum_{l=0}^{N-1} V_l \cdot \exp\left(j2\pi l(n-m)/N\right)\right] \qquad (4.4.3)$$

Изменив в (4.4.3) порядок суммирования, придем к выражению:

$$s_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} U_k \cdot V_l \cdot \exp\left(j2\pi \cdot l \cdot n/N\right) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(j2\pi m\left(k-l\right)/N\right) \qquad (4.4.4)$$

Принимая во внимание свойство (4.4.5)

$$\sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(j2\pi m\left(k-l\right)/N\right) = \begin{cases} N, & \text{если } k = l \\ 0, & \text{если } k \neq l \end{cases}, \qquad (4.4.5)$$

выражение (4.4.4) можно представить в виде:

$$s_n = \sum_{k=0}^{N-1} U_k \cdot V_k \cdot \exp\left(j\,2\pi kn/N\right) \qquad (4.4.6)$$

Таким образом, дискретную свертку двух сигналов можно получить, выполнив ОДПФ от произведения коэффициентов ДПФ исходных сигналов. Следует отметить, что результат свертки будет представлять периодический сигнал.

5 Корреляционный анализ сигналов

Для количественного определения степени отличия сигнала и его смещенной во времени копии принято вводить автокорреляционную функцию (АКФ). Для оценки степени сходства двух сигналов при различном взаимном расположении друг относительно друга вводят взаимную корреляционную функцию (ВКФ).

5.1 Автокорреляционная функция сигналов

Автокорреляционная функция сигнала определяется скалярным произведением сигнала $s(t)$ и сдвинутой его копии $s(t-\tau)$ на время τ:

$$R_s(\tau)=(s,s_\tau^*)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot s^*(t-\tau)\,dt. \qquad (5.1.1)$$

Установим основные свойства автокорреляционной функции сигнала.

При замене переменной $t=t-\tau$ в формуле (5.1.1), получаем:

$$R_s(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot s^*(t-\tau)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)\cdot s^*(t)\,dt=R_s(-\tau). \qquad (5.1.2)$$

Следовательно, АКФ относится к четным функциям.

Как следует из выражения (5.1.1) при задержке $\tau=0$ значение АКФ непосредственно равно энергии сигнала:

$$R_s(0)=\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,dt=E_s. \qquad (5.1.3)$$

Модуль АКФ при любом значении временного сдвига не превосходит энергии сигнала:

$$|R_s(\tau)|\le R_s(0)=E_s. \qquad (5.1.4)$$

Приведенное соотношение называется ***неравенством Коши-Буняковского***.

АКФ сигнала имеет физическую размерность энергии.

В качестве примера на рис. 5.1.1, а) и б) на верхних диаграммах изображены соответственно два сигнала: $u(t)$- прямоугольный импульс и $v(t)$ - односторонний треугольный импульс. На нижних диаграммах приведены формы их АКФ.

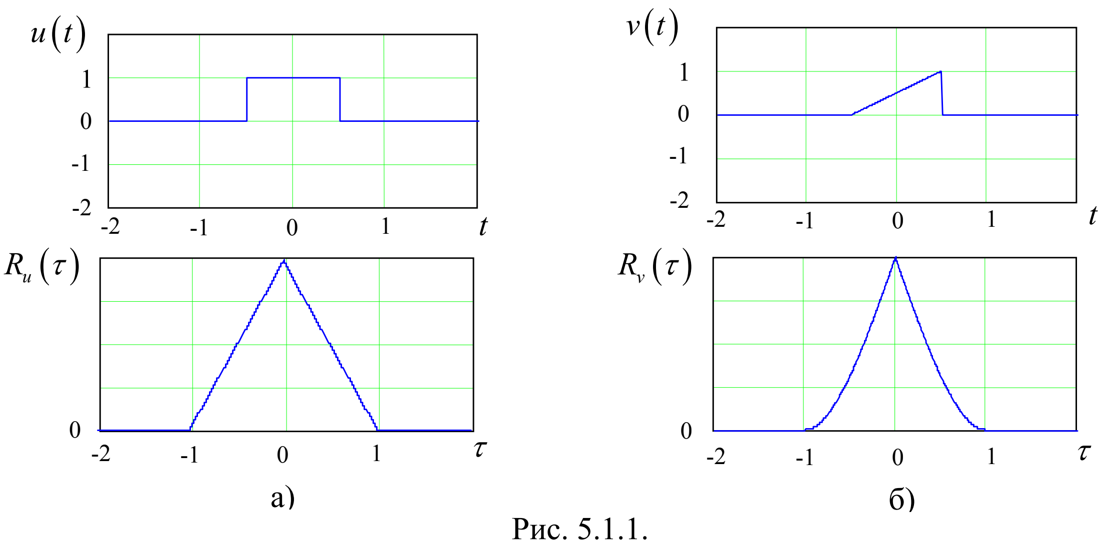


Рис. 5.1.1.

Следует отметить, что ширина центрального пика АКФ равна удвоенному значению длительности импульсов. При смещении сигнала на временной оси форма его АКФ и расположение на оси задержек остается без изменения.

Интервал корреляции сигнала является числовым параметром оценки эффективной ширины центрального пика АКФ:

$$\tau_K = \frac{1}{R_s(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| R_s(\tau) \right| d\tau . \qquad (5.1.5)$$

Коэффициентом автокорреляции сигнала называют значения АКФ, нормированные к значению энергии сигнала:

$$\rho_s(\tau) = R_s(\tau) / E_s . \qquad (5.1.6)$$

Значение корреляционных коэффициентов может изменяться от 1 (полная корреляция) до -1 (полная обратная корреляция).

5.2 Связь автокорреляционной функции со спектральной плотностью сигнала

Пусть $S(\omega)$ спектральная плотность некоторого сигнал $s(t)$. Функция вида

$$W_s(\omega) = S(\omega) \cdot S^*(\omega) = \left| S(\omega) \right|^2 \qquad (5.2.1)$$

называется энергетическим спектром сигнала или спектральной плотностью мощности сигнала. Спектральная плотность мощности позволяет определить полную энергию сигнала по выражению:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) d\omega . \qquad (5.2.2)$$

Выражение (5.2.2) называют равенством Парсеваля.

Представление сигналов посредством их спектральных плотностей позволяет значительно упростить корреляционный анализ. Для этого представим сигнал $s(t)$ своей спектральной плотностью $S(\omega)$:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega . \qquad (5.2.3)$$

При задержке сигнала на время τ его спектральная плотность определяется выражением:

$$s(t-\tau) \Rightarrow S_\tau(\omega) = S(\omega) \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) . \qquad (5.2.4)$$

Используя соотношения (5.2.3) и (5.2.3) в формуле (5.1.1) получим выражение вида:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) \cdot \exp(-j\omega t) d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \right] d\omega . \qquad (5.2.5)$$

Как видно, внутренний интеграл представляет собой спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала. Следовательно, автокорреляционная функция связана с энергетическим спектром сигнала обратным преобразованием Фурье:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) \cdot \exp(j\omega \cdot \tau) d\omega . \qquad (5.2.6)$$

Зная АКФ сигнала можно определить спектральную плотность мощности сигнала с помощью прямого преобразования Фурье:

$$W_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) d\tau . \qquad (5.2.7)$$

Следует отметить, что чем уже пик АКФ сигнала, тем шире его спектральная плотность и наоборот чем шире спектральная плотность сигнала, тем меньше интервал корреляции. Поскольку спектры мощности сигналов не имеют фазовой характеристики, то и АКФ сигналов, также не несёт информации о фазовых характеристиках сигналов и, следовательно, восстановление сигналов по АКФ невозможно. Приведенные выражения известны в литературе как теорема Винера-Хинчина.

5.3 Взаимная корреляционная функция сигналов

Обобщая формулу (5.1.1) функции корреляции на два различных сигнала $u(t)$ и $v(t)$, получаем выражение, определяющее ВКФ этих сигналов:

$$R_{u,v}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot v^{*}(t-\tau)\,dt. \qquad (5.3.1)$$

Приведем основные свойства взаимной корреляционной функции сигналов.

При замене переменной $t=t-\tau$ в формуле (5.3.1), получаем:

$$R_{u,v}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t+\tau)\cdot v^{*}(t)\,dt=R_{v,u}(-\tau). \qquad (5.3.2)$$

Отсюда следует, что для ВКФ двух сигналов не выполняется условие четности, $R_{u,v}(\tau)\neq R_{u,v}(-\tau)$, и значения ВКФ не обязаны иметь максимум при задержке $\tau=0$.

Учитывая независимость энергии сигналов от сдвига во времени, получаем неравенство Коши-Буняковского в виде соотношения:

$$\left|R_{u,v}(\tau)\right|\leq\sqrt{E_u\cdot E_v}. \qquad (5.3.3)$$

<u>Коэффициент взаимной корреляции сигналов.</u> Коэффициент взаимной корреляции сигналов нормируется к произведению значений дисперсий сигналов:

$$\rho_{uv}(\tau)=R_{uv}(\tau)/(\sigma_u\cdot\sigma_v)=R_{uv}(\tau)/\left(\sqrt{E_u\cdot E_v}\right). \qquad (5.3.4)$$

Значение взаимных корреляционных коэффициентов может изменяться от 1 (полная корреляция) до -1 (полная обратная корреляция).

На рис. 5.3.1 приведены примеры ВКФ прямоугольного импульса $u(t)$ и одностороннего треугольного импульса $v(t)$. Сигналы имеют одинаковую длительность τ_u и центрированы относительно нулевого момента времени. При задержке одностороннего треугольного импульса $v(t)$ относительно прямоугольного импульса $u(t)$ диаграмма их ВКФ. приведена на рис. 5.3.1- а). Как видно, форма ВКФ этих сигналов асимметрична.

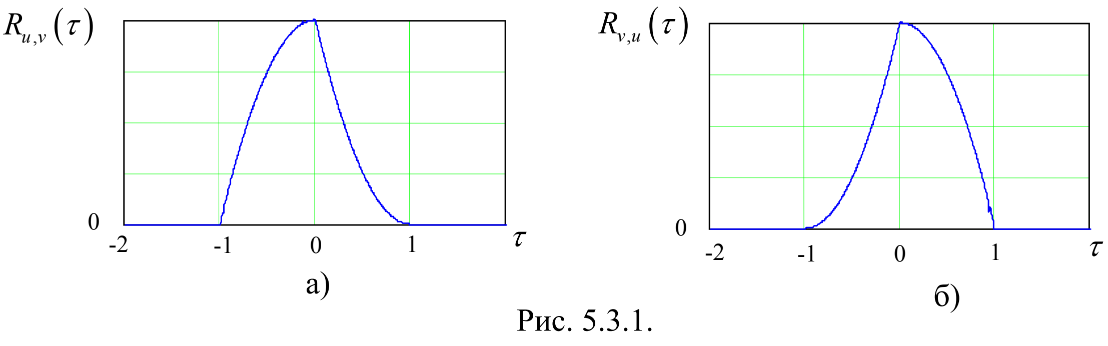


Рис. 5.3.1.

Если поменять местами сигналы и рассматривать задержку сигнала $u(t)$ относительно сигнала $v(t)$, то форма такой ВКФ изображена на рис. 5.3.1-б) и является зеркальной копией повернутой относительно $\tau=0$. В общем случае форма ВКФ зависит от свойств сигналов.

5.4 Связь взаимной функции корреляции с взаимной спектральной плотностью

Рассмотрим спектральные плотности двух сигналов $u(t)$ и $v(t)$

$$U(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot \exp(-j\omega t)\,dt\ , \qquad V(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\cdot \exp(-j\omega t)\,dt\,. \qquad (5.4.1)$$

Введем взаимные энергетические спектры двух сигналов, которые определяются выражениями (5.4.2)

$$W_{uv}(\omega)=U(\omega)\cdot V^{*}(\omega), \qquad W_{vu}(\omega)=V(\omega)\cdot U^{*}(\omega) \qquad (5.4.2)$$

Энергетические спектры являются функциями распределения энергии взаимодействия сигналов по частоте. Поэтому можно установить взаимосвязь между энергией взаимодействия сигналов и их спектральными плотностями:

$$E_{uv}=(u,\ v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\cdot V^{*}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}(U,V)\,. \qquad (5.4.3)$$

В соответствии с полученным выражением можно записать и обратное соотношение:

$$(U,\ V)=2\pi(u,\ v) \qquad (5.4.4)$$

Выражения (5.4.3) и (5.4.4) представляют собой обобщенные формулы Рэлея: скалярное произведение двух сигналов пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей и наоборот.

Связь взаимной функции корреляции с взаимной спектральной плотностью может быть получена на основании тех же соображений, что и связь автокорреляционной функции со спектральной плотностью сигнала.

Непосредственно из формулы (5.2.6) заменой спектральных плотностей различных сигналов можно получить:

$$R_{u,v}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\cdot V^{*}(\omega)\cdot \exp(j\omega\cdot\tau)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega)\cdot \exp(j\omega\cdot\tau)\,d\omega\,. \quad (5.4.5)$$

Следовательно, взаимные корреляционные функции выражаются через обратное преобразование Фурье спектральной плотности взаимной мощности сигналов. При смене порядка сигналов меняется сопряженность спектральных плотностей в выражении (5.4.5).

Спектральная плотность взаимной мощности сигналов может быть получена прямым преобразованием Фурье их взаимной функции корреляции:

$$W_{u,v}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{u,v}(\tau)\cdot \exp(-j\omega\cdot\tau)\,d\tau\,. \qquad (5.4.6)$$

В общем случае, взаимные энергетические спектры являются комплексными функциями и содержат определенную фазовую характеристику. Представим спектральные плотности сигналов (5.4.1) в показательной форме:

$$U(\omega)=\left|U(\omega)\right|\cdot \exp\left[j\varphi_U(\omega)\right]; \qquad V(\omega)=\left|V(\omega)\right|\cdot \exp\left[j\varphi_V(\omega)\right]. \qquad (5.4.7)$$

Тогда подставляя соотношения (5.4.7) в выражения (5.4.2), получаем, что аргумент взаимного энергетического спектра определяется разностью аргументов спектральных плотностей сигналов:

$$W_{uv}(\omega)=\left|U(\omega)\right|\cdot\left|V(\omega)\right|\cdot \exp\left[j\left[\varphi_U(\omega)-\varphi_V(\omega)\right]\right]. \qquad (5.4.8)$$

Таким образом, взаимный энергетический спектр содержит информацию о фазе спектральных компонент на различных частотах. Поэтому при полном совмещении сигналов на временной оси центр функции взаимной корреляции располагается на значении нулевой задержки. При смещении одного из сигналов на временной оси вправо или влево фазовая характеристика вызывает и сдвиг ВКФ по оси задержек влево или вправо соответственно. Однако форма их ВКФ остается без изменения.

