

Учебно-методическое издание

Министерство образования Российской Федерации
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Автор-составитель
Кожевникова Валентина Анатольевна

Редактор

Компьютерная верстка И.А. Иванова

КОЖЕВНИКОВА В. А.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Изд. лиц. ЛР № 020815 от 20.09.98.
Подписано в печать . Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 13,4. Тираж 100 экз. Заказ №
Издательско-полиграфический центр Новгородского
государственного университета имени Ярослава Мудрого.
173003, Великий Новгород, Б. Санкт-Петербургская, 41.
Отпечатано в ИПЦ НовГУ. 173003, Великий Новгород,
ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.

Великий Новгород
2003

Список используемой литературы

1. Зисов В.Д. и др. Задачник по начертательной геометрии. М.: Высш. шк., 1984.
2. Короев Ю.И. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов. М.: Стройиздат, 1987. 319 с.
3. Короев Ю.И. и др. Сборник задач и заданий по начертательной геометрии. М.: Стройиздат, 1989.
4. Крылов Н.Н. и др. Начертательная геометрия: Учеб. для строит. спец. вузов. М.: Высш. шк., 1984. 224 с.
5. Макарова О.К. Перспектива. М.: Высш. шк., 2002. 485 с.

УДК 744:69 (075.8)
0-76

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

0-76 **Начертательная геометрия:** Учебно-методическое пособие / Автор-составитель В.А. Кожевникова; НовГУ имени Ярослава Мудрого.- Великий Новгород, 2003. - 108с.

106

Содержание

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	5
1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	7
1.2. Цели начертательной геометрии	7
1.2. Геометрические элементы графического языка	7
1.3. Из пространства на плоскость	8
2. СИСТЕМА ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ (ОРТОГОНАЛЬНЫХ) ПЛОСКОСТЕЙ	10
2.1. Структура системы	10
2.2. Развертка плоскостей проекций	11
2.3. Части пространства	12
2.4. Примеры графических построений	13
3. ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ	16
3.1. Проекция прямой	16
3.2. Проекция плоскости	19
3.3. Примеры графических построений	21
4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ: ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ	24
4.1. Взаимное положение прямых	24
4.2. Взаимное положение прямой к плоскости	28
4.3. Взаимное положение плоскостей	31
4.4. Примеры графических построений	32
5. ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ (ПОВЕРХНОСТЬ) ПЕРЕСЕЧЕНИЯ	36
5.1. Частные случаи пересечения	36
5.2. Общие случаи пересечения	41
5.3. Примеры графических построений	46
6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ	48
6.1. Общие положения	48
6.2. Способ замены плоскостей проекции	48
6.3. Способ вращения	50
6.4. Примеры графических построений	52

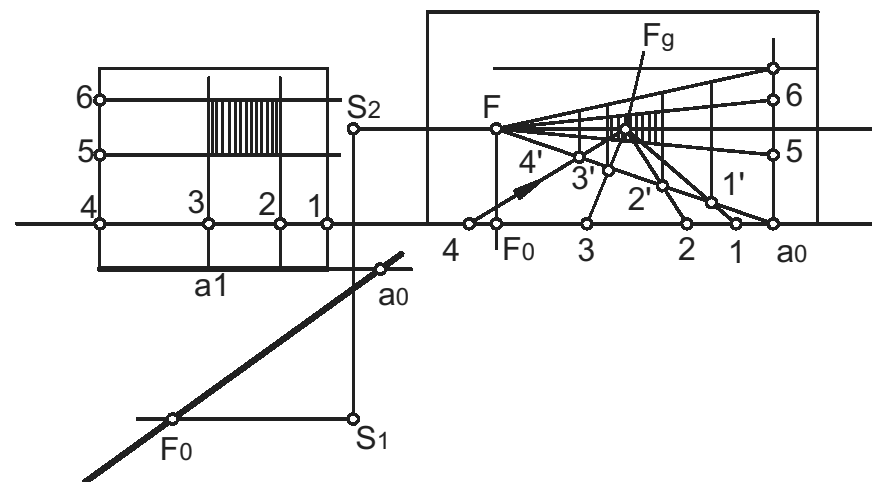


Рис. 11.8. Пропорциональное деление отрезков

отношениях при переносе на перспективу различных элементов фасада и т.д.

На рис. 11.8 показана методика пропорционального деления вертикальных и горизонтальных отрезков. Для вертикальных отрезков истинные пропорции частей сохраняются. Поэтому можно по линиям схода построить отрезок в истинную величину на картине (точка 1), разделив его в нужном соотношении и по линиям схода передать пропорции деления обратно. Если речь идет об одном отрезке, то можно обойтись без этих построений и просто разделить отрезок на пропорциональные обычным графическим методом.

Деление горизонтального отрезка осуществляется путем изображения отрезка в истинную величину на основании картины (с учетом расстояния от отрезка до его начальной точки). Затем проводится прямая через концы отрезков (истинной величины и перспективы). Пересечение этой прямой с линией горизонта обозначит точку схода F_2 . Линии схода через точки деления к F_2 разделят перспективу отрезка в заданном соотношении. Здесь используется метод пропорционального деления сторон угла параллельными прямыми.

И, наконец, если при построении методом архитектора начальные точки выходят далеко за пределы чертежа, можно обойтись без них, применив радиальную методику. На рис. 11.9 построение начальной точки для линии 3-4 увело бы далеко за пределы чертежа. В этом случае для определения положения точки 4, на ортогональной проекции

11.4. Методы сопутствующих построений

Выбор положения картинной плоскости и точки зрения (центр проекций) основан на требовании хорошей наглядности полученного изображения, что обычно сопоставляется с тем, как объект выглядел бы в натуре. Выше уже упоминалось об угловых размерах объекта, которые должны быть не более 30° .

Поэтому точка зрения S должна быть удалена на такое расстояние от объекта, чтобы угол $\beta \approx 30^\circ$ (рис. 11.7). высота точки зрения H обычно берется близкой к росту человека (180-200 см), чтобы объект выг-

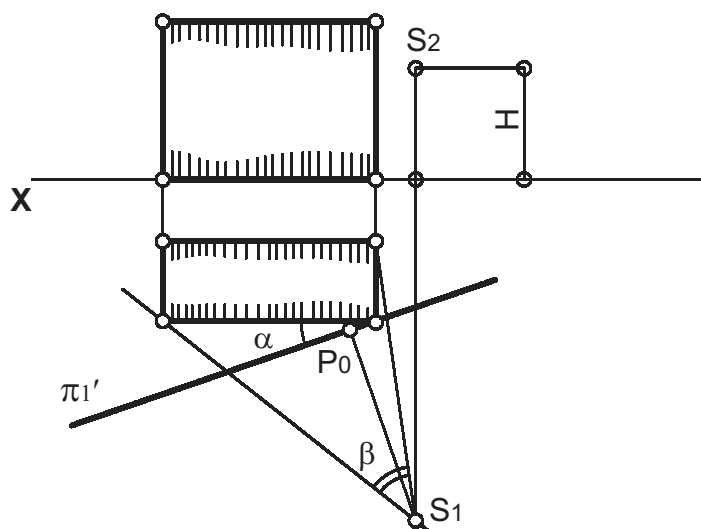


Рис. 11.7. Выбор положения картины и точки зрения

лядел так, как его будет наблюдать в натуре зритель, стоящий неподалеку.

Если хотят показать в перспективе застройку района, то используют высоту $H = 100-150$ м (высота "птичьего полета").

Картинную плоскость устанавливают под углом $\alpha = 30^\circ$ к плоскости того фасада, который является основным в изображении и обычно проводят через ближайшее вертикальное ребро сооружения, чтобы упростить построения.

И, наконец, желательно, чтобы перпендикуляр из точки S_1 на картинную плоскость (в точку P_0) не выходил за пределы средней трети угла β , чтобы избежать искажений формы объекта.

Часто встречается задача деления отрезков в пропорциональных

7. ПРОСТЫЕ ТЕЛА	56
7.1. Простое тело - структурная единица формообразования	56
7.2. Пересечение тел плоскостью и прямой	58
7.3. Развертывание поверхностей тел	60
7.4. Примеры графических построений	63
8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТЫХ ТЕЛ	66
8.1. Взаимное пересечение многогранников	66
8.2. Пересечение поверхностей вращения	67
8.3. Пересечение многогранных и кривых поверхностей	71
8.4. Примеры графических построений	73
9. СИСТЕМА ПРОЕКЦИЙ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ	76
9.1. Структура системы	76
9.2. Прямые и плоскости	78
9.3. Поверхности	82
9.4. Построение откосов	84
9.5. Примеры графических построений	86
10. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ	88
10.1. Назначение проекций	88
10.2. Виды проекций координатных осей	89
10.3. Методика аксонометрических построений	91
10.4. Примеры графических построений	93
11. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ	97
11.1. Назначение проекций и их структура	97
11.2. Радиальный метод построения проекций	98
11.3. Метод архитектора	100
11.4. Методы сопутствующих построений	104
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	107

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве - прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, ...

2. Прямые и кривые линии в пространстве - строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, ...

3. Плоскость - прописными буквами второй половины латинского алфавита: P, Q, R, S, ...

4. Плоскость проекций при образовании эпюра - прописной буквой греческого алфавита:

горизонтальная π_1

фронтальная π_2

профильная π_3

Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций - буквой π с добавлением подстрочного индекса: $\pi_4, \pi_5, \pi_6, \dots$

5. Проекции точек, прямых и плоскостей - соответствующей буквой и добавлением подстрочного индекса, характеризующего плоскость проекций:

на плоскости π_1 - $A_1, a_1, \alpha_1 \dots$

на плоскости π_2 - $A_2, a_2, \alpha_2 \dots$

на плоскости π_3 - $A_3, a_3, \alpha_3 \dots$

6. Способ задания указывается в скобках рядом с буквенным обозначением геометрической фигуры.

Например:

$a(A, B)$ - прямая задана двумя точками A и B;

$Q(A, B, C)$ - плоскость задана тремя точками A, B и C;

$P(a \cap b)$ - плоскость задана пересекающимися прямыми a и b;

$S(l \parallel m)$ - плоскость задана параллельными прямыми l и m.

7. Углы - строчными буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, символическими записями $\angle ABC$; прямой угол - обозначается дугой с точкой внутри (на рисунках и чертежах).

8. Основные операции:

совпадение двух геометрических фигур - $\equiv$, например $a \equiv b$;

взаимная принадлежность геометрических фигур - $\in$, например $A \in b$;

пересечение двух геометрических фигур - $\cap$, например $a \cap b$;

результат геометрической операции - $=$, например $K = a \cap b$.

Теперь все точки основания π_1' можно перенести на основание картины. Практически это совершается с помощью плоскости бумаги, куда переносятся все точки.

Когда точки перенесены, строят перспективы линий основания объекта, соединив начальные точки линий с соответствующей точкой схода (например, точку $(1-2)_0$ с F^I и т.д.). На пересечениях линий получают перспективы точек 1, 2 и 3.

Вертикальной ребро 4-5 лежит в картинной плоскости и поэтому положение точки 5 на вертикали из точки 4, получают, отложив истинную величину ребра. Соединив т.5 с точкой схода F^I , определяют перспективу верхнего ребра объекта, которое заканчивается в т.6 на пересечении с вертикалью из т.3.

Затем т.5 соединяется с F^{II} и определяется вертикальное ребро их т.1 и т.д.

Вертикальные и горизонтальные ребра определяют положение граней объекта. Поэтому при необходимости положения вершин тела можно определить, продолжив грань до пересечения с картиной. Так, вершину 6 можно было определить, отложив истинную величину ребра 3-6 на картинной плоскости - линия $(2-3)_0$ - 7. Затем точку 7 соединяют с точкой схода F^{II} и на пересечении с вертикалью из т. 3 получают т. 6.

Хотя читать описание процедуры построений довольно утомительно, сами построения просты и после небольшой тренировки хорошо усваиваются.

В рассмотренном примере объект имеет форму параллелепипеда. Его четыре вершины лежат на предметной плоскости и могут рассматриваться как вторичные проекции вышележащих по вертикали вершин (например, вершины 5 и 4, 6 и 3 и т.д.). Это обстоятельство позволяет определить положение любой точки в пространстве, как результат пересечения двух прямых и использовать это обстоятельство при переносе из ортогональных проекций в перспективные тех точек, которые выпадают из схемы основных размещений.

горизонта проведен был луч $1 - T_1'$ и второй луч $1 - R' - 2$.
Отрезок $T_1' - 2$ равен истинной величине отрезка $R'R_1'$.

Теперь, когда мы немножко разобрались с изображением различных линий, можно перейти к параллельным линиям, особенности изображения которых и лежит в основе метода архитектора.

Параллельные линии, уходящие от картинной плоскости, имеют общую точку схода. Поэтому достаточно определить точку схода для одной линии их пучка параллельных - эта точка будет

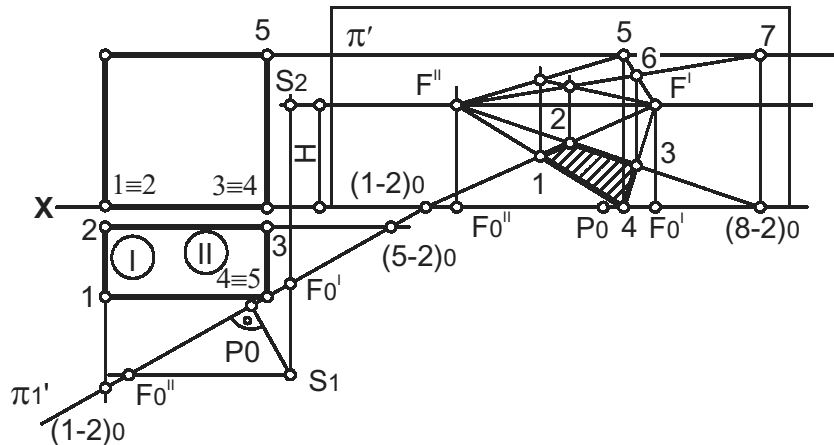


Рис. 11.6. Построение перспективы объекта методом архитектора

общей для всего пучка. В методе архитектора эта общая для пучка линий точка схода определяется путем проведения вспомогательной линии из точки зрения S . На рис. 11.6 объект содержит в своей форме три пучка параллельных линий - два горизонтальных (I и II) и один вертикальный. Пока нас не интересуют горизонтальные пучки. Для определения точки схода для пучка 1 проводят линию SF^I параллельно этому пучку. Эта линия проецируется на картинную плоскость в точку F^I (поскольку она исходит из точки зрения), которая содержит в том числе и точку схода. Поэтому точка F^I будет общей точкой схода для пучка 1. основание этой точки $F_0^I S_1$ параллельно линиям 1 пучка. Сама точка F^I лежит на линии горизонта. Аналогично определяют F^{II} .

Наметив положение картинной плоскости (π') и точки зрения (S_1 и S_2), определяют положение основания центра картины (P_0). Продлив линии объекта до пересечения с основанием картины, отмечают положение начальных точек линий $(1-2)_0$ и $(2-3)_0$. В точке 4, сходятся линии их обоих пучков.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.2. Цели начертательной геометрии

Можно выделить, по крайней мере, две цели.

Общая цель - развитие пространственного воображения, необходимого не только для качественного решения инженерных задач.

Частная цель - использование методов начертательной геометрии (НГ) для графической реализации проектных замыслов, связанных с различными задачами пространственного характера. В этом смысле НГ является **инструментом проектирования** пространственных образований.

Документальное оформление проектных решений, полученных методом НГ, осуществляется по правилам **черчения**.

В дисциплине НГ различаются два направления:

- способы изображения пространственных форм на поверхности (плоскости);
- методика графического решения пространственных задач по плоским изображениям объемных элементов.

1.2. Геометрические элементы графического языка

Бесконечное многообразие существующих в нашем мире форм может быть получено путем комбинаций простейших геометрических элементов: точки, линии, поверхности.

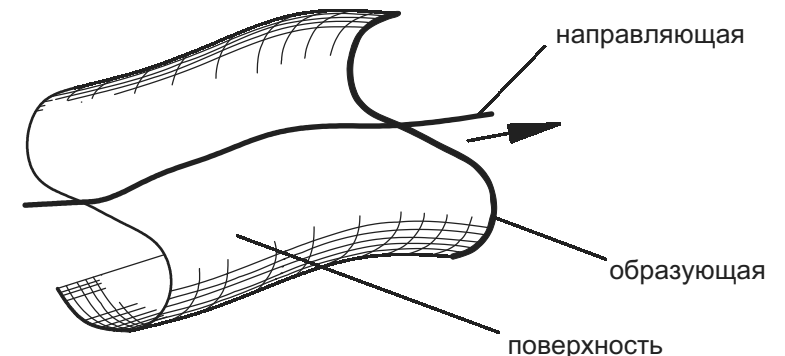


Рис. 1.1 Образование поверхности

Точка - буква графического языка; ее звучание определяется местом, которое занимает точка в пространственной конструкции. Поэтому в графическом алфавите число букв достаточно велико. Точка не имеет

измерений.

Линия - траектория движения точки, представлена рядом последовательно расположенных в пространстве точек. Линия - это слово в графическом языке. Число слов бесконечно. Линия имеет одно измерение.

Поверхность удобно представлять как след в пространстве, который оставляет линия (образующая), когда она перемещается, касаясь другой линии (направляющей), рис.1.1. поверхность имеет два измерения.

1.3. Из пространства на плоскость

Для перехода от объекта в пространстве к его плоскому изображению используют способ **проецирования**. На рис. 1.2 показано, как этим способом получить изображение точки. Через точку A проводят луч (проецирующий) в сторону **плоскости проекции** π_1 .

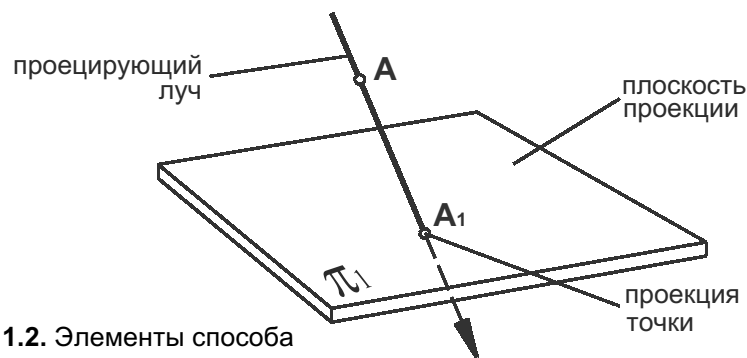


Рис. 1.2. Элементы способа проецирования

Пересечение проецирующего луча с плоскостью называют **проекцией точки** на данную плоскость. Проведя проецирующие лучи через определенные точки пространственной фигуры, получим ее изображение (проекцию) на плоскости.

Проецирующие лучи, проведенные через разные точки пространства, могут располагаться различным образом относительно друг друга и плоскости проекции. На рис. 1.3 показаны два варианта пространственной организации проецирующих лучей.

На левом рисунке проецирующие лучи параллельны заданному направлению S. При этом они образуют с плоскостью проекции угол α . Такое размещение лучей называют **параллельным** (цилиндрическим) проецированием. Если $\alpha = 90^\circ$, то еще и **прямоугольным**. В остальных случаях говорят о **параллельном косоугольном** проецировании.

На правом рисунке все проецирующие лучи проходят через точку S, называемую **центром проекции**. Само проецирование называют при

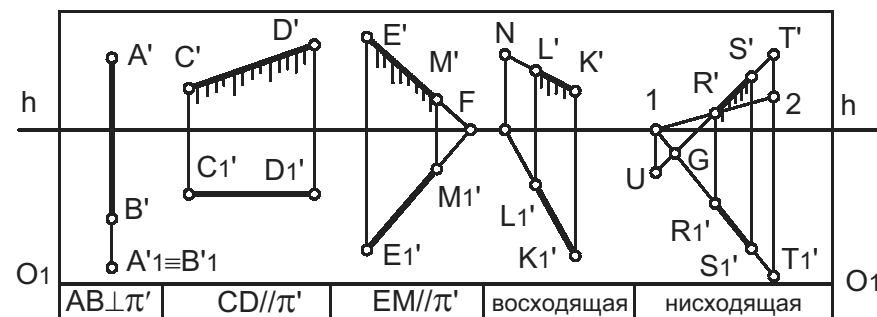


Рис. 11.5. Перспективные изображения линий

На рис. 11.5 изображены:

- AB - вертикальная линия и ее изображение тоже вертикально, но уменьшено;
- CD - линия, параллельная картине; ее вторичная проекция параллельна основанию картины O1-O1.
- EM - линия, параллельная горизонтальной (предметной) плоскости. Если продлить эту линию в бесконечность, то ее изображение закончится на линии горизонта в точке F, куда придет и вторичная ее проекция. Точку F называют точкой схода линии - сколь долго бы мы не тянули линию дальше, в этой точке ее изображение на картине закончено. Если линия еще перпендикулярна на π' , то ее точка схода совпадает с центром картины.
- LH - восходящая линия, т.е. линия, уходящая вверх по мере удаления от картины. Ее изображение заканчивается в ее точке схода N, которая определяется по точке пересечения вторичной проекции с линией горизонта. На практике таких линий бывает достаточно, только они, естественно, не бесконечны, а весьма ограничены в длине (например, растяжка у мачт).
- RS - нисходящая линия; она снижается, удаляясь от картины и там, где ее продолжение пересекается в ее вторичной проекцией (т. G), она уходит под плоскость, где и лежит ее точка схода U.

На примере с этой линией показано, как найти точку ее пересечения с картинной (след). Для этого надо продлить вторичную проекцию до ее пересечения с основанием картины (точка T1'). Точка выхода линии на картинную плоскость T' называется начальной точкой (следом прямой) и лежит на пересечении вертикали от точки T1' и продолжения линии R'S'. Кстати, истинные размеры отрезка, параллельного картинной плоскости можно определить, вытащив отрезок из предметного пространства на картинную плоскость. Как, например, это сделано с отрезком R'R1', через концы которого из произвольной точки схода (т. 1) на линии

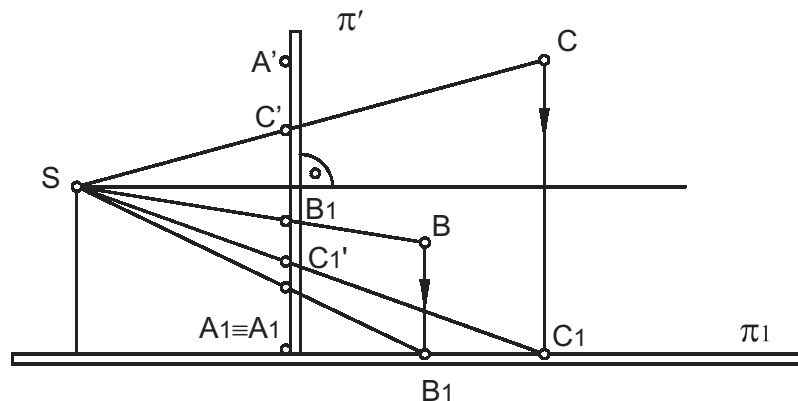


Рис. 11.4. положение вторичной проекции на картине

По мере удаления точки от плоскости, ее вторичная проекция поднимается к линии горизонта (точки В и С) и достигает ее, когда сама точка удаляется в бесконечность.

Из рисунка также видно, что положение вторичной проекции никак не связано с высотой точки над π_1 , а зависит только от ее расстояния до картинной плоскости: чем ближе точка к картине, тем ближе ее вторичная проекция к основанию картины и наоборот. Это обстоятельство, кстати, является основным критерием для определения взаимного положения предметов и их удаления от наблюдателя на относительно ровной поверхности земли. Этим же объясняются весьма большие ошибки при глазомерном определении расстояний к гористой местности.

11.3. Метод архитектора

Радиальный метод перехода от ортогональных проекций к перспективному очень прост. Недостаток его в том, что изображение объекта со сложной формой потребует переноса большого количества характерных точек и, соответственно, построения такого же количества лучевых плоскостей и т.д.

В некоторых случаях можно значительно уменьшить объем построений - при определенных формах объекта. Метод архитектора обеспечивает простоту преобразований, если в структуре поверхности объекта много параллельных линий. Это обстоятельство как раз характерно для большинства архитектурных объектов - отсюда и название метода.

Метод архитектора основан на использовании некоторых свойств перспективного изображения линий.

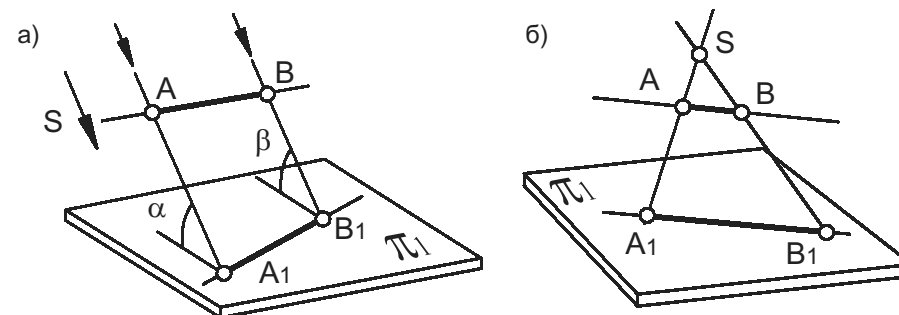


Рис. 1.3 Варианты пространственной организации проецирующих лучей

а - лучи параллельны S; параллельное проецирование; б - лучи проходят через точку S: центральное проецирование

этом **центральный** (коническим). Название "коническое" определяется тем обстоятельством, что совокупность лучей, поведенных через точки линии, образует коническую поверхность (в первом случае - цилиндрическую).

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального, когда центр проекции S бесконечно удален от плоскости проекции.

Со сравнительными достоинствами и недостатками способов проецирования мы знакомимся по ходу дальнейшего изложения, сейчас же отметим их основное различие: при параллельном проецировании **величина** изображения объекта не зависит от его **расстояния** до плоскости проекции, а при центральном - зависит.

Переход от пространственных форм к их плоским изображениям может осуществляться в различных системах проекции. Эти системы различают количеством плоскостей проекции и способами проецирования. При этом каждая система решает круг задач, связанных с построением изображений.

2. СИСТЕМА ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ (ОРТОГОНАЛЬНЫХ) ПЛОСКОСТЕЙ

2.1. Структура системы

В системе используется параллельное прямоугольное проецирование, т.е. проецирующие лучи направлены перпендикулярно к плоскости проекции (рис. 2.1).

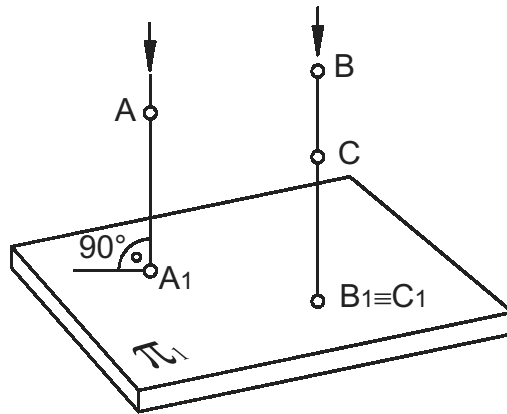


Рис. 2.1. Прямоугольная проекция точек

По проекциям мы можем судить о том, что точки B и C расположены на одном перпендикуляре к плоскости проекции π_1 , а точка A - в стороне от них. То есть, ситуация - мало определенная.

Для ликвидации неопределенности вводятся еще две плоскости проекции, перпендикулярные исходной и друг другу - образуется система ортогональных, взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 2.2).

Названия и обозначения плоскостей видны на рисунке. Плоскости проекции пересекаясь, образуют систему координатных осей X, Y, Z, используя которые, можно задать в численном виде положение точки в любом месте пространства.

Проведя через т. А три луча, получим три проекции точки - A_1 , A_2 , A_3 (индексы - по номеру плоскости). По названию плоскости называют проекции: A_1 - горизонтальная, A_2 - фронтальная и A_3 - профильная. Эти проекции однозначно определяют положение самой точки в пространстве: для этого достаточно из проекций точки восстановить перпендикуляры, пересечения которых и определит положение точки.

Перпендикулярность проецирующих лучей к плоскостям проекций

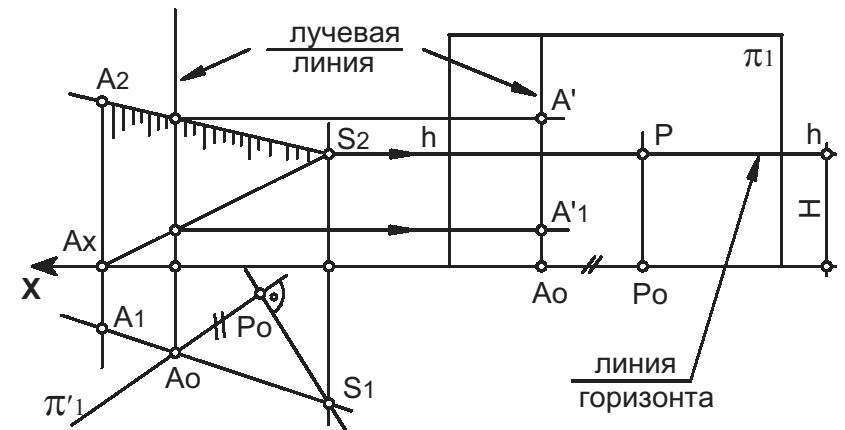


Рис. 11.3. Построение перспективы точки радиальным методом

Перпендикуляр, опущенный из точки зрения S на картинную плоскость, определяет положение ее центра P. Эта операция выполняется в два приема. Вначале на ортогональном чертеже перпендикуляром $S1P0$ определяют положение центральной линии на $\pi'1$. затем линия переносится на картинную плоскость и на расстоянии H от основания плоскости отмечается положение центра P.

Через центр P проходит линия горизонта - горизонтальная линия, относящая от основания плоскости на высоту точки зрения H. В этом легко убедиться, глядя в окно, которое выполняет роль картинной плоскости. Если встать на стул, то все предметы за окном и, в том числе, линия горизонта переместятся вверх относительно основания окна как раз на высоту стула. Теоретически же - линия горизонта это место, где скрещиваются перспективные проекции всех точек, лежащих на $\pi1$, если их удалять в бесконечность.