5.5 Функции корреляции дискретных сигналов

Пусть вещественный дискретный сигнал $s_n = s(t_n)$ задан на конечном множестве точек временной оси $t_n = n \cdot \Delta t,\ n = 0\ ...\ N-1$, где Δt - интервал дискретизации, N - количество отсчетов дискретного сигнала. Описание АКФ дискретного сигнала можно получить из интегрального выражения при дискретизации времени:

$$R(\tau_m) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \cdot s^*(t_n - \tau_m) \Rightarrow R_m = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot s_{n-m}^* . \qquad (5.5.1)$$

Вычисление функций корреляции, как правило, выполняется по дискретным задержкам $\tau_m = m \cdot \Delta t,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ ...$.

Выразим АКФ дискретного сигнала через дискретное преобразование Фурье.

Спектральная плотность дискретного сигнала при дискретных значениях частоты определяется выражением:

$$S(\omega_k) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f_k \cdot t_n) \Rightarrow S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right). \qquad (5.5.2)$$

Учитывая связь автокорреляционной функции с энергетическим спектром сигнала, получим:

$$R(\tau_m) = \Delta\omega \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left|S(\omega_k)\right|^2 \cdot \exp(j2\pi \cdot f_k \cdot \tau_m) \Rightarrow R_m = \sum_{k=0}^{N-1} \left|S_k\right|^2 \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N}\right). \qquad (5.5.3)$$

Взаимная корреляционная функция двух дискретных сигналов получается из интегрального выражения и задается формулой:

$$R(\tau_m) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u(t_n) \cdot v^*(t_n - \tau_m) \Rightarrow R_m = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cdot v_{n-m}^* . \qquad (5.5.4)$$

Она может быть выражена также и через дискретные значения спектральной плотности взаимной мощности сигналов:

$$R(\tau_m) = \Delta\omega \cdot \sum_{k=0}^{N-1} U(\omega_k) \cdot V(\omega_k)^* \cdot \exp(j2\pi \cdot f_k \cdot \tau_m) \Rightarrow R_m = \sum_{k=0}^{N-1} U_k \cdot V_k^* \cdot \exp\left(j\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{N}\right). \qquad (5.5.5)$$

При смене порядка сигналов, меняется комплексная сопряженность спектральных плотностей этих сигналов.

6 Модулированные радиосигналы

Как правило, информационные сигналы являются низкочастотными и их передача по радиоканалам связи затруднена. Для их передачи необходимо осуществить перенос спектра информационного сигнала из низкочастотной области в выделенную область высоких частот. С этой целью в передающем устройстве формируется несущий высокочастотный сигнал $u(t)$. Если сделать значение несущего сигнала пропорционально зависимым от значения информационного сигнала $s(t)$, то форма сигнала $u(t)$ будет нести информацию, тождественную информации в сигнале $s(t)$. Физический процесс переноса информации на параметры несущего сигнала называется модуляцией. Исходный информационный сигнал $s(t)$ называют модулирующим, а результат модуляции - модулированным сигналом. В зависимости от того, на какой из параметров несущего сигнала переносится информация, различают амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) или фазовую (ФМ) модуляцию. Частотная и фазовая модуляция тесно взаимосвязаны, и их обычно объединяют под общим названием - угловая модуляция.

6.1 Амплитудная модуляция сигналов

При амплитудной модуляции в соответствии с модулирующим сигналом $s(t)$ изменяется амплитуда несущего колебания при постоянных значениях параметров несущей частоты и фазы. Закон амплитудной модуляции сигнала задается выражением:

$$u(t) = U(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (6.1.1)$$

где: $U(t) = f[s(t)]$ - амплитуда несущего колебания модулированного информационным сигналом $s(t)$. Как правило, информационный сигнал является двуполярным (знакопеременным) и поэтому к модулирующему сигналу предварительно добавляют постоянный уровень, чтобы сделать его однополярным:

$$U(t) = U_m + \mu \cdot s(t), \qquad (6.1.2)$$

где: μ - коэффициент пропорциональности.

Итак, в общем виде амплитудно-модулированный сигнал можно записать в следующем виде:

$$u(t) = \left[U_m + \mu \cdot s(t)\right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (6.1.3)$$

6.1.1 Однотональная амплитудная модуляция

Рассмотрим частный случай, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием:

$$s(t) = A_M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta). \qquad (6.1.4)$$

В этом случае амплитудно-модулированный сигнал будет иметь вид:

$$u(t) = \left[U_m + A_M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)\right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (6.1.5)$$

Отношение между амплитудами модулирующего сигнала A_M и несущего колебания U_m называется коэффициентом модуляции

$$M = A_M / U_m. \qquad (6.1.6)$$

С учетом (6.1.6) амплитудно-модулированный сигнал можно описать выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \left[1 + M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)\right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (6.1.7)$$

Если коэффициентом модуляции равен нулю, то будет несущее колебание с постоянной амплитудой U_m, частотой ω_0 и фазой φ_0. Максимальное и минимальное значение огибающей сигнала при однотональной АМ - модуляции определяется выражениями:

$$U_{\max} = U_m \cdot (1+M) \quad \text{и} \quad U_{\min} = U_m \cdot (1-M). \tag{6.1.8}$$

Отсюда следует другая форма коэффициента амплитудной модуляции

$$M = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}. \tag{6.1.9}$$

Значение коэффициента модуляции должно находиться в пределах от 0 до 1 для всех значений модулирующего сигнала. В качестве иллюстрации на рис. 6.1.1 приведены временные диаграммы амплитудно-модулированного сигнала при однотональной модуляции при значениях коэффициента модуляции $M = 0.5$, $M = 1$ и $M = 1.5$.

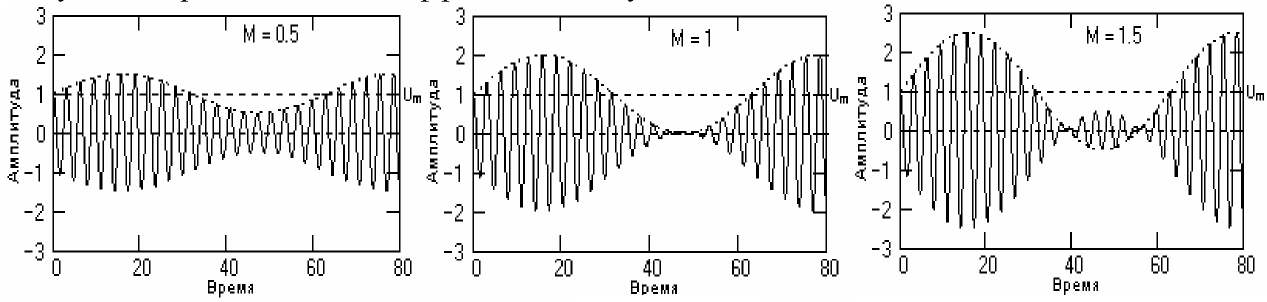


Рис. 6.1.1.

Как видно, при значении $M < 1$ форма огибающей несущего колебания полностью повторяет форму модулирующего сигнала $s(t)$. При значении $M > 1$ возникает так называемая перемодуляция сигнала. Форма огибающей при перемодуляции искажается относительно формы модулирующего сигнала.

6.1.2 Спектр сигнала при однотональной модуляции

Простейшая форма спектра модулированного сигнала возникает при однотональной амплитудной модуляции. Раскрывая выражение (6.1.7), получаем спектральное представление амплитудно-модулированного сигнала:

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + U_m \cdot M/2 \cdot \cos\left[(\omega_0 + \Omega)\cdot t + \varphi_0 + \theta\right] +$$
$$+ U_m \cdot M/2 \cdot \cos\left[(\omega_0 - \Omega)\cdot t + \varphi_0 - \theta\right]. \tag{6.1.10}$$

Из (6.1.10) следует, что спектр сигнала состоит из трех высокочастотных спектральных составляющих. Первое слагаемое представляет собой несущее колебание с частотой ω_0 и амплитудой U_m. Второе и третье слагаемые называют соответственно верхней и нижней боковыми составляющими, которые представляют собой гармонические колебания с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$. Фазы верхней и нижней боковых гармоник противоположны по знаку. Амплитуды колебаний на боковых частотах равны друг другу и составляют $U_m \cdot M/2$. При 100% - ной модуляции они равны половине амплитуды несущего сигнала. Вид спектра сигнала при однотональной модуляции приведен на рис. 6.1.2.

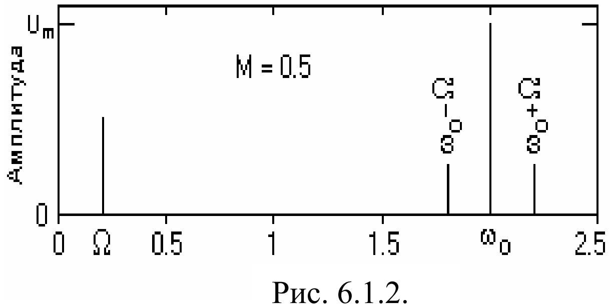


Рис. 6.1.2.

Рассмотрим энергетические характеристики АМ – сигнала. Средняя мощность АМ - сигнала равна сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний:

$$\langle p_{AM} \rangle = \langle p_{НЧ} \rangle + \left[\langle p_{ВБ} \rangle + \langle p_{НБ} \rangle \right] = \frac{U_m^2}{2} + \frac{U_m^2 \cdot M^2}{4}. \qquad (6.1.11)$$

Коэффициент полезного действия данного типа модуляции определяется отношением мощности боковых частот к общей средней мощности модулированного сигнала:

$$\eta = \left[\langle p_{ВБ} \rangle + \langle p_{НБ} \rangle \right] / \langle P_{AM} \rangle = M^2 / \left(M^2 + 2 \right) \qquad (6.1.12)$$

Зависимость КПД от глубины модуляции сигнала приведена на рис. 6.1.3.

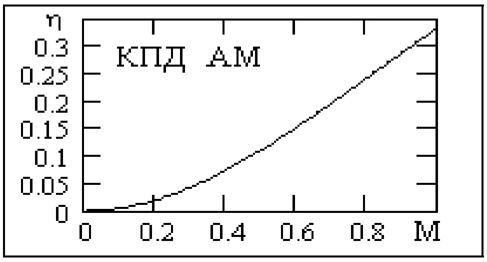


Рис. 6.1.3.

Как можно видеть, даже при $M = 1$ КПД амплитудной модуляции составляет только 33%, а при практическом использовании обычно меньше 20%.

6.1.3 Многотональный модулирующий сигнал

Пусть модулирующий сигнал имеет произвольный спектральный состав и описывается выражением:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot \cos\left(\Omega_n \cdot t + \theta_n \right). \qquad (6.1.13)$$

Подставляя формулу (6.1.14) в выражение (6.1.3), получаем:

$$u(t) = U_m \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot \cos\left(\Omega_n \cdot t + \theta_n \right) \right] \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 \right), \qquad (6.1.14)$$

где $M_n = A_n / U_m$ - парциальные коэффициенты модуляции.

Раскрывая выражение (6.1.14), получим спектральное разложение для многотонального АМ - сигнала:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 \right) + \sum_{n=1}^{N} U_m \cdot M_n / 2 \cdot \cos\left[\left(\omega_0 + \Omega_n \right) \cdot t + \varphi_0 + \theta_n \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} U_m \cdot M_n / 2 \cdot \cos\left[\left(\omega_0 - \Omega_n \right) \cdot t + \varphi_0 - \theta_n \right]. \qquad (6.1.15)$$

Диаграмма многотонального АМ - сигнала приведена на рис. 6.1.4 -а), а спектральные характеристики модулирующего и модулированного сигналов представлены на рис. 6.1.4 -б).

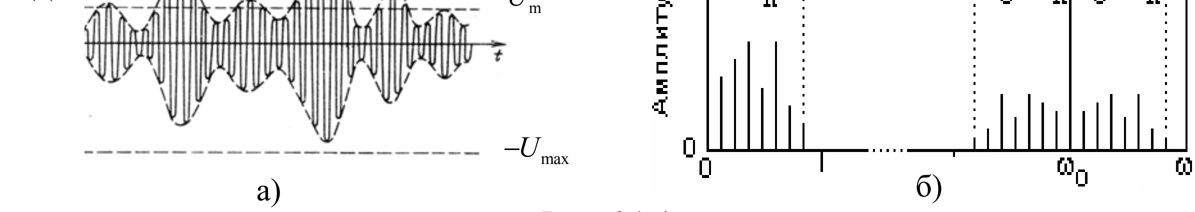


Рис. 6.1.4.

Каждая спектральная составляющая многотонального модулирующего сигнала так же, как и при однотональной модуляции, создает две боковые компоненты частоты в спектре модулированного сигнала. В результате в спектре образуются спектральные полосы верхних и нижних боковых частот относительно несущей частоты. Полосы верхних и нижних боковых частот являются прямой и зеркальной масштабными копиями спектра модулирующего сигнала. Полная ширина спектра АМ - сигнала равна удвоенной ширине спектра модулирующего сигнала.

6.1.4 Разновидности амплитудной модуляции

Балансная амплитудная модуляция - (БАМ). При балансной амплитудной модуляции производится перемножение двух сигналов - модулирующего и несущего. Пусть модулирующий сигнал является гармоническим колебанием:

$$s(t) = A_M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta). \qquad (6.1.16)$$

Для однотонального сигнала получаем:

$$u(t) = U_m \cdot \left[M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)\right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= (U_m \cdot M/2) \cdot \left\{\cos\left[(\omega_0 + \Omega) \cdot t + \varphi_0 + \theta\right] + \cos\left[(\omega_0 - \Omega) \cdot t + \varphi_0 - \theta\right]\right\}. \qquad (6.1.17)$$

Таким образом, при балансной амплитудной модуляции сигнал представляет собой биения двух одинаковых по амплитуде гармонических сигналов с верхней и нижней боковыми частотами. Пример сигнала с балансной модуляцией приведен на рис. 6.1.5.

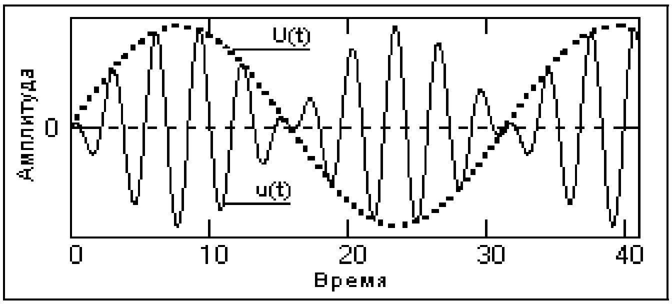


Рис. 6.1.5.

Амплитудный спектр сигнала подобен спектру, приведенному на рис. 6.1.2, но с подавленной несущей частотой. Спектральные компоненты на боковых частотах равны друг другу и также составляют $U_m \cdot M/2$. Физическая сущность подавления несущей частоты заключается в следующем. При переходе огибающей модулирующего сигнала $s(t)$ через нуль фаза несущей частоты изменяется скачком на 180^0. Поэтому колебания, возбужденные одним периодом биений, будут гаситься последующим периодом.

При многотональной балансной модуляции спектральное разложение сигнала принимает вид:

$$u(t) = (U_m/2) \cdot \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot \cos\left[(\omega_0 + \Omega) \cdot t + \varphi_0 + \theta_n\right] + (U_m/2) \cdot \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot \cos\left[(\omega_0 - \Omega) \cdot t + \varphi_0 - \theta_n\right]. \qquad (6.1.18)$$

где M_n - парциальные коэффициенты модуляции. Спектр сигнала имеет две симметричные относительно несущей частоты группы верхних и нижних боковых частот.

Поскольку при балансной амплитудной модуляции происходит подавление несущего колебания, то КПД становится равным 100%.

Однополосная амплитудная модуляция – (ОАМ). При амплитудной модуляции передаваемая информации заложена как в верхней, так и в нижней боковых частот и поэтому нет никакой необходимости в их одновременной передаче. Одна из них может быть удалена, чем достигается двукратное сокращение полосы занимаемых сигналом частот. Уравнение сигнала при однотональной модуляции с одной боковой полосой может быть получено непосредственно из (6.1.10) и записывается в виде:

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + (U_m \cdot M/2) \cdot \cos\left[(\omega_0 \pm \Omega) \cdot t + \varphi_0 \pm \theta\right]. \quad (6.1.19)$$

Знаки '+' или '-' во втором слагаемом отражают соответственно верхнюю или нижнюю боковые полосы.

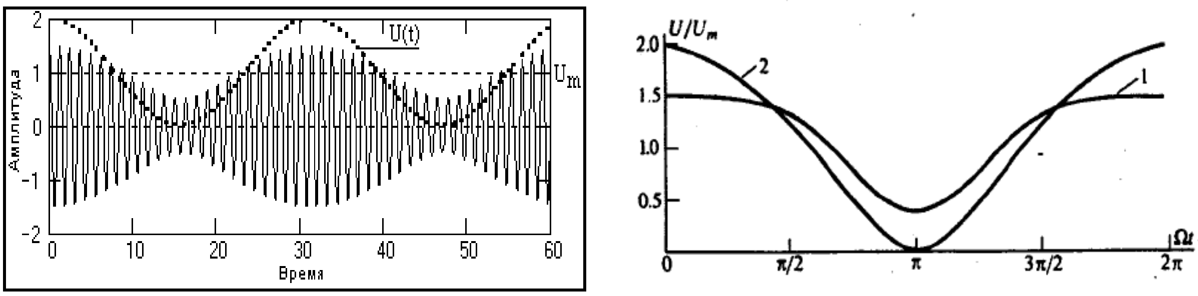
Проводя тригонометрические преобразования, получаем:

$$u(t) = U_m \cdot \left[1 + M/2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)\right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - (U_m \cdot M/2) \cdot \sin(\Omega \cdot t + \theta) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) .(6.1.20)$$

Два слагаемых в (6.1.21) представляют собой произведение двух функций, одна из которых изменяется во времени медленно, а другая - быстро. Принимая во внимание, что быстрые сомножители находятся по отношению друг к другу во временной квадратуре, получаем медленно изменяющуюся огибающую модулированного сигнала:

$$U(t) = U_m \sqrt{\left[1 + M/2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)\right]^2 + \left[M/2 \cdot \sin(\Omega \cdot t + \theta)\right]^2} =$$
$$= U_m \sqrt{1 + M \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta) + M^2/4} . \quad (6.1.21)$$

Вид сигнала при однотональной модуляции с одной боковой полосой приведен на рис. 6.1.6 -а), а вид огибающей модулированного сигнала при $M = 1$ приведен на рис. 6.1.6 -б) (линия 1). Здесь же для сравнения построена огибающая обычного однотонального АМ - сигнала с тем же коэффициентом модуляции (линия 2).



а) б)

Рис. 6.1.6.

Следует отметить, что, огибающая сигнала при однополосной амплитудной модуляции сопровождается незначительными искажениями.

<u>Однополосная балансная амплитудная модуляция</u> – (ОБМ). При однополосной модуляции возможно также подавление несущей частоты, что позволяет полнее использовать мощность передатчика. Уравнение сигнала при однотональной однополосной балансной амплитудной модуляции может быть получено из выражения (6.1.20) и записывается в виде:

$$u(t) = (U_m \cdot M/2) \cdot \cos\left[(\omega_0 \pm \Omega) \cdot t + \varphi_0 \pm \theta\right]. \quad (6.1.22)$$

Амплитудная огибающая модулированного сигнала нисколько не похожа на модулирующий информационный сигнал. При гармонической модуляции синусоида с частотой Ω превращается в синусоиду с частотой $\omega_0 \pm \Omega$. Однако при многотональной модуляции амплитудная огибающая сигнала приобретает более сложный вид. В любом случае спектр будет иметь одну боковую полосу и подавленную несущую частоту.

6.2 Сигналы с угловой модуляцией

При угловой модуляции информация переносится либо на частоту, либо на фазу несущего гармонического колебания, а значение амплитуды остается постоянным.

Фазовая модуляция - (ФМ). Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ задает закон изменения фазы несущей частоты сигнала:

$$\theta(t) = \mu \cdot s(t), \tag{6.2.1}$$

где μ - коэффициент пропорциональности. Для характеристики глубины фазового сдвига $\Delta\theta$ вводят значения девиации фазы вверх $\Delta\theta_{\max} = \mu \cdot s_{\max}(t)$, или вниз $\Delta\theta_{\min} = \mu \cdot s_{\min}(t)$ с учетом знака экстремальных значений модулирующего сигнала $s(t)$.

В соответствии с (6.2.1) уравнение ФМ - сигнала с несущей частотой ω_0 будет определяться выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \theta(t)\right] = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \mu \cdot s(t)\right]. \tag{6.2.2}$$

Аргумент функции *cos* называется полной фазой:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \mu \cdot s(t). \tag{6.2.3}$$

В случае фазовой модуляции изменяется и мгновенная частота сигнала, под которой понимают производную от полной фазы по времени:

$$\omega(t) = d[\psi(t)]/dt = \omega_0 + \mu \cdot d[s(t)]/dt\,. \tag{6.2.4}$$

Как видно, при фазовой модуляции мгновенная частота сигнала изменяется пропорционально производной от модулирующего сигнала.

Частотная модуляция - (ЧМ). Частотная модуляция характеризуется линейной связью модулирующего сигнала $s(t)$ с мгновенной частотой колебаний:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu \cdot s(t). \tag{6.2.5}$$

Мгновенная частота колебаний $\omega(t)$ образуется сложением частоты высокочастотного несущего колебания ω_0 со значением амплитуды модулирующего сигнала с определенным коэффициентом пропорциональности. Для характеристики глубины частотной модуляции используются понятия девиации частоты вверх $\Delta\omega_{\max} = \mu \cdot s_{\max}(t)$ или вниз $\Delta\omega_{\min} = \mu \cdot s_{\min}(t)$.

Полная фаза колебаний в произвольный момент времени может быть определена интегрированием мгновенной частоты:

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t)dt + \theta_0 = \omega_0 t + \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0\,. \tag{6.2.6}$$

С учетом (6.2.6) уравнение ЧМ - сигнала будет описываться выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos[\psi(t)] = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0\right]. \tag{6.2.7}$$

Как видно, при частотной модуляции изменяется и фаза пропорционально интегралу от модулирующего сигнала:

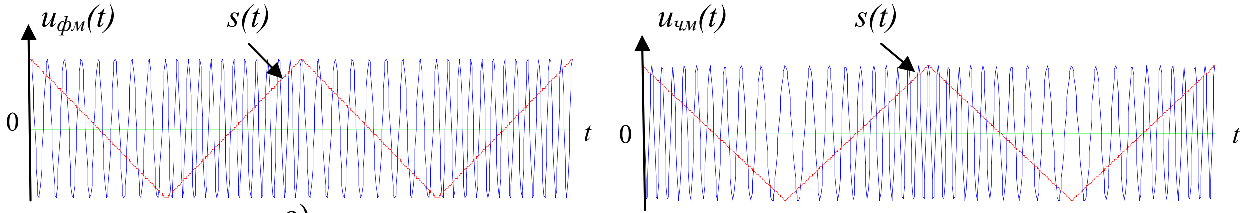
$$\theta(t) = \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0\,. \tag{6.2.8}$$

Таким образом, частотная и фазовая модуляция взаимосвязаны между собой. Если изменяется фаза колебания, то изменяется и мгновенная частота, и наоборот. По этой причине их и объединяют под общим названием угловой модуляции (***УМ***). В таблице 6.2.1 приведены выражения, показывающие взаимосвязь вида модулирующего сигнала с различными параметрами сигналов при фазовой и частотной модуляции.

Табл. 6.2.1.

Параметры	***ФМ - сигнал***	***ЧМ - сигнал***
Мгновенная фаза	$\theta(t)=\mu\cdot s(t)$	$\theta(t)=\mu\cdot\int_0^t s(t')dt'+\theta_0$
Мгновенная частота	$\omega(t)=\omega_0+\mu\cdot d\left[s(t)\right]/dt$	$\omega(t)=\omega_0+\mu\cdot s(t)$
Полная фаза	$\psi(t)=\omega_0 t+\mu\cdot s(t)$	$\psi(t)=\omega_0 t+\mu\cdot\int_0^t s(t')dt'+\theta_0$

Для иллюстрации на рис. 6.2.1-а) и -б) приведены диаграммы сигналов при фазовой и частотной модуляции соответственно. В качестве модулирующего сигнала $s(t)$ рассматривается периодическая последовательность пилообразных импульсов.



а) б)

Рис. 6.2.1.

Вид модуляции *ФМ* или *ЧМ* можно установить непосредственно по характеру изменения частоты и фазы во времени. Покажем это на примере пилообразного модулирующего сигнала $s(t)$, приведенного на рис. 6.2.2. -а) и -г). Ниже приведены диаграммы функций изменения частоты $\omega(t)$ и фазы $\theta(t)$ при *ЧМ* и *ФМ*.

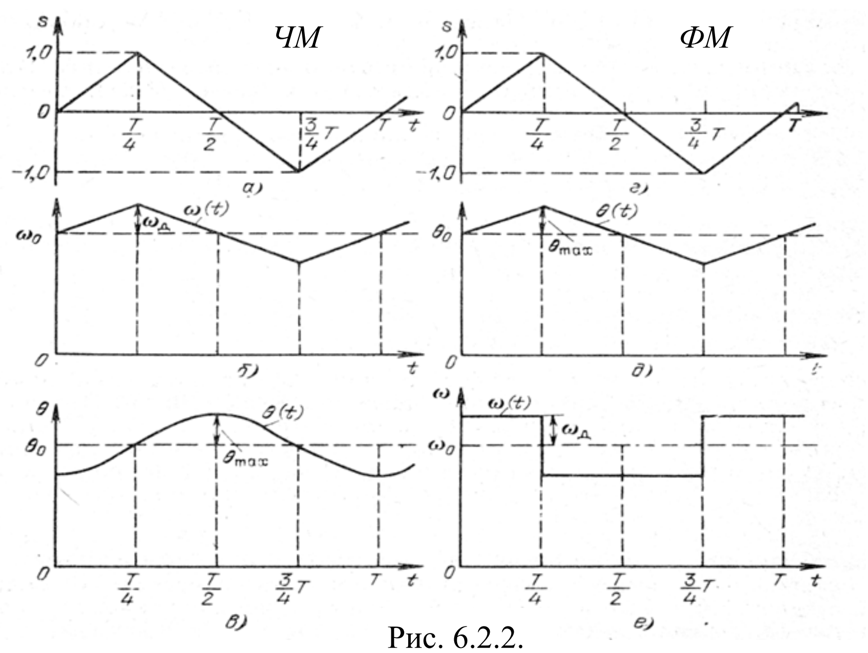


Рис. 6.2.2.

При *ЧМ* пилообразное изменение частоты $\omega(t)$ (рис. 6.2.2 -б) по форме совпадает с модулирующим сигналом $s(t)$, а закон изменения фазы $\theta(t)$ является интегральным по отношению к модулирующему сигналу (рис. 6.2.2 -в). При *ФМ* закон изменения фазы $\theta(t)$ (рис. 6.2.2 -д) по форме совпадает с модулирующим сигналом $s(t)$, а скачкообразное изменение частоты $\omega(t)$ совпадает по форме с производной модулирующего сигнала $s(t)$ (рис. 6.2.2 -е).

6.2.1 Однотональная угловая модуляция

Рассмотрим ЧМ - сигнал, модулированный гармоническим сигналом. В этом случае мгновенная частота колебаний определяется выражением:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu \cdot U_0 \cos(\Omega \cdot t) = \omega_0 + \omega_Д \cdot \cos(\Omega \cdot t), \qquad (6.2.9)$$

где $\omega_Д = \mu \cdot U_0$ - представляет собой амплитуду частотного отклонения или девиацию частоты. Подставляя соотношения (6.2.9) в (6.2.6), получаем выражения полной фазы модулированного сигнала:

$$\psi(t) = \int_0^t \left[\omega_0 + \omega_Д \cdot \cos(\Omega \cdot t)\right] dt + \theta_0 = \omega_0 t + (\omega_Д / \Omega) \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0. \qquad (6.2.10)$$

Как видно, закон модуляции фазы является интегральным по отношению к закону изменения частоты. Полная фаза сигнала наряду с линейно-возрастающим слагаемым $\omega_0 t$ содержит периодическое слагаемое вида $(\omega_Д / \Omega) \cdot \sin(\Omega \cdot t)$. Величину $m = \omega_Д / \Omega$ называют индексом угловой модуляции. Индекс угловой модуляции определяется исключительно девиацией частоты $\omega_Д$ и частотой модулирующего сигнала Ω. Таким образом, ЧМ - сигнал при тональной модуляции описывается выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + m \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0\right]. \qquad (6.2.11)$$

Рассмотрим теперь ФМ - сигнал, у которого фазовая модуляция производится по гармоническому закону:

$$\theta(t) = \mu U_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0. \qquad (6.2.12)$$

В этом случае ФМ - сигнал будет описываться выражением:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + m \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \theta_0\right], \qquad (6.2.13)$$

где $m = \mu \cdot U_0$ - представляет собой индекс угловой модуляции.

Используя выражение (6.2.4), находим мгновенную частоту колебаний:

$$\omega(t) = d\left[\psi(t)\right] / dt = \omega_0 + m \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t). \qquad (6.2.14)$$

Таким образом, гармоническая модуляция фазы эквивалентна частотной модуляции с девиацией частоты $\omega_Д = m \cdot \Omega$.

При гармоническом модулирующем сигнале различия между частотной и фазовой модуляцией проявляются только при изменении частоты Ω модулирующего сигнала. Зависимости девиации частоты $\omega_Д$ и индекса модуляции m от частоты модулирующего сигнала Ω в случае ФМ и ЧМ представлены на рис. 6.2.3 -а) и -б) соответственно.