Когда центр определен, для каждой точки строится лучевая плоскость (лучами SA и SA_1), определяется положение линий пересечения этой плоскости с картинной (лучевая линия с основанием $A0$) и высотное положение на лучевой линии перспективы точки A (A') и ее вторичной проекции A_1' . теперь эти данные можно перенести на перспективное изображение, отложив на основании картины отрезок $P0A0$, проведя лучевую линию и отметив на ней точки A' и A_1' .

Как видно из схемы образования проекций, перспектива точки может находиться в любом месте картины, в то время как ее вторичная проекция только между линией горизонта и основанием картины. На рис. 11.4 видно, что вторичная проекция точки лежит на основании картины, когда сама точка лежит в картинной плоскости (точка A).

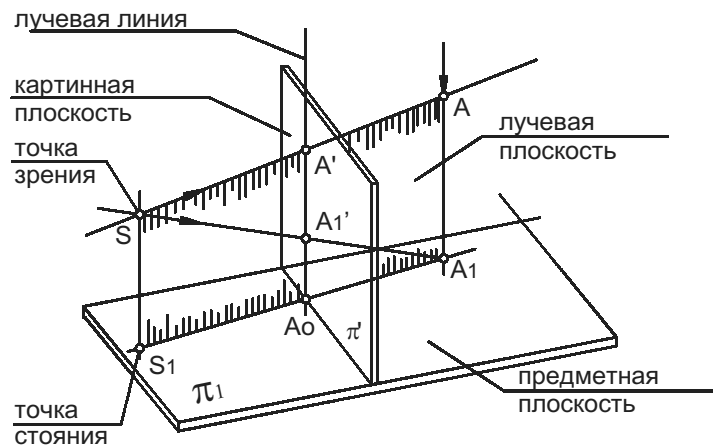


Рис. 11.2. Структура системы перспективных проекций

Проецирующий луч SA пересекает картинную плоскость в точке A' , которая и будет перспективной проекцией точки A (или просто - перспективой точки A).

Очевидно, все точки пространства, попавшие на луч SA , будут иметь перспективные проекции, совпадающие с A . Чтобы внести определенность в построения, картинная плоскость устанавливается на горизонтальной плоскости π_1 (предметная плоскость где путем прямого проецирования строится вторая проекция точки $A-A_1$. Затем строится перспективная проекция точки A_1-A_1' , называемая вторичной проекцией. Таким образом, каждая точка в пространстве системы представлена двумя проекциями - основной и вторичной, лежащими на линии пересечения лучевой плоскости с картинной (лучевая линия AO , $A_1'A'$ и лучевая плоскость SAA_1 на рис. 11.2). Понятие лучевой плоскости проекций к перспективным.

11.2. Радиальный метод построения проекций

Метод является универсальным и обеспечивает перевод любой формы из ортогональных в перспективные проекции.

Построение начинают с выбора положения картинной плоскости π' относительно объекта точки зрения S - относительно π' . Этот выбор фиксируется на ортогональном чертеже; он самым существенным образом влияет на перспективное изображение объекта и в дальнейшем будет рассмотрен детальнее.

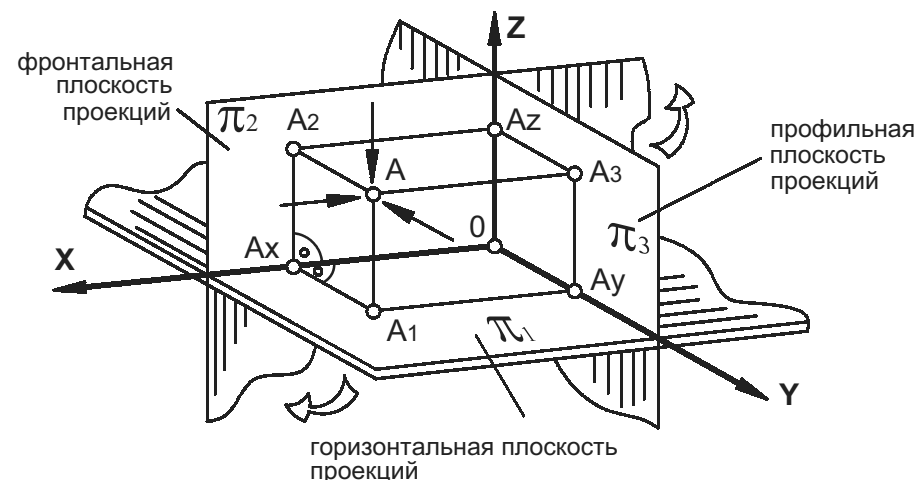


Рис. 2.2. Система ортогональных плоскостей проекции

и взаимная перпендикулярность плоскостей определяют простую взаимосвязь между всеми элементами проекций точки. Так, если опустить перпендикуляры из проекций на оси, они будут пересекаться в общей точке: A_1Ax и A_2Az , причем $A_1Ax = AA_2$ (расстояние от т. A до π_2) и $A_2Ax = AA_1$ (расстояние от т. A до π_1) и т.д. координаты точки определяются величинами $a_x = AxO$, $a_y = AyO$, $a_z = AzO$.

2.2 Развертка плоскостей проекций

Теперь, когда построены проекции точки, сама точка не нужна и пространственная система плоскостей проекций может быть превращена в удобный для дальнейшей работы и хранения плоский чертеж. Эта операция осуществляется путем поворота π_1 , вокруг оси X до совмещения с π_2 и поворота π_3 вокруг оси Z тоже до совмещения с π_2 . Получим развертку плоскостей проекций (рис. 2.3).

При развертке ось Y как бы расщепилась на две части, появились две аналогичные точки A_y . При построениях передачи размера OA_y с одной оси Y на другую может быть осуществлена разными путями. Удобно использовать нулевую линию, проведенную из начала координат под углом 45° к оси Y .

Запомним некоторые простые, но существенные закономерности размещения проекций одной точки на чертеже:

- проекции на соседние плоскости лежат на **перпендикуляре** к линии пересечения этих плоскостей, а расстояние между проекциями складывается из расстояния от точки до плоскостей проекции. Так, например,

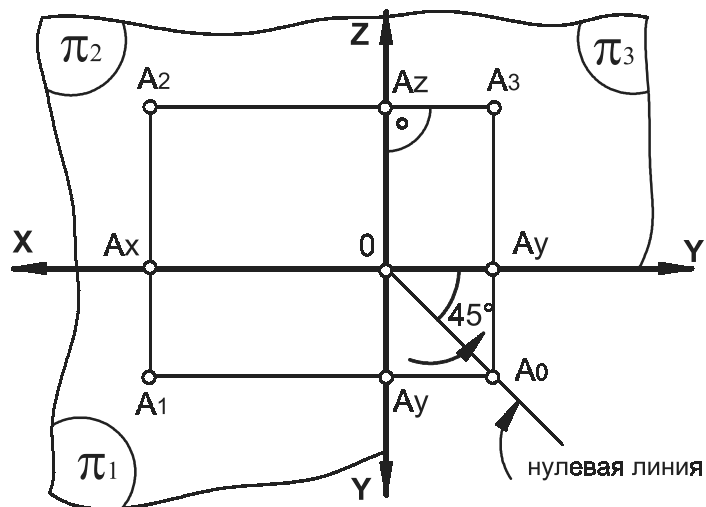


Рис. 2.3. Развертка плоскостей проекций - эюр Монжа

A_2A_x - расстояние от т. А до Π_1 , а A_1A_x - от т. AA_x до Π_2 (см. рис. 2.2.). - анализ связей проекций точки позволяет заметить жесткую зависимость третьей проекции от двух заданных. Поэтому, если комбинация геометрических элементов проста - обходятся их двумя проекциями (обычно на плоскости Π_1 и Π_2) помня, что при необходимости можно легко построить третью.

2.3. Части пространства

При разворачивании плоскостей они накладываются друг на друга, что приводит иногда к наложению проекций, которые на самом деле находятся в разных местах пространства, как и объекты, ими изображаемые. Чтобы навести в этом деле порядок и избежать путаницы при работе с чертежами, обозначают части пространства, возникшие при проявлении системы плоскостей. Так, система двух плоскостей Π_1 и Π_2 делит окружающее пространство на четыре части. Их называют соответственно **квадрантами** и нумеруют, как это показано на рис. 2.4.

Если посмотреть на систему плоскостей со стороны положительного направления оси X, то получим рис. 2.4.б, который дает наглядное представление о совмещении плоскостей при их развороте. Используем этот рисунок еще раз, разметив точки в разных квадрантах и обозначив их проекции (рис. 2.5).

Теперь совместим плоскости Π_1 и Π_2 и посмотрим куда попадут проекции точек (рисунок справа). Обычно стараются работать в 1-м квад-

11. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ

11.1. Назначение проекций и их структура

Наглядные изображения, полученные с помощью аксонометрических проекций, достаточно близки к натуральным. Однако в них не учитываются перспективные сокращения размеров, которые выражаются в изменении размеров объекта (воображаемом) по мере изменения дистанции наблюдения. Так, популярный пример с рельсами железнодорожного пути, которые кажутся сходящимися у горизонта, основан на уменьшении видимых размеров шпал - чем дальше от зрителя, тем короче.

Зрительная система человека устроена так, что модель ближнего пространства (8-10 м радиусом) она строит без учета перспективных сокращений - по аксонометрическому методу. Известно, что минимальная дистанция наблюдения определяется угловыми размерами предмета, которые не должны превышать 30° - только при этом условии происходит целостное восприятие. На рис. 11.1 изображена схема наблюдения, из которой видно, что при $\alpha = 30^\circ$, $L \approx 2H$. Иными словами, если больший размер предмета превышает 4 м, то дистанция наблюдения $L > 8$ м: предмет находится за пределами ближней зоны наблюдения и при его восприятии будут возникать искажения размеров (перспективные).

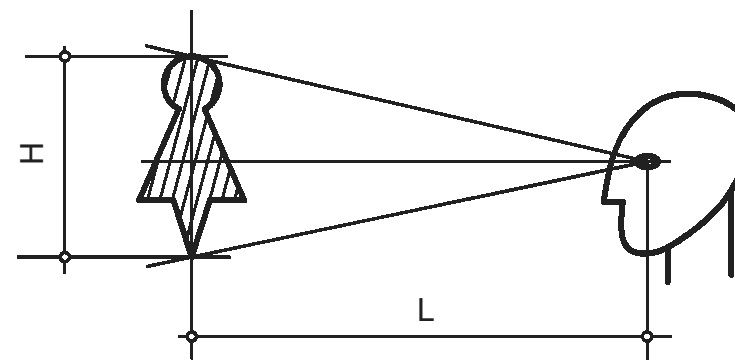
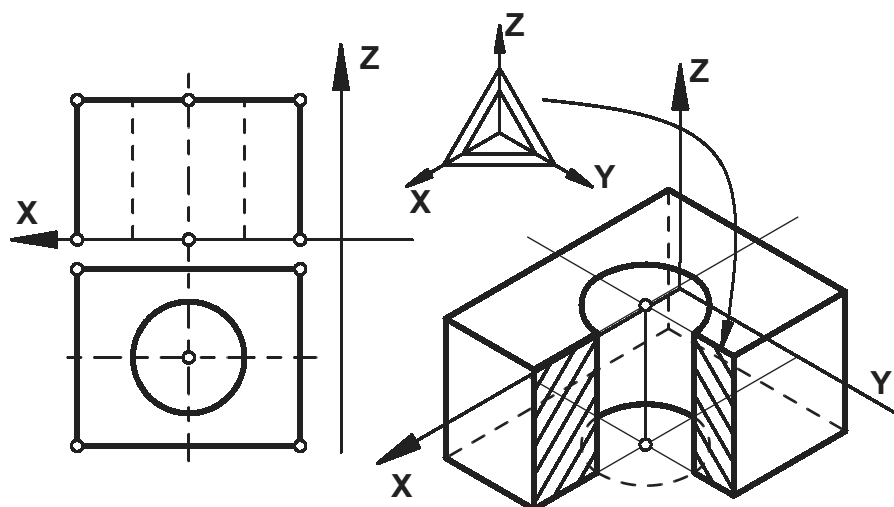


Рис. 11.1. Схема наблюдения

Для изображения объектов, величина которых более 4 м создана система перспективных проекций. В этой системе изображение строится на картинной плоскости Π' способом центрального проецирования (рис. 11.2).

Исходный чертёж

Решение



Построить изометрию детали с разрезами

Пояснение

Разрезы используют для показа внутреннего строения объекта. Секущие плоскости обычно размещают параллельно координатным плоскостям. Штриховка материала в разрезе параллельна соответствующим линиям со схемой осей.

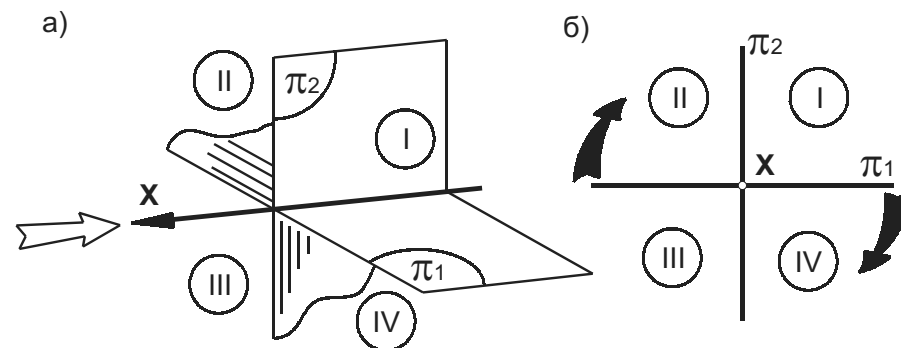


Рис. 2.4. Квадранты пространства

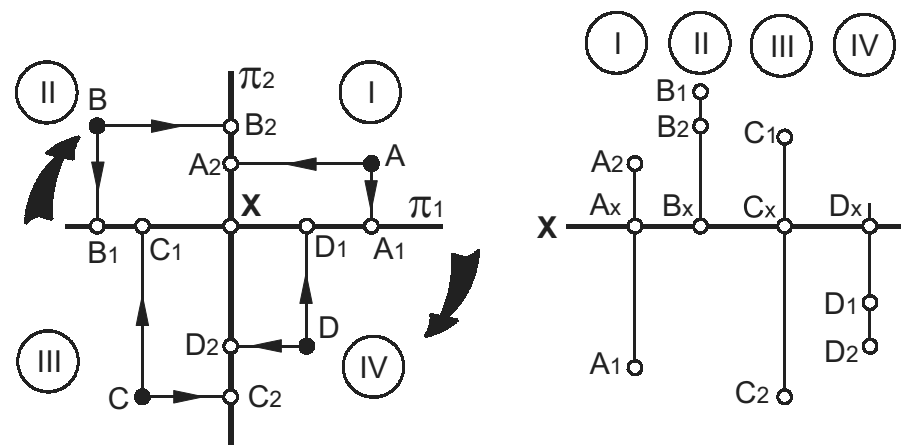


Рис. 2.5. Проекции точек, расположенных в разных квадрантах

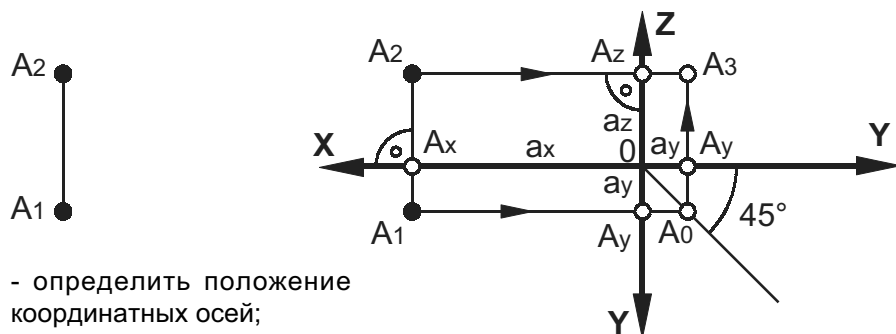
ранте (горизонтальная проекция - под осью X, фронтальная - выше оси), но, в процессе построений, некоторые элементы могут попасть в другие квадранты, что отразится в размещении проекций относительно оси X: оно симметрично в соответствии с симметрией квадрантов (I квадрант с III-м, II квадрант - IV-м).

2.4. Примеры графических построений

В примерах рассмотрены действия:

- определение положений 3-й проекции точки, если две - заданы;
- определение положения проекционных координат осей, если заданы две или три проекции точки;
- определение координат точки по ее проекциям и наоборот;
- проекции точки, расположенной в разных квадрантах пространства.

Исходный чертёж



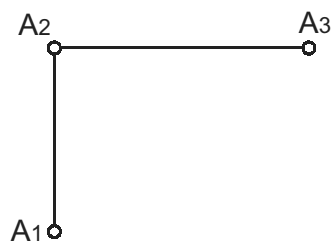
- определить положение координатных осей;
- определить положение проекции А.

Пояснение

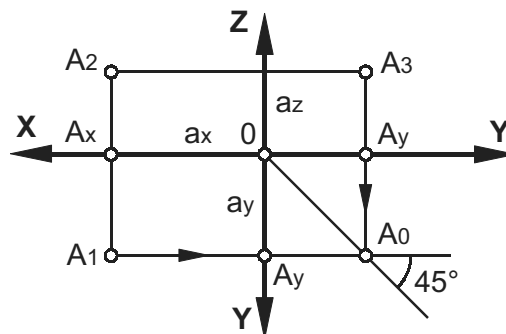
В примере ось X проведена перпендикулярно к линии A_1A_2 и между проекциями точки A_1 - A_1 и A_2 . Также решение помещает т. А в I квадрант. Положение т. О на оси X начальными условиями не ограничено и оговорено и определяется произвольно. Затем проводят нулевую линию (через т. О под углом 45° к оси X) и т.д. Координаты т. А ($a_1 = A_1A_y$; $a_2 = A_2A_z$; $a_y = A_1A_2$).

Очевидно, задача имеет множество решений, так как ось X можно перемещать вверх и вниз на какое угодно расстояние и начало координат (т. О) располагать в любом месте оси X.

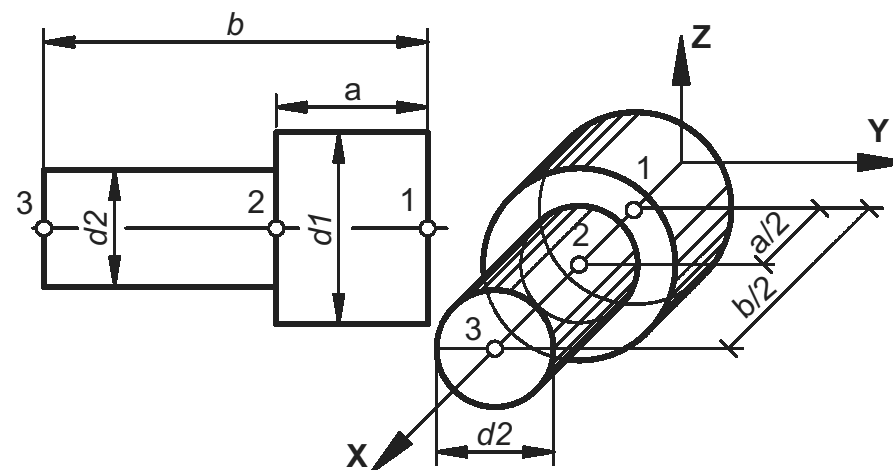
Исходный чертёж



- определить положение координатных осей;
- определить координаты точки А.



Исходный чертёж



Построить аксонометрию детали

Пояснение

Это как раз тот случай, когда имеет смысл использовать косоугольную диметрическую проекцию. Ось тела совмещается с осью OX или располагается параллельно ей. Тогда плоскости окружностей будут параллельны ей. Тогда плоскости окружностей будут параллельны плоскости YOZ, а их контуры передаются без искажений. Остается наметить на оси центра окружностей и построить их с помощью циркуля. Линии бокового контура детали - касательные к соответствующим окружностям.

Примечание

На чертеже аксонометрического изображения в левом верхнем углу обычно указывается использованный вид проекции перпендикулярных осей. Величина коэффициентов искажений откладывается по осям от начала координат в пропорции к выбранной единице длины.

Пояснение

Построение начинают с основания цилиндра. По координатам переносится центр окружности (2) и проводят два диаметра, параллельные осям. На этих диаметрах точки окружности отстоят от центра на расстоянии радиуса (точки 1, 3, 4, 5). Положение остальных точек окружности определяют с помощью хорды, параллельной одной из осей (6-8-7). Для построения ее в аксонометрии от центра 2 откладывают размер 1-7, проводят хорду и на ней засекают отрезки 8-7 и 7-6.

Кривую сечения строят, отложив по вертикали соответствующий размер, взятый с ортогонального чертежа (например 4-4' - для построения точки 4' и т.д.). Боковые контуры цилиндра - вертикальные касательные к построенным эллипсам.

Практическое замечание. Контуры эллипсов строят по точкам "от руки", а потом уже легко подобрать нужный участок лекала. Для построения в аксонометрии окружностей малого радиуса достаточно четырех точек, отмеченных этим радиусом на взаимно-перпендикулярных диаметрах, параллельных осям. В этом случае полезно вначале построить описанный квадрат, а потом в него вписать окружность.

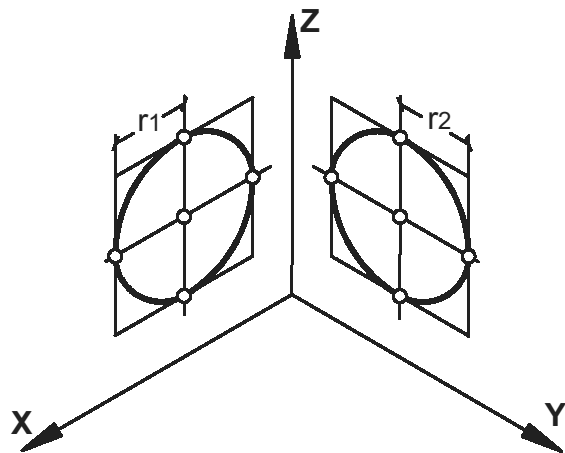


Рис. 10.7. Построение аксонометрических проекций малых окружностей.

Построение начинают с определения положения центра окружности по координатам (рис. 10.7).

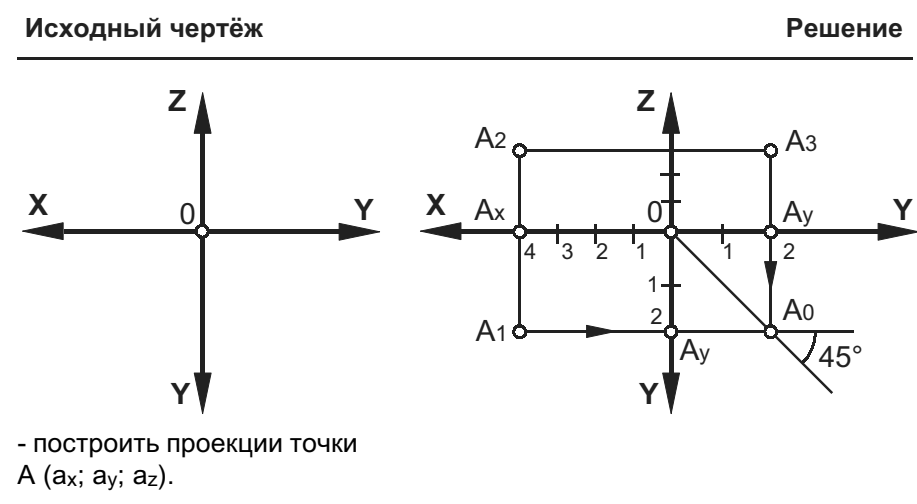
Пояснение

Задача отличается от предыдущей тем, что положение начала координат в плоскости чертежа ограничено нулевой линией. Поэтому вначале определяется положением т. A_0 , а затем через нее проводят нулевую линию под углом 45° к линии A_1A_0 (или A_3A_0).

Перемещая по нулевой линии начало координат (т. 0), мы можем поместить т. А в любой квадрант пространства, кроме III-го.

Координаты точки А (a_x ; a_y ; a_z).

Пример 2.3



Пояснение

Для определения положения проекций точки на чертеже необходимо вначале провести **градуирование** координатных осей, т.е. разместить их с помощью выбранной или заданной единицы длины. Затем на осях откладывают заданные значения координат: на чертеже - для случая А ($a_x = 4$; $a_y = 2$; $a_z = 3$) или просто А (4; 2; 3) через полученные точки A_x , A_y и A_z проводят **линии связи** перпендикулярно осям. На пересечениях линий связи расположены проекции точки А.

3. ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

3.1. Проекция прямой

Проекция линии складывается из проекций ее точек (рис. 3.5).

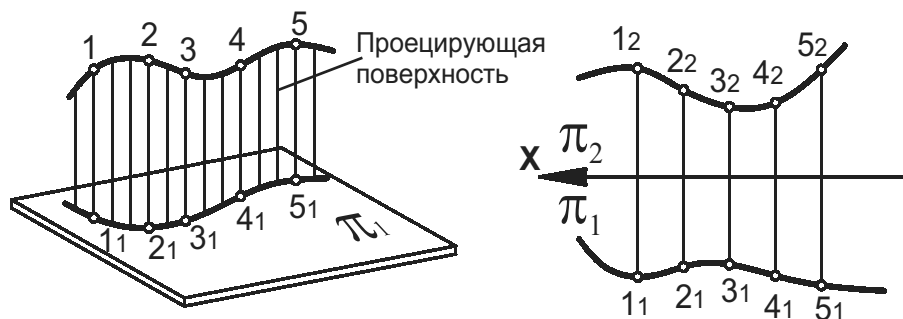


Рис. 3.5. Проекция линии

Число точек, используемых для построения проекций линии, определяется требуемой точностью построений. Совокупность проецирующих лучей, проведенных через ряд последовательных точек линии, образуют поверхность, которую называют **проецирующей**.

Если линия - прямая, то проецирующая поверхность превращается в **проецирующую плоскость** (не путать с плоскостью проекции). При этом проекция прямой будет прямой линией. Поэтому для ее построения достаточно на прямой взять две любые точки и построить их проекции (рис. 3.6).

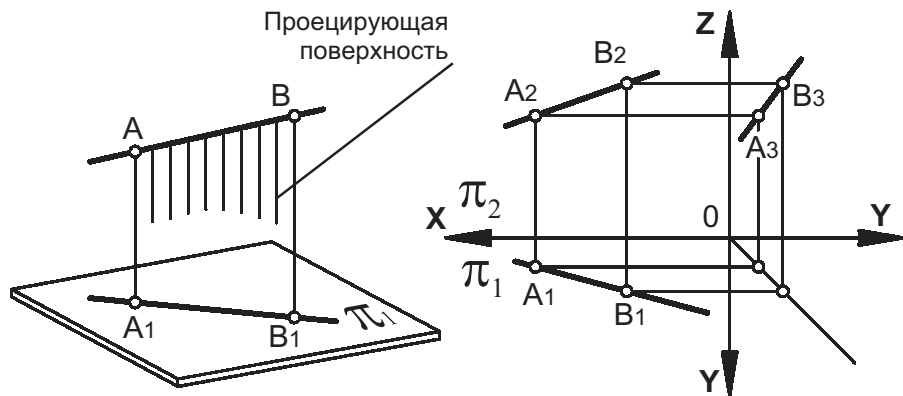


Рис. 3.6. Проекция прямой

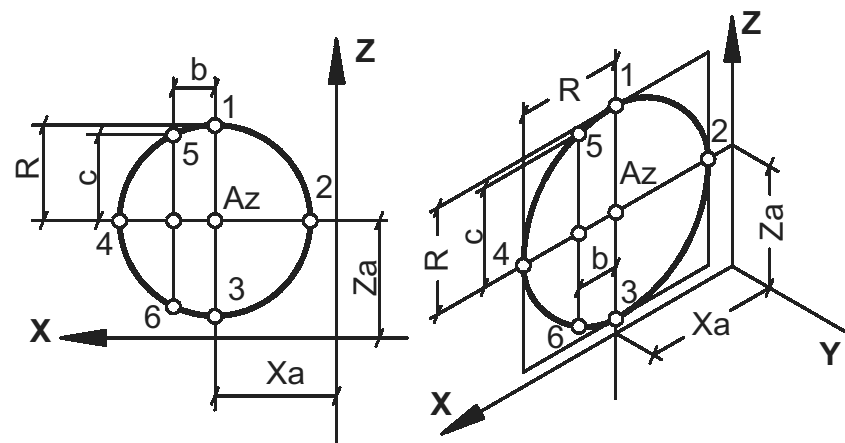


Рис. 10.6. Аксонометрия окружности, параллельной координатной плоскости

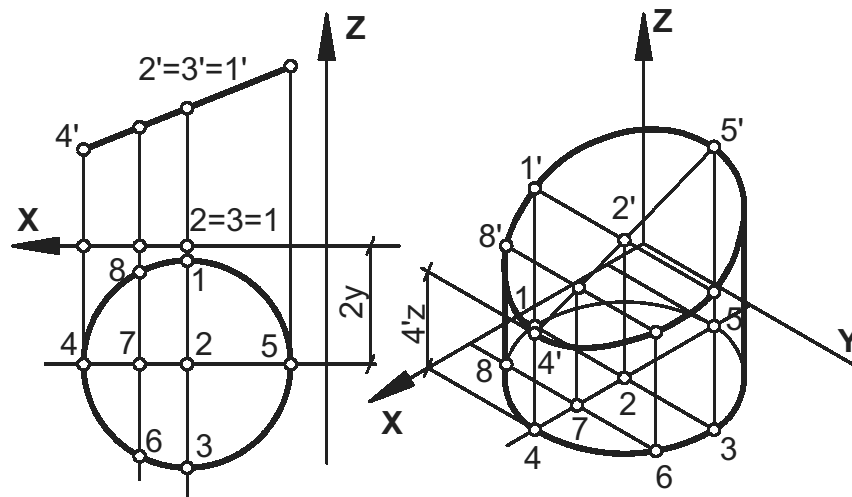
Вообще говоря, во всех случаях, когда можно перенести точку через уже построенную (как на рис. 10.6 - через центр окружности) пренебрегать этим не следует.