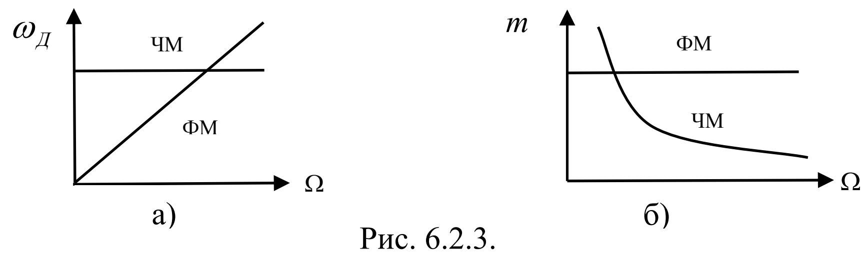


Рис. 6.2.3.

При ФМ индекс угловой модуляции m зависит только от амплитуды модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω, а частота девиации $\omega_Д$ изменяется прямо пропорционально частоте модуляции Ω:

$$m = \mu \cdot U_0 = const; \qquad \omega_d = m \cdot \Omega. \qquad (6.2.15)$$

При ЧМ девиация частоты $\omega_Д$ пропорционально амплитуде модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω, а индекс модуляции m с увеличением частоты будет убывать:

$$\omega_d = \mu \cdot U_0 = const\,; \qquad m = \omega_d / \Omega. \tag{6.2.16}$$

6.2.2 Спектр сигнала при однотональной угловой модуляции

Формулы сигналов (6.2.11) и (6.2.13) при частотной и фазовой модуляции можно представить в виде:

$$u(t) = U_m \cdot \cos[m \cdot \sin(\Omega \cdot t)] \cdot \cos(\omega_o t) - U_m \cdot \sin[m \cdot \sin(\Omega \cdot t)] \cdot \sin(\omega_o t). \tag{6.2.17}$$

При малых значениях индекса угловой модуляции ($m << 1$, узкополосная модуляция) имеют место приближенные равенства:

$$\cos[m \cdot \sin(\Omega \cdot t)] \approx 1 \qquad \text{и} \qquad \sin[m \cdot \sin(\Omega \cdot t)] \approx m \cdot \sin(\Omega \cdot t). \tag{6.2.18}$$

При их использовании в (6.2.17), получаем:

$$u(t) \approx U_m \cos(\omega_0 t) + (m \cdot U_m / 2) \cdot \cos[(\omega_0 + \Omega) \cdot t] + (-m \cdot U_m / 2) \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega) \cdot t]. \tag{6.2.19}$$

Как видно, амплитудные спектры однотональных ФМ и ЧМ сигналов при малом индексе модуляции практически аналогичны спектрам АМ - сигналов и также содержат верхнюю и нижнюю боковые частоты $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Различие заключается только в смене знака амплитуды нижней боковой частоты на минус, т.е. в дополнительном фазовом сдвиге нижней боковой частоты на 180^0 относительно верхней боковой частоты.

Рассмотрим теперь спектры сигналов при больших индексах угловой модуляции.

Математическая модель однотональных ЧМ и ФМ сигналов с любым значением индекса модуляции m в общем случае получается разложением функции (6.2.17) в ряд вида:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cdot \cos[(\omega_0 + k \cdot \Omega) \cdot t], \tag{6.2.20}$$

где $J_k(m)$ - функция Бесселя k-го индекса. Из этого уравнения следует, что спектр сигнала содержит бесконечное число составляющих - нижних и верхних боковых колебаний с частотами $\omega_0 \pm k \cdot \Omega$ и с амплитудами, пропорциональными значениям $J_k(m)$. Для функций Бесселя справедливо соотношение:

$$J_{-k}(m) = (-1)^k \cdot J_k(m). \tag{6.2.21}$$

Это означает, что начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + k \cdot \Omega$ и $\omega_0 - k \cdot \Omega$ совпадают при четных k, и отличаются на 180^0 при нечетных k.

Амплитуды первых пяти гармоник и несущей частоты ω_0 в зависимости от индекса модуляции приведены на рис. 6.2.4.

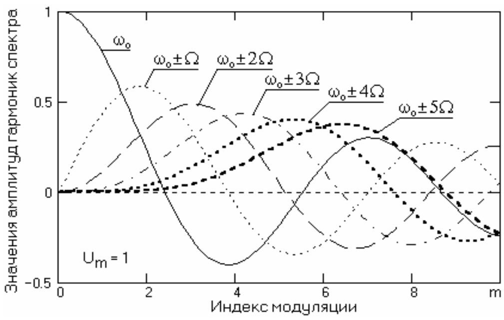


Рис. 6.2.4.

При малой величине индекса модуляции m значимые амплитудные значения имеют только первые гармоники. Форма амплитудных спектров модулированных сигналов при разных индексах модуляции приведена на рис. 6.2.5 . С ростом величины m количество значимых боковых составляющих увеличивается, а энергия сигнала перераспределяется на боковые составляющие. С ростом индекса модуляции полоса частот, занимаемая сигналом, расширяется. Однако, амплитуды боковых частот быстро убывают с увеличением номера гармоники k. При $k > m$ составляющие спектра малы и ими можно пренебречь.

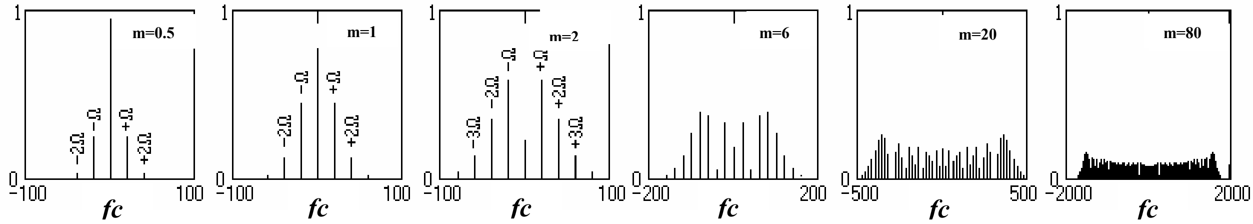


Рис. 6.2.5.

Практическая ширина спектра сигнала с угловой модуляцией оценивается выражением:

$$\Pi \approx 2m \cdot \Omega = 2 \cdot \omega_d . \qquad (6.2.22)$$

Отсюда следует, что по сравнению с АМ - сигналами, полоса частот которых равна 2Ω, для передачи сигналов с угловой модуляцией требуется полоса частот, в m раз большая. Как можно заметить, при частотной модуляции ширина спектра сигнала практически не зависит от частоты модулирующего сигнала, а при фазовой модуляции ширина спектра сигнала зависит от частоты модулирующего сигнала. В этом и состоит различие в спектральных характеристиках ЧМ и ФМ при однотональном модулирующем сигнале.

6.2.3 Анализ спектра сигнала с многотональной угловой модуляцией

Рассмотрим сигнал с угловой модуляцией:

$$u(t) = U_m \cdot \cos\left[\omega_0 t + \theta(t)\right]. \qquad (6.2.23)$$

При фазовой модуляции $\theta(t) = \mu \cdot s(t)$ и поэтому спектры функции $\theta(t)$ с точностью до постоянного коэффициента совпадают со спектром модулирующего сигнала $s(t)$.

При частотной модуляции функция $\theta(t)$ является интегралом от передаваемого сообщения $s(t)$: $\theta(t) = \mu \cdot \int_0^t s(t')dt' + \theta_0$. Так как интегрирование является линейным преобразованием, то спектр функции $\theta(t)$ состоит из тех же компонентов, что и спектр сообщения $s(t)$, но с измененными амплитудами и фазами. Считая известным спектр функции $\theta(t)$, произведем анализ спектра модулированного сигнала $u(t)$. Для этого выражение (6.2.23) преобразуем к виду:

$$u(t) = U_m \cdot \cos[\theta(t)] \cdot \cos[\omega_0 t] - U_m \cdot \sin[\theta(t)] \cdot \sin[\omega_0 t] = U_c(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + U_s(t) \cdot \sin(\omega_0 t). \qquad (6.2.24)$$

Из (6.2.24) следует, что модулированный сигнал можно рассматривать как сумму двух квадратурных АМ - колебаний. Закон амплитудной модуляции $U_c(t)$ и $U_s(t)$ определяется медленными функциями $\cos[\theta(t)]$ и $\sin[\theta(t)]$ соответственно.

Для нахождения спектра модулированного сигнала $u(t)$ необходимо найти спектры сигналов $U_c(t)$ и $U_s(t)$. Так как функции $\cos[\theta(t)]$ и $\sin[\theta(t)]$ являются нелинейными, то спектры этих сигналов могут существенно отличаться от спектра известных функций $\theta(t)$. В спектре присутствуют не только боковые частоты с гармониками частот модулирующего сигнала, но и гармоники со всеми возможными комбинациями частот модулирующего сигнала. Поэтому угловую модуляцию иногда называют модуляцией нелинейного типа.

7 Узкополосные сигналы

Узкополосными называются радиосигналы, у которых спектральная плотность $S(\omega)$ локализована в окрестности несущей частоты $\pm\omega_0$. К узкополосным сигналам можно отнести радиоимпульсы, а также сигналы с амплитудной и угловой модуляцией, несмотря на то, что эти сигналы существенно различаются по ширине их спектральной плотности.

7.1 Комплексная огибающая узкополосного сигнала

Узкополосные сигналы представляют собой квазигармоническое колебание, получающееся при одновременной модуляции несущего гармонического сигнала, как по амплитуде, так и по фазовому углу:

$$s(t) = U(t)\cdot\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right], \qquad (7.1.1)$$

где: $U(t)$ - амплитудная огибающая, а $\varphi(t)$ - изменяющая во времени фаза узкополосного сигнала. Обе функции времени $U(t)$ и $\varphi(t)$ являются низкочастотными.

Выполнив в выражении (7.1.1) простое преобразование, получим, что узкополосный сигнал исчерпывающе описывается двумя независимыми низкочастотными квадратурными компонентами:

$$s(t) = A(t)\cdot\cos(\omega_0 t) - B(t)\cdot\sin(\omega_0 t), \qquad (7.1.2)$$

где:

$$A(t) = U(t)\cdot\cos\left[\varphi(t)\right] \text{ и } B(t) = U(t)\cdot\sin\left[\varphi(t)\right]. \qquad (7.1.3)$$

Функцию $A(t)$ принято называть синфазной амплитудной огибающей, а функцию $B(t)$ - квадратурной амплитудной огибающей узкополосного сигнала.

Анализ узкополосных сигналов становится значительно проще при введении в рассмотрение комплексной огибающей сигнала:

$$\dot{U}(t) = A(t) + j\cdot B(t) = U(t)\cdot\left[\cos\left[\varphi(t)\right] + j\cdot\sin\left[\varphi(t)\right]\right] = U(t)\cdot\exp\left[j\cdot\varphi(t)\right]. \qquad (7.1.4)$$

Используя комплексную огибающую (7.1.4) можно получить наиболее общую математическую модель узкополосного сигнала

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot\exp(j\omega_0 t)\right]. \qquad (7.1.5)$$

Комплексная огибающая $\dot{U}(t)$ описывает как амплитудную, так и фазовую модуляцию узкополосного сигнала. Второй сомножитель в квадратных скобках (7.1.5) представляет собой комплексную запись опорной частоты.

Комплексная огибающая узкополосного сигнала определяется неоднозначно. Если вместо опорной частоты ω_0, входящей в формулу (7.1.5), взять некоторую частоту $\omega_0^{'} = \omega_0 + \Delta\omega$, то радиосигнал $s(t)$ можно представить в виде выражения

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot\exp(j\cdot\Delta\omega\cdot t)\cdot\exp\left(j\cdot\omega_0^{'}\cdot t\right)\right]. \qquad (7.1.6)$$

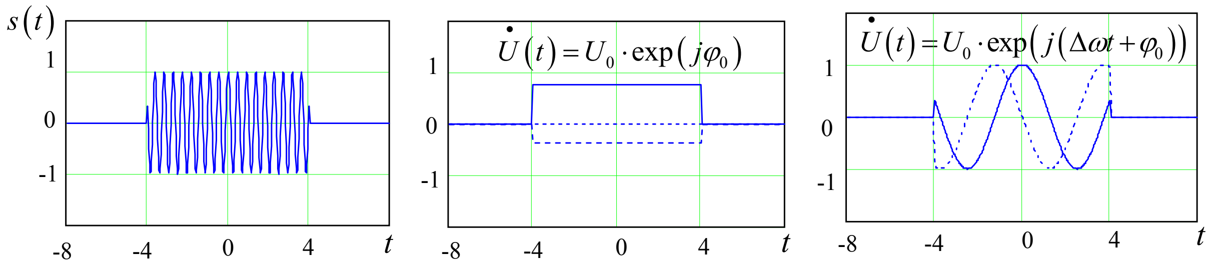
В этом случае новое значение комплексной огибающей будет определяться выражением:

$$\dot{U}^{'}(t) = \dot{U}(t)\cdot\exp(j\Delta\omega\cdot t). \qquad (7.1.7)$$

В качестве примера рассмотрим радиоимпульс с прямоугольной амплитудной огибающей U_0, несущей частотой $\omega_н$ и длительностью $\tau_и$:

$$s(t)=U_0\cdot\cos\left[\omega_н t+\varphi_0\right]\mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot\exp\left(j\omega_н t\right)\right],\ -\frac{\tau_и}{2}\le t\le\frac{\tau_и}{2}. \qquad (7.1.8)$$

Временная диаграмма анализируемого сигнала приведена на рис. 7.1.1 - а).



а) б) в)

Рис. 7.1.1.

Если в качестве опорной частоты определено значение $\omega_0=\omega_н$, то комплексная огибающая будет иметь вид, приведенный на рис. 7.1.1 - б). Вид комплексной огибающей сигнала относительно опорной частоты $\omega_0^{'}=\omega_н+\Delta\omega$ представлен на рис. 7.1.1 - в). Комплексная огибающая содержит синфазную и квадратурную составляющие. Однако следует отметить, что при этом амплитудная огибающая $U(t)$, являющаяся модулем комплексной огибающей, остается неизменной. В целом же следует помнить, что понятие комплексной огибающей имеет смысл только при указании опорной частоты ω_0, относительно которой эта комплексная огибающая вычислена. Выбор значения опорной частоты диктуется удобством анализа сигналов. Если рассматриваются несколько сигналов, обладающих одной и той опорной частотой, их отличие состоит только в законах модуляции, и, следовательно, комплексные огибающие дают их исчерпывающее описание.

Определим амплитудную огибающую, мгновенную фазу и частоту сигнала.

Амплитудную огибающую $U(t)$ можно выразить через синфазную и квадратурную огибающие узкополосного сигнала:

$$U(t)=\sqrt{A^2(t)+B^2(t)}. \qquad (7.1.9)$$

Мгновенную фазу сигнала можно определить в соответствии с выражением:

$$\psi(t)=\omega_0 t+\varphi(t)=\omega_0 t+arctg\left[B(t)/A(t)\right]. \qquad (7.1.10)$$

Мгновенная частота сигнала определяется производной от полной фазы и связана с синфазной и квадратурной амплитудами узкополосного сигнала соотношением:

$$\omega(t)=\omega_0+\frac{d\left[\varphi(t)\right]}{dt}=\omega_0+\frac{d}{dt}\left[arctg\left(\frac{B(t)}{A(t)}\right)\right]\approx\omega_0+\frac{B^{'}(t)\cdot A(t)-A^{'}(t)\cdot B(t)}{A^2(t)+B^2(t)}. \qquad (7.1.11)$$

7.2 Спектральная плотность узкополосного сигнала и его комплексной огибающей

Пусть комплексная огибающая $\dot{U}(t)$ узкополосного сигнала характеризуется спектральной плотностью $G(\omega)$:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\cdot\exp(-j\omega\cdot t)dt. \qquad (7.2.1)$$

Определим спектральную плотность $S(\omega)$ узкополосного сигнала $s(t)$ и выразим её через спектральную плотность комплексной огибающей. На основании (7.1.5) получаем:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot\exp(-j\omega\cdot t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot\exp(j\omega_0 t)\right]\cdot\exp(-j\omega\cdot t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\cdot\exp\left[-j(\omega-\omega_0)\cdot t\right]dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}^*(t)\cdot\exp\left[-j(\omega+\omega_0)\cdot t\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}G(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}G^*(-\omega-\omega_0). \qquad (7.2.2)$$

Таким образом, спектральная плотность узкополосного сигнала может быть найдена путем переноса спектральной плотности комплексной огибающей $G(\omega)$ из окрестности нулевой частоты в окрестность значений $\pm\omega_0$ опорной частоты узкополосного сигнала. Амплитуды всех спектральных составляющих сокращаются вдвое. Характерный вид амплитудного спектра узкополосного сигнала и комплексной огибающей представлен на рис. 7.2.1.

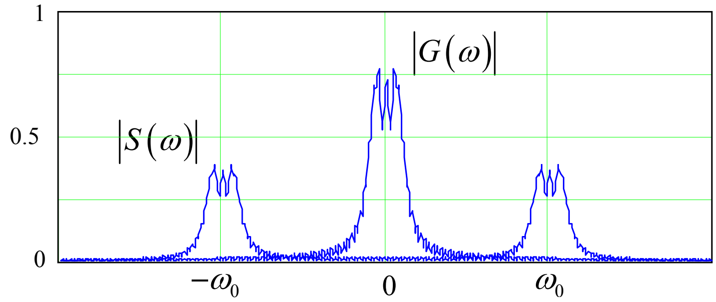


Рис. 7.2.1.

Комплексная огибающая является низкочастотным эквивалентом узкополосного сигнала в окрестности нулевой частоты и позволяет упростить анализ узкополосных сигналов за счет избавления от зависимости несущей частоты.

7.3 Понятие аналитического сигнала

В общем случае, произвольный сигнал $s(t)$ имеет комплексную двустороннюю спектральную плотность $S(\omega)$. Поскольку полную информацию о сигнале $s(t)$ содержит как левая (отрицательные частоты), так и правая (положительные частоты) части спектральной плотности $S(\omega)$, то справедливо выражение:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega. \qquad (7.3.1)$$

Сигнал, определенный выражением

$$z(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S(\omega)\cdot\exp(j\omega\cdot t)d\omega \qquad (7.3.2)$$

называется аналитическим сигналом. Аналитический сигнал, полученный из односторонней спектральной функции, всегда является комплексным и может быть представлен в виде:

$$z(t)=\mathrm{Re}\left[z(t)\right]+j\cdot\mathrm{Im}\left[z(t)\right]. \qquad (7.3.3)$$

Аналогичное преобразование первого интеграла выражения (7.3.1) дает комплексно сопряженный аналитический сигнал:

$$z^*(t)=\mathrm{Re}\left[z(t)\right]-j\cdot\mathrm{Im}\left[z(t)\right]. \qquad (7.3.4)$$

При сложении функций $z(t)$ и $z^*(t)$, получаем исходный сигнал:

$$s(t)=\left[\mathrm{z}(\mathrm{t})+z^*(t)\right]/2=\mathrm{Re}\left[z(t)\right]. \qquad (7.3.5)$$

При вычитании функций $z(t)$ и $z^*(t)$ можно видеть, что мнимая часть аналитического сигнала будет сопряженным или квадратурным сигналом $\tilde{s}(t)$ по отношению к сигналу $s(t)$:

$$\tilde{s}(t) = \mathrm{Im}\left[z(t)\right]. \qquad (7.3.6)$$

Из выражения (7.3.3) и соотношений (7.3.5) и (7.3.6) вытекает, что аналитический сигнал представляет собой сумму исходного синфазного и квадратурного сигналов:

$$z(t) = s(t) + j \cdot \tilde{s}(t) \qquad (7.3.7)$$

Аналитический сигнал позволяет определить амплитудную огибающую, мгновенную фазу и частоту узкополосных сигналов без той степени неопределенности, которая свойственна методу комплексной огибающей.

Принимая во внимания выражение (7.3.7), получим квадрат модуля аналитического сигнала $z(t)$:

$$\left|z(t)\right|^2 = s^2(t) + \tilde{s}^2(t) =$$

$$= A^2(t) \cdot \left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right] + B^2(t) \cdot \left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right] = U_s^2(t). \qquad (7.3.8)$$

Из приведенного выражения следует, что амплитудная огибающая сигнала $s(t)$ определяется выражением:

$$U_s(t) = \left|z(t)\right| = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}. \qquad (7.3.9)$$

Амплитудная огибающая произвольного сигнала равна модулю соответствующего аналитического сигнала.

Мгновенную фазу сигнала можно выразит через аргумент аналитического сигнала в соответствии с выражением:

$$\psi(t) = \arg\left[z(t)\right] = arctg\left[\tilde{s}(t)/s(t)\right]. \qquad (7.3.10)$$

Мгновенная частота сигнала определяется по скорости изменения мгновенной фазы:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \approx \frac{\tilde{s}'(t) \cdot s(t) - s'(t) \cdot \tilde{s}(t)}{\tilde{s}^2(t) + s^2(t)}. \qquad (7.3.11)$$

7.4 Спектральная плотность аналитического сигнала

С учетом определения аналитического сигнала (7.3.2) его спектральная плотность должна быть отлична от нуля только в области положительных частот, и в силу нормировки на $1/\pi$ ее значение равно удвоенному значению спектральной плотности сигнала $s(t)$:

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot S(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}. \qquad (7.4.1)$$

Если $\tilde{S}(\omega)$ - спектральная плотность квадратурного сигнала $\tilde{s}(t)$, то с учетом выражения (7.3.7) получаем спектральную плотность аналитического сигнала:

$$Z(\omega) = S(\omega) + j \cdot \tilde{S}(\omega). \qquad (7.4.2)$$

Отсюда следует, что равенство (7.4.1) будет выполняться только тогда, когда спектральные плотности исходного и квадратурного сигналов связаны между собой следующим соотношением:

$$\tilde{S}(\omega) = -j \cdot sign(\omega) \cdot S(\omega) = \begin{cases} j \cdot S(\omega), & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j \cdot S(\omega), & \omega > 0 \end{cases}. \quad (7.4.3)$$

Как следует из (7.4.3), в спектральной плотности квадратурного сигнала фазы всех спектральных составляющих повернуты на угол -90^0 в области положительных частот и на угол 90^0 в области отрицательных частот. Это обеспечивает при суммировании спектральных плотностей исходного и квадратурного сигналов удвоение амплитуд частотных составляющих в области положительных частот и их взаимную компенсацию в области отрицательных частот. В качестве иллюстрации на рис. 7.4.1 приведен пример амплитудного спектра узкополосного сигнала и соответствующему ему спектр $|Z(\omega)|$ аналитического сигнала.

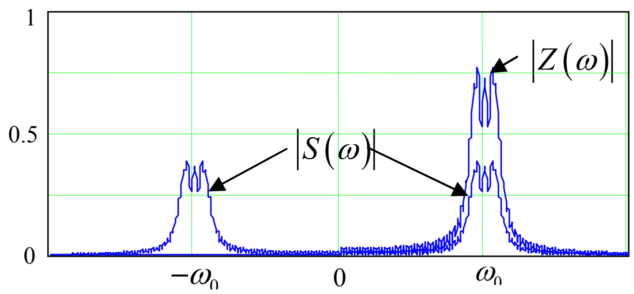


Рис. 7.4.1.

Сопоставляя спектральные плотности комплексной огибающей $G(\omega)$ и аналитического сигнала $Z(\omega)$ можно видеть, что они полностью совпадают по форме, но спектральная плотность аналитического сигнала располагается в области положительных частот.

Формула (7.4.3) показывает, что спектральная плотность $\tilde{S}(\omega)$ квадратурного сигнала $\tilde{s}(t)$ образуется из спектральной плотности $S(\omega)$ исходного сигнала $s(t)$ умножением на так называемую частотную функцию Гильберта:

$$Hb(\omega) = -j \cdot sign(\omega) = \begin{cases} \exp[j(-\pi/2)], & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ \exp[j(\pi/2)], & \omega < 0 \end{cases} \quad (7.4.4)$$

Обратное преобразование Фурье по отношению к функции (7.4.4) представляет собой временную функцию Гильберта или оператор Гильберта:

$$FT[Hb(\omega)] = FT[-j \cdot sign(\omega)] \Rightarrow hb(t) = 1/(\pi \cdot t). \quad (7.4.5)$$

Из формул (7.4.3) и (7.4.4) следует, что квадратурный сигнал $\tilde{s}(t)$ представляет собой свертку исходного сигнала $s(t)$ с оператором Гильберта $hb(t)$:

$$\tilde{s}(t) = s(t) * hb(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau . \quad (7.4.6)$$

Аналогично можно выразить исходный сигнал $s(t)$ через квадратурный сигнал $\tilde{s}(t)$:

$$s(t) = -\tilde{s}(t) * hb(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(\tau)}{t-\tau} d\tau . \quad (7.4.7)$$

Приведенные выражения (7.4.6) и (7.4.7) называются прямым и обратным преобразованиями Гильберта.

7.5 Корреляционная функция узкополосного сигнала

Запишем общее выражение корреляционной функции аналитического сигнала:

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \cdot z^*(t-\tau)\, dt. \qquad (7.5.1)$$

Подставив в выражение (7.5.1) описание аналитического сигнала (7.3.7), получим:

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) + j \cdot \tilde{s}(t) \right] \cdot \left[s(t-\tau) - j \cdot \tilde{s}(t-\tau) \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) \cdot s(t-\tau) \right] dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{s}(t) \cdot \tilde{s}(t-\tau) \right] dt - j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) \cdot \tilde{s}(t-\tau) \right] dt + j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{s}(t) \cdot s(t-\tau) \right] dt =$$

$$= R_s(\tau) + R_{\tilde{s}}(\tau) + j \cdot \left[R_{s,\tilde{s}}(\tau) - R_{\tilde{s},s}(\tau) \right]. \qquad (7.5.2)$$

Как известно, корреляционная функция физического сигнала полностью определяется модулем его спектральной плотности. Так как модули спектральной плотности исходного $s(t)$ и квадратурного $\tilde{s}(t)$ сигналов идентичны, то первые две автокорреляционные функции одинаковы и суммируются. В то же время две взаимно корреляционные функции уничтожаются. Поэтому из (7.5.2) следует соотношение:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[R_z(\tau) \right]. \qquad (7.5.3)$$

Таким образом, корреляционная функция узкополосного сигнала равна с точностью до постоянного множителя реальной части корреляционной функции аналитического сигнала.

Далее выразим корреляционную функцию физического сигнала через комплексную огибающую. Подставив в (7.5.1) выражения аналитического сигнала в показательной форме

$$z(t) = \dot{U}(t) \exp\left(j \cdot \omega_0 \cdot t \right) \quad \text{и} \quad z^*(t) = \dot{U}^*(t) \exp\left(-j \cdot \omega_0 \cdot t \right), \qquad (7.5.4)$$

получим:

$$R_z(\tau) = \exp\left(-j \cdot \omega_0 \cdot \tau \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \cdot \dot{U}^*(t-\tau)\, dt. \qquad (7.5.5)$$

Входящий в выражение (7.5.5) интеграл есть корреляционная функция комплексной огибающей сигнала. Поэтому выражение (7.5.3) можно записать в форме:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\exp\left(-j \cdot \omega_0 \cdot \tau \right) \cdot R_U(\tau) \right] = \frac{1}{2} \cdot R_U(\tau) \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot \tau \right). \qquad (7.5.6)$$

Как видно, второй сомножитель определяет корреляционную функцию гармонического колебания с частотой ω_0 и единичной амплитудой. Таким образом, корреляционная функция узкополосного сигнала равна произведению корреляционных функций комплексной огибающей и высокочастотного заполнения.

7.6 Спектрально-корреляционный анализ сложных сигналов

Основной характеристикой сигналов является его база. База сигнала определяется как произведение длительности сигнала на ширину его спектра: $B = \tau_u \cdot \Delta F$. Если значение базы близко к единице, то такие сигналы называются простыми. Как известно с уменьшением длительности простого сигнала расширяется его спектр, но произведение длительности сигнала на ширину его спектра остается неизменной. Однако можно сформировать сигнал большой длительности, одновременно имеющий и широкий спектр. Такие сигналы называются сложными. У сложных сигналов значение базы много больше единицы. Рассмотрим наиболее распространенные сложные сигналы.

7.6.1 Сложные сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ - сигналы)

Если закон изменения частоты радиоимпульса линейно возрастает во времени, то такие сигналы носят название сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ - сигналы). Примем, что радиоимпульс центрирован относительно точки $t=0$, а его длительность равна τ_u. Пусть мгновенная частота радиоимпульса линейно нарастает от начала импульса к его концу по закону

$$\omega(t)=\omega_0+\mu\cdot t \tag{7.6.1}$$

где $\mu=\Delta\omega/\tau_u=2\pi\cdot\Delta f/\tau_u$ - скорость изменения частоты во времени.

Тогда полная фаза будет изменяться по закону

$$\psi(t)=\omega_0 t+\mu\cdot t^2/2. \tag{7.6.2}$$

Поэтому физический ЛЧМ - сигнал может быть описан уравнением:

$$s(t)=U_0\cdot\cos\left(\omega_0 t+\mu t^2/2\right)=\mathrm{Re}\left[U_0\cdot\exp\left(j\frac{\mu\cdot t^2}{2}\right)\cdot\exp\left(j\omega_0 t\right)\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot\exp\left(j\omega_0 t\right)\right], \tag{7.6.3}$$

где

$$\dot{U}(t)=U_0\cdot\exp\left(j\frac{\mu\cdot t^2}{2}\right) \tag{7.6.4}$$

- его комплексная огибающая.

Временная диаграмма ЛЧМ - сигнала и вид его комплексной огибающей приведены на рис. 7.6.1 - а) и -б) соответственно.