10.4. Примеры графических построений

Пример 10.1

Исходный чертёж

Решение



Построить изометрию усеченного цилиндра

нию изображения.

На рис. 10.5 показан переход от ортогонального к аксонометрическому (изометрическому) изображению точки с использованием осей ортогональной системы плоскостей в качестве координатных.

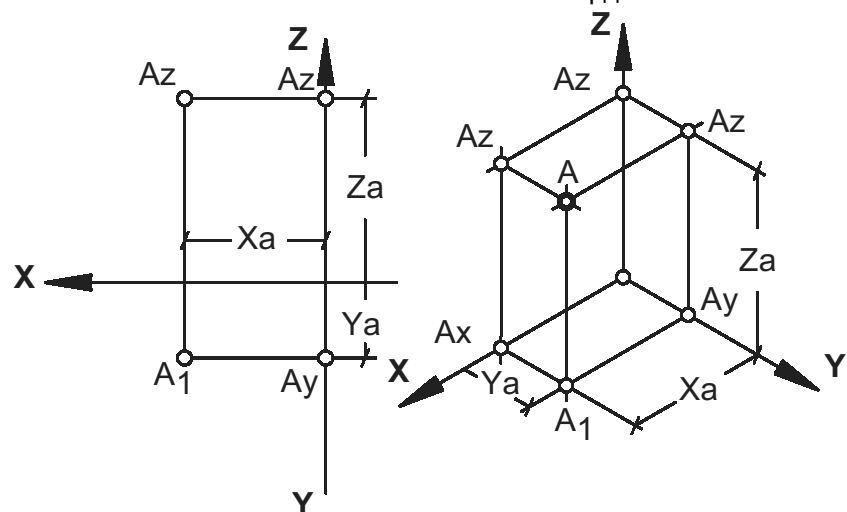


Рис. 10.5. Аксонометрия точки

Перенос любого, самого сложного изображения, складывается из переноса его характерных точек, отличаясь от рис. 10.5 только количественно.

Отдельно следует остановиться на переносе изображения окружности, поскольку она является составной частью поверхности у многих технических объектов.

Если плоскость окружности параллельна одной из плоскостей, задаваемой координатными осями, то полезно в этой окружности провести два взаимно перпендикулярных диаметра, параллельных соответствующим осям.

На рис. 10.6 показано построение изометрии окружности радиуса R , лежащей в пл. XOZ . По координатам переносится только центр окружности (т. A), проводятся два диаметра параллельных осям OX и OZ . На них из центра радиусом делают засечки, определяя положение основных четырех точек. Положение любых промежуточных точек определяется путем проведения через них хорды, параллельной одному из диаметров. Перенос этих точек осуществляется по двум координатам, связанным уже с центром окружности. Это значительно упрощает построения и уменьшает количество ошибок.

Если плоскость окружности не параллельна ни одной из координатных плоскостей, то точки окружности переносятся по стандартной схеме.

На рисунке 3.6 изображена проекция прямой **общего положения**. Сама прямая наклонена к плоскостям проекции под углами, отличными от 90° , ее **все** проекции также составляют с координатными осями углы отличные от 90° .

Иное дело, если прямая параллельна одной из плоскостей проекции. На рис. 3.7. изображена прямая, параллельная горизонтальной плоскости Π_1 .

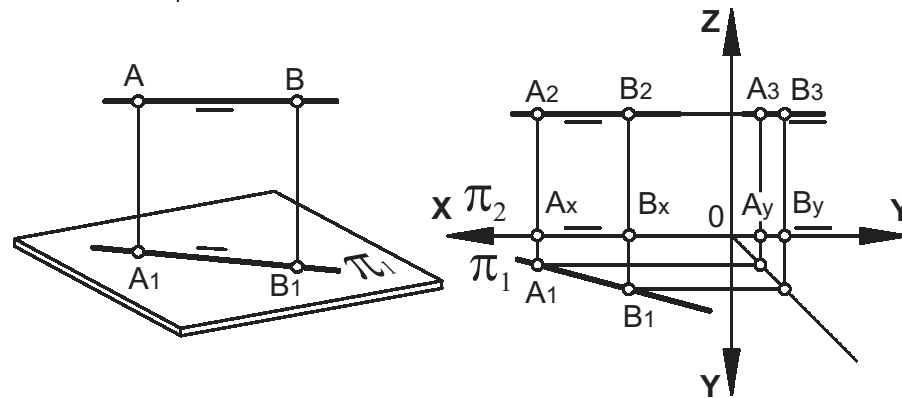


Рис. 3.7. Проекция горизонтали

Такая прямая называется **горизонталью**. Все ее точки лежат на **одинаковом** расстоянии от горизонтальной плоскости, что отражено в положении проекций точек на чертеже: $A_2A_x = B_2B_x = A_3A_y = B_3B_y$, т.е. прямая A_2B_2 параллельна оси X и перпендикулярна оси Z , прямая A_3B_3 параллельна оси Y и перпендикулярна оси Z .

Очевидно, прямая может быть расположена параллельно фронтальной плоскости Π_2 и тогда она будет называться **фронталью**. А прямая, параллельная профильной плоскости Π_3 - **профильной прямой**. Все эти прямые широко используются в различных построениях и называются прямыми **частного положения**. Нужно уметь выделять их на чертеже, а при необходимости - построить.

Как будут выглядеть проекции прямой, параллельной сразу двум плоскостям проекции и, очевидно, перпендикулярной третьей плоскости? Такая прямая совпадает по направлению с проецирующим лучом и называется **проецирующей** прямой: **горизонтально проецирующей**, если перпендикулярна плоскости проекций и т.д.

На рис. 3.7 видно, что **размеры** проекции A_1B_1 **равны** размерам отрезка AB , т.е., если отрезок прямой параллелен какой-либо из плоскостей, то его проекция на **эту** плоскость равна отрезку. Это обстоятельство используется, когда требуется знать истинную величину отрезка. С другой стороны, для облегчения работы с чертежами объек-

та стараются сам объект так расположить относительно плоскостей проекции, чтобы основные линии формы оказались параллельны этим плоскостям.

Если же прямая занимает общее положение, то все проекции ее отрезков по величине меньше самих отрезков (рис. 3.6). Как быть в этом случае, если все же требуется знать истинную величину отрезка, а есть только его проекции? Задачи легко решается путем простейших построений.

На рис. 3.8. изображен отрезок АВ, расположенный под углом α к π_1 . разность расстояний точек А и В до π_1 называют превышением (здесь: точки В над точкой А). Это превышение ВС повторяется на чертеже (справа) в вид отрезка B_2C_2 . Решение задачи сводится по существу к реставрации $\triangle ABC$, поскольку известны два его катета $BC = B_2C_2$ и $AC = A_1B_1$. что и сделано на горизонтальной плоскости чертежа. При этом определилась величина угла между отрезком и плоскостью π_1 .

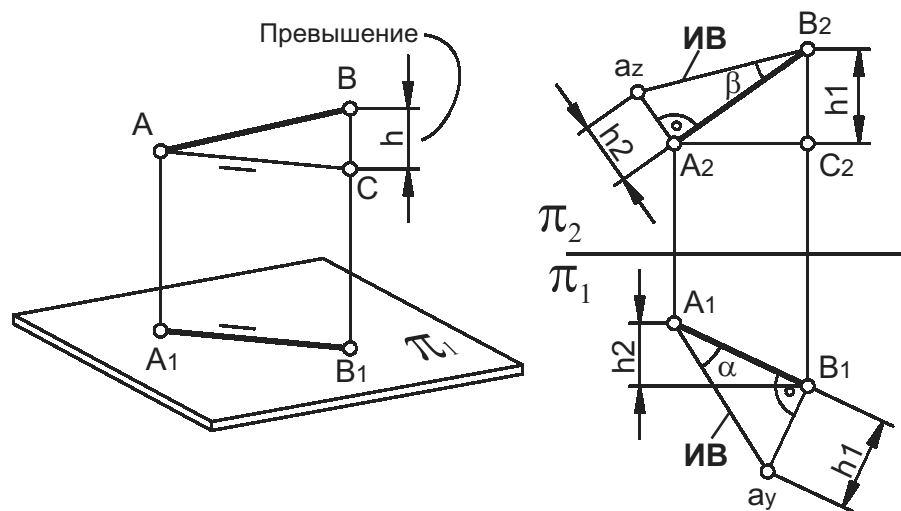


Рис. 3.8. Определение истинной величины отрезка по его проекциям

Очевидно, эту задачу можно решить, проделав аналогичное построение на фронтальной плоскости π_2 , взяв превышение между A_1 и B_1 . Ответ, естественно, будет одинаков. Только угол β определит величину наклона отрезка к π_2 .

вид проекций осей - **косоугольная диметрическая** (рис. 10.4). здесь одинаковы коэффициенты искажения по двум осям (отсюда - диметрическая). Изображение объекта, полученное в этом виде проекций осей, будет больше отстоять от его натурального вида, чем изометрическое. Однако иногда можно сознательно пойти на это, получив взамен возможность упростить процесс построения. Дело том, что некоторые технические формы содержат в своей структуре наборы окружностей, лежащих в параллельных плоскостях. В изометрической проекции эти окружности выглядят эллипсами, которые приходится строить приближенно по точкам. Если плоскости окружностей разместить параллельно плоскости ZOY , то в косоугольной диметрии эти окружности передаются без искажений и могут быть построены с помощью циркуля. Это и есть тот случай, когда можно использовать косоугольную диметрию. В остальных случаях следует рекомендовать **изометрическую проекцию**.

10.3. Методика аксонометрических построений

Итак, для перехода от ортогональных изображений объекта к аксонометрическим необходимо проделать следующие операции.

1. На ортогональном чертеже - разместить систему координатных осей (три взаимно перпендикулярные оси) и осуществить привязку к этой системе **характерных точек** объекта.

К характерным точкам поверхности объекта относятся, прежде всего точки концентрации графической информации: вершины гранной поверхности - точки пересечения ребер, точки пересечения осей вращения с поверхностью и т.д.

В качестве координатных осей обычно вначале используют оси - линии пересечения плоскостей π_1 , π_2 и π_3 . Если результат не удовлетворяет - ищут другое размещение осей.

2. Выбрать вид проекций координатных осей на картинную плоскость.

Выше говорилось, что наиболее удовлетворительные результаты дает **изометрическая проекция**, которую и следует применять в большинстве случаев.

Косоугольная диметрия применяется только в случае, когда в структуре поверхности много окружностей, лежащих в параллельных плоскостях.

Остальные виды проекций осей, рассматриваемые в учебниках, практического интереса не представляют.

3. Искажения по осям.

Следует помнить, что с ортогонального чертежа можно переносить размеры **только по осям или параллельно по осям**, не забывая о коэффициенте искажения. Перенос других размеров ведет к искаже-

используют координатные оси, уже существующие в системе ортогональных проекций.

Что касается степени приближенности изображения к его натуральному виду, то наилучший результат получается, когда координатные оси имеют одинаковый угол наклона к картинной плоскости. Вид полученных проекций осей показан на рис. 10.3.

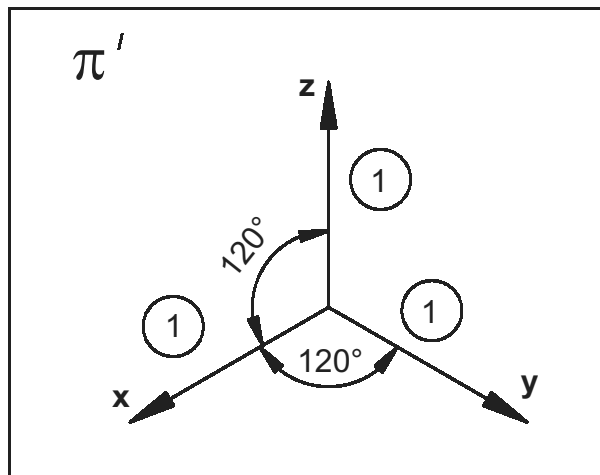


Рис. 10.3. Изометрическая проекция осей

Такой вид проекций осей называют **изометрическим**, так как коэффициент искажения **по всем** одинаков и принят равным единице для удобства построений. В действительности он равен 0,82, поэтому полученное в этой проекции аксонометрическое изображение в 1,22 раза больше, чем должно было быть.

Для практического использования можно рекомендовать еще один

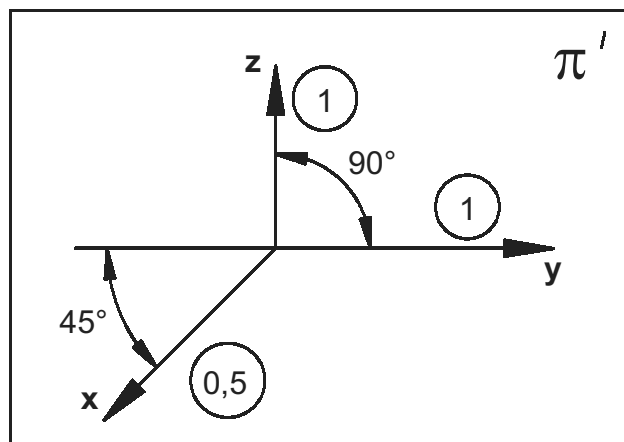


Рис. 10.4. Косоугольная диметрическая проекция осей

3.2. Проекции плоскости

Проекция поверхности в общем случае может быть получена как совокупность проекций точек, этой поверхности принадлежащих. Однако, в простейших случаях, можно обойтись проекциями образующей и направляющей, имея которые можно построить проекцию любой точки поверхности. В дальнейшем это будет использовано.

Плоскость является простейшим видом поверхности: она образуется при перемещении прямой параллельно заданному направлению по прямой не направляющей.

Как известно, положение плоскости определяется тремя ее точками, не лежащими на прямой. Зная положение трех точек плоскости, можно перейти к любому другому заданию ее, более удобному при решении конкретной задачи.

На рис. 3.9. показаны наиболее часто применяемые разновидности задания плоскости.

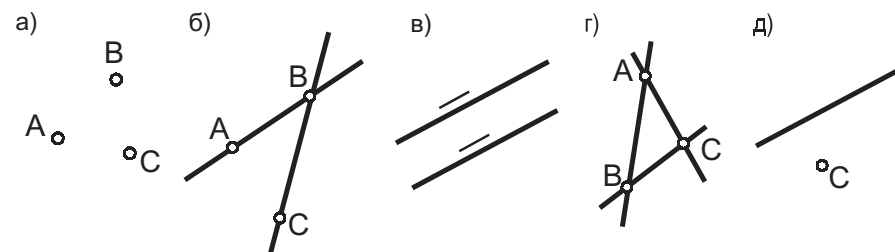


Рис. 3.9. Способы задания плоскости:

а - тремя точками; б - пересекающиеся прямые; в - параллельные прямые; г - треугольник (любая плоская фигура); д - прямой и точкой.

Плоскость может занимать **частное** положение в пространстве плоскостей: быть **перпендикулярной** одной из плоскостей проекций. Плоскости частного положения широко используются в различных построениях, поэтому необходимо уметь выделить их на чертеже, а также уметь их строить (в проекциях). На рис. 3.10 плоскость, заданная пересекающимися прямыми, занимает общее (слева) и частное (справа) положения.

Обратите внимание, что проекции **всех** элементов, лежащих в плоскости, выстраиваются в одну прямую линию (на рис. 3.10 - это а1; б1; А1). Иными словами, все элементы, лежащие на плоскости, проецируются в **одну линию** на плоскость проекции, если плоскости перпендикулярны (угол α - это угол между плоскостью и фронтальной π_2).

Плоскость при этом называют **проецирующей**, поскольку она таковой и является для всех элементов, в ней лежащих. Если она перпендикулярна к горизонтальной плоскости (как на рис. 3.10), то ее можно назвать **горизонтально-проецирующей** и т.д.

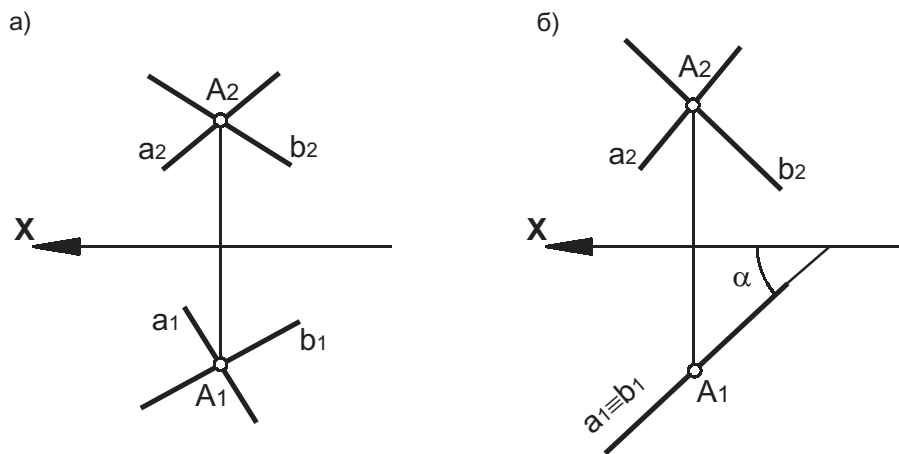


Рис. 3.10. Проекция плоскостей: а - общего; б - частного положения

Так, на рис. 3.11 изображены фронтально-проецирующая и профильно-проецирующая плоскости, заданные параллельными прямыми и треугольником.

Забегая вперед отметим, что у параллельных линий проекции также параллельны (рис. 3.11,а).

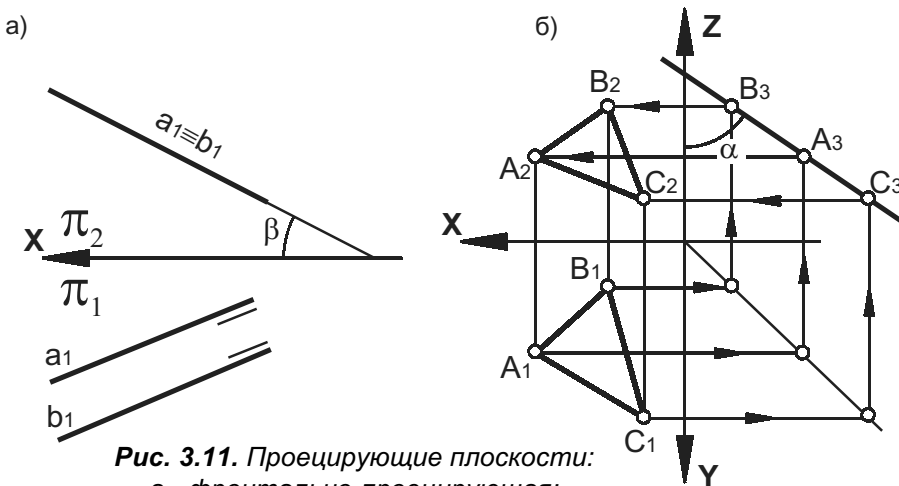


Рис. 3.11. Проецирующие плоскости:
а - фронтально-проецирующая;
б - профильно-проецирующая

располагается относительно плоскости проекций (ее называют **картинной плоскостью**) так, чтобы получить наиболее характерный его вид (рис. 10.1).

На самом же деле объект в натуре еще не существует, а есть только его ортогональные изображения. Чтобы перейти от этих изображений к аксонометрическим, используют простой метод: ортогональные изображения связывают с системой координатных осей, эти оси проецируются на картинную плоскость (рис. 10.2); определяют координаты характерных точек структуры объекта и по этим координатам изображения точек переносят на картинную плоскость.

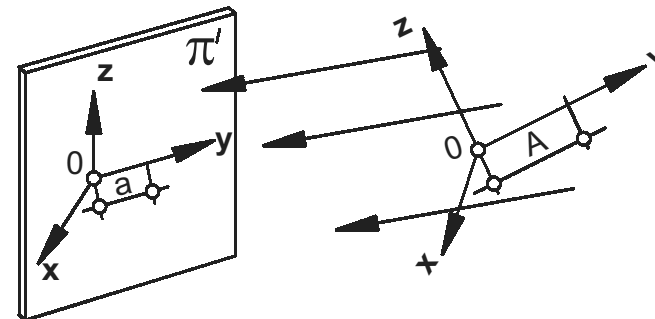


Рис. 10.2. Координатные оси

При проецировании координатных осей принятая для градуирования линейная единица может изменять размеры - в зависимости от угла наклона оси к плоскости проекций и направления проецирующих лучей. Это обстоятельство учитывается **коэффициентами искажения**, которые определяются для каждой оси и представляют собой отношение величин проекций единицы к ее истинному значению ($K = a/A$ на рис. 10.2).

10.2. Виды проекций координатных осей

Наглядность аксонометрического изображения зависит от того, как расположен объект относительно координатных осей и как сами оси размещены относительно картинной плоскости. Причем, если первое обстоятельство связано с **выразительностью** изображения, то второе - с той или иной **степенью приближенности** изображения к его натуральному виду.

Правильное (т.е. дающее выразительное изображение) размещение объекта относительно осей определяется путем проверки разных вариантов. Причем, в качестве исходного варианта обычно

Пояснения.

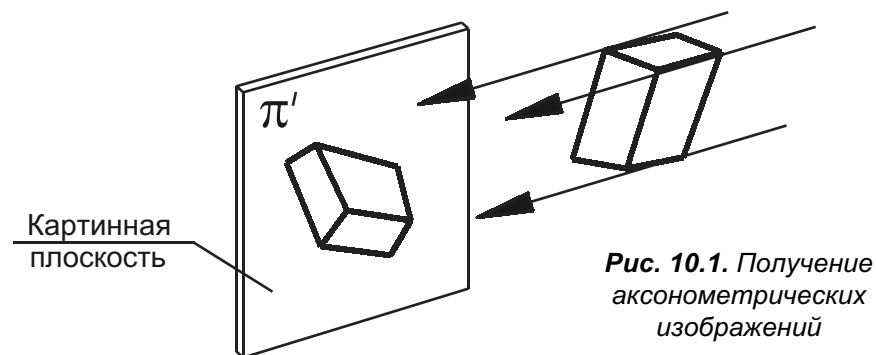
Построение откосов начинают с определения **линии нулевых работ** - линии, совпадающей с плоскостью сооружения (на чертеже - 12-я горизонталь). С одной стороны от нее - насыпь (отметки сооружения больше отметок местности), с другой - выемка. Затем плоскости откосов пристраивают к **бровке**, сооружения, после чего определяется линия пересечения поверхностей откосов с местностью - граница земляных работ.

10. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

10.1. Назначение проекций

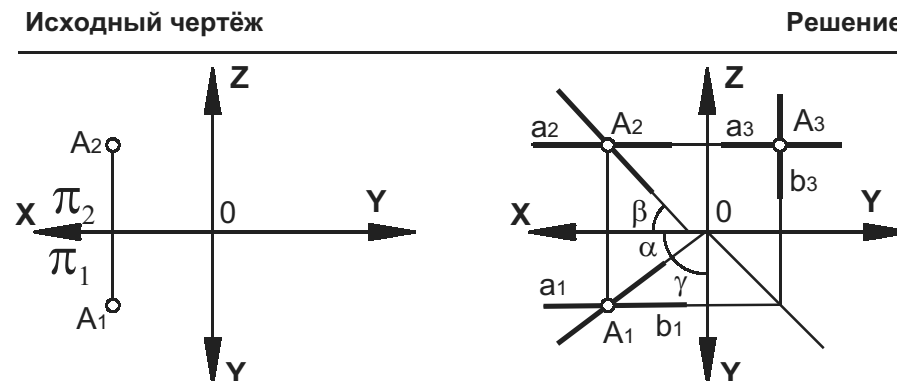
Процесс проектирования формы изделия движется от замысла к эскизам, с последующей детальной проработкой методами начертательной геометрии, результат которой фиксируется в ортогональных чертежах. Однако, ортогональные изображения не дают достаточно полного представления о форме изделия, так как для удобства работы с ними - поверхности, плоскости, ребра, оси занимают обычно частное положение. Поэтому, прежде чем перейти к следующей стадии проектирования - объемному макетированию - желательно получить возможно более общее представление о форме изделия, с тем, чтобы внести в чертежи изменения, которые могут возникнуть в результате этого представления.

Для построения **общего вида** проектируемых изделий по их **ортогональным изображениям** используются аксонометрические проекции. Задача этих проекций состоит в получении такого изображения объекта, которое создает впечатление о внешнем виде изделия, достаточно близкое к тому впечатлению, которое создавало бы рассматривание реального предмета. Это достигается путем **параллельного** проецирования элементов формы объекта на **одну** плоскость. При этом объект



3.3. Примеры графических построений

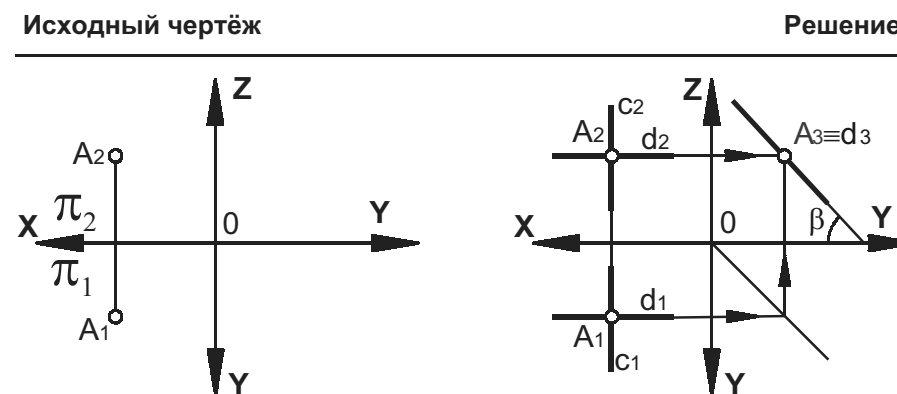
Пример 3.1



Через т. А провести:

- прямую а - горизонталь под углом $\alpha = 45^\circ$ к π_2 ;
- прямую b - фронталь под углом $\beta = 45^\circ$ к π_1 .

Пример 3.2



Через т. А провести:

- прямую с - профильную под углом $\alpha = 45^\circ$ к π_2 ;
- прямую d - параллельную π_1 и π_2 .

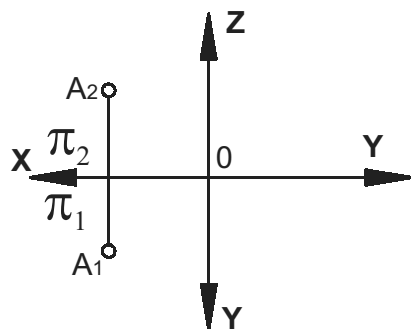
Пояснения к примерам

Изучив чертежи, можно отметить:

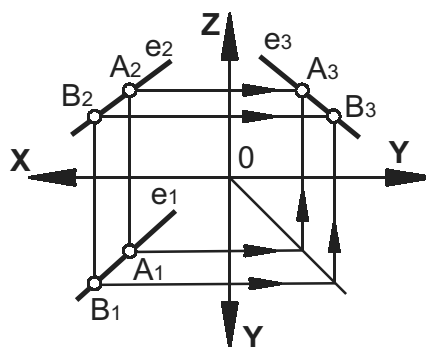
- если прямая параллельна одной плоскости проекции, то ее проекция на эту плоскость образует углы с осями, равные углам между прямой и соответствующим плоскостями (например, угол α равен углу между прямой a и π_2 , угол β - между прямой b и π_1);
- две другие проекции прямой **параллельны** осям, лежащим в параллельной плоскости (например, $a \parallel \pi_1$; в π_1 лежат оси X и Y , тогда $a_2 \parallel O_X$ и $a_3 \parallel O_Y$);
- прямая, параллельная сразу двум плоскостям, перпендикулярна третьей плоскости проекций (пример, $d \parallel \pi_1$ и $d \parallel \pi_2$, из построения $d \perp \pi_3$; такая прямая называется профилно-проецирующей).

Пример 3.3

Исходный чертёж



Решение



Через т. А провести:

- прямую общего положения e .

Пояснение

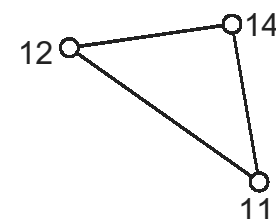
Вспомним, что две проекции произвольны, а третья - зависима от них. Поэтому проекции e_1 и e_2 проводим произвольно. Для построения правильной проекции e_3 надо построить проекции двух точек, лежащих на прямой e . Точка A задана условием. Точка B выбирается произвольно: условие одно - принадлежность прямой e . Поэтому проекции B_1 и B_2 должны лежать на проекциях прямой e_1 и e_2 соответственно.

Для построения линии пересечения плоскостей надо найти две общие точки. Они находятся как результат пересечения одноименных горизонталей плоскостей (на чертеже - это 5-й и 6-й горизонталей, пересекаются в точках P и K).

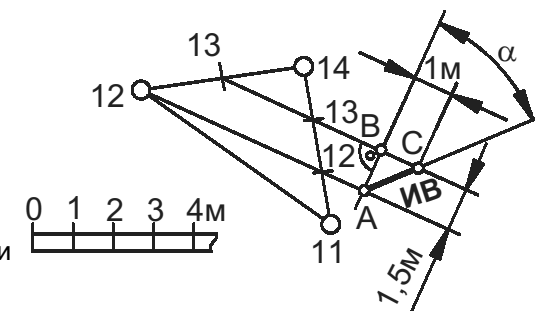
Положение горизонталей плоскости треугольника определяется после градуирования боковых сторон - они проходят через точки в одинаковых отметках.

Пример 9.2.

Исходный чертёж



Решение



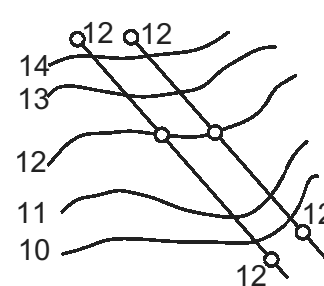
Определить угол наклона и угол плоскости.

Пояснение

Горизонталей плоскости проводят после градуирования сторон треугольника. Затем проводят линию наибольшего ската AB , так как она определяет и уклон и наклон плоскости. Если отложить $BC = 1$ м, то AC - истинная величина AB . Величина интервала AB - 1,5 м (по масштабу). Тогда α - угол наклона плоскости, а ее уклон $i = 1:1,5$.