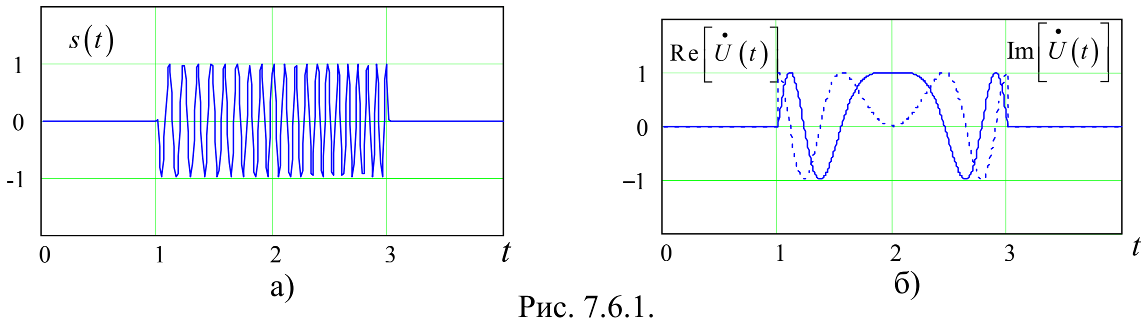


Рис. 7.6.1.

Спектральная плотность ЛЧМ - сигнала вычисляется через преобразование Фурье:

$$S(\omega)=\int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2}\cdot\mathrm{Re}\left[U_0\cdot\exp\left(j\frac{\mu\cdot t^2}{2}\right)\cdot\exp\left(j\omega_0 t\right)\right]\exp\left(-j\omega\cdot t\right)dt\quad. \tag{7.6.5}$$

Выполнив необходимые преобразования, получим выражение модуля спектральной плотности:

$$\left|S(\omega)\right|=U_0\cdot\sqrt{\pi/(2\mu)},\ \ \omega_0-\Delta\omega/2\le\omega\le\omega_0+\Delta\omega/2. \tag{7.6.6}$$

Следует отметить, что в пределах полосы частот $\Delta\omega$ модуль спектральной плотности практически постоянен и обращается в нуль вне этой полосы. На рис. 7.6.2 -а) приведен вид спектральной плотности ЛЧМ - сигнала при базе $B=60$, а на рис. 7.6.2 -б) при базе $B=120$.

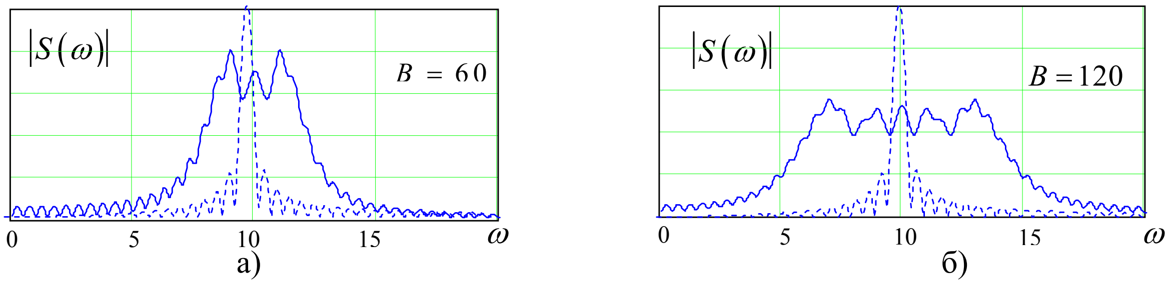


Рис. 7.6.2.

Здесь же для сравнения пунктирной линией представлены спектральные плотности простого радиоимпульса той же длительности. Как видно девиация частоты позволила значительно расширить спектральную плотность ЛЧМ - сигнала. Увеличение базы сигнала сопровождается расширением полосы спектра.

Далее рассмотрим корреляционные характеристики ЛЧМ - сигнала. Для этого определим корреляционную функцию комплексной огибающей ЛЧМ - сигнала. Принимая во внимание описание комплексной огибающей (7.5.4), получим:

$$R_U(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t)\cdot \dot{U}^*(t-\tau)\,dt = \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} U_0\cdot\exp\left(j\cdot\frac{\mu\cdot t^2}{2}\right)\cdot U_0\cdot\exp\left(-j\cdot\frac{\mu\cdot(t-\tau)^2}{2}\right)dt. \quad (7.6.7)$$

С помощью несложных преобразований выражение (7.6.7) приводится к виду:

$$R_U(\tau) = U_0^2\cdot\tau_u\cdot\frac{\sin(\mu\cdot\tau_u\cdot\tau/2)}{\mu\cdot\tau_u\cdot\tau/2}. \quad (7.6.8)$$

Огибающая корреляционной функции ЛЧМ - импульса изменяется по закону функции $\sin(x)/x$. Ширина главного лепестка огибающей АКФ обратно пропорциональна девиации частоты радиоимпульса и первый раз обращается в ноль при сдвиге сигнала

$$\tau = 2\pi/(\mu\cdot\tau_u) = 1/\Delta f. \quad (7.6.9)$$

На основании (7.3.6) легко получить корреляционную функцию ЛЧМ - сигнала:

$$R_s(\tau) = \frac{U_0^2\cdot\tau_u}{2}\cdot\frac{\sin(\mu\cdot\tau_u\cdot\tau/2)}{\mu\cdot\tau_u\cdot\tau/2}\cdot\cos(\omega_0\cdot\tau). \quad (7.6.10)$$

Графики автокорреляционной функции комплексной огибающей и физического ЛЧМ - сигнала приведены на рис. 7.6.3-а) и -б) соответственно.

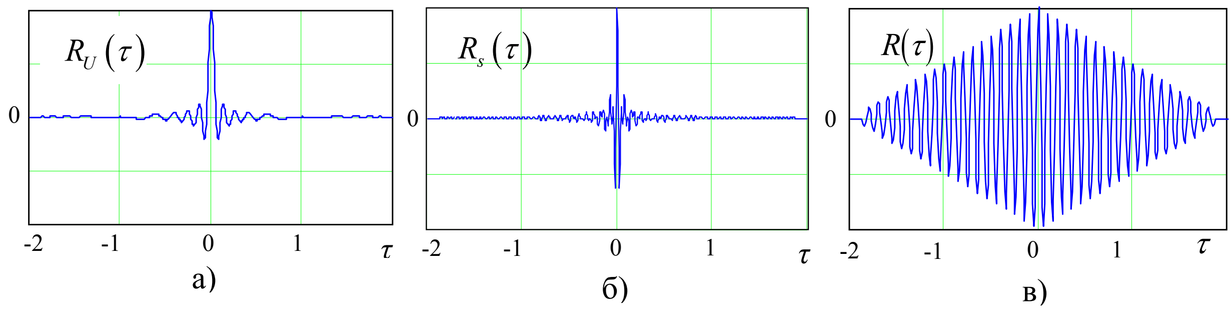


Рис. 7.6.3.

Для сравнения автокорреляционная функция простого радиоимпульса представлена на рис. 7.6.3 -в). Огибающая АКФ простого радиоимпульса линейно возрастает и спадает с изменением задержки в пределах длительности импульса. Как видно изменение частоты по линейному закону позволило значительно сузить главный лепесток корреляционной функции радиоимпульса.

7.6.2 Сложные дискретные фазоманипулированные сигналы

Если фаза непрерывной несущей частоты некоторого сигнала изменяется в некоторые дискретные моменты времени, то такие сигналы называются дискретными фазоманипулированными сигналами. Дискретный фазоманипулированный сигнал представляет собой последовательность элементарных радиоимпульсов, повторяющихся с некоторым фиксированным временным интервалом Δ. Модуляция сигнала заключается в манипулировании фазами отдельных элементарных радиоимпульсов скачком на π. Закон манипуляции фазами задается некоторой кодовой последовательностью $\{z_n\}$ длины N_z, символы которых принимают значения $z_n \in \pm 1$. При заданной длительности импульса τ_u и длине N_z кодовой последовательности длительность элементарных фазоманипулированных импульсов $u_0(t)$ равна $\Delta = \tau_u / N_z$.

Множество дискретных значений фаз элементарных импульсов определяется выражением:

$$\varphi_n = \arg(z_n) \in \{0,\ \pi\}, \quad n = 0\ ...\ N_z - 1\ . \qquad (7.6.11)$$

Бинарный фазоманипулированный сигнал с несущей частотой ω_0 описывается выражением:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[U_0 \cdot \sum_{n=0}^{N_z-1} u_0(t - n\cdot\Delta)\cdot \exp(j\varphi_n)\cdot \exp(j\omega_0 \cdot t)\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[U_0 \cdot \sum_{n=0}^{N_z-1} z_n \cdot u_0(t - n\cdot\Delta)\cdot \exp(j\omega_0 \cdot t)\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)\cdot \exp(j\omega_0 \cdot t)\right]. \qquad (7.6.12)$$

где

$$\dot{U}(t) = U_0 \cdot \sum_{n=0}^{N_z-1} z_n \cdot u_0(t - n\cdot\Delta) \qquad (7.6.13)$$

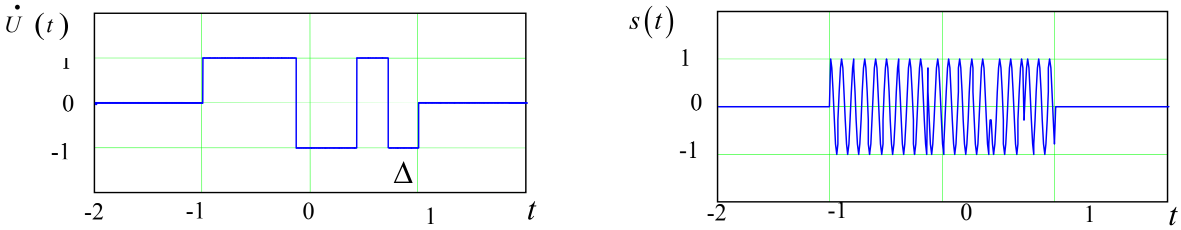
- комплексная огибающая дискретного сигнала.

В настоящее время известно много законов построения кодовых последовательностей. К числу таких последовательностей относятся коды Баркера, М-последовательности, последовательности Лежандра и Якоби. Структура кодов Баркера приведена в таблице 7.6.1.

Табл. 7.6.1.

Nz	Код Баркера	АКФ сигнала
2	1, -1	2, -1
3	1, 1, -1	3, 0, -1
4	1, 1, 1, -1	4, 1, 0, -1
	1, 1, -1, 1	4, -1, 0, 1
5	1, 1, 1, -1, 1	5, 0, 1, 0, 1
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	7, 0, -1, 0, -1, 0, -1
11	1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1	11,0,-1,0,-1,0,-1,0,-1,0,-1
13	1,1,1,1,1,-1,-1,1,1-1,1,-1,1	13,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1

Пример временной диаграммы комплексной огибающей и фазоманипулированного сигнала, модулированного кодом Баркера длиной $N_z = 7$, представлены на рис. 7.6.4 - а) и - б) соответственно.



а) б)

Рис. 7.6.4.

Спектральную плотность фазоманипулированных сигналов получают через преобразование Фурье:

$$S(\omega)=\int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2}\mathrm{Re}\left[U_0\cdot\sum_{n=0}^{N_z-1}z_n\cdot u_0(t-n\cdot\Delta)\cdot\exp\left(j\omega_0\cdot t\right)\right]\cdot\exp\left(-j\omega\cdot t\right)dt\,. \qquad (7.6.14)$$

Меняя в выражении (7.6.14) порядок суммирования и интегрирования, и получаем:

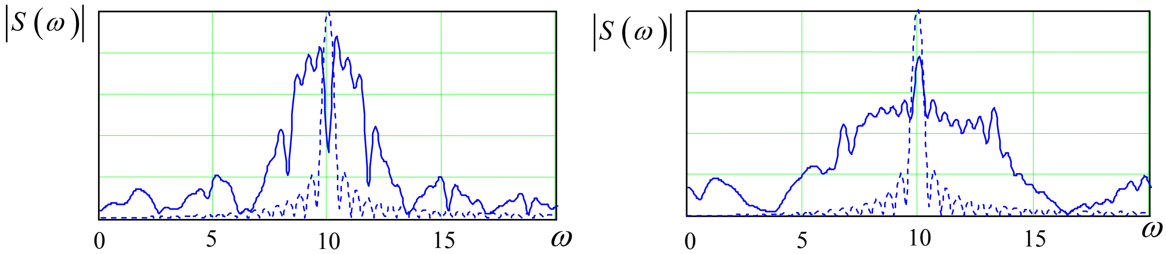
$$S(\omega)=U_0(\omega)\cdot\sum_{n=0}^{N_z-1}z_n\cdot\exp\left(-j\omega\cdot n\cdot\Delta\right)=U_0(\omega)\cdot Z(\omega)\,, \qquad (7.6.15)$$

где: $U_0(\omega)$ - спектральная плотность элементарного импульса $u_0(t)$;

$Z(\omega)$ - спектральная плотность кодовой последовательности.

Таким образом, спектральные свойства фазоманипулированного сигнала полностью определяются спектром кодовой последовательности.

В качестве иллюстрации на рис. 7.6.5 - а) и - б) приведен вид спектральной плотности ФМ - сигнала, модулированного кодовом Баркера длины $N_z=7$ и $N_z=13$ соответственно. Для сравнения на рисунках пунктирной линией представлены спектральные плотности простого радиоимпульса.



а) б)

Рис. 7.6.5.

Можно видеть, что изменение фазы несущей частоты позволило расширить главный лепесток спектральной плотности сложного дискретного ФМ-сигнала. Ширина главного лепестка спектральной плотности обратно пропорциональна длительности $\Delta=\tau_u/N_z$ элементарного импульса. Чем больше длина кодовой последовательности и соответственно меньше длительность элементарного импульса, тем шире главный лепесток спектральной плотности фазоманипулированного импульса.

Далее перейдем к анализу корреляционных характеристик ФМ - сигналов. Принимая дискретный характер задержек $\tau_m=m\cdot\Delta$ и описание комплексной огибающей (7.6.13), получим корреляционную функцию комплексной огибающей:

$$R_U(\tau_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot U(t)\cdot\dot U^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}U_0\sum_{n=0}^{Nz-1}z_n\cdot u_0(t-n\cdot\Delta)\cdot U_0\sum_{l=0}^{Nz-1}z_l^*\cdot u_0(t-l\cdot\Delta-m\cdot\Delta)dt\,. \quad (7.6.16)$$

Меняя в выражении (7.6.16) порядок суммирования и интегрирования, получаем:

$$R_U(\tau_m)=U_0^2\cdot\sum_{n=0}^{Nz-1}\sum_{l=0}^{Nz-1}z_n\cdot z_l^*\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u_0(t-n\cdot\Delta)\cdot u_0(t-l\cdot\Delta-m\cdot\Delta)dt\,. \qquad (7.6.17)$$

Интеграл в (7.6.17) отличен от нуля только при значениях $n = l + m$, поэтому получаем:

$$R_U(\tau_m) = k \cdot \sum_{n=0}^{Nz-1} z_n \cdot z^*_{n-m} = R_z(m), \tag{7.6.18}$$

где $R_z(m)$ - корреляционная функция кодовой последовательности.

Таким образом, корреляционная функция комплексной огибающей дискретного ФМ - сигнала полностью определяется структурой кодовой последовательности. Корреляционные функции кодовых последовательностей Баркера приведены в правом столбце таблицы 7.6.1.

Вычислив корреляционную функцию комплексной огибающей можно в соответствии с выражением (7.5.6) определить и корреляционную функцию дискретного ФМ - сигнала.

В качестве иллюстрации на рис. 7.6.6 -а) приведен вид корреляционной функции комплексной огибающей, а на рис. 7.6.6 -б) изображена корреляционная функция физического фазоманипулированного сигнала, модулированного по закону кода Баркера длины $N_z = 7$. Ширина главного лепестка автокорреляционной функции определяется длительностью дискрета $\Delta = \tau_u / N_z$ элементарного импульса. Для сравнения можно обратиться к виду корреляционной функции простого радиоимпульса, представленного на рис. 7.6.3 -в).

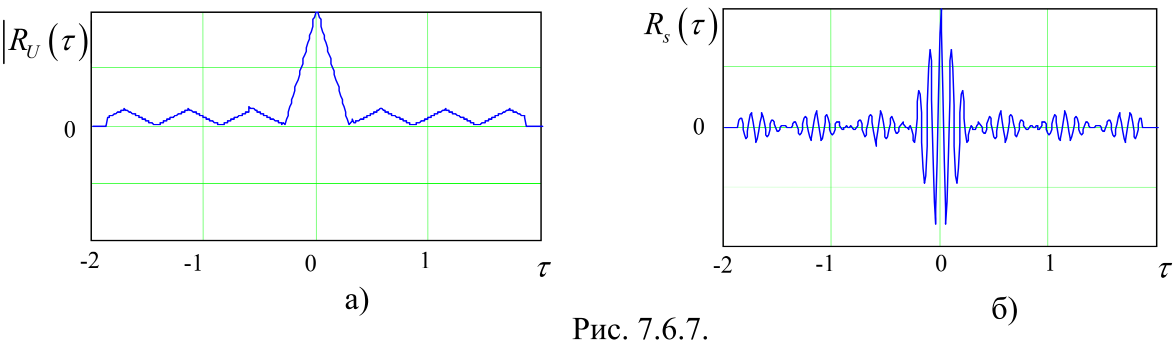


Рис. 7.6.7.

Таким образом, угловая (фазовая или частотная) модуляция способна безгранично расширить спектр и сузить главный лепесток корреляционной функции без изменения длительности (энергии) сигнала.

Рассмотренный метод определения спектральных плотностей и корреляционных функций узкополосных сигналов на основе их комплексных огибающих имеет большую значимость при анализе прохождения сигналов через радиотехнические цепи.

8 Основы теории случайных сигналов

В отличие от детерминированных сигналов значения случайных сигналов в произвольные моменты времени не могут быть определены достоверно. Они могут быть только предсказаны с определенной вероятностью.

8.1 Вероятностные характеристики случайных процессов

С теоретических позиций, случайный процесс $X(t)$ следует рассматривать как бесконечную совокупность временных функций $x_k(t)$, $k = 1,\ 2,\ \dots\ \infty$, имеющих общую статистическую закономерность. Некоторая отдельная реализация $x_k(t)$ называется выборочной функцией случайного процесса или случайным сигналом. Примеры выборочных функций случайного процесса $X(t)$ приведены на рис. 8.1.1.

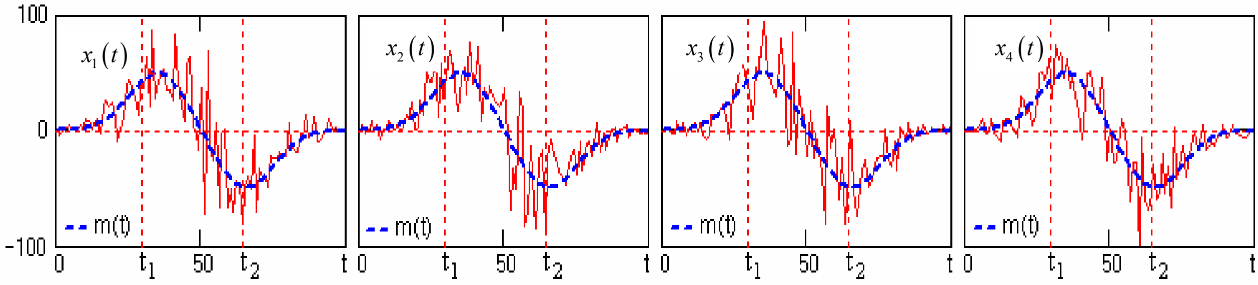


Рис. 8.1.1.

<u>Функциональные характеристики случайного процесса.</u>

Одномерная плотность вероятности. Зафиксируем на всех реализациях (рис. 8.1.1) в произвольный момент времени t_1 их мгновенные значения $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_N(t_1)\}$. Выделим из общего количества N те n значений, которые заключены в достаточно малом интервале $(x, x+\Delta x)$. Относительная доля n/N значений, попавших в этот интервал, с ростом N стремиться к определенной величине, пропорциональной Δx, и оценивается соотношением:

$$\lim_{N\to\infty}(n/N) = p(x,t_1)\cdot\Delta x\,. \tag{8.1.1}$$

Функцию $p(x,t_1)$ называют одномерной плотностью вероятности. Если устремить $\Delta x \to 0$, то получим выражения (8.1.2)

$$dP = p(x,t_1)\cdot dx = P\{|X(t_1) - x| \le dx/2\}, \tag{8.1.2}$$

которое характеризует вероятность того, что реализации случайного процесса $X(t_1)$ в момент времени t_1 примут значения, лежащие в бесконечно малом интервале dx в окрестности значения x.

Одномерная функция распределения вероятности $F(x,t_1)$ определяет вероятность того, что реализации случайного процесса $X(t_1)$ в момент времени t_1 не превысят значение x:

$$F(x,t_1) = P\{X(t_1) \le x\} = \int_{-\infty}^{x} p(\xi,t_1)\,d\xi\,. \tag{8.1.3}$$

Производная от функции распределения вероятности представляет собой одномерную плотность вероятности:

$$p(x,t_1) = dF(x,t_1)/dx\,. \tag{8.1.4}$$

Вероятность того, что случайная величина $X(t_1)$ попадёт в определенный интервал $[a,b]$, определяется выражением:

$$P\left\{a < X\left(t_1\right) \le b\right\} = \int_a^b p\left(x,t_1\right)dx = F\left(b,t_1\right) - F\left(a,t_1\right) \qquad (8.1.5)$$

Плотность вероятностей $p(x,t_1)$ является неотрицательной величиной. Функция распределения вероятности $F(x,t_1)$ является неубывающей с предельными значениями $F(-\infty,t_1) = 0$ и $F(\infty,t_1) = 1$.

<u>Числовые характеристики случайного процесса.</u>

Математическое ожидание представляет собой статистическое усреднение случайной величины $X(t_1)$ в фиксированном сечении времени t_1 случайного процесса:

$$m_1\left(t\right) = M\left\{X\left(t\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p\left(x,t\right)dx\,. \qquad (8.1.6)$$

На рис. 8.1.1 функция $m_1(t)$ случайного процесса $X(t)$ выделена пунктиром. Математическое ожидание $m_1(t)$ характеризует среднее значение или постоянную составляющую случайного процесса $X(t)$.

Средний квадрат случайной величины определяется выражением:

$$m_2\left(t\right) = M\left\{X^2\left(t\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p\left(x,t\right)dx\,. \qquad (8.1.7)$$

Дисперсия случайного процесса является теоретической оценкой среднего значения флуктуационной составляющей процесса:

$$D\left(t\right) = M\left\{\left[X\left(t\right) - m_1\left(t\right)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x\left(t\right) - m_1\left(t\right)\right]^2 \cdot p\left(x,t\right)dx = m_2\left(t\right) - m_1^2\left(t\right). \qquad (8.1.8)$$

Среднее квадратическое отклонение служит амплитудной мерой разброса значений случайного процесса относительно математического ожидания процесса:

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)}\,. \qquad (8.1.9)$$

<u>Корреляционные характеристики случайного процесса.</u>

Больше сведений можно получить, располагая двумя сечениями случайного процесса в произвольные моменты времени t_1 и t_2. В этом случае образуется двумерная плотность вероятности $p(x_1,x_2,t_1,t_2)$. Произведение $p\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)dx_1 \cdot dx_2$ представляет собой вероятность того, что в момент времени t_1 случайная величина $X(t_1)$ попадет в бесконечно малый интервал dx_1 в окрестности x_1 при условии, что в момент времени t_2 случайная величина $X(t_2)$ будет располагаться в бесконечно малом интервале dx_2 в окрестностях x_2:

$$p\left(x_1,x_2,t_1,t_2\right)dx_1 \cdot dx_2 = P\left\{\left|X\left(t_2\right) - x_2\right| \le dx_2/2,\ \left|X\left(t_1\right) - x_1\right| \le dx_1/2\right\}. \qquad (8.1.10)$$

Характеристикой динамики изменения двумерной случайной величины $\{X(t_1),\ X(t_2)\}$ является корреляционная функция:

$$R(t_1,t_2) = \overline{x(t_1) \cdot x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1 dx_2\,. \qquad (8.1.11)$$

Классификация случайных процессов.

Нестационарные процессы. Если значения функций математического ожидания, дисперсии и корреляции зависят от момента времени, то такие случайные процессы называют нестационарными.

Стационарные процессы. Случайный процесс называют стационарным, если математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов.

Эргодические процессы. Строго характеристики случайных процессов оцениваются путем усреднения по ансамблю реализаций в определенные моменты времени. Но большинство стационарных случайных процессов обладает эргодическим свойством. Сущность его заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить обо всех его статистических свойствах так же, как по любому количеству реализаций. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же, как по сечению для ансамбля реализаций, так и по времени развития.

В дальнейшем остановимся на рассмотрении только стационарных эргодических случайных процессах.

Случайный процесс с равномерным законом распределения.

Плотность вероятности равномерного закона распределения является константой на некотором интервале $[a,b]$ и определяется выражением:

$$p(x)=\begin{cases}0, \ \text{если } x<a \\ \dfrac{1}{(b-a)}, \ \text{если } a\le x\le b \\ 0, \ \text{если } x>b\end{cases} \qquad (8.1.12)$$

Функция распределения определяется путем интегрирования выражения (8.1.12) и описывается выражением:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\varsigma)d\xi=\begin{cases}0, \ \text{если } x<a \\ \dfrac{x-a}{(b-a)}, \ \text{если } a\le x\le b \\ 1, \ \text{если } x>b\end{cases} \qquad (8.1.13)$$

Графики плотности вероятности и функции распределения случайного процесса представлены на рис. 8.1.2 а) и б) соответственно.

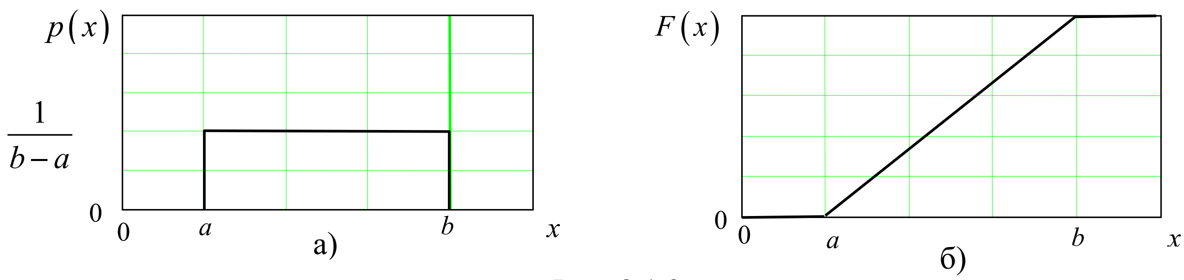


Рис. 8.1.2.

Математическое ожидание случайного процесса будет определяться выражением:

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x)\,dx=\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}. \qquad (8.1.14)$$

Дисперсия случайного процесса с равномерным законом распределения примет вид

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)\cdot p(x)\,dx = \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (8.1.15)$$

В качестве иллюстрации отдельная реализация $x_k(t)$ случайного процесса с равномерным законом распределения приведена на рис. 8.1.3.

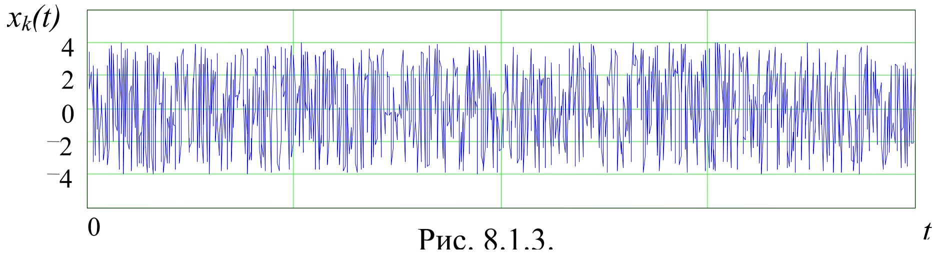


Рис. 8.1.3.

Как можно заметить, в приведенной реализации все значения случайного сигнала на заданном интервале $[-4,4]$ встречаются с одинаковой вероятностью.

<u>Случайный процесс с нормальным законом распределения.</u>

Одномерная плотность вероятности нормального закона распределения определяется выражением

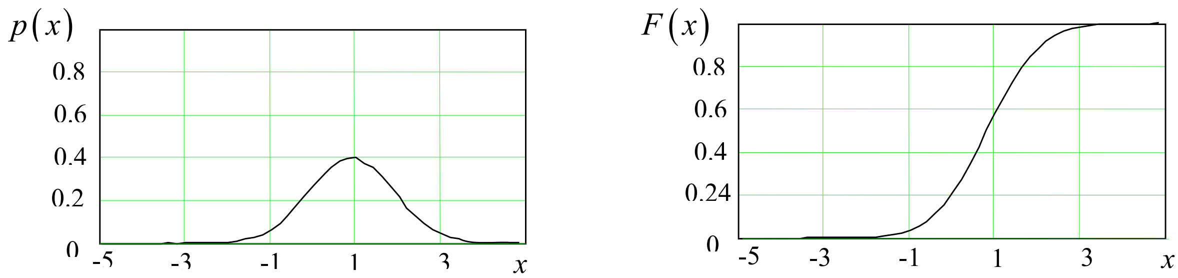
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (8.1.16)$$

где m и σ соответствуют математическому ожиданию и дисперсии.

Интегральное преобразование (8.1.16) даёт функцию распределения случайного процесса:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right)d\xi. \qquad (8.1.17)$$

Интегральная функция распределения имеет вид монотонной кривой, изменяющейся от нуля до единицы. Графики гауссовой плотности распределения и интегральной функции распределения при $m=1$ и $\sigma=1$ приведены на рис.8.1.4 а) и б) соответственно:



а) Рис. 8.1.4. б)

На рис. 8.1.5 приведена отдельная реализация $x_k(t)$ случайного процесса с нормальным законом распределения.