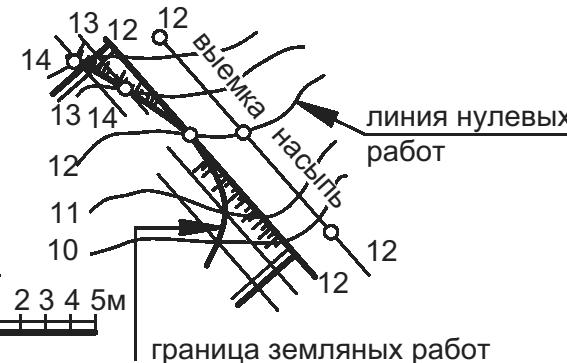
Пример 9.3.

Исходный чертёж



Построить откосы дорожного полотна с уклоном 1:1 для насыпи и 1:1,5 для выемки

Решение



Если бровка в плане изгибается, то поверхность откоса уже не будет плоской. Важно только сохранить постоянный уклон откоса на всем его протяжении. В противном случае откос может размываться в местах с большим уклоном.

Указанное требование обеспечивается при проектировании построением конусных поверхностей заданного уклона вдоль бровки. Тогда горизонтали откоса проходят касательными к одноименным горизонталям конусных поверхностей. На рис. 9.18 показано такое построение - откос выемки с заложением I . Построенную поверхность откоса называют **поверхностью одинакового ската**, ибо уклон ее постоянен.

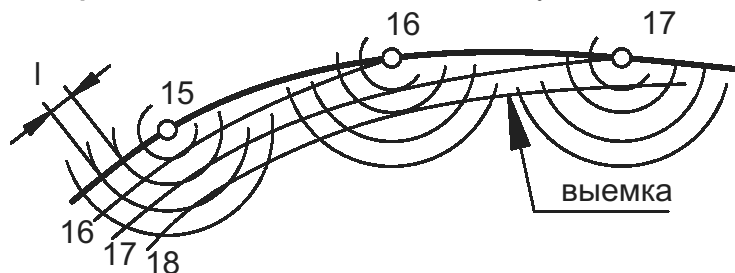


Рис. 9.18. Бровка - наклонная кривая

9.5. Примеры графических построений

Пример 9.1.

Исходный чертёж	Решение

Построить линию пересечения плоскостей, заданных треугольником и масштабом уклона.

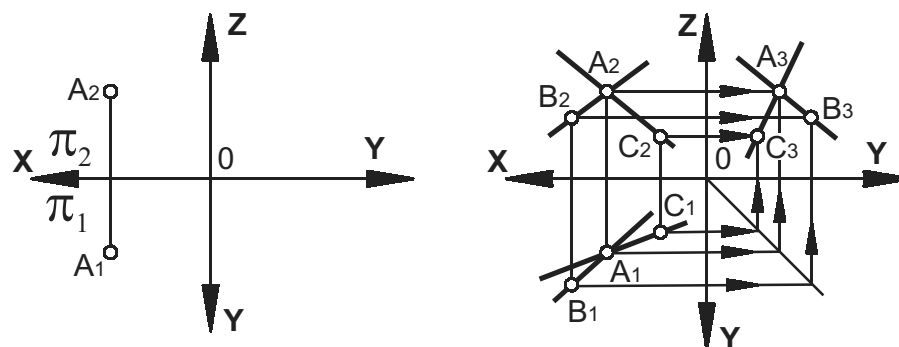
Пояснение

Положение линий пересечения плоскостей и поверхностей определяется обычно по 3-му методу ибо линии пересечения этих элементов с секущими (координатными) плоскостями - горизонтали - уже заданы или могут быть построены.

Пример 3.4

Исходный чертёж

Решение



Через т. А провести:

- плоскость общего положения.

Пояснение

Очевидно, задача имеет множество решений, поскольку через точку можно провести сколько угодно плоскостей. Одна из плоскостей (ее проекции) задана на чертеже двумя прямыми (a и b) проведенными через точку A.

При этом две проекции (на π_1 и π_2) проведены произвольно. Для построения профильных проекций прямых a и b, задающих плоскость, на каждой из прямых выбирается произвольная точка.

4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ: ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

4.1. Взаимное положение прямых

Можно представить только три варианта взаимного положения двух прямых в пространстве.

Прямые параллельны

Прямые параллельны

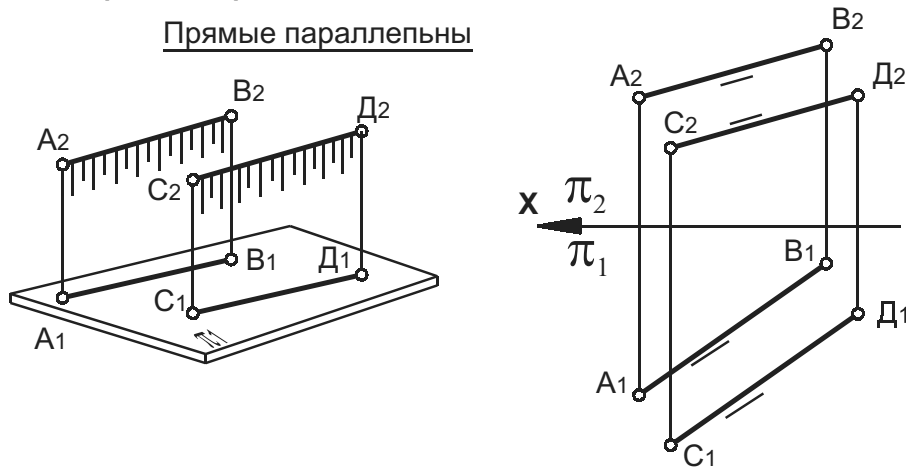


Рис. 4.1. Параллельные прямые

Можно показать, что если $AB \parallel CD$ (рис. 4.1), то проведенные через них проецирующие плоскости тоже параллельны, как и проекции этих прямых ($AB \parallel CD$).

Если прямые параллельны друг другу, то их проекции всегда параллельны.

Прямые пересекаются

Если прямые пересекаются, то они имеют одну общую точку, что и находит свое отражение в проекциях прямых (рис. 4.2).

Поверхность откоса пересекается с поверхностью площадки по линии, называемой **бровкой**. Бровка - это начало откоса. Заканчивается откос линией пересечения с землей - **границей земляных работ**. Внутри этих границ обычно снимают гумусовый слой. Если бровка - прямая линия, то поверхность откосов - плоскость. Если при этом бровка - горизонтальна, то горизонтали откосов параллельны бровке, а расстояние между ними (интервал) определяется заданной величиной уклона (рис. 9.16).

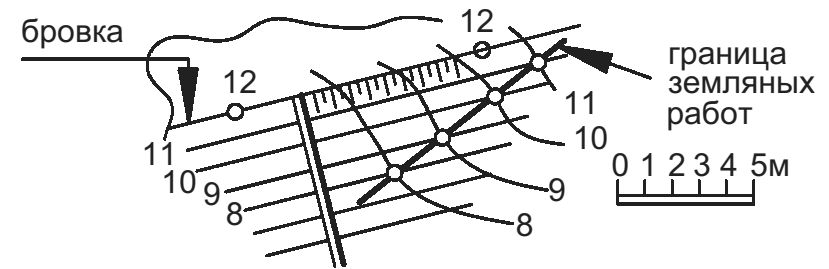


Рис. 9.16. Бровка - горизонтальная прямая

На рисунке построен откос насыпи (отметки горизонталей убывает по мере удаления от бровки), уклон 1:1. Граница земляных работ - линия пересечения плоскости откосов с поверхностью земли.

Откос выемки строится аналогично. Отличие в том, что отметки горизонталей возрастают, удаляясь от бровки - откос растет вверх.

Если бровка наклонена, то горизонтали плоскости откоса располагаются под некоторым углом к бровке, начинаясь на одноименной отметке бровки и проходя на расстоянии l от следующей отметки (заложение l - по заданному уклону: $i = 1:2$, если $i = 1:1, 5$, то $l = 1, 5$ и т.д.).

На рис. 9.17 показано построение откосов насыпи и выемки для этого случая.

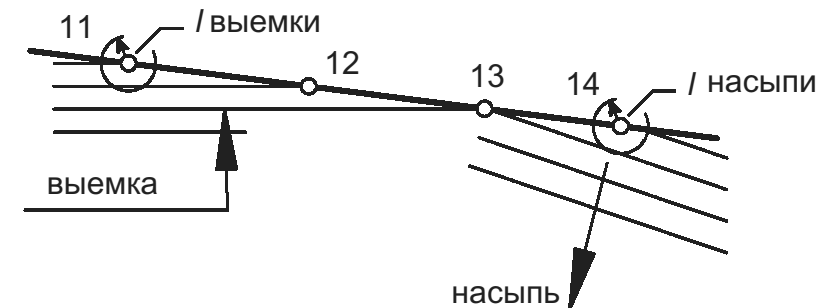


Рис. 9.17. Бровка - наклонная прямая

При пересечении поверхности прямой линией используют 1-й метод через прямую проводят вспомогательную плоскость общего положения и определяют линию пересечения (пример на рис. 9.14).

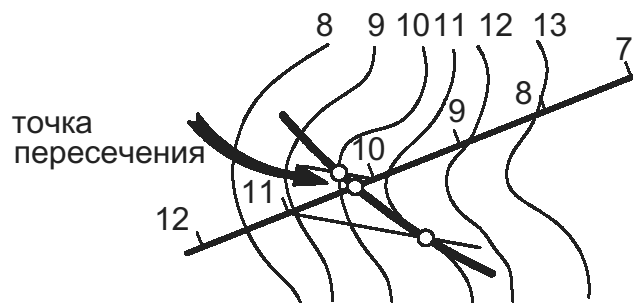


Рис. 9.14. Пересечение поверхности прямой линией

9.4. Построение откосов

При посадке различных сооружений на местность часто возникает необходимость в изменении формы земной поверхности: там, где надо понизить уровень земли - ее убирают, образуется **выемка**; чтобы повысить - грунт насыпают (**насыпь**).

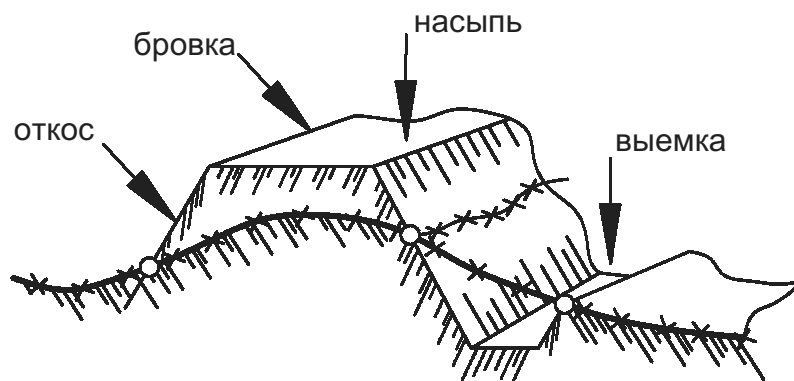


Рис. 9.15. Откосы насыпей и выемок

Боковые поверхности насыпей и выемок называют **откосами**. Наклон откосов определяется составом и структурой грунта. Во всяком случае, величина уклона откосов выемки больше откосов насыпи, ибо плотность нетронутого грунта больше насыпного.

Прямые пересекаются

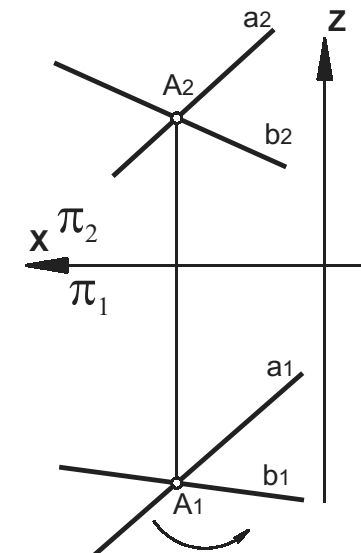
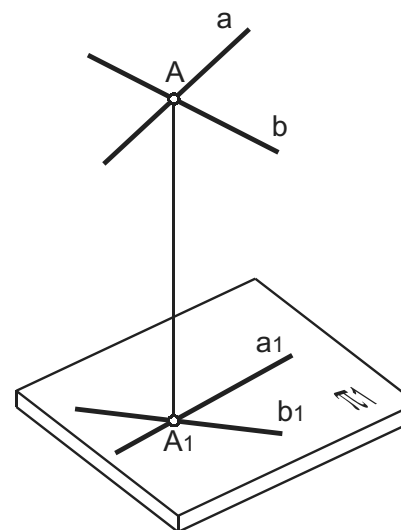


Рис. 4.2. Пересечение прямых

Прямые скрещиваются

Прямые скрещиваются

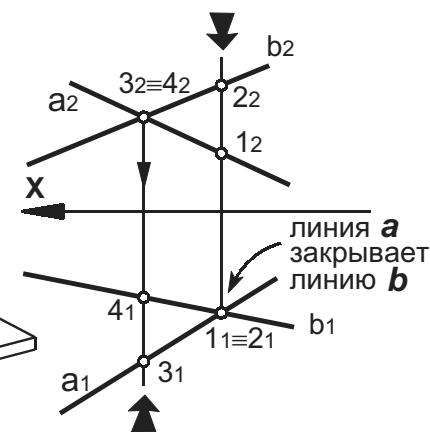
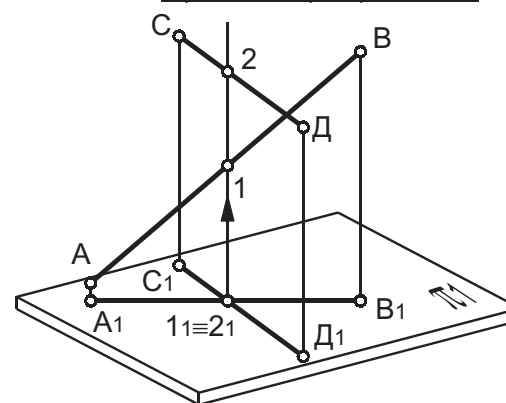


Рис. 4.3. Прямые скрещиваются

Если прямые не параллельны и не пересекаются, то говорят, что прямые скрещиваются. При этом их проекции пересекаются, но точки пересечения не лежат на одном перпендикуляре к оси (линии связи).

Очевидно, если из такой точки восстановить перпендикуляр, то он пересечет обе прямые (точки 1 и 2 на рис. 4.3). Эти точки называют **конкурирующими** - по ним можно судить, какая прямая в данном месте ближе к плоскости проекции (на примере рис. 4.3 прямая а в районе т.1 ближе к пл. π_1 , чем прямая б в т.2 и т.д.). Понятие о конкурирующих точках - при определении **видимости** элементов на чертеже.

Понятие видимости используют для повышения наглядности изображения: если два элемента располагаются один над другим относительно плоскости проекции, то видимым считается тот, что лежит **дальше** от плоскости. В рассматриваемом примере т. 2 видима, а т.1 - невидима. Позднее мы используем это понятие.

Угол между прямыми

Прямые пересекаются, образуя некоторый плоский угол. Если при этом прямые параллельны плоскости проекции, то на эту плоскость угол проецируется в натуральную величину (рис. 4.4) где а и б параллельны π_1 .

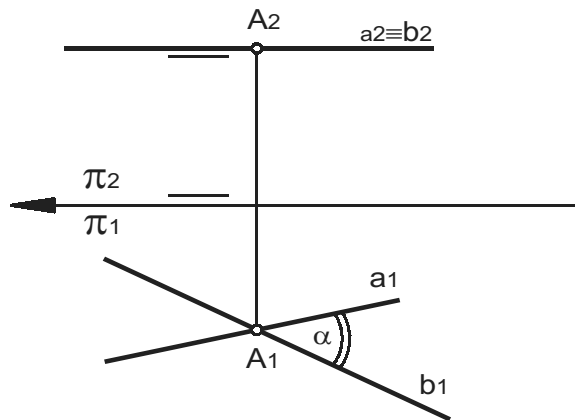


Рис. 4.4. Угол между прямыми

В остальных случаях углы между прямыми и их проекциями различаются. Исключения:

- если угол между прямыми равен 90° , то достаточно параллельности плоскости проекции одной из прямых, чтобы угол между проекциями тоже был 90° .

В этом легко убедиться, если поместить один карандаш параллельно плоскости проекции, а другой вращать вокруг него, так чтобы он оставался перпендикулярен первому.

Из правила следует, что если прямая занимает частное положение, то можно легко построить на чертеже прямую, перпендикулярную к первой.

хи показывают направление уклона поверхности, пунктир проведен по дну оврага.

Полезно отметить некоторые закономерности в изображении поверхности горизонталями. О том, что горизонтالي не должны иметь разрывы - говорилось выше. Возможная последовательность нумерации горизонталей хорошо видна на разрезе (рис. 9.12)

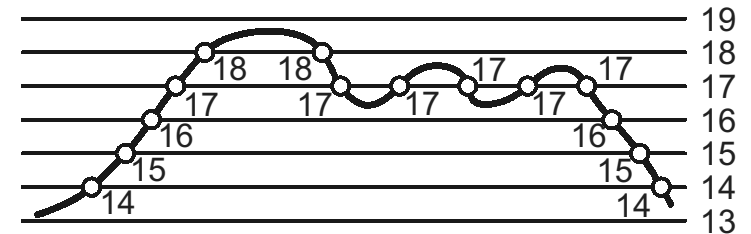


Рис. 9.12. последовательность нумерации горизонталей

Из анализа рисунка видно:

- нумерация горизонталей не может иметь пропуски в последовательности (т.е. горизонталь, соседняя например с 15-й, может быть 14, 15, 16-й, но не 17-й или 13-й);
- в месте изменения знака уклона проходят **две одноименные** горизонтали;
- одноименных соседних горизонталей может быть любое количество.

Пересечение поверхностей между собой и пересечение поверхности прямой решается как и в случае с плоскостями - без особых усилий, поскольку заранее известны линии пересечения поверхности секущими плоскостями - горизонталями. На рис. 9.13 показано пересечение двух поверхностей: линия пересечения проходит через точки пересечения одноименных горизонталей.

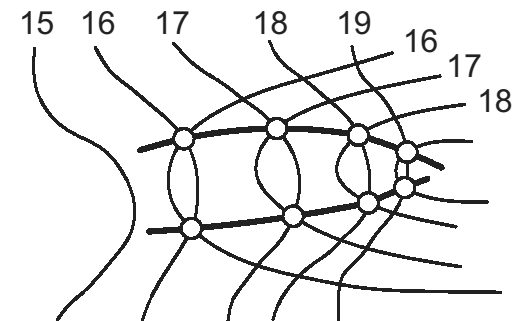


Рис. 9.13. Пересечение поверхностей

9.3. Поверхности

Как и плоскости, поверхности наиболее удобно задавать с помощью горизонталей - линий пересечения поверхности координатными плоскостями. Тогда конусные, сферические и подобные им поверхности будут изображаться концентрическими горизонталями, а поверхности более близкие к плоскости - серией рядом лежащих горизонталей (рис. 9.10).

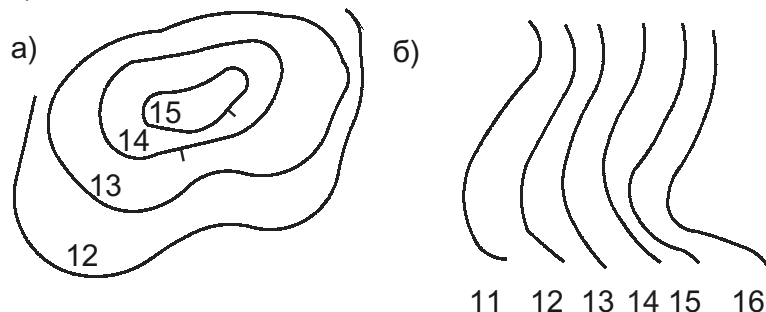


Рис. 9.10. Поверхности в горизонталях:
а - выпуклая поверхность; б - плоская поверхность

Горизонтالي, изображающие поверхность (и их проекции) могут быть замкнуты или нет, но, очевидно, не должны прерываться, если поверхность не имеет разрывов.

Наиболее популярным и, в тоже время, наиболее разнообразным по структуре видом поверхности является **земная поверхность**. Большинство строительных объектов возводятся на поверхности земли и должны быть надежно с ней связаны, для чего необходимо иметь достаточно точные ее изображения. Типичная форма земной поверхности - сочетание относительно плоских участков с выпуклостями, впадинами, складками. На рис. 9.11 показан такой участок. Черточки-Бергштри-

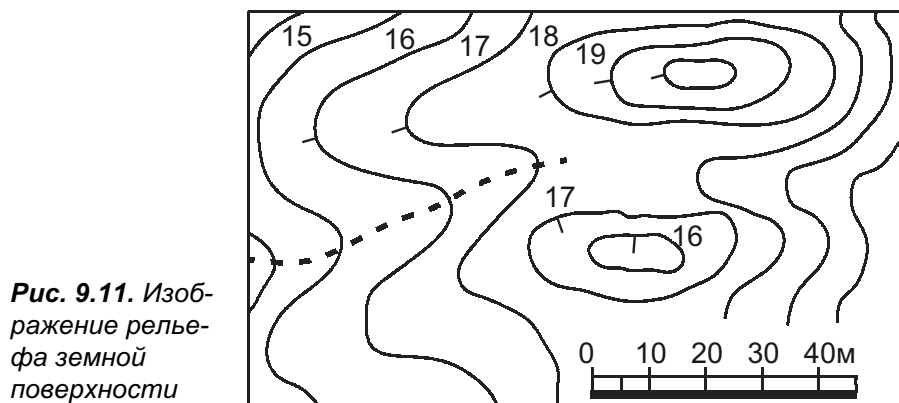


Рис. 9.11. Изображение рельефа земной поверхности

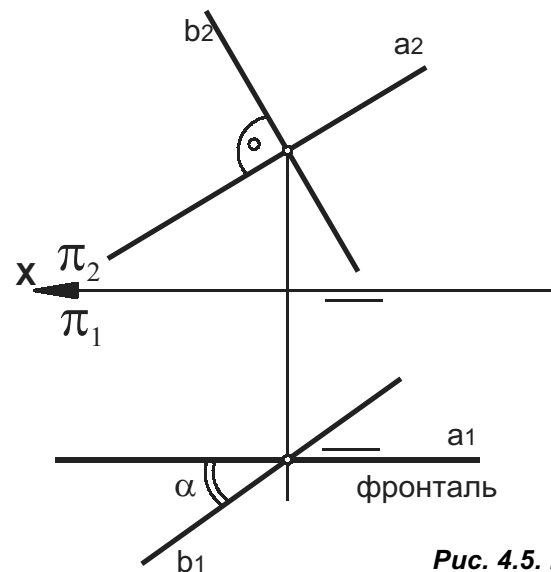


Рис. 4.5. Перпендикулярные прямые

На рис. 4.5 к фронтالي **а** через т. А проведена прямая $b \perp a$. Угол α может принимать любые значения.

Очевидно, возможно и обратное построение. Иными словами, через точку на прямой общего положения можно без дополнительных построений провести к этой прямой три перпендикуляра: горизонталь, фронталь и профильную прямую (рис. 4.6).

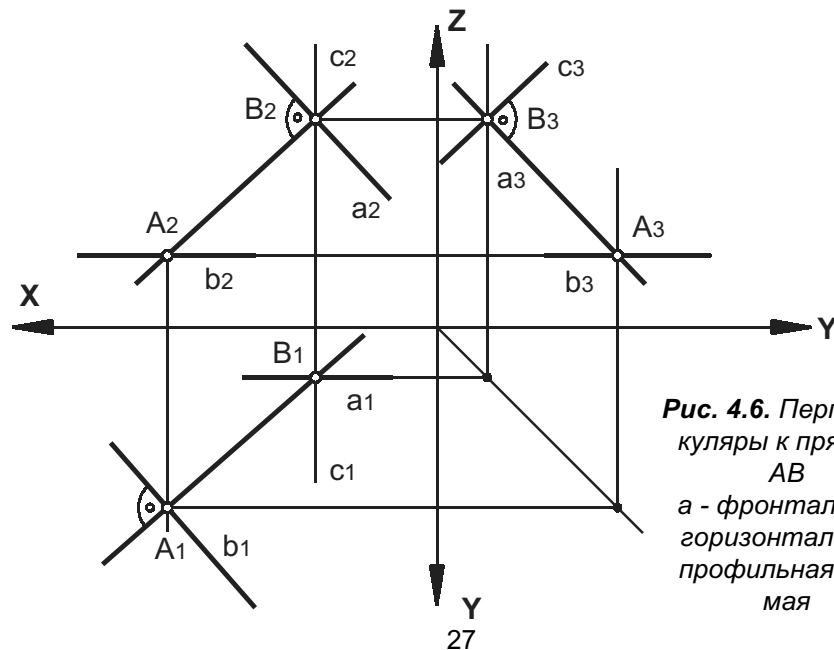


Рис. 4.6. Перпендикуляры к прямой: АВ
а - фронталь; в - горизонталь; с - профильная прямая

4.2. Взаимное положение прямой к плоскости

Возможны варианты - прямая параллельна плоскости и прямая пересекается с ней.

Прямая параллельна плоскости

Известно, что прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в плоскости.

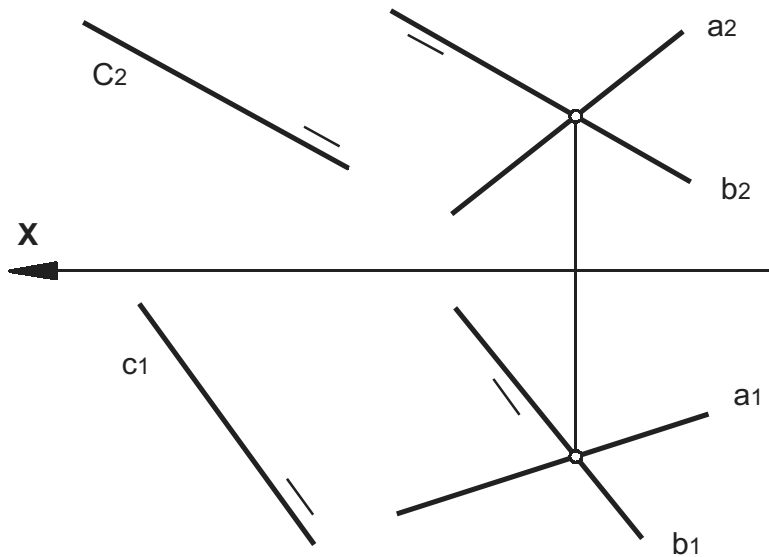


Рис. 4.7. Прямая параллельна плоскости

На рис. 4.7 плоскость P ($a \cap b$), $c \parallel a$, значит $c \parallel \text{пл.} P$. Частный случай параллельности, когда прямая лежит в плоскости.

Чтобы прямая лежала (**принадлежала**) плоскости, достаточно определить две общие для них точки.

На рис. 4.8 плоскость задана параллельными прямыми. Надо провести прямую C , лежащую в плоскости. Поскольку иных ограничений на положение прямой нет, то одна из проекций прямой C проводится произвольно. На рисунке - это фронтальная проекция. Проекция прямой C пересекается с элементами, задающими плоскость, в точках 1_1 и 2_2 . Принимаем точки 1 и 2 за точки пересечения прямой C с прямыми a и b , тем самым определяя положение проекций 1_1 и 1_2 (на a и b - соответственно). Через эти проекции и пройдет точка C_1 .

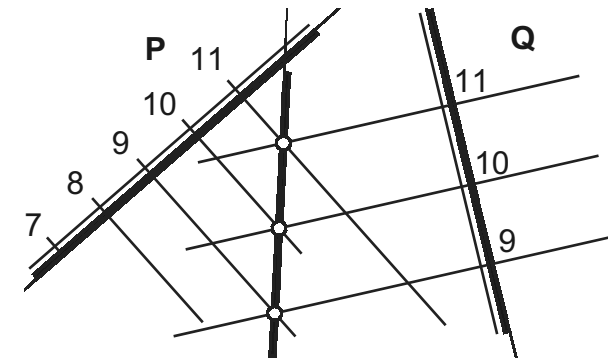


Рис. 9.8. Пересечение плоскостей

Пересечение прямой с плоскостью. Точка пересечения определяется по 1-му методу пересечения. При этом вспомогательная плоскость **не должна** быть проецирующей (не будет видна линия пересечения плоскостей). На рис. 9.9 показано пересечение прямой с плоскостью.

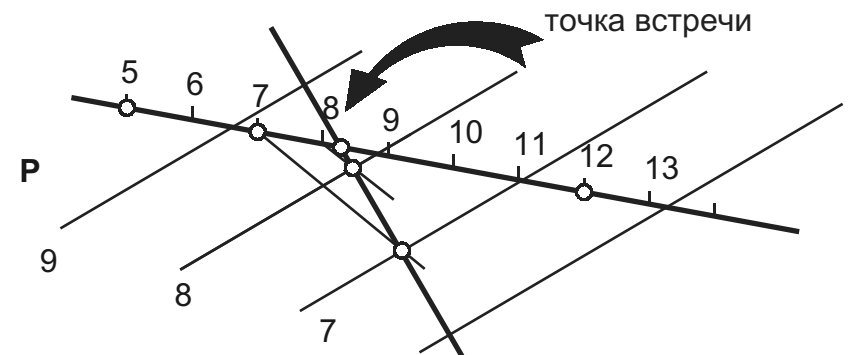


Рис. 9.9. Пересечение прямой с плоскостью

Прямая задана точками с отметками 5 и 12 . Проградуировав прямую, проводят через нее вспомогательную плоскость (горизонтали плоскости проводятся через отметки прямой) так, чтобы пересечение одноименных горизонталей произошло в пределах чертежа (достаточно двух общих точек). Полученная линия пересечения плоскостей пересекается с исходной прямой в точке встречи.

И, наконец, если прямые параллельны (в), то их проекции параллельны, уклоны равны (равны интервалы) и направлены в одну сторону.

Прямые пересекаясь, образуют плоский угол, величина которого передается без искажений, только в случае, когда прямые параллельны нулевой плоскости. В остальных случаях угол между проекциями прямых не соответствует углу в пространстве. Однако, как в ортогональных проекциях, действует исключение: если одна из прямых - горизонталь, то угол в 90° передается без искажений.

Плоскости в проекциях с числовыми отметками могут быть заданы любым способом, однако для удобства решения задач их надо перевести в здание горизонталями. Так, на рис. 9.7, а плоскость была задана параллельными прямыми d и f. Проведя через одноименные отметки прямые линии (проекции горизонталей плоскости), мы перейдем к требуемому виду задания. Поэтому, обычно плоскость задается

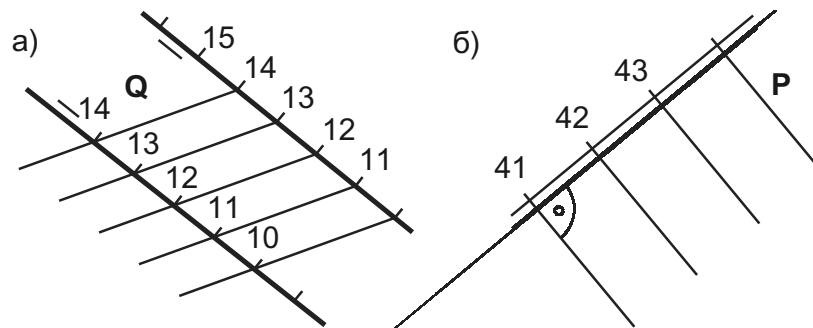


Рис. 9.7. Задание плоскости:
а) - параллельные прямые;
б) - масштабом уклона плоскости

проекцией **линии наибольшего ската**, на которой нанесены числовые отметки (рис. 9.7, б). Проекции горизонталей плоскости проводятся перпендикулярно линии наибольшего ската, которая в этом случае (с числовыми отметками) именуется **масштабом уклона плоскости**.

Пересечение плоскостей решается элементарно - линия их пересечения проходит через точки пересечения одноименных горизонталей (рис. 9.8). одноименные горизонтالي лежат в одной координатной плоскости. Эти плоскости выполняют роль секущих, причем линии их пересечения - горизонтали уже проведены заранее.

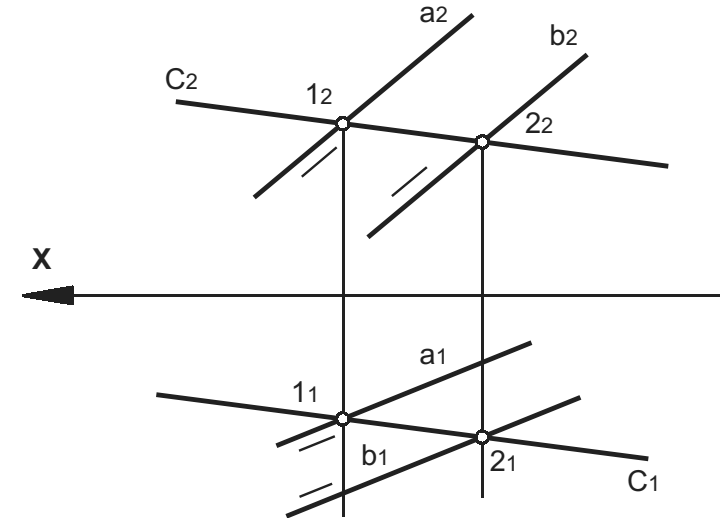


Рис. 4.8. Прямая принадлежит плоскости

Прямая пересекается с плоскостью

Если прямая не параллельна плоскости, то она пересекает плоскость. Иногда требуется определить положение точки пересечения. Методика этой процедуры будет рассмотрена далее.

Здесь же рассмотрим часто встречающийся в построениях случай, когда прямая перпендикулярна плоскости.

Как известно, прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

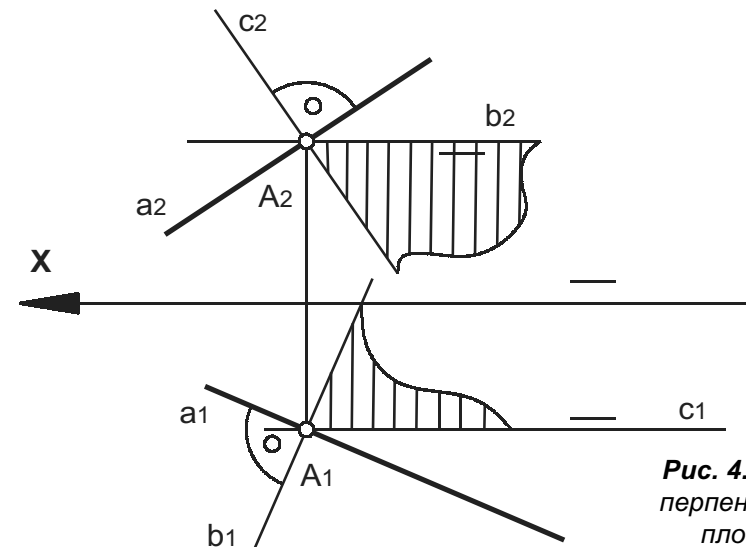


Рис. 4.9. Прямая перпендикулярна плоскости

На рис. 4.9 к прямой общего положения a проведены две перпендикулярные прямые b и c - горизонталь и фронталь (рис. 4.6). Очевидно, пересекающиеся прямые b и c задают плоскость, перпендикулярную прямой a .

Отсюда вытекает методика решения обратной задачи.

Чтобы провести прямую, перпендикулярную плоскости, надо ее проекции расположить:

- горизонтальную - перпендикулярно горизонтали плоскости;
- фронтальную - перпендикулярно **фронтالي** плоскости.

На рис. 4.10 показано это построение. Плоскость общего положения - горизонталь h и фронталь f . Построение проекций этих прямых начинаются с той проекции, которая параллельна оси X . При этом удобно использовать уже имеющиеся в плоскости точки. Так проекция h проведена через t . С. Получена вторая точка 1 на AB . По пересечению линии связи от 1_2 с линией AB определилась точка 1_1 и горизонтальная проекция горизонтали h . Теперь можно построить горизонтальную проекцию перпендикуляра к плоскости C , проведя ее перпендикулярно h . Аналогично определяется положение фронтальной проекции фронтали f и перпендикуляра C .

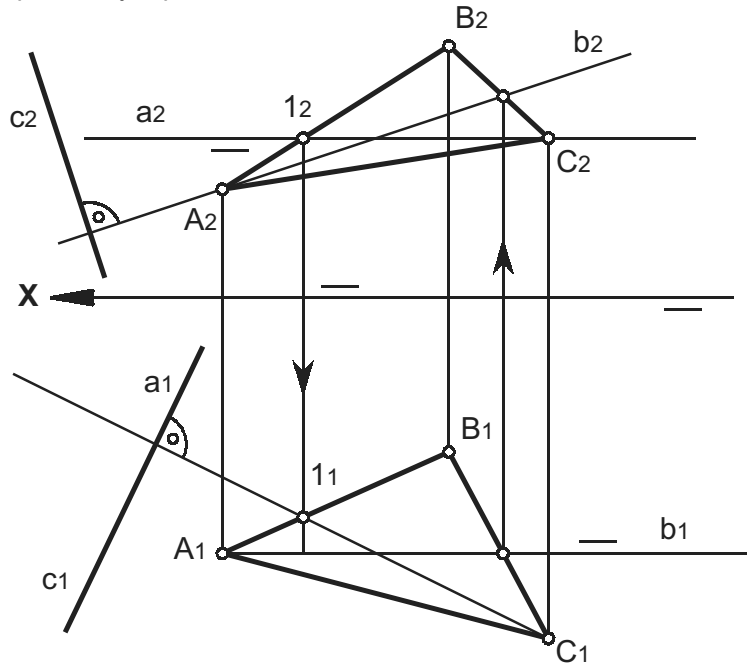


Рис. 4.10. Построение перпендикуляра к плоскости

$h_{BA} = 7-3 = 4$, т.е. заложение A_3B_7 содержит 4 интервала l .

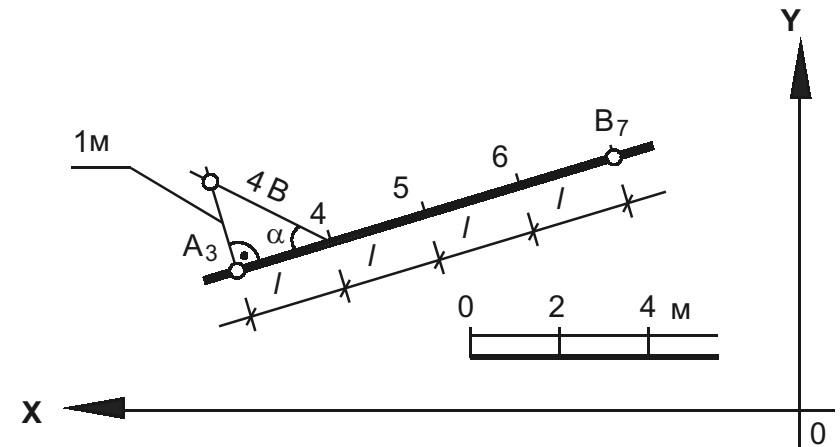


Рис. 9.5. Отрезок прямой

Разделив AB на четыре равные части, можно нанести высотные отметки. Уклон отрезка $i = 1/l$.

Чтобы определить величину уклона, надо знать величину l , а для этого в свою очередь, требуется знание масштаба изображения. Поэтому, чертеж сопровождается масштабом в численной либо линейной форме. (На рисунке $l = 2,0$ мл $i = 1:2$). Истинная величина отрезка может быть определена графически. Для этого надо провести перпендикуляр к одной отметке, отложить на нем превышение между отметками и провести гипотенузу, которая и будет равна отрезку в пространстве (см. рис. 9.5).

Взаимное положение прямых. Когда прямые пересекаются (рис. 9.6, а) их общая точка имеет одинаковые отметки, определенные по каждой из прямой. В противном случае - прямые скрещиваются (б).

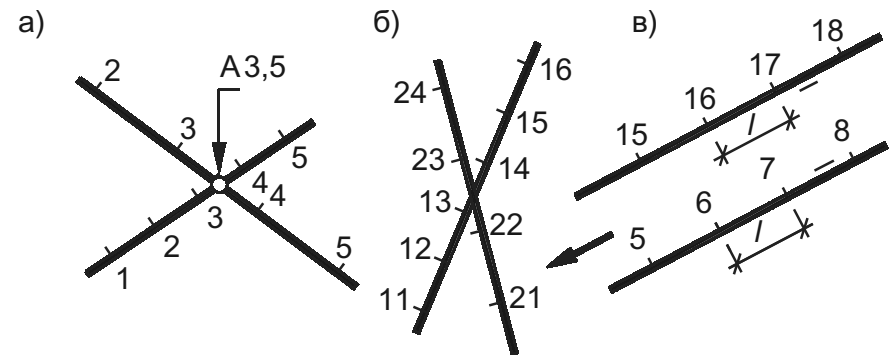


Рис. 9.6. Взаимное положение прямых

уклона:

- уклон отрезка прямой $i = h/L$, где h - **превышение** точек на концах отрезка, L - расстояние между этими точками по горизонтали (длина проекции отрезка) - **заложение**.

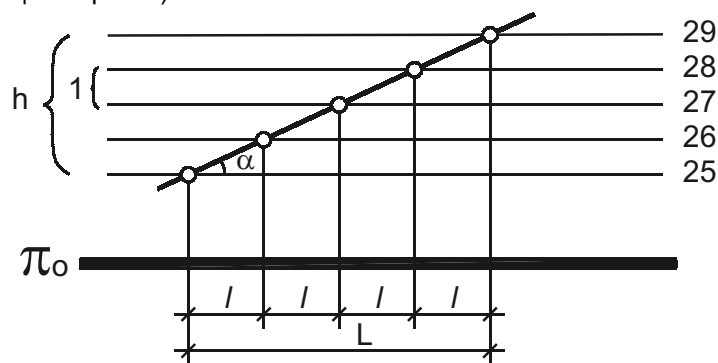


Рис. 9.4. Уклон отрезка прямой

Таким образом, **уклон** определяется отношением **превышения** к **заложению**. Как видно из рис. 9.4

$i = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол **наклона** отрезка к горизонтальной плоскости.

Заложение при превышении равном единице называют **интервалом** (I).

Тогда

$$i = h/L = 1/I = \operatorname{tg} \alpha.$$

Иногда для обозначения величины уклона используют промилли (0/00), т.е. тысячные:

$$i = 10/00 = 1:1000.$$

Так, например, уклон $i = 500/00 = 50/1000 = 1:20$.

Понятие **уклон** очень удобно и для практической реализации. Например, при строительстве участка дороги с продольным уклоном 1:200 на каждые 200 м по горизонтали дорога должна подняться (или опуститься) на 1 м, что легко наметить заранее на местности.

9.2. Прямые и плоскости

Чтобы задать прямую линию в пространстве, достаточно задать две принадлежащие ей точки.

На рис. 9.5 отрезок АВ задан координатами проекций точек А и В и их высотным положением. При решении большинства задач требуется, чтобы на прямой были отмечены проекции точек пересечений с координатными плоскостями. Операция эта носит название "градуирование". На рисунке высотные отметки задающие отрезок точек - целые числа принятых единиц. Превышение т. В над т. А:

4.3. Взаимное положение плоскостей

Очевидно, две плоскости могут быть параллельны, либо они пересекаются.

Плоскости параллельны

Известно, что плоскости параллельны, если каждая из них содержит по две пересекающиеся, попарно параллельные прямые.

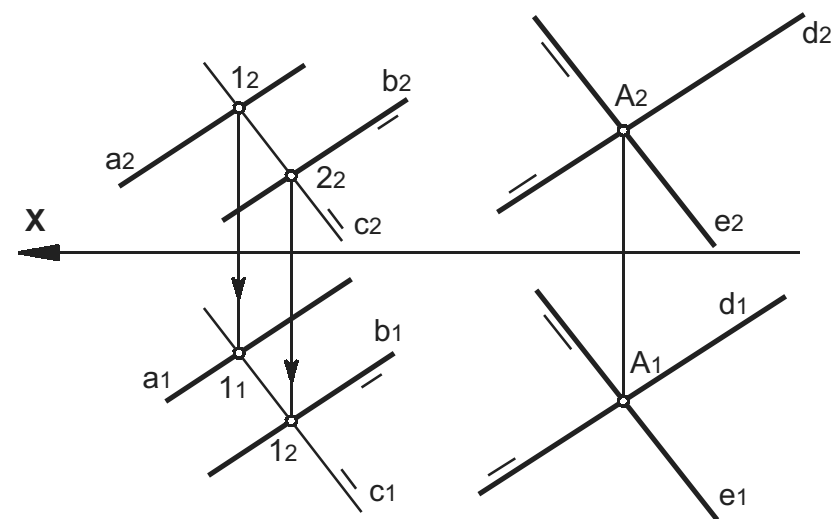


Рис. 4.11. Параллельные плоскости

На рис. 4.11 задана плоскость $P (a||b)$. Чтобы построить плоскость Q , параллельную P и проходящую через A , вначале проводят в пл. P произвольную прямую C , не параллельную a и b . Затем строят проекции пересекающихся прямых a и b , параллельных a и c соответственно.

Для проверки параллельности двух уже заданных плоскостей, в одной из них проводят две пересекающиеся прямые и пытаются построить им параллельные в другой плоскости. Если это не получается - плоскости не параллельны.

Плоскости пересекаются

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются. При этом образуется линия пересечения - прямая. Для ее определения используется методика, о которой пойдет речь в следующем разделе.

Иногда возникает задача построения плоскости, перпендикулярной заданной.

Плоскость будет перпендикулярна и другой плоскости, если она содержит перпендикуляр к этой плоскости.

Поэтому, чтобы построить плоскость, перпендикулярную заданной, надо провести перпендикуляр к последней и заключить его в плоскость.

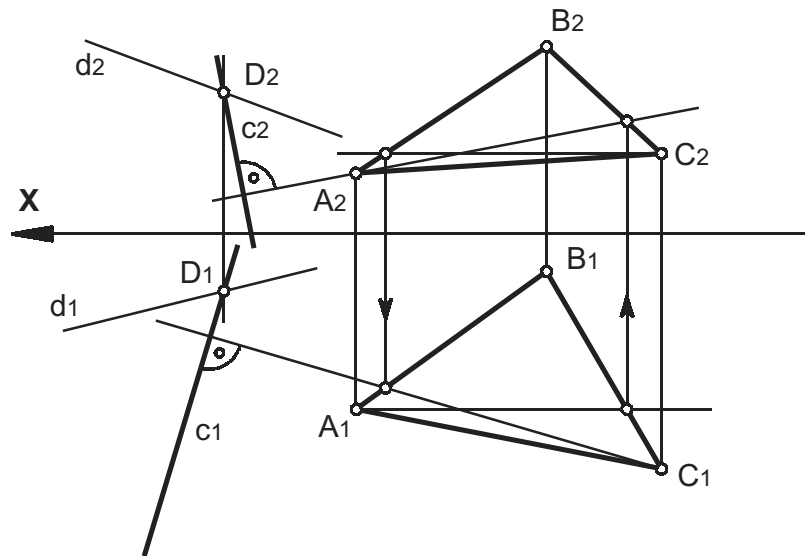


Рис. 4.12. Перпендикулярные плоскости

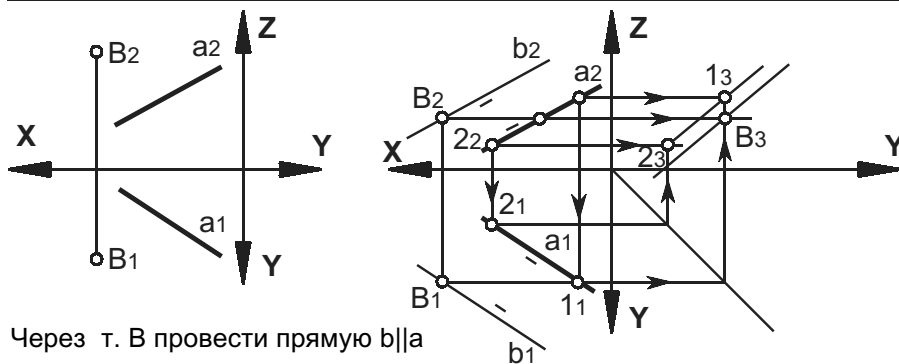
На рис. 4.12 к плоскости P ($\triangle ABC$) проведен перпендикуляр C (см. рис. 4.10). На перпендикуляре C берут произвольную точку D и через нее проводят прямую d . Построена плоскость Q ($c \cap d$), которая перпендикулярна плоскости P .

4.4. Примеры графических построений

Пример 4.1

Исходный чертёж

Решение



Через т. В провести прямую $b \parallel a$

Координатные плоскости. Можно представить, что пространство над нулевой плоскостью и под ней насыщено параллельными координатными плоскостями (рис. 9.2). при этом каждой плоскости присваивается номер, соответствующий ее расстоянию до нулевой плоскости.

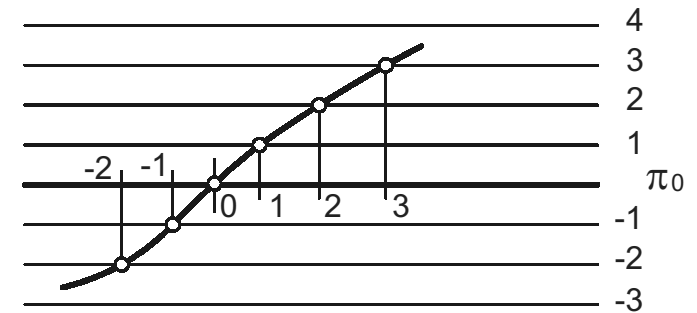


Рис. 9.2. Координатные плоскости

Тогда любая линия может быть задана проекциями точек ее пересечения с координатными плоскостями. Плоскости и поверхности будут пересекаться с координатными плоскостями по **линиям**. Каждая линия пересечения лежит в своей координатной плоскости, носит ее номер и называется **горизонталью**. Плоскость и поверхность могут быть заданы совокупностью проекций соответствующих горизонталей.

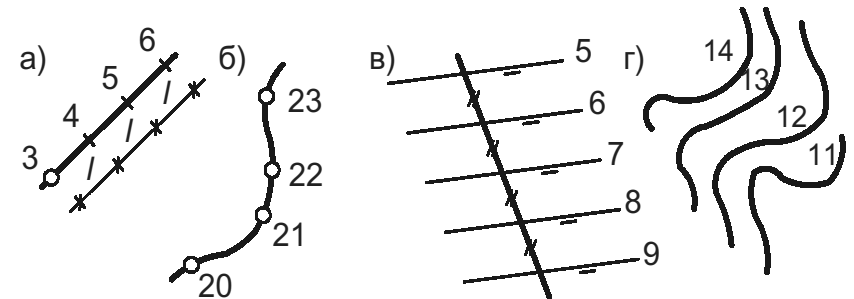


Рис. 9.3. Геометрические элементы в системе проекций с числовыми отметками

На рисунке 9.3 изображены проекции прямой (а), кривой линии (б), плоскости (в) и поверхности (г), заданные проекциями элементов пересечения с координатными плоскостями - точками и горизонталями. Такой способ задания наиболее рационален и, как мы увидим в дальнейшем, обеспечивает решение вопросов пересечения.

Кроме того, в системе проекций с числовыми отметками для определения пространственного положения элементов используют понятие

9. СИСТЕМА ПРОЕКЦИЙ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

9.1. Структура системы

Система ортогональных плоскостей достаточно хорошо отвечает своему назначению передача графической информации о самых различных пространственных формах. Однако, существует довольно большая группа форм и объектов, структура которых не может быть изображена с необходимой точностью в этой системе. Это формы и объекты, вертикальные размеры которых значительно меньше горизонтальных - дороги, площадки, взлетно-посадочные полосы, плотины и т.д. и, наконец, сама земная поверхность. Для их изображения и была создана система проекций с числовыми отметками, которая позволяет передавать вертикальные размеры с любой требуемой точностью.

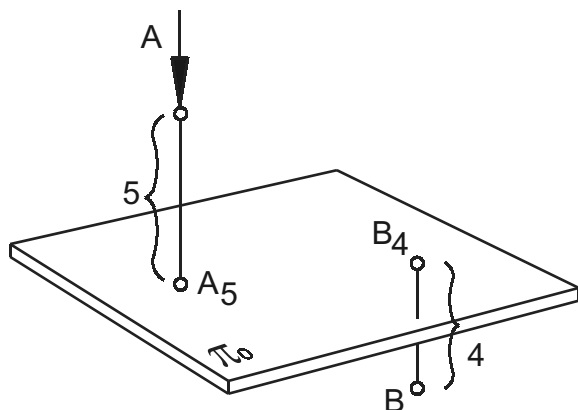


Рис. 9.1. Система проекций с числовыми отметками

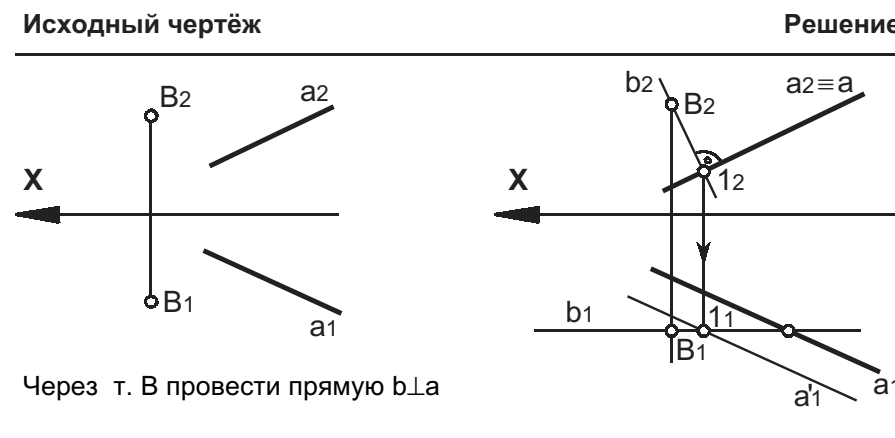
На рис. 9.1 изображена эта система. Она содержит только одну горизонтальную плоскость проекций π_0 . Проекции точек на эту плоскость получают путем прямоугольного параллельного проецирования. Вертикальные плоскости проекций отсутствуют. Их заменяют **числовые отметки** точек - расстояние по вертикали от точки до π_0 в выбранных единицах длины.

В системе проекций с числовыми отметками используются некоторые приемы, облегчающие ход проектирования и последующую практическую реализацию.

Пояснение

Проекция параллельных прямых - параллельны. Дистраивается профильная проекция прямой a и т. В и через проекции т. В проводят проекции прямой b параллельно соответствующим проекция прямой a .

Пример 4.2



Пояснение

Как нам известно, в качестве перпендикуляра к прямой общего положения удобно использовать прямую частного положения, так как в этом случае их проекции будут перпендикулярны на той плоскости, к которой параллельна одна из прямых.

В примере использована фронталь b , проекция которой на фронтальной плоскости проведена перпендикулярно a . Обычно оказывается, что прямые a и b не пересекаются. Можно построить прямую $a' \parallel a$, с которой прямая b будет пересекаться и образовывать угол в 90° .

В общем случае мы можем говорить об определенной величине угла между скрещивающимися прямыми, имея в виду плоский угол, который образуется, если взяв на одной прямой произвольную точку (т. А на рис. 4.13) провести через нее прямую, параллельную первой $c \parallel b$ и плоский угол α между a и c принимается за величину угла между прямой a и **любой** прямой, параллельной прямой b .

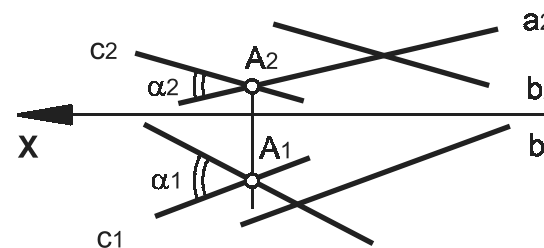
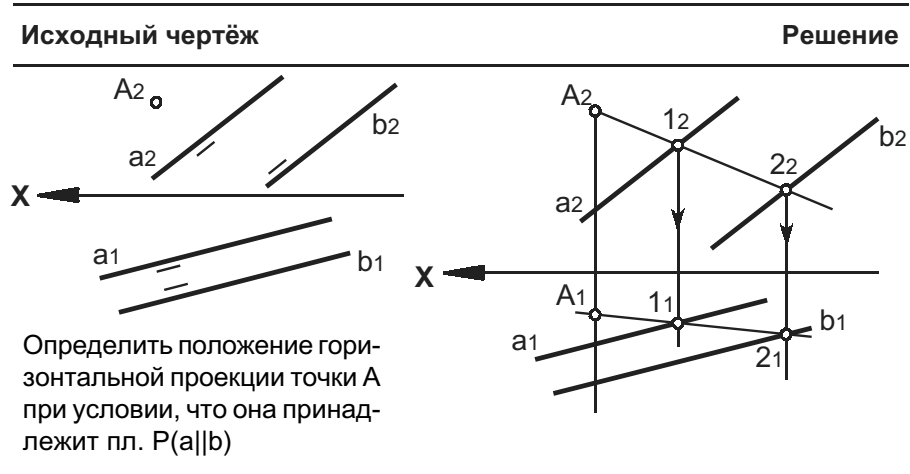


Рис. 4.13. Угол между скрещивающимися прямыми

Пример 4.3

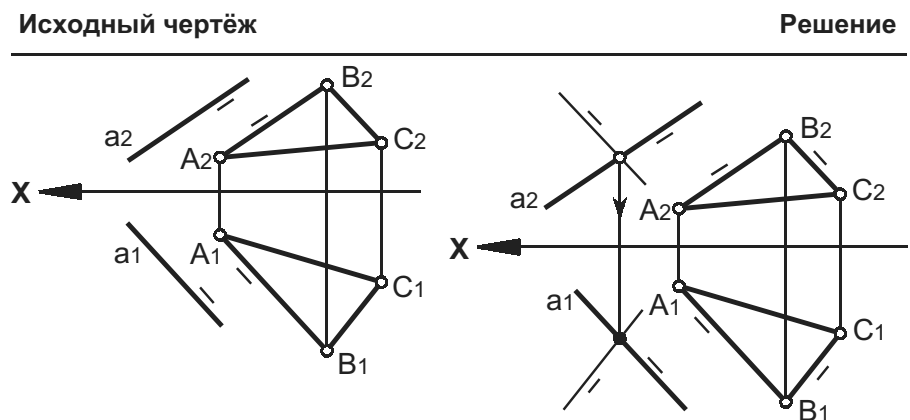
**Пояснение**

Известно, что прямая принадлежит плоскости, если известны хотя бы две их общие точки.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в плоскости.

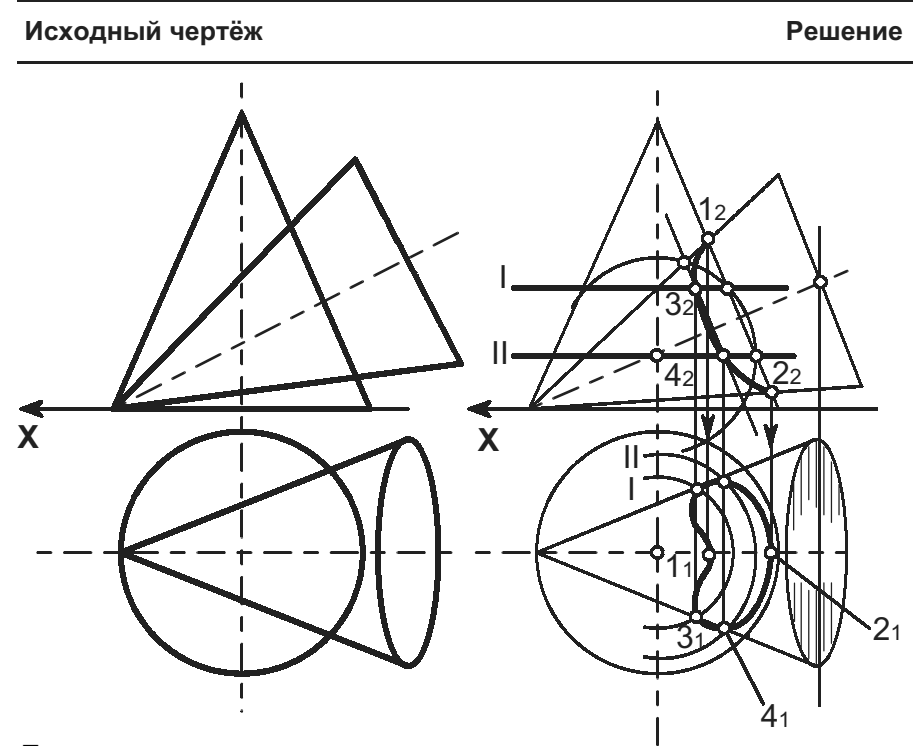
Через т. A проведена произвольная прямая C, имеющая общие с плоскостью точки 1 и 2. построение начинается на фронтальной плоскости (где дана проекция A_2).

Пример 4.4



Через прямую a провести пл. $Q||пл. P(\triangle ABC)$, если $a||пл. P$

Пример 8.3



Построить линию взаимного пересечения двух прямых круговых конусов.

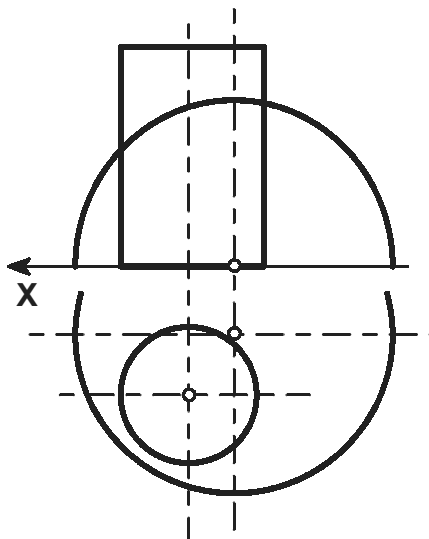
Пояснение

Так как оси вращения фигур пересекаются и лежат в одной плоскости, параллельной π_2 , можем использовать метод концентрических сфер, центр которых - точка пересечения осей вращения.

Точки 1 и 2 находим на пересечении очертаний фигур.

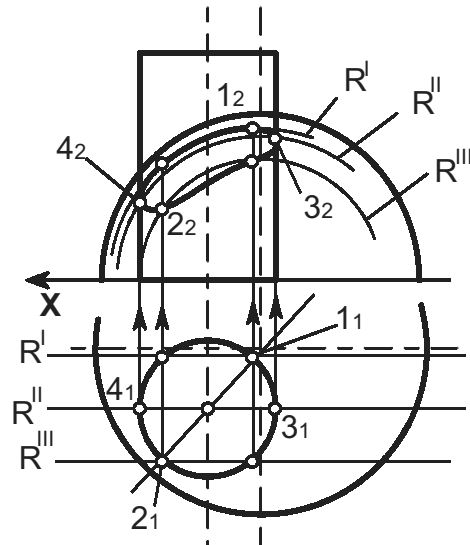
Горизонтальную проекцию линии пересечения строим с помощью горизонталей конуса, ось которого перпендикулярна π_1 . при этом секущая сфера пересекает вертикальный конус по двум окружностям, лежащим в горизонтальных плоскостях I и II. Эти окружности пересекаются с одновременно полученной окружностью наклонного конуса в точках 3, 4 или симметричных.

Исходный чертёж



Построить линию пересечения цилиндра и сферы.

Решение



Пояснение

Так как боковая поверхность цилиндра является горизонтально-проецирующей, горизонтальная проекция линии пересечения известна. Она совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра. Так как пересекаются две поверхности второго порядка, линией пересечения будет пространственная кривая.

Проводим несколько фронтальных вспомогательных плоскостей, которые пересекут цилиндр по образующим, а сферу по окружностям, параллельным фронтальной плоскости проекций.

Вначале определяют крайние точки сечения, здесь это точки 1 (верхняя) и 2 (нижняя), 3 и 4 боковые.

Через горизонтальные проекции точек проводят секущие плоскости R . Фронтальные проекции точек лежат на соответствующих линиях пересечения плоскостей с поверхностью сферы.

Пояснение

В этом примере обратите внимание на два обстоятельства.

Во-первых, через прямую можно провести плоскость, параллельную заданной, только в том случае, если эта прямая сама параллельна заданной плоскости. Действительно, если плоскости параллельны, то **любой** прямой, лежащей в одной плоскости, можно подобрать серию параллельных прямых в другой плоскости.

Во-вторых, для того, чтобы провести через прямую плоскость, удобно через точку на этой прямой провести другую прямую. Плоскость будет задана пересекающимися прямыми. При этом, вторая прямая может придать созданной плоскости некоторые требуемые свойства. Так, в примере, прямая $b \parallel BC$ и поэтому новая плоскость Q ($a \cap b$) параллельна пл. $P(ABC)$.

Если бы прямая b была перпендикулярна пл. P , то пл. Q стала бы перпендикулярной пл. P .

5. ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ (ПОВЕРХНОСТЬ) ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

5.1. Частные случаи пересечения

Вопросы пересечения геометрических элементов занимают **центрально**е место в курсе НГ. Это связано с тем, что формы простых и сложных тел определяются формой оболочек, которая образуется путем пересечения плоскостей и поверхностей, их составляющих. Иными словами, проектирование пространственных форм основано на владении методами пересечения.

Всевозможные случаи пересечения можно разделить на две группы. В первую группу войдут так называемые **частные случаи**, когда элементы пересечения (точки, линии) определяются довольно просто, без специальной методики. В другую группу попадут случаи, когда элементы пересечения определяются с использованием специальных методов, основанных, кстати, на частных решениях - **это общие случаи**.

Поэтому удобно все варианты пересечения рассмотреть вместе в порядке их усложнения. Полезно знать, что методы определения элементов пересечения являются **общими для всех** систем проекций.

Частные случаи пересечения характерны тем, что один из пересекающихся элементов занимает проецирующее положение, т.е. перпендикулярен плоскости проекции.

Прямая и плоскость

Прямая - проецирующая, плоскость общего положения.

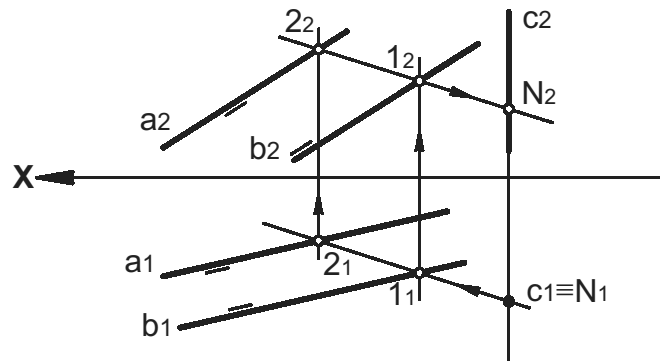


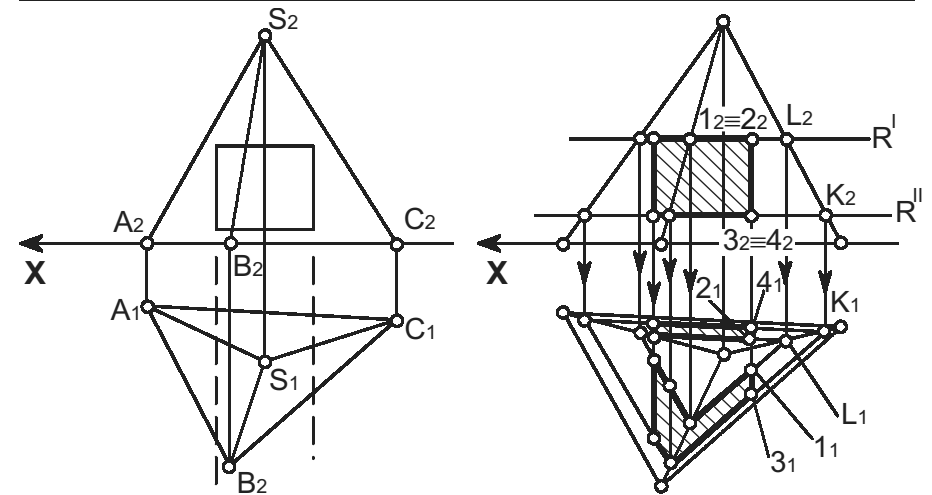
Рис. 5.1. Пересечение прямой и плоскости.
Прямая - проецирующая

8.4. Примеры графических построений

Пример 8.1

Исходный чертёж

Решение



Построить горизонтальную проекцию призматического отверстия в треугольной пирамиде.

Пояснение

Построение проводим по фронтальной проекции, заданной плоскостью. Построение точек 2, 6, 3 и 9 (на горизонтальной проекции) проводим при помощи прямых, проведенных через вершину S . Точки 4, 7 и 8 (на горизонтальной проекции) найдены при помощи прямых, проходящих на гранях ACS и CSB параллельно плоскости π_1 , горизонтальные проекции этих прямых проходят через точку K параллельно AC и CB . точки 1 и 6 строят с помощью линии связи по принадлежности ребру пирамиды ASB .

Здесь используется метод секущих плоскостей, которые удобно совместить с горизонтальными плоскостями отверстия. Секущие плоскости P^I и P^{II} пересекают боковую поверхность пирамиды, образуя два треугольника, стороны которых включают и горизонтальные стороны отверстия. Вершины контура отверстия переносят на горизонтальную проекцию по линиям связи.

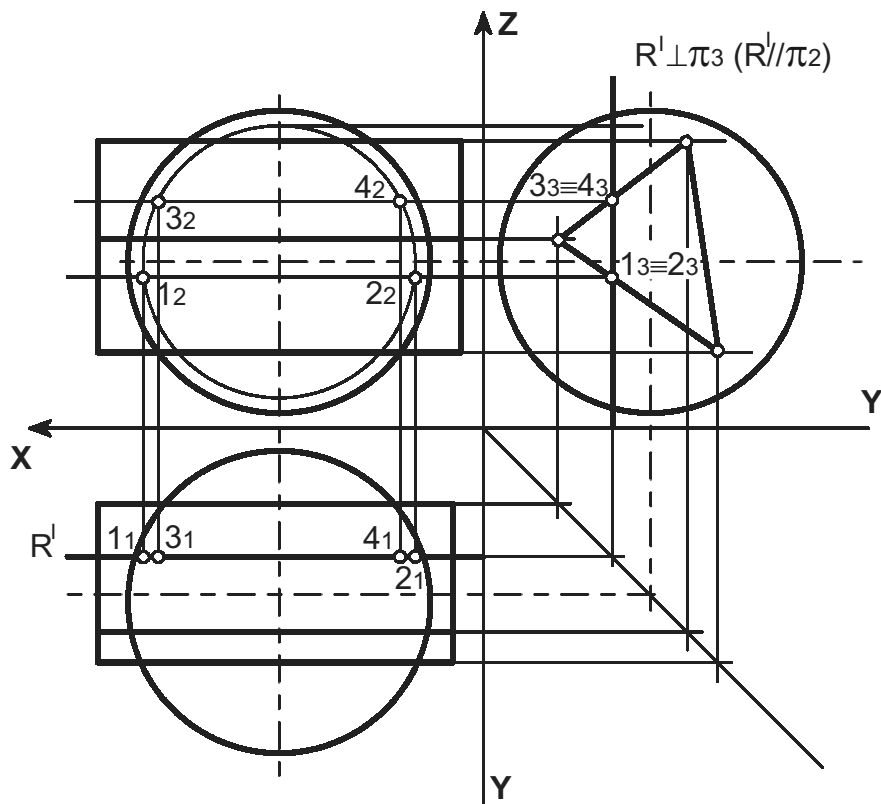


Рис. 8.8. Пересечение призмы с шаром

На рис. 5.1 задана пл. $P (a||b)$ и проецирующая прямая $c \perp \pi_1$. Надо найти точку, в которой прямая C пересекает пл. P . Элементом пересечения здесь будет точка N , она принадлежит пл. P и прямой C . Ее проекция на π_1 совпадает с проекцией прямой C ($N_1 = C_1$), так как проекции всех точек прямой C проецируются в точку C_1 . Фронтальная проекция точки N_2 определяется из условия, что точка N принадлежит и пл. P : через C_1 проводят произвольную прямую, имеющую с пл. P общие точки 1 и 2.

Плоскость - проецирующая, прямая общего положения.

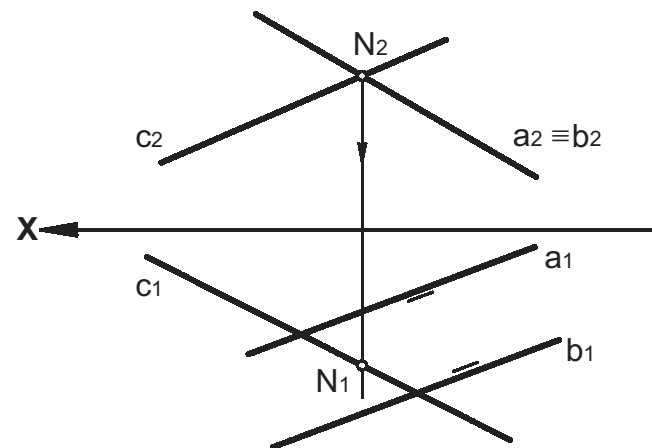


Рис. 5.2. Прямая и плоскость пересекаются.
Плоскость - проецирующая

На рис. 5.2 показано определение элемента пересечения пл. $P (c||b)$ с прямой C . Этим элементом является точка N , принадлежащая прямой C и пл. P . Пл. $P \perp \pi_2$, поэтому все находящиеся в ней элементы проецируются на π_2 в одну линию ($a_2 \equiv b_2$) в том числе и точка N . Отсюда проекция точки N_2 находится на пересечении C_2 и $a_2 \equiv b_2$.

Аналогично определяют точки пересечения прямой с плоскостями проекций (рис. 5.3), поскольку плоскости являются проецирующими по отношению друг к другу. Так ось X проецируются все элементы, лежащие в плоскостях π_1 и π_2 . Поэтому фронтальная проекция точки пересечения N_2 лежит на пересечении проекции прямой a_2 с осью X , а N_1 - на a_1 . При этом в точке проекции N_1 очевидно находится и сама точка N (редкий случай).

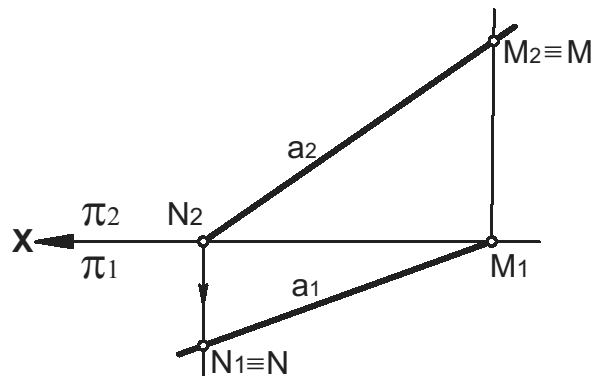


Рис. 5.3. Пересечение прямой с плоскостями проекций.
Следы прямой

Чтобы выделить точку пересечения прямой с плоскостями проекций из семи точек пересечения со всеми другими плоскостями, их именуют **следами** прямой на плоскостях проекций.

Плоскость и плоскость

С плоскостями возможен лишь один частный случай: **одна** из пересекающихся плоскостей занимает проецирующее положение.

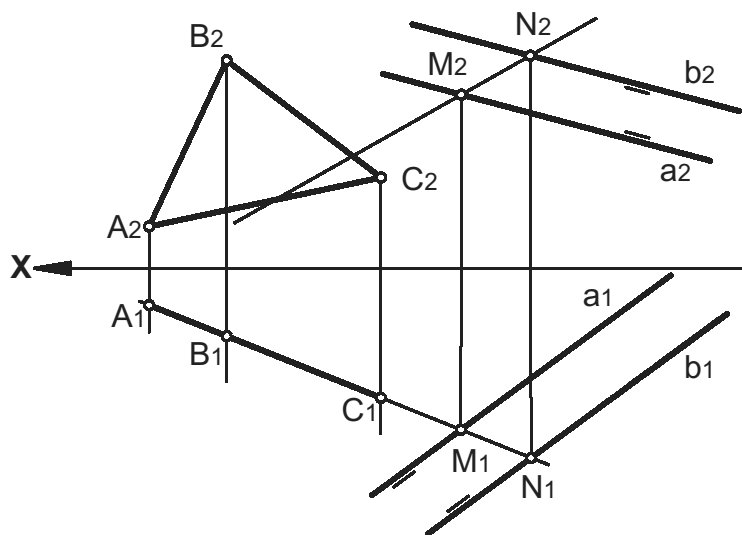


Рис. 5.4. Пересечение плоскостей.
Плоскость - проецирующая

8.3. Пересечение многогранных и кривых поверхностей

Линия пересечения гранных поверхностей - многоугольник, стороны которого - прямые (рис. 8.7,а). Линия пересечения кривых поверхностей - плавная кривая (рис. 8.7,б). При пересечении же гранной и кривой поверхностей - линия пересечения, как это и следовало ожидать, многоугольник со сторонами из кривых линий (рис. 8.7,в).

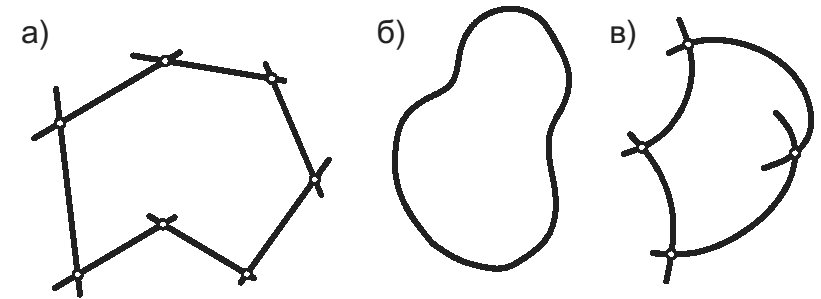


Рис. 8.7. Формы линий пересечения

При пересечении тел эти линии замкнуты и, обычно, пространственны.

Линия пересечения гранной и кривой поверхностей определяется путем использования как 2-го, так и 3-го метода. Рассмотрим пример на рис. 8.8, где изображено пересечение призмы с шаром.

Здесь боковые грани призмы занимают профильно-проецирующее положение, поэтому удобно вспомогательные секущие плоскости (3-й метод) располагать параллельно фронтальной плоскости (Π_1). При этом поверхность шара пересекается этими плоскостями по окружностям, которые на Π_2 проецируются без искажений, а на Π_1 - в виде прямых линий. Одновременно вспомогательные плоскости пересекают грани призмы по профильно-проецирующим прямым. Пресекаясь между собой, эти прямые и окружности образуют общие точки (№ 2, 3 и 4 и т.д.).

Полностью построение линий пересечения не показано, чтобы не затемнять чертеж. Очевидно, эти линии образуют два замкнутых контура из треугольников с дугами в качестве сторон.

Легко представить аналогичное построение, когда секущие плоскости расположены параллельно Π_1 .

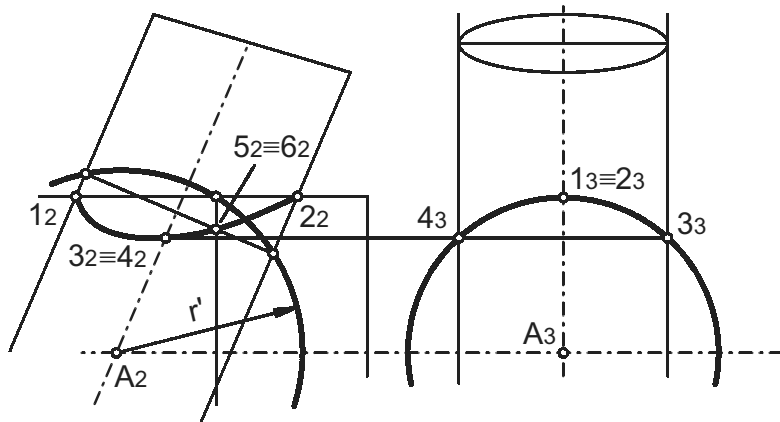


Рис. 8.5. Метод сфер

Здесь крайние точки линии пересечения 1, 2, 3 и 4 определяются как точки встречи прямых образующих наклонного цилиндра с поверхностью горизонтального цилиндра, которая занимает профилно-проецирующее положение. Остальные точки могут быть определены методом сфер (как точки 5 и 6). Центр сфер в точке А, где пересекаются оси вращения.

Вообще говоря, данную задачу можно решить не прибегая к сферам, а используя в качестве вспомогательных плоскостей - фронтальные плоскости.

Приведен пример частного случая пересечения двух поверхностей вращения, если они описаны вокруг одной сферы (рис. 8.6).

В этом случае линии пересечения представлены двумя плоскими кривыми (эллипсами).

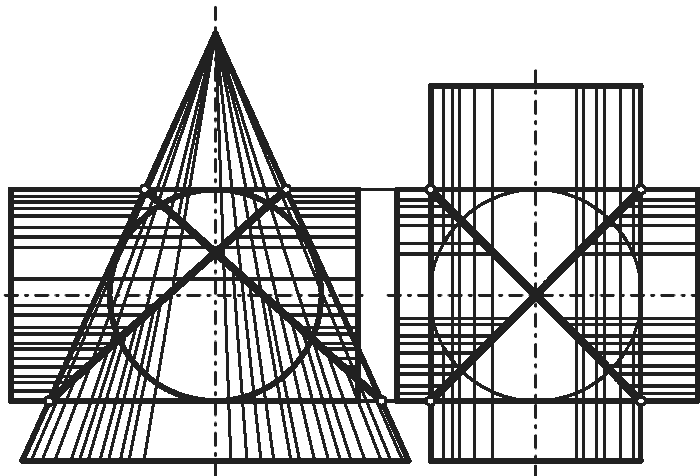


Рис. 8.6. Частные случаи пересечения

На рис. 5.4 показано пересечение плоскостей $P(ABC) \perp \pi_1$ и плоскости общего положения $Q(a||b)$. В случае пересечения плоскостей элементом пересечения является **прямая линия** и, очевидно, для ее определения достаточно определить **две точки**, общие для обеих плоскостей. Такими точками на чертеже являются точки N и M. Их положение определяется вначале на горизонтальной плоскости (P - горизонтально-проецирующая) в местах пересечения элементов обеих плоскостей. Здесь удобно использовать a и b, задающие плоскость, а в общем случае используют две любые прямые, проведенные в плоскости общего положения. MN - линия пересечения плоскостей.

Как видно из построения, оно подобно случаю, когда пересекаются прямая общего положения плоскости с плоскостью (повторенное дважды).

Аналогично со **следами прямой** вводится понятие **следов плоскости** - линий пересечения плоскости с плоскостями проекций.

Из определения видно, что положение следов плоскости можно определить через следы прямых, лежащих в плоскости.

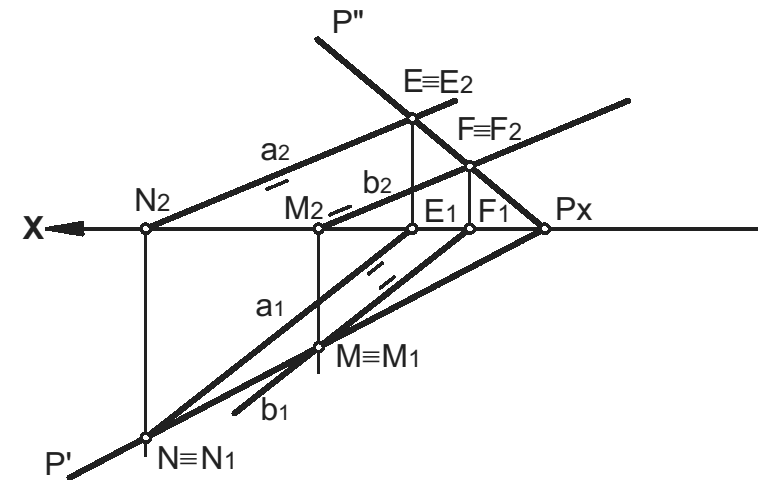


Рис. 5.5. Пересечение плоскости с плоскостями проекций: следы плоскости

На рис. 5.5 задано положение пл. $P(a||b)$, линия пересечения ее с плоскостью π_1 пройдет через следы N и M прямых a и b, лежащих в плоскости P (горизонтальный след пл. P).

Для определения положения фронтального следа пл. P достаточно определить один фронтальный след прямой из плоскости (здесь - E), ибо горизонтальный и фронтальный следы плоскости должны **обязательно** пересекаться на оси X (точка P_x) - иначе плоскость разорвется.

Следы плоскости однозначно определяют ее положение в пространстве (частный случай двух пересекающихся прямых) и поэтому часто используются для задания плоскости.

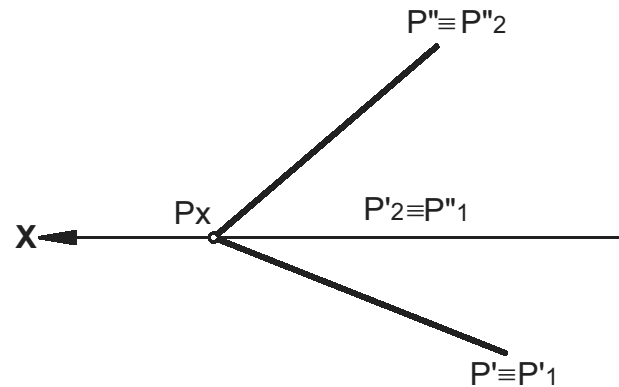


Рис. 5.6. Плоскость P задана следами P^I и P^{II}

На рис. 5.6 пл. P задана следами: P^I - горизонтальный след и P^{II} - фронтальный. Горизонтальная проекция следа P^I лежит под ним (P_1^I), а его фронтальная проекция на оси X . Аналогично обстоит дело с проекциями фронтального следа. Поэтому проекции следов P_1^I и P_1^{II} совпадают.

Пересечение плоскостей, заданных следами, можно также отнести к частным случаям пересечения, даже если плоскости занимают общее положение. Дело в том, что задающие плоскость элементы - следы плоскостей - лежат в плоскостях проекций, точки их пересечения являются **общими** для обеих плоскостей и не требуют специальных построений для своего определения.

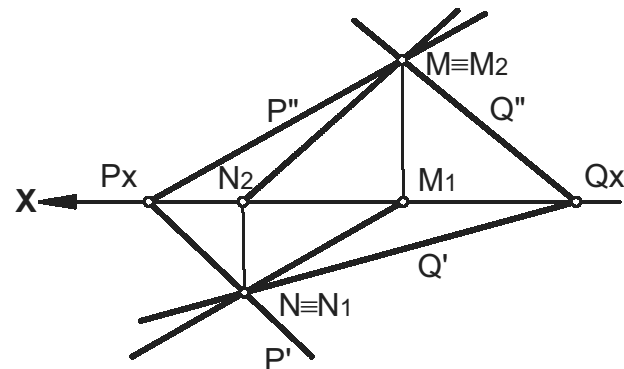


Рис. 5.7. Пересечение плоскостей, заданных следами

по окружностям, проекции которых без искажений изображены на π_1 и пересекаются между собой в общих точках 3 и 4.

Не всегда удастся подобрать такое положение вспомогательных секущих плоскостей, чтобы они давали простые формы пересечений с поверхностями.

В этом случае при определенных условиях можно использовать **метод сфер**, который по существу является 3-м методом, только вместо секущих плоскостей используют секущие поверхности сфер.

Использование секущей сфер основано на следующем факте. Если поместить центр сферы на оси поверхностей вращения, то сфера пересекает эту поверхность по окружности (рис. 8.4).

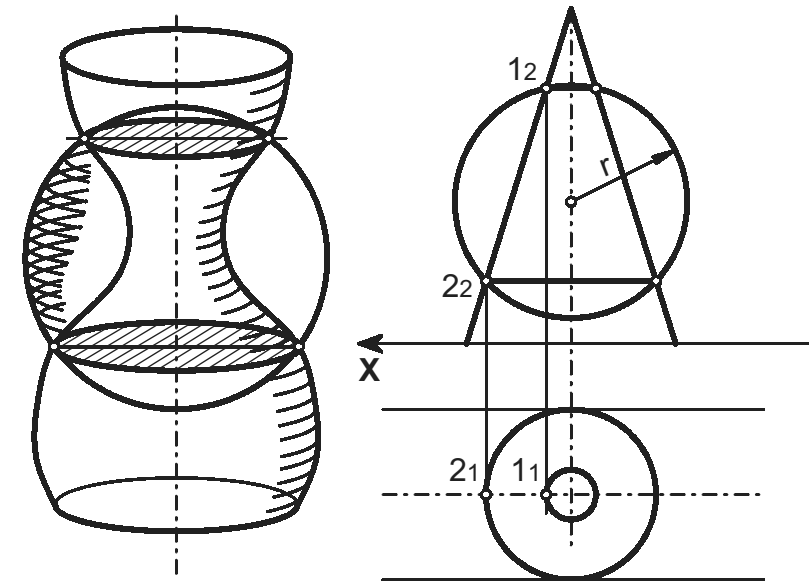


Рис. 8.4. Пересечение сферой поверхности вращения

Отсюда вытекают и условия применения сфер в качестве секущих поверхностей:

- пересекаются поверхности вращения;
- оси поверхностей должны пересекаться (центр секущих сфер) и располагаться параллельно плоскости проекций (на эту плоскость окружности пересечения будут проецироваться в прямые линии). Пример на рис. 8.5.

Одна поверхность - профильно-образующая, другая - горизонтально-проецирующая. Поэтому на горизонтальной и профильной проекциях изображение линии пересечения совпадают с контурами поверхностей, а выделяется - на фронтальной. Здесь точки линии пересечения поверхностей находятся как точки встречи прямых образующих (2-й метод). Так, пересечение 4-х образующих вертикального цилиндра дает точки 1,2,3 и 4 - крайние точки фронтального изображения линии пересечения (построение проекции линии пересечения удобно начинать с крайних точек). Остальные промежуточные точки находят как точки 5 и 6 - пересечение образующих горизонтального полуцилиндра.

На рис. 8.3 пересекается конус с шаром.

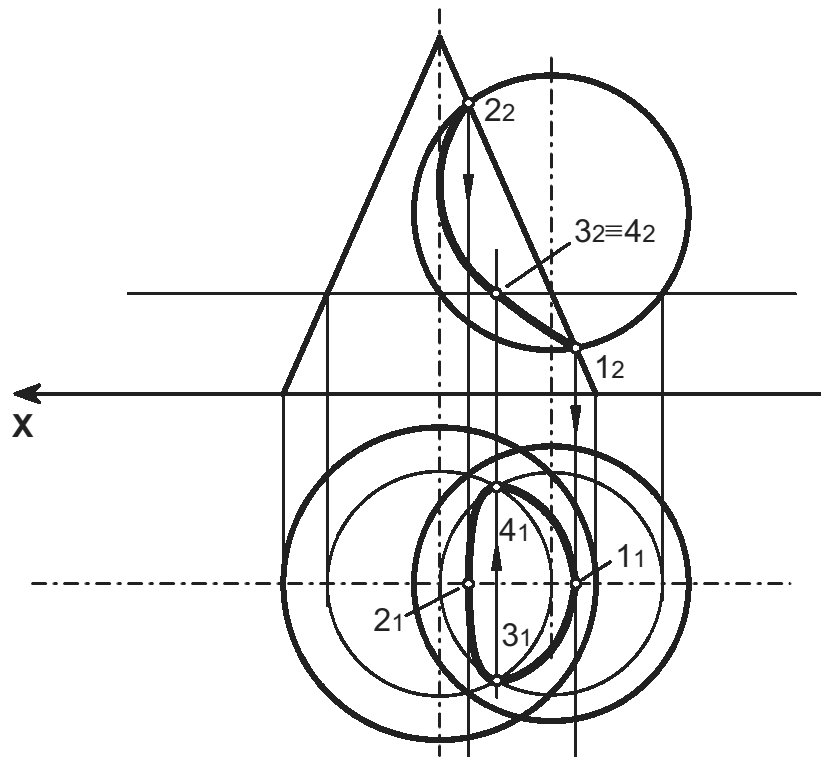


Рис. 8.3. Пересечение шара и конуса

Крайние точки 1 и 2 линии пересечения определяются как точки встречи образующей конуса с поверхностью шара. Все промежуточные точки определяются по 3-му методу, как точки 3 и 4. Так вспомогательная горизонтальная плоскость R пересекает поверхности конуса и шара

На рис. 5.7 пересекаются плоскости P и Q, заданные следами. Пересечение горизонтальных следов P^l и Q^l задает общую точку N, фронтальных - т. М. Очевидно линия пересечения плоскостей пройдет через эти точки. Для определения положения ее проекций требуется лишь построить проекции точек М и N.

5.2. Общие случаи пересечения

Здесь рассмотрена методика определения элементов пересечения, когда пересекающиеся линии, плоскости и поверхности занимают **общее** положение относительно плоскостей проекций.

Изложенные ниже три метода охватывают основные случаи пересечения, встречающиеся при решении задач, и, как уже упоминалось, являются в достаточной степени универсальными, так как используются в различных системах проекций.

1-й МЕТОД. Пересечение прямой с плоскостью (поверхностью)

Схема метода показана на рис. 5.8. Прямая а пересекает плоскость (поверхность) Р. Для определения положения точки их пересечения (А), через прямую а проводят вспомогательную плоскость.

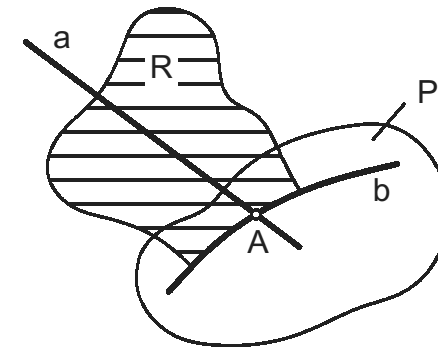


Рис. 5.8. Схема 1 метода.

Прямая пересекает плоскость (поверхность)

R и определяют линию пересечения пл. R с плоскостью (поверхностью) Р - линия b. Очевидно, искомая т. А будет лежать на пересечении прямой а с линией b.

Весь фокус этого построения заключается в определении линии b, по которой пересекаются вспомогательная пл. R с плоскостью (поверхностью) Р.

В системе ортогональных плоскостей это можно легко сделать, если в качестве вспомогательной пл. R использовать **проецирующую плоскость**.

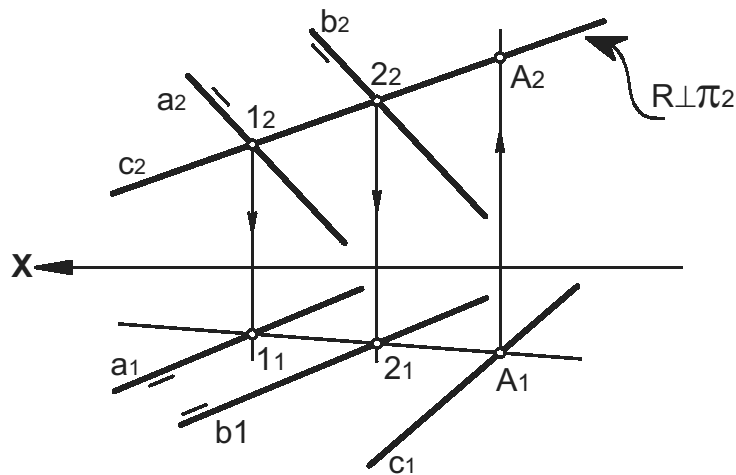


Рис. 5.9. Пересечение прямой с плоскостью

Пример использования 1-го метода представлен на рис. 5.9, где изображены пл. $P (a \parallel b)$ и прямая C , которые занимают общее положение. В соответствии с методикой, построение начинают с проведения **через прямую C** вспомогательной пл. R . Причем эта плоскость должна быть **проецирующей**. Последнее требование связано с тем, что выбрав в качестве вспомогательной проецирующую плоскость, мы тем самым сведем определение линии пересечения плоскостей к уже известному **частному** случаю.

Таким образом, в примере выбор вспомогательной плоскости ограничен двумя вариантами - либо фронтально-проецирующая, либо - горизонтально-проецирующая.

Используют более удобный для построения вариант. Так, в примере, вспомогательная пл. $R \perp \pi_2$, что показывается на чертеже. Поскольку пл. R проецирующая, то ее проекция на π_2 совпадает целиком с прямой C , через которую она проведена. Но если раньше точки 1_2 и 2_2 были лишь точками пересечения проекций прямых a , b и c , то теперь это проекции точек пересечения прямых a и b с пл. R , через которые и проходит нужная нам линия пересечения плоскостей R и P .

Теперь остается определить положение проекции линии пересечения на π_1 ($1_1 - 2_1$). Проекция искомой т. A_1 находится (в соответствии с методом) на пересечении C и $1_1 - 2_1$. Вторая проекция т. A находится без затруднений.

Здесь показано пересечение прямой трехгранной призмы с трехгранной же призмой. Грани прямой призмы - проецирующие; поэтому точки встречи ребер B и C определяются без хлопот по линиям связи. Точки 3 и 6 определяются путем пересечения вертикального ребра прямой призмы с гранями AB и AC (через ребро проведена вспомогательная плоскость R , 7 и 8 - линии ее пересечения с соответствующими гранями). Линия пересечения поверхностей - замкнутая ломаная линия $1-6$, лежащая в двух плоскостях.

Как видно из примера, если ребра одного тела параллельны другому, то удобно преобразовать проекции так, чтобы грани этого тела стали проецирующими.

8.2. Пересечение поверхностей вращения

При пересечении двух кривых поверхностей линия пересечения - пространственная кривая, которая строится по точкам, общим для обеих поверхностей. Для определения этих точек может использоваться 2-й метод, если хотя бы у одной поверхности образующая - прямая. Тогда общие точки - результат пересечения прямых образующих с другой поверхностью.

Однако, в общем случае, используют универсальный 3-й метод - метод секущих плоскостей.

На рис. 8.2. показано пересечение двух цилиндрических поверхностей вращения.

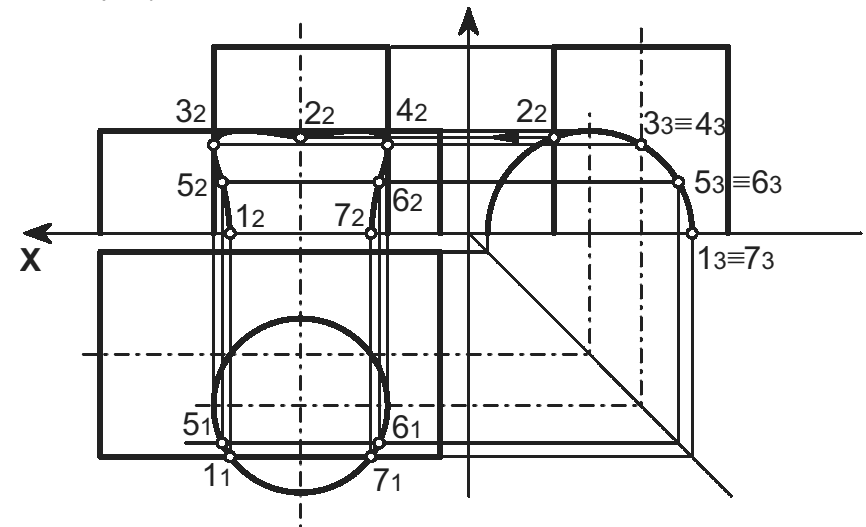


Рис. 8.2. Пересечение цилиндрических поверхностей вращения

8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТЫХ ТЕЛ

Как уже говорилось, технические формы образуются путем сочетания простых тел: прямоугольных параллелепипедов, цилиндров, реж-е - конусов и шаровых поверхностей. При этом поверхность технических форм - это сочетание поверхностей простых тел, которые переходят одна в другую через границу - линию пересечения.

Линии пересечения строятся по точкам, определение которых зависит от вида пересекающихся поверхностей. Можно выделить основные случаи:

- пересечение между собой гранных поверхностей;
- пересечение между собой поверхностей вращения;
- пересечение поверхностей вращения с гранными.

8.1. Взаимное пересечение многогранников

При пересечении многогранников линия пересечения поверхностей - **замкнутый** многоугольник (один или более), вершины которого определяются как результат пересечения ребер одного тела с гранями другого или граней одного с гранями другого.

Рассмотрим пример на рис. 8.1.

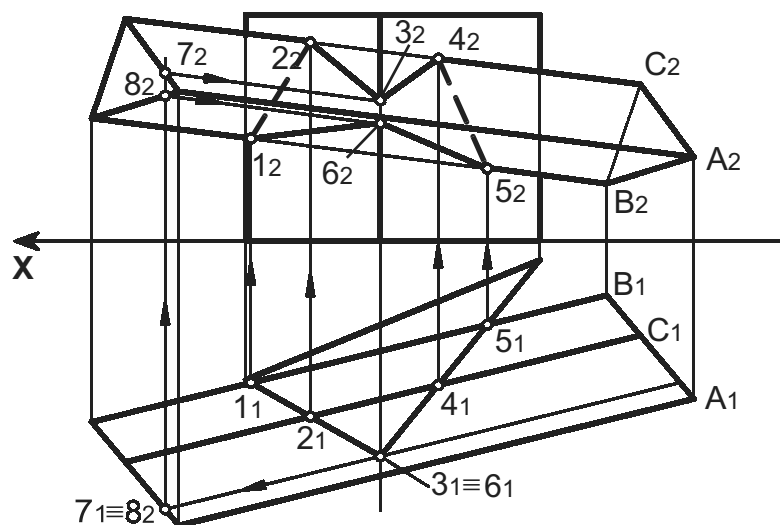


Рис. 8.1. Пересечение гранных тел

2-й МЕТОД. Пересечение плоскостей общего положения
Схема метода на рис. 5.10.

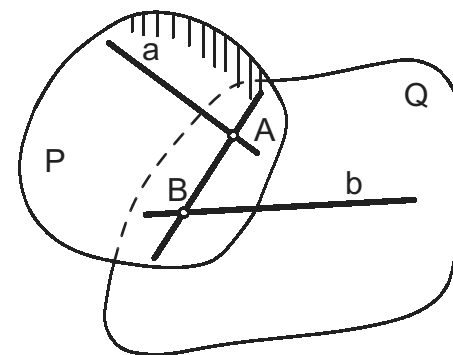


Рис. 5.10. Схема 2-го метода: пересечение плоскостей

Чтобы найти линию пересечения плоскостей P и Q, проводят вспомогательные прямые, лежащие в этих плоскостях. Так, линия a лежит в пл. P, и в общем случае, пересекается с пл. Q в точке A. Очевидно, точка A является **общей** для P и Q и искомая линия пересечения плоскостей пройдет через нее. Поскольку линия пересечения - прямая, то достаточно знать положение двух ее точек. Вторая общая точка B определяется путем проведения второй вспомогательной прямой b, лежащей в пл. Q или пл. P (как удобнее).

Таким образом, метод состоит в проведении двух вспомогательных прямых, лежащих в одной из пересекающихся плоскостей, и определении их точек пересечения с другой плоскостью.

Поскольку плоскости занимают общее положение, то и лежащие в них вспомогательные прямые будут прямыми общего положения.

Очевидно, 2-й метод является по существу двойным использованием построений по 1-му методу.

Дело в том, что через прямую линию можно провести любое число плоскостей и среди них - **перпендикулярную к любой** заранее заданной плоскости. Это обстоятельство и использовалось в 1-м методе, чтобы свести решение к известному частному случаю.

С другой стороны, прямая, проведенная в одной плоскости может быть перпендикулярна другой плоскости, **только** если сами плоскости перпендикулярны. Поэтому нельзя провести в плоскости общего положения прямую, перпендикулярную к плоскости проекции, чтобы свести дело к частному случаю пересечения, и мы вынуждены использовать общий 1-й метод.

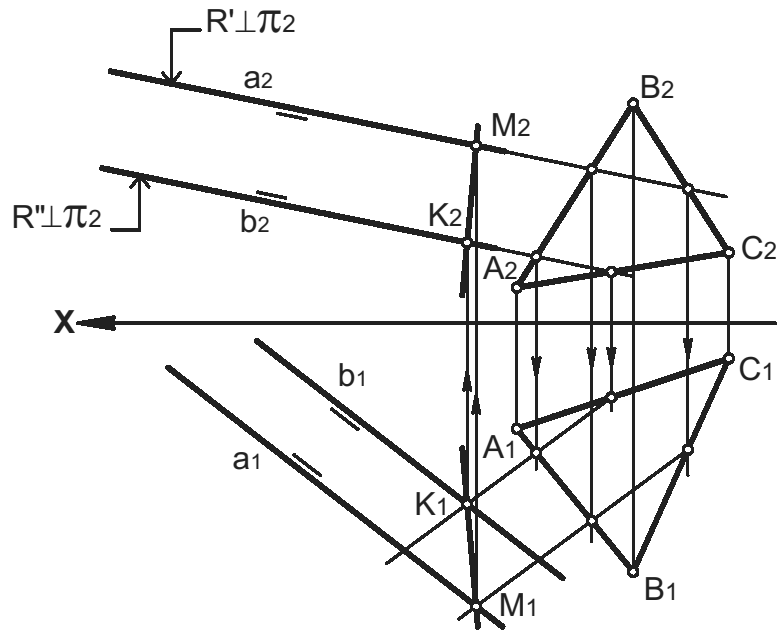


Рис. 5.11. Пересечение плоскостей

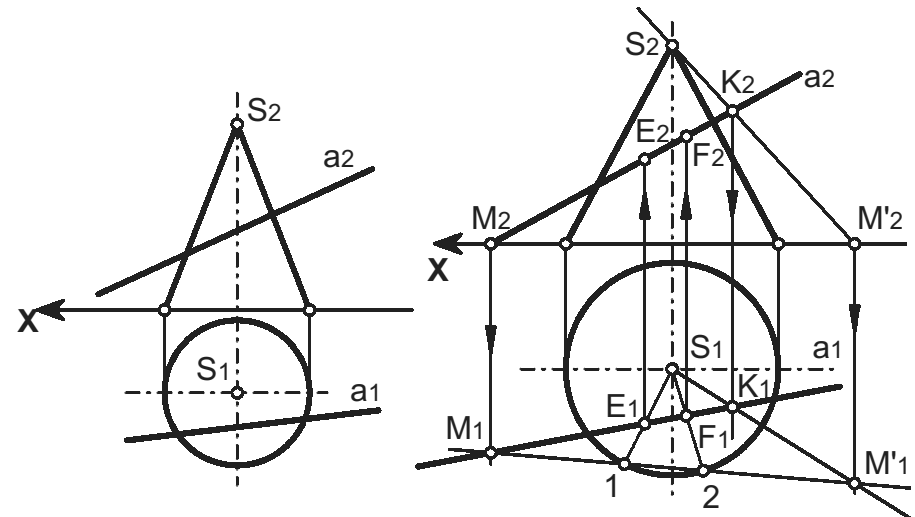
На рис. 5.11 показан процесс определения линии пересечения плоскостей $P(a \parallel b)$ и $Q(ABC)$. В качестве вспомогательных прямых здесь удобно использовать прямые a и b (если использовать AB и AC , то построения займут большую площадь чертежа). Чтобы определить точку пересечения прямой a с пл. Q , через вспомогательную проекцию прямой проведена вспомогательная плоскость $R' \perp \pi_2$. Точка пересечения M определяется путем уже известных построений по 1-му методу. Аналогично находят вторую общую точку K , как результат пересечения прямой b с пл. Q . KM - искомая линия пересечения.

Для проверки правильности построений можно использовать точки пересечения линии KM с фигурой треугольника ABC , задающего пл. Q : если они имеют соответственно **общие** линии связи, то построение сделано правильно.

При рассмотрении **частного** случая пересечения плоскостей было отмечено, что если плоскости заданы следами, то определение их линии пересечения не требует специальных методов, даже если обе плоскости занимают общее положение. Поэтому можно обойтись без 2-го метода если перевести любой способ задания плоскостей в задание **следами**. В некоторых случаях это может быть более рационально, чем использование 2-го метода (например, если одно из пересекающихся плоскостей уже задана следами, то проще перевести в следы и вторую плоскость).

Исходный чертёж

Решение



Построить точки пересечения прямой a с конической поверхностью.

Пояснение

Точки пересечения прямой с кривой поверхностью находим с помощью вспомогательной секущей плоскости, которую проводим через вершину конуса и прямой a . Если выбирать в качестве вспомогательных проецирующие плоскости, то сечения поверхности будут кривые линии. Поэтому проводим плоскость общего положения, пересекающую данную поверхность по образующим.

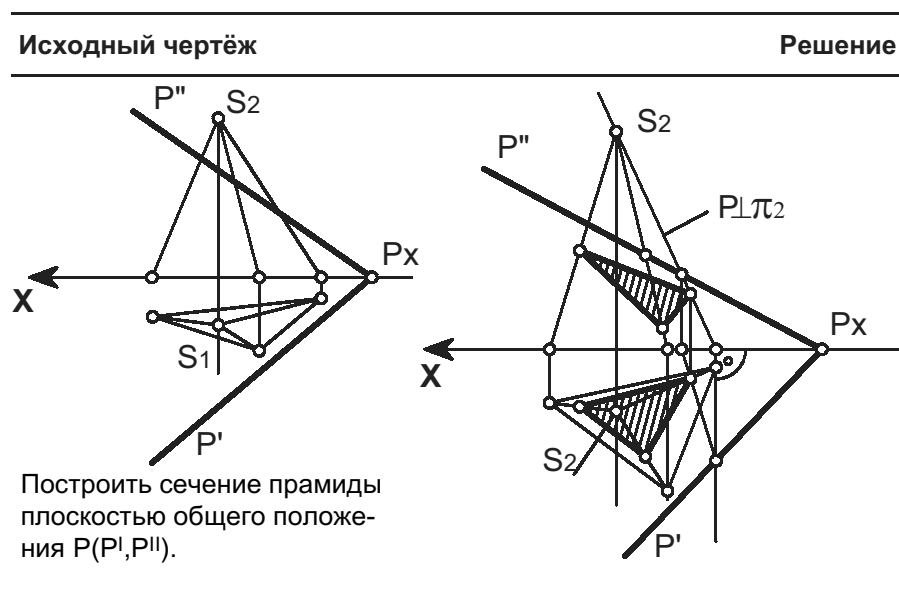
Для определения образующих строим след секущей плоскости на плоскости основания конуса с помощью вспомогательной прямой SMI . Через два горизонтальных следа прямой a и SMI пройдет след секущей плоскости.

Пояснение

Фигуры сечения строим по точкам встречи ребер тела с плоскостью. Так как боковые грани призмы - горизонтально-проецирующие плоскости, горизонтальная проекция сечения известна. Она совпадает с горизонтальной проекцией боковых граней и ребер призмы.

Фронтальную проекцию сечения строим с помощью линий уровня плоскости, например, фронталей. В пересечении фронтальных проекций вспомогательных прямых с соответствующими фронтальными проекциями ребер получаем искомые проекции точек пересечения ребер с плоскостью.

Пример 7.3



Пояснение

Так как горизонтальный след секущей плоскости не пересекает основание пирамиды, то пересекается ее боковая поверхность. Сечение будет иметь форму треугольника, вершинами которого - точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью. Эти точки находятся с помощью вспомогательных проецирующих плоскостей.

Подобную задачу можно решить и другим способом, преобразовав плоскость общего положения в проецирующую и приведя тем самым задачу к виду задачи в примере 7.1.

3-й МЕТОД. Пересечение плоскостей и поверхностей

Как видно из названия, этот метод является универсальным, так как позволяет определить линию пересечения и плоскостей, и плоскости с поверхностью и поверхностями.

На рис. 5.12 показана схема метода.

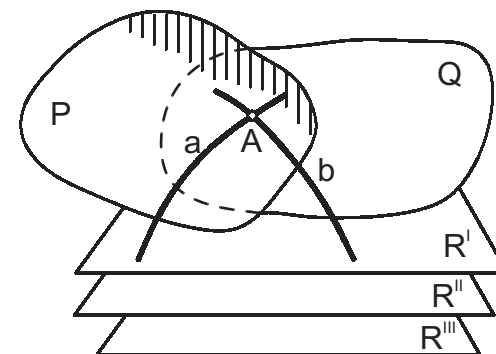


Рис. 5.12. Схема 3-го метода: пересечение плоскостей и поверхностей

Здесь P и Q пересекающиеся элементы (плоскости и поверхности). Приходится вспомогательная пл. R^I и определяются линии пересечения пл. R^I с P и Q (линии a и b). Линии a и b лежат в пл. P и пересекаются в точке A **общей** для P и Q . Число общих точек определяются требуемой точностью построения. Каждая вспомогательная плоскость дает **одну** общую точку.

Очевидно, для построения линий пересечения a и b плоскость R^I должна быть **проецирующей** (часто используют горизонтальные и фронтальные плоскости).

На рис. 5.13 показано определение линии пересечения плоскостей по 3-му методу.

Здесь пересекающиеся элементы - пл. $P (P^I \cap P^{II})$ и пл. $Q (a \parallel b)$. вспомогательная плоскость R^I - горизонтальная. Линия пересечения R^I и P - горизонталь, проходящая через точку 3 на следе P^{II} . Она пересекается с линией пересечения 1-2 в точке K - общей для обеих плоскостей. Так как линия пересечения плоскостей - прямая, то для ее построения требуется определить положение еще одной общей точки, для чего надо провести еще одну вспомогательную плоскость (удобно параллельно первой) и повторить построение. На рисунке это построение не показано.

Использование 3-го метода при пересечении плоскостей иногда приводит к более простым построениям, чем 2-й метод, 3-й метод не заменим, если пересекаются поверхности.

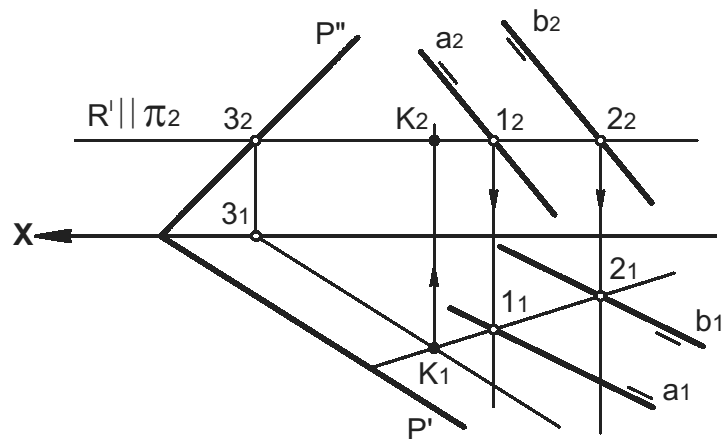
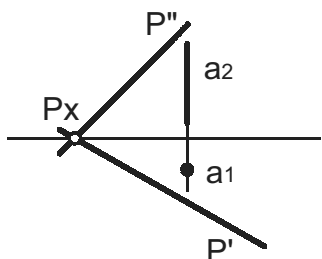


Рис. 5.13. Пересечение плоскостей (3-й метод).

5.3. Примеры графических построений

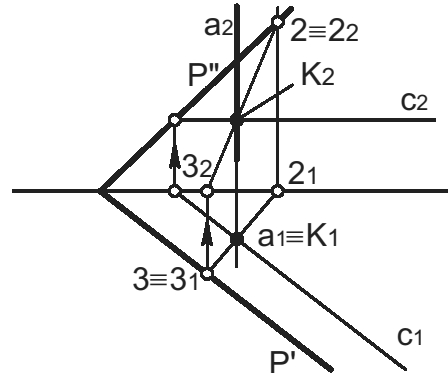
Пример 5.1

Исходный чертёж



Прямая а пересекает пл. $P(P' \cap P'')$. Определить точку пересечения К

Решение



Пояснение

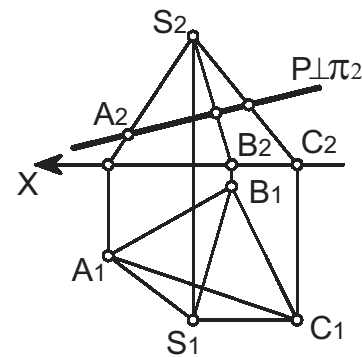
Прямая а - горизонтально-проецирующая, поэтому ее проекция a_1 содержит и проекцию точки пересечения прямой с плоскостью Р - K_1 . остается найти ее проекцию K_2 . она определяется путем проведения через т. К линии, лежащей в плоскости Р. Этой вспомогательной линией может быть линия частного положения (в примере С - горизонталь) **или** общего (2-3). Существенно, что все построения начинают с плоскости проекций, к которой прямая перпендикулярна. Линия общего положения, лежащая в плоскости, как видно из чертежа, задается своими следами, которые естественно, лежат на следах плоскости (рис. 5.14).

Иногда задание прямой следами может потребовать выхода далеко за пределы чертежа (чтобы построить следы). Тогда придется прибегнуть к помощи одной или даже двух вспомогательных прямых, за

7.4. Примеры графических построений

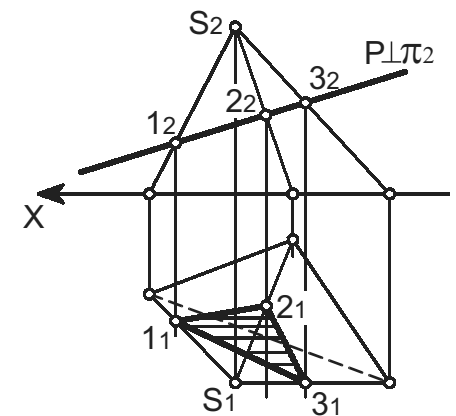
Пример 7.1

Исходный чертёж



Пирамиду пересекает пл. $P \perp \pi_2$. Определить формы сечения.

Решение

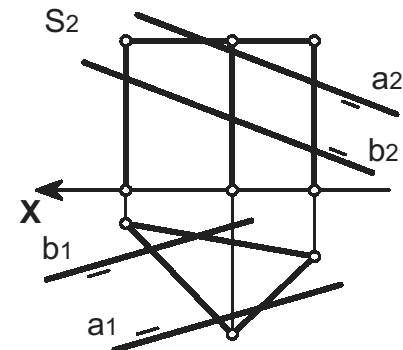


Пояснение

Секущая плоскость Р - проецирующая. Значит, одна из проекций сечения известна. Она совпадает с проецирующим следом плоскости. С помощью линий связи строим вторую проекцию сечения.

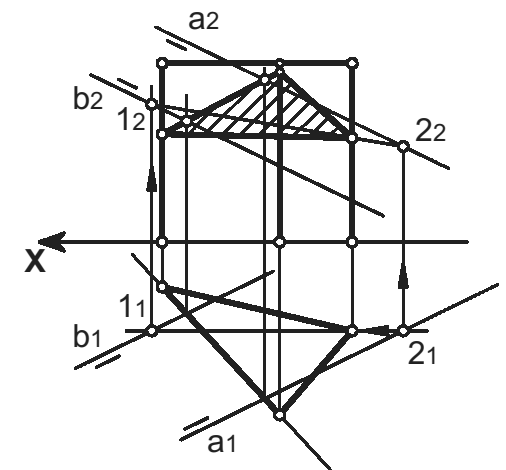
Пример 7.2

Исходный чертёж



Построить сечение прямой призмы плоскостью общего положения $Q(a \parallel b)$.

Решение



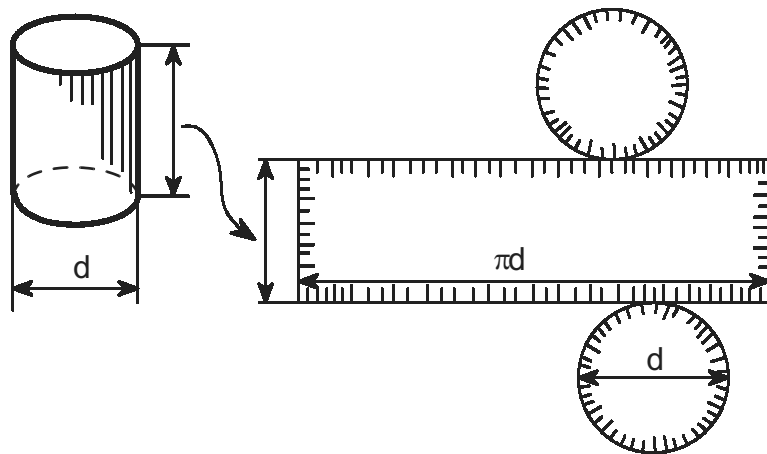


Рис. 7.9. Развертка цилиндра

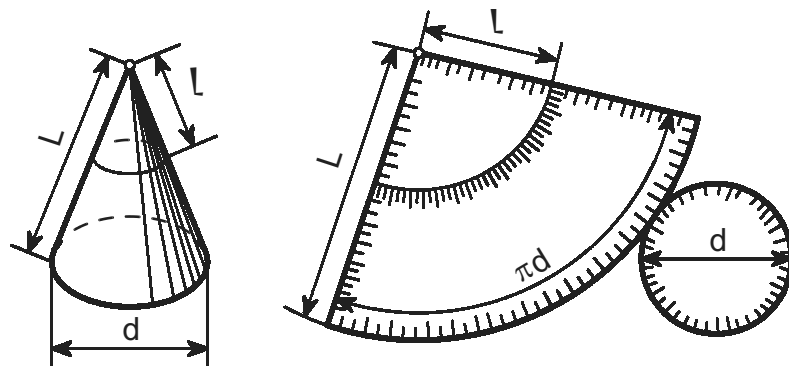


Рис. 7.10. Развертка конуса

которые и закрепляют нужную прямую.

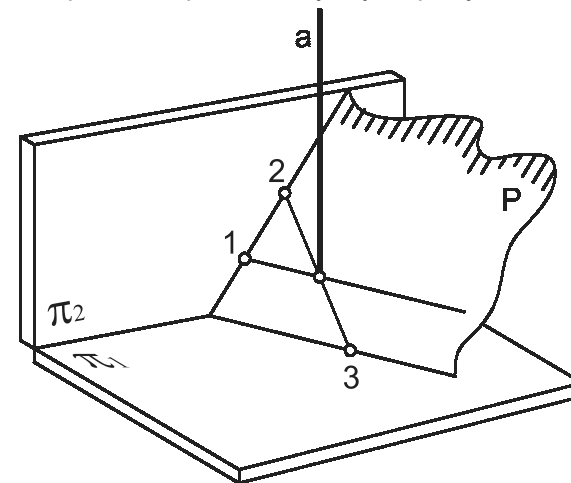
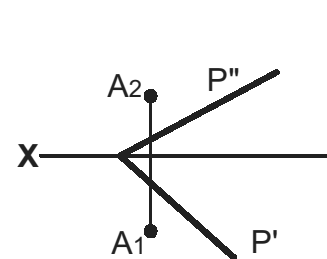


Рис. 5.14. Прямая общего положения в плоскости, заданной следами

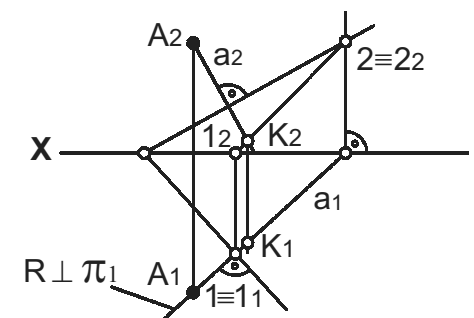
Пример 5.2

Исходный чертёж

Решение



Через точку A провести прямую $a \perp \text{пл. } P$ и найти т. пересечения с плоскостью



Пояснение

Известно, что прямая, перпендикулярная к плоскости, должна быть перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. В качестве этих двух прямых используют обычно горизонталь и фронталь. В примере этими горизонталями и фронталями являются горизонтальный и фронтальный следы, перпендикулярно которым и проведены проекции линии a .

Для определения точки пересечения K использован метод 1-й - через прямую a проведена вспомогательная плоскость $R \perp \pi_1$. Поскольку исходная плоскость P задана следами, удобно задать следами и пл. R . Их линия пересечения 1-2, пересекаясь с прямой a (на фронтальной плоскости 1_2-2_2 с a_2) определяет положение точки K.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

6.1. Общие положения

Довольно часто сложность графических построений при решении тех или иных задач - объясняется не сложностью самих задач, а неудачным размещением геометрических элементов относительно плоскостей проекций. Так, например, вопрос об измерении отрезков прямой решается просто, если прямая параллельна плоскости проекций. Или такая существенная проблема, как определение элементов пересечения - становится простой, если плоскость или прямая занимают проектирующее положение.

Поэтому, проектируя форму, следует строить ее изображение так, чтобы дальнейшая работа с ними была удобна. Например, если форма содержит ряд параллельных линий (ребра, оси вращения и т.д.) то удобно эти линии сделать линиями частного положения, и т.д.

Если же мы имеем дело с готовыми чертежами и работа с ним требуется сложных построений, то и здесь не все потеряно - можно попытаться **упростить** изображения. Для этого следует изменить **относительное положение** форм и плоскостей проекций. Сделав это можно двумя способами:

- форма остается неподвижна относительно исходной системы плоскостей, а вводятся **новые** плоскости проекции. Эти новые плоскости располагают таким образом относительно элементов формы, чтобы получить удобные для дальнейшей работы изображения. Этот способ называют способом **замены** плоскостей проекций.

- При втором способе форму вращают вокруг некоторой оси, тем самым изменяя ее положение относительно существующих плоскостей проекций. Этот способ называют способом **вращения**.

Оба способа преобразования проекций обеспечивают достаточно простой переход к нужному виду чертежа. Выбор способа определяет вид исходных чертежей и желательные их изменения.

Правильность выбора - результат практического опыта.

6.2. Способ замены плоскостей проекции

в этом способе все геометрические элементы, участвующие в задаче, остаются неподвижными относительно исходных плоскостей проекций, а появляются новые плоскости проекций.

Поскольку мы имеем дело только с чертежами (изображениями элементов) ввод **новой** плоскости проекции должен ограничиваться условиями, обеспечивающими простой переход от старых изображений к

Наклонная призма разворачивается аналогично. Отличие в том, что грани диагоналями разбиваются на треугольники, которые на развертке строятся последовательно **методом засечек**.

Теперь можно сформулировать общую последовательность построения развертки поверхности, составленной из **плоских** граней (гранная поверхность):

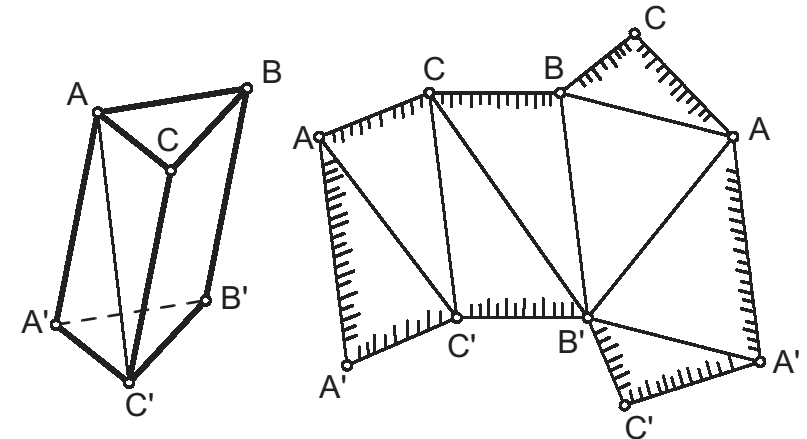


Рис. 7.8. Развертка поверхности наклонной призмы

- если в грани более трех сторон, то она разбивается диагоналями на треугольники. Надо знать размеры **всех** ребер и диагоналей;

- построение развертки можно начинать с изображения **любой** грани (методом засечек). Последующие грани пристраиваются к **общим** ребрам;

- на развертке поверхности тела ребра по контуру дублируются (проверка правильности построения), на развертке незамкнутой поверхности не дублируются ребра контура поверхности.

Умение строить развертки требуется при проектировании различных тонких оболочек (кожухи, воздуховоды и т.д.) и разработки способов их реализации. Довольно сложные развертки могут получаться при проектировании одежды.

Кроме гранных поверхностей в технических формах широко используются кривые поверхности. Большинство из них не разворачивается. Однако, наиболее популярные - конические и цилиндрические - легко разворачиваются. Развертка поверхности прямого кругового цилиндра показана на рис. 7.9.

На рис. 7.10 изображена развертка прямого кругового конуса. Там же показано, как построить развертку, если конус усеченный.

Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса (1)- в сечении получается окружность; если параллельна - гипербола (2); в остальных случаях - эллипс (3).

Кроме того, если плоскость проходит через вершину - в сечении получаются две пересекающиеся прямые (4). И, наконец, если секущая плоскость параллельна образующей, в сечении - парабола (5).

Таким образом, наиболее простые формы фигуры сечения получаются, когда секущая плоскость перпендикулярна оси (окружность), или она параллельна оси цилиндра (параллельные прямые), или проходит через вершину конуса (пересекающиеся прямые). Два последних случая и надо использовать при пересечении боковой поверхности конуса или цилиндра прямой линией.

Шар. При пересечении поверхности шара плоскостью всегда образуется окружность.

7.3. Развертывание поверхностей тел

Развертыванием называют совмещение поверхности с плоскостью без разрывов поверхности. Поверхность тел, составленная из плоских граней, развертывается без труда. Пример - развертка призм (рис. 7.7 и 7.8).

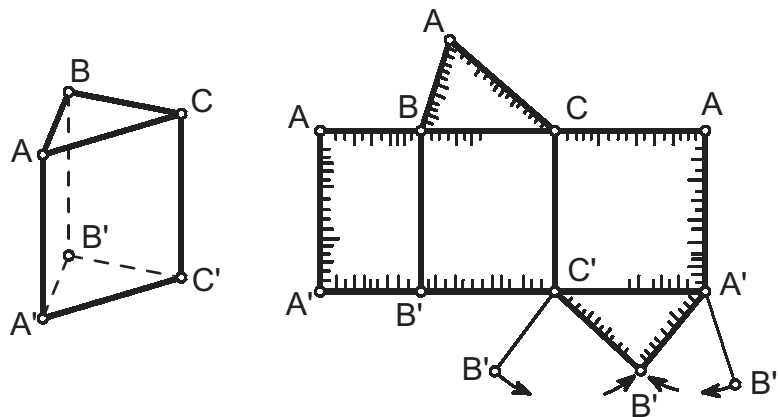


Рис. 7.7. Развертка поверхностей прямой призмы

Чтобы построить развертку призмы, надо знать только размеры ребер. Боковая поверхность - прямоугольник. Контур основания пристраивается к одному из ребер, причем положение недостающей вершины определяется методом засечек (так положение т. В' на контуре основания $A'B'C'$ определяется как результат пересечения двух дуг с радиусами $C'B'$ и $A'B'$).

новым.

Вот это условие: новая плоскость проекций должна быть размещена перпендикулярно к уже существующей плоскости проекций (рис. 6.1).

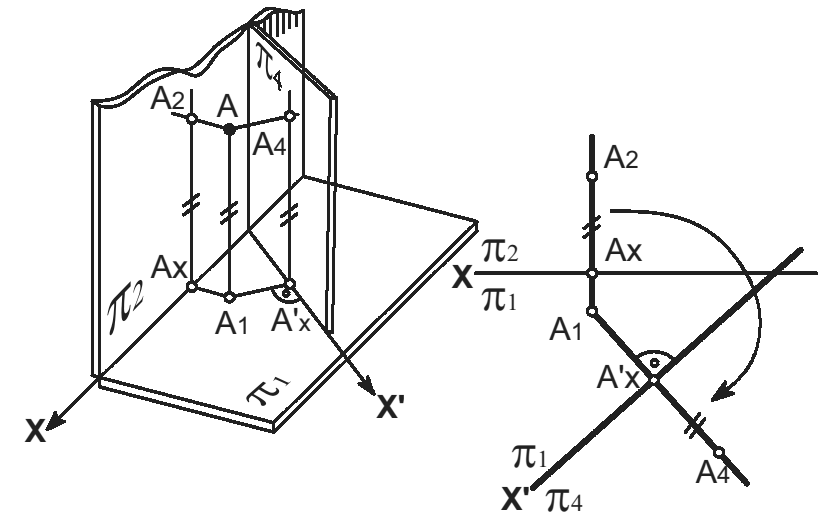


Рис. 6.1. Введение новой плоскости проекций

Условие перпендикулярности между существующей и новой плоскостью обеспечивает простой переход к новым проекциям. Расстояние от новой проекции точки до оси сохранения и берется с предыдущей плоскости проекции ($A_2A_x = A_yA'_x$). Процесс введения новых плоскостей может продолжаться по тем же правилам (рис. 6.2).

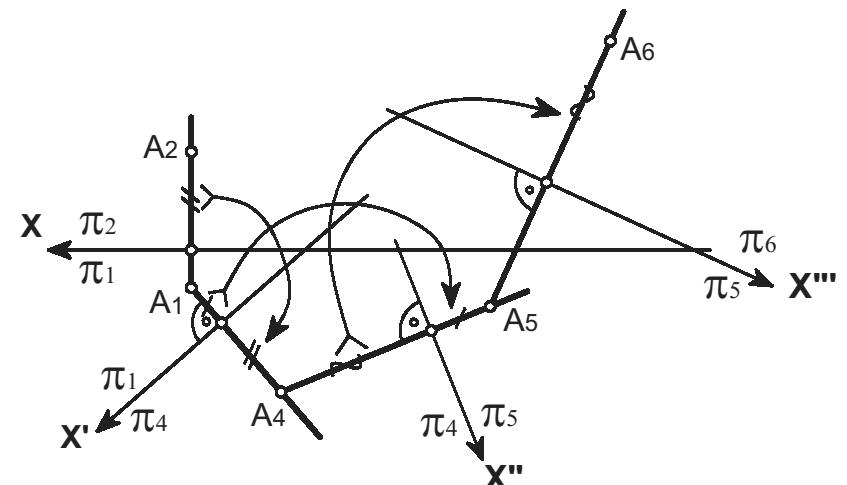


Рис. 6.2. Последовательное введение новых плоскостей проекций

Новые плоскости проекций обозначают π_n , а превышение новой проекции той же точки на предыдущей плоскости.

6.3. Способ вращения

Как уже отмечалось, новый вид проекций можно получить, поворачивая **всю совокупность** геометрических элементов относительно плоскостей проекций до положения, дающего нужный вид проекций. Ось вращения при этом располагается таким образом, чтобы обеспечить удобный переход от существующих изображений - к новым.

Наиболее простой переход получается, если ось вращения расположить перпендикулярно к плоскости проекций (рис. 6.3).

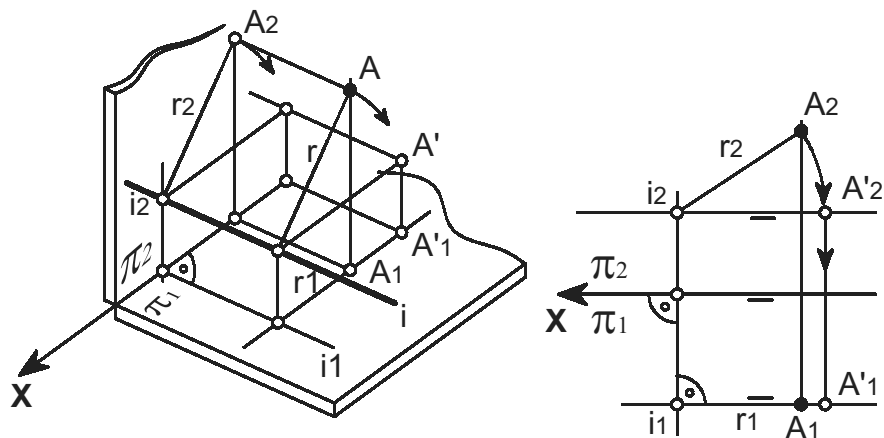


Рис. 6.3. Перемещение проекций точки при ее вращении вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций

На рисунке ось вращения $i \perp \pi_2$. Радиус вращения i точки A параллелен π_2 , поэтому $i2 = i$ и на π_2 изображается картина перемещения в ее истинных величинах. При этом на π_1 проекция точки перемещается по линии $i1$ (т.е. параллельно оси X). Если будет вращаться вокруг оси, то ее фронтальная проекция будет вращаться вокруг точки $i2$ по окружности с $i = i2$, а удаляясь от $i1$ на максимальное расстояние, равное i .

При вращении точки относительно оси, перпендикулярной π_1 , картина будет аналогична: проекция точки на π_1 будет вращаться, а проекция на π_2 - перемещаться параллельно оси X .

Зная закономерности измерений вида проекций при вращении геометрических элементов вокруг осей, перпендикулярных к плоскости

Замечание. При определении фигуры сечения задача значительно упрощается, когда плоскость занимает **частное** положение. Это достигается преобразованием проекций. В случае пересечения тела прямой линией, вспомогательную плоскость R стараются расположить так, чтобы фигуры сечения оказалась возможно проще. С этой целью полезно заранее знать форму сечения при этом или ином положении плоскости относительно рассекаемого тела.

Цилиндр, прямой круговой. При пересечении боковой поверхности возможны три варианта. Угол α между секущей плоскостью и осью цилиндра равен 90° (1 - в сечении окружность); секущая плоскость параллельна оси цилиндра (2 - в сечении параллельные прямые, $\alpha = 0$). В остальных случаях в сечении - эллипс.

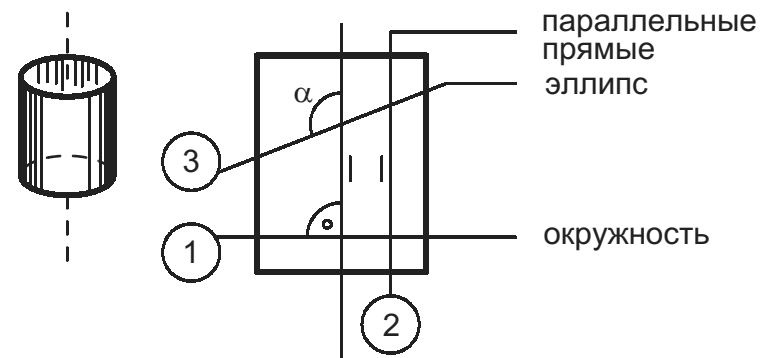


Рис. 7.5. Пересечение цилиндра плоскостью

Конус, прямой круговой. В случае с конусом вариантов пересечения его боковой поверхности пять (рис. 7.6)

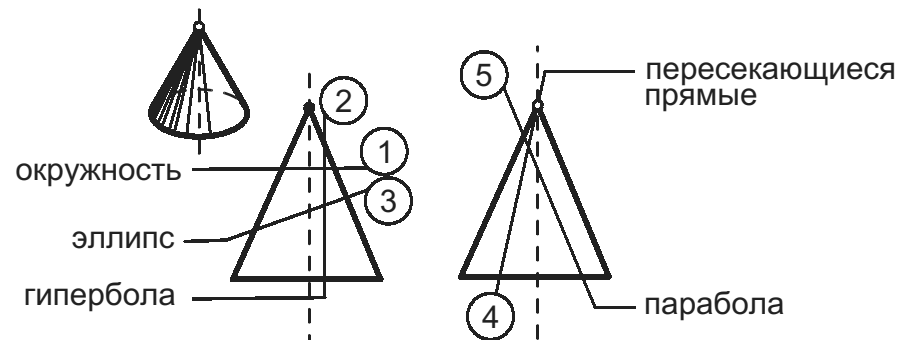


Рис. 7.6. Пересечение конуса плоскостью

Отсюда следствия. Плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает поверхность вращения по линиям, имеющим форму образующей и именуемым **меридианам**. Плоскость же, перпендикулярная оси вращения, рассекает поверхность по окружности, которую называют **параллель**. Самая протяженная параллель носит название **экватор**.

Цилиндр и конус имеющие боковые поверхности вращения и круглые основания называют **прямыми круговыми**. Они то и являются, наряду с параллелепипедами, основными конструктивными формами при проектировании.

7.2. Пересечение тел плоскостью и прямой

В процессе проектирования приходится рассекать тела плоскостью с целью показать строение формы, при стыковке тел и т.д. довольно часто приходится пересекать тела прямыми линиями. Короче говоря, пересечения тела плоскостью и прямой - операции, которые требуется четко выполнять.

Методика операции проста. При пересечении тела плоскостью фигура сечения определяется в результате проведения в этой плоскости вспомогательных прямых и построении точек пересечения прямых с поверхностью тела (рис.7.4,а). Число точек (и, соответственно, вспомогательных прямых) определяется требуемой точностью построений.

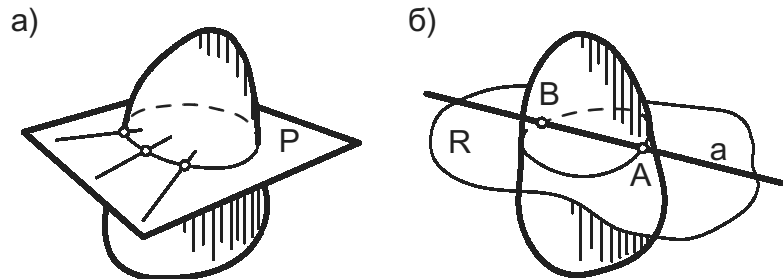


Рис. 7.4. Методика операций пересечения поверхности:
а - плоскостью; б - прямой

Если в боковой поверхности тела можно провести прямые, то пересечение этих прямых с секущей плоскостью также даст точки фигуры сечения.

При пересечении тела прямой, через прямую проводят вспомогательную плоскость (пл. R на рис. 7.4,б) и определяют фигуру сечения. Искомые точки (A и B) будут находиться на пересечении прямой (а) и фигуры сечения.

проекций, можно обойтись без указания конкретного положения осей вращения. Это обстоятельство используется в способе плоскопараллельного перемещения (рис. 6.4).

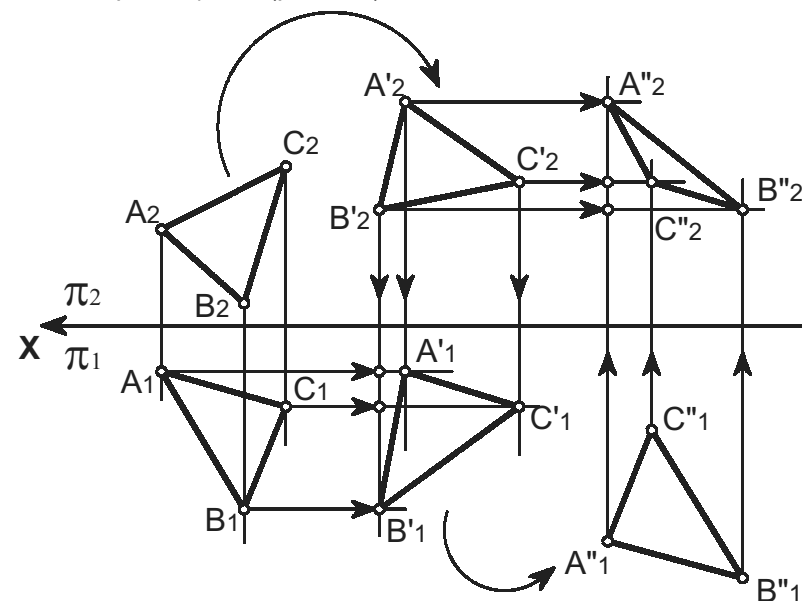


Рис. 6.4. Плоскопараллельное перемещение

Так, на рисунке вначале вращают фронтальную проекцию треугольника $A_2B_2C_2$ до нового положения $A'_2B'_2C'_2$. При этом относительное размещение в плоскости **всех** точек, представляющих геометрические элементы, должно сохраниться **неизменным**. На практике для этого удобно воспользоваться калькой, на которую наносят все основные точки. Калька разворачивается нужным образом и точки затем перекальваются на чертеж. Новое положение проекций смещается в удобном направлении, чтобы не накладываться на старое, чем обеспечивается комфортность работы с чертежами.

При вращении фронтальных проекций точек, их горизонтальные проекции перемещаются по линиям, параллельным оси X. Новое положение $A'_1B'_1C'_1$ определится путем пересечения этих линий с линиями связи от фронтальных проекций.

Вращение горизонтальных проекций (из $A'_1B'_1C'_1$ к проекциям $A''_1B''_1C''_1$) осуществляются аналогично.

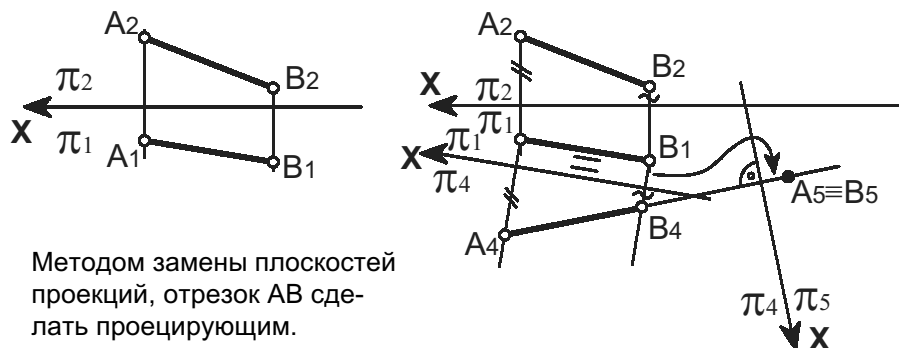
В качестве оси вращения может быть использована фронталь или горизонталь, но при этом возможности метода резко сужаются так как усложняются связи между старыми и новыми проекциями.

6.4. Примеры графических построений

Пример 6.1

Исходный чертёж

Решение



Методом замены плоскостей проекций, отрезок AB сделать проецирующим.

Пояснение

Относительно плоскостей проекций отрезок AB занимает общее положение. Нетрудно убедиться, что новую плоскость проекций (которая должна быть перпендикулярна к старой) можно поставить **параллельно** наклонному отрезку. И только, если отрезок параллелен плоскости, новая плоскость проекции может быть установлена и перпендикулярно к нему и параллельно (рис. 6.5).

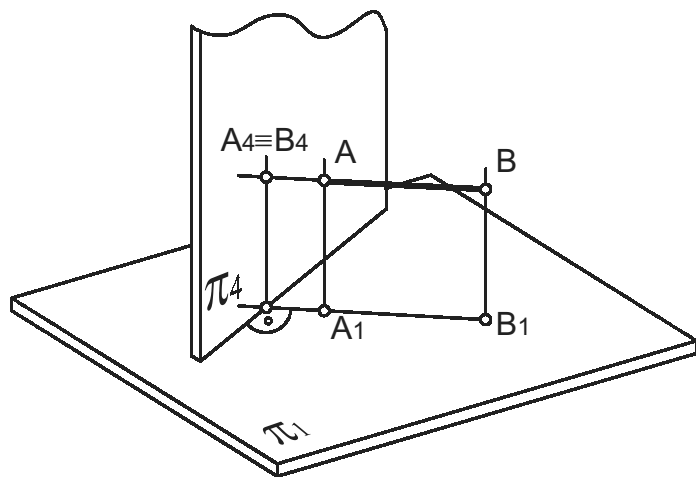


Рис. 6.5. Плоскость π_4 перпендикулярна к отрезку частного положения

образующая параллельна заданному направлению S, получается цилиндрическая поверхность, если она проходит через центр S' - коническая.

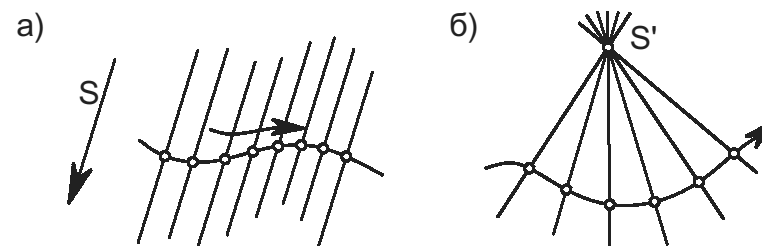


Рис. 7.2. образование поверхностей:
а - цилиндрической; б - конической

В технических формах применяются главным образом правильные поверхности: цилиндрическая, у которой направляющая - окружность, а S - перпендикулярно плоскости окружности; и коническая поверхность, где направляющая - окружность, а центр S находится на перпендикуляре к центру окружности.

Обе поверхности могут быть отнесены и к группе **поверхностей вращения**. Напомним, что поверхности вращения образуются путем вращения плоской линии вокруг оси вращения таким образом, чтобы каждая точка линии (образующей) двигалась по своей окружности. При этом центры всех окружностей лежат на оси вращения, а их плоскости - перпендикулярны этой оси (рис. 7.3).

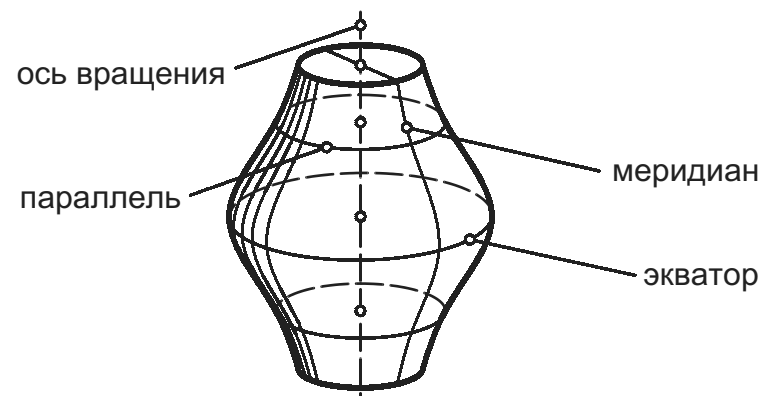


Рис. 7.3. поверхность вращения

7. ПРОСТЫЕ ТЕЛА

7.1. Простое тело - структурная единица формообразования

Какой бы сложной нам не казалась форма тела, ее всегда можно представить как сочетание более простых форм. Поэтому путь проектирования технических форм является путем создания комбинаций из форм простых.

Воплощением простых форм являются **простые тела** - кирпичики формотворчества. Их многообразие может быть