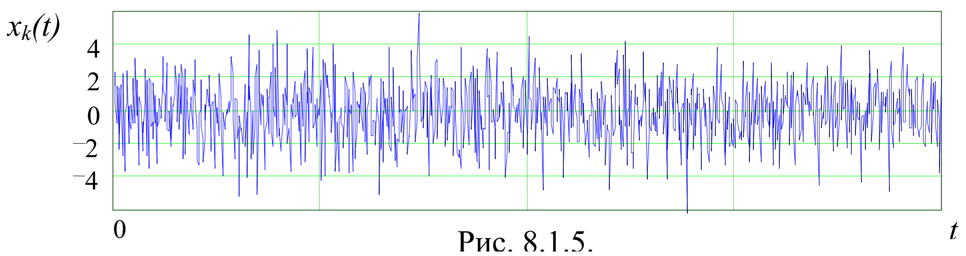


Рис. 8.1.5.

Можно заметить, что в приведенной реализации значения случайного сигнала встречаются с различной вероятностью. Максимальные и минимальные значения случайного сигнала встречаются очень редко. В тоже время значения случайного сигнала в окрестности нуля появляются с большой вероятностью.

8.2 Взаимосвязь спектральных и корреляционных характеристик

Каждая отдельно взятая реализация случайного процесса представляет собой детерминированный сигнал и к нему можно применить преобразование Фурье. При этом различные реализации будут иметь различные спектральные плотности. Поэтому следует рассматривать спектральную плотность мощности случайного процесса, поскольку мощность не зависит от соотношения фаз спектральных составляющих.

Пусть $X_T(\omega)$ - спектральная плотность некоторой реализации случайного процесса, определенного на интервале времени $\left[0,\ T\right]$. Тогда функция

$$W(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\left|X(\omega)\right|^2}{T}. \tag{8.2.1}$$

представляет собой спектральную плотность мощности данной реализации случайного процесса. Плотность мощности является вещественной, неотрицательной и четной функцией частоты. В общем случае, плотность мощности случайного процесса необходимо усреднять по множеству реализаций, но для эргодических процессов допустимо усреднение по одной достаточно длительной реализации. Остановимся на эргодических случайных процессах.

Как известно, корреляционная функция детерминированного сигнала связана преобразованием Фурье с его энергетическим спектром. Применим это свойство к отрезку реализации случайного процесса длительностью T и запишем равенство:

$$R(\tau)=\int_0^T x(t)\cdot x(t-\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_T(\omega)\right|^2\exp(j\omega\tau)\,d\omega \tag{8.2.2}$$

Поделим обе части данного равенства на T и перейдем к пределу при $T\to\infty$. В результате выражение (8.2.2) примет вид:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\left|X_T(\omega)\right|^2}{T}\exp(j\omega\tau)d\omega \tag{8.2.3}$$

В левой части мы получили выражение для функции корреляции, а в правой части - преобразование Фурье спектра мощности случайного процесса. С учетом (8.2.1), получим взаимосвязь корреляционных характеристик случайного процесса с его энергетическим спектром:

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \tag{8.2.4}$$

Отсюда следует, что корреляционная функция случайного стационарного эргодического процесса представляет собой обратное преобразование Фурье его спектра плотности мощности. В свою очередь спектр плотности мощности определяется прямым преобразованием Фурье от корреляционной функции:

$$W(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau. \tag{8.2.5}$$

Приведенные выражения (8.2.4) и (8.2.5) установлены теоремами ***Винера - Хинчина.*** С уменьшением эффективной ширины спектра плотности мощности увеличивается интервал корреляции случайного процесса, и наоборот. Чем быстрее убывает функция $R(\tau)$, тем слабее оказывается статистическая связь между мгновенными значениями случайного сигнала. Для иллюстрации этого соотношения на рис. 8.2.1 приведены примеры реализации двух случайных процессов и представлены их корреляционные функции и спектры плотности мощности.

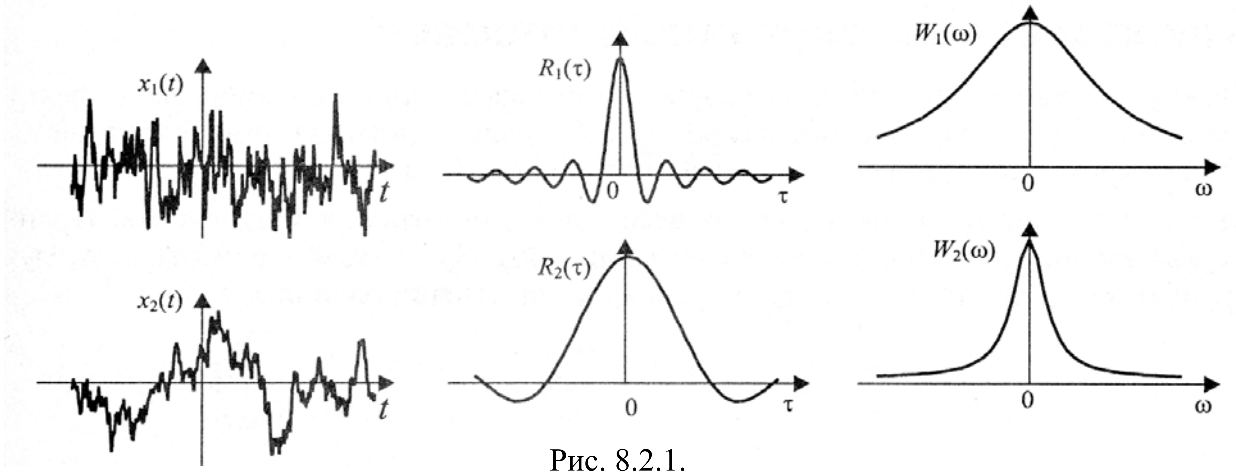


Рис. 8.2.1.

<u>Случайный процесс с гауссовским энергетическим спектром.</u> Пусть случайный процесс характеризуется спектром мощности гауссовского вида:

$$W(\omega) = W_0 \cdot \exp\left(-\beta \cdot \omega^2\right). \qquad (8.2.6)$$

Применив формулу Винера-Хинчина, получим функцию корреляции:

$$R(\tau) = \frac{W_0}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\beta \cdot \omega^2\right) \cdot \cos(\omega\tau)\, d\omega = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi\beta}} \exp\left[-\tau^2 / (4\beta)\right]. \qquad (8.2.7)$$

Как видно, гауссов характер спектра мощности приводит к функции корреляции также гауссовского вида. Из (8.2.7) следует, что дисперсия данного случайного процесса равна

$$\sigma_x^2 = R(0) = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi\beta}}. \qquad (8.2.8)$$

<u>Случайный процесс с равномерным энергетическим спектром.</u> Пусть случайный процесс характеризуется равномерным спектром мощности в некоторой полосе частот т описывается выражением:

$$W(\omega) = \begin{cases} W_0, \ \textit{при} \ -\omega_в \le \omega \le \omega_в \\ 0, \ \textit{вне полосы} \ \left[-\omega_в, \omega_в\right] \end{cases}. \qquad (8.2.9)$$

Согласно теореме Винера -Хинчина, найдем функцию корреляции:

$$R(\tau) = \frac{W_0}{\pi}\int_0^{\omega_w} \cos(\omega\tau)\, d\omega = \frac{W_0 \cdot \omega_в}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_в \tau)}{\omega_в \tau} = \sigma_x^2 \cdot \rho(\tau). \qquad (8.2.10)$$

Из (8.2.10) следует, что дисперсия случайного процесса равна

$$\sigma_x^2 = R(0) = W_0 \omega_в / \pi \ . \qquad (8.2.11)$$

<u>Белый шум.</u> Белым шумом называют идеализированную модель случайного процесса, спектральная плотность мощности которого постоянна на всех частотах. Если перейти в выражении (8.2.10) к пределу $|\omega_в| \to \infty$. Тогда корреляционная функция белого шума будет описываться выражением:

$$R(\tau) = W_0 \cdot \delta(t). \qquad (8.2.12)$$

Значение корреляции белого шума равно нулю всюду, кроме точки $\tau = 0$. Дисперсия белого шума бесконечно велика.

8.3 Узкополосные случайные процессы

Отдельные реализации узкополосного случайного процесса представляют собой квазигармонические колебания, описываемые выражением

$$x(t) = A(t) \cdot \cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right], \qquad (8.3.1)$$

в котором огибающая $A(t)$, так и фаза $\varphi(t)$ являются случайными функциями, медленно изменяющимися во времени. Рассмотрим статистические характеристики огибающей и полной фазы узкополосных случайных процессов. Будем считать узкополосный случайный процесс стационарным, нормальным и центрированным. Рассмотрим случайный сигнал $x(t)$ и соответствующий ему аналитический сигнал $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t), \qquad (8.3.2)$$

где $\tilde{x}(t)$ - сопряженный случайный сигнал, реализации которого связаны преобразованием Гильберта. С помощью аналитического сигнала можно определить мгновенные значения огибающей и полной фазы узкополосного сигнала:

$$A(t) = |z(t)| = \sqrt{x(t)^2 + \tilde{x}(t)^2}, \qquad \varphi(t) = \arg\left[z(t)\right]. \qquad (8.3.3)$$

Установим статистические характеристики огибающей и полной фазы узкополосного случайного процесса. Поскольку преобразование Гильберта является линейным интегральным преобразованием, то и сопряженный сигнал $\tilde{x}(t)$ будет нормальным, а энергетические спектры реализаций $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ совпадают. Корреляционные функции связаны со спектрами плотности мощности обратным преобразованием Фурье, поэтому они тоже равны. Взаимная корреляция случайных сигналов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ равна нулю. Поэтому из некоррелированности случайных процессов следует статистическая их независимость.

Поскольку мгновенные значения сигналов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ статистически независимы и имеют нормальные распределения с одинаковыми дисперсиями и нулевым средним, то совместная плотность вероятности процессов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ равна произведению их одномерных плотностей вероятности и определяется выражением:

$$p(x, \tilde{x}) = p(x) \cdot p(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{x^2 + \tilde{x}^2}{2\sigma_x^2}\right). \qquad (8.3.4)$$

Теперь, чтобы получить двумерную плотность вероятности $p(A, \varphi)$ огибающей и фазы узкополосного случайного процесса следует выполнить функциональное преобразование декартовых координатах в полярные, которое описывается следующими формулами:

$$x = A_c = A \cdot \cos(\varphi) \quad \text{и} \quad \tilde{x} = A_s = A \cdot \sin(\varphi). \qquad (8.3.5)$$

Рассматриваемое функциональное преобразование изображено на рис. 8.3.1.

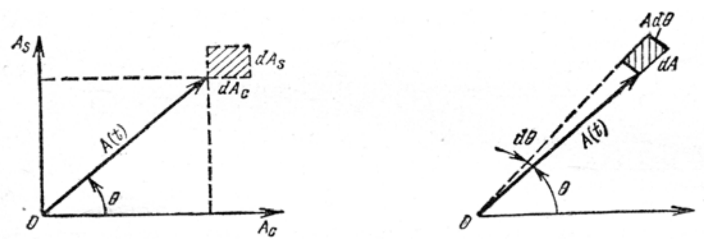


Рис. 8.3.1.

Вероятность попадания в бесконечно малую область в окрестности каждой точки комплексной плоскости при смене системы координат остается не изменой. Площадь такой бесконечно малой области в декартовых координатах равна $dA_c \cdot dA_s$, а в полярных -

$A \cdot dA \cdot d\varphi$.

Таким образом, получаем совместную плотность вероятности огибающей и фазы:

$$p(A,\varphi) = A \cdot p\left(A \cdot \cos(\varphi), A \cdot \sin(\varphi)\right) =$$

$$= \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{\left[A \cdot \cos(\varphi)\right]^2 + \left[A \cdot \sin(\varphi)\right]^2}{2\sigma_x^2} \right) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2} \right). \qquad (8.3.6)$$

Чтобы найти одномерные плотности вероятности для огибающей и фазы отдельно нужно проинтегрировать двумерную плотность по неинформативным параметрам:

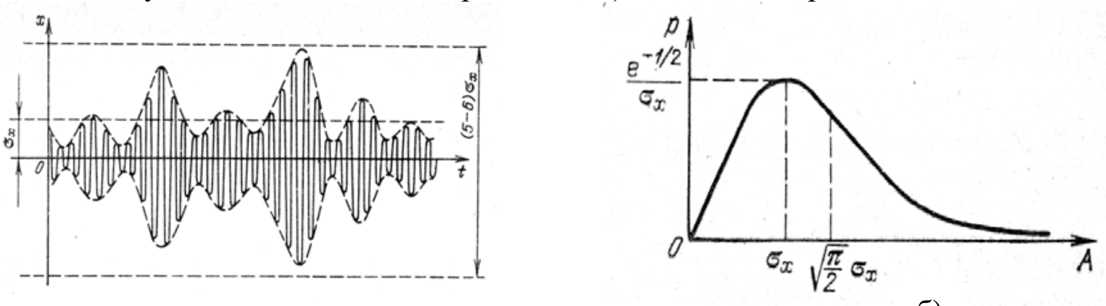
$$p(A) = \int_0^{2\pi} p(A,\varphi)\, d\varphi \quad \text{и} \quad p(\varphi) = \int_0^{\infty} p(A,\varphi)\, dA. \qquad (8.3.7)$$

В соответствии с (8.3.6) одномерная плотность вероятности амплитуды будут определяться выражением:

$$p(A) = \int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2} \right) d\varphi = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2} \right). \qquad (8.3.8)$$

Полученное распределение огибающей называется ***закон распределения Рэлея.***

В качестве иллюстрации на рис.8.3.2, а) приведена типовая осциллограмма узкополосного случайного сигнала, а на рис.8.3.2, б) плотность вероятности огибающей.



а) Рис. 8.3.2. б)

Наивероятнейшее значение огибающей сигнала $p(A)$ получается при значениях $A = \sigma_x$. Среднее значение огибающей $M\{A\} = \int_0^{\infty} A \cdot p(A)\, dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_x$.

Одномерная плотность вероятности фазы будет определяться выражением:

$$p(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2} \right) dA = \frac{1}{2\pi} \qquad (8.3.9)$$

и имеет ***равномерный закон распределения***.

Из полученных выражений (8.3.6), (8.3.8) и (8.3.9) видно, что совместная плотность вероятности огибающей и фазы равна произведению их одномерных плотностей. Поэтому, амплитуда и фаза узкополосного случайного сигнала являются статистически независимыми.

Спектр мощности $W(\omega)$ узкополосных случайных процессов сосредоточен в относительно узкой полосе вблизи некоторой центральной частоты ω_0. Узкополосный характер спектра мощности $W(\omega)$ говорит о том, что корреляционная функция узкополосного случайного процесса описывается выражением вида:

$$R(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \rho(\tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau), \qquad (8.3.10)$$

где: $\rho(\tau)$ медленно меняющая функция, которая отражает закон огибающей корреляционной функции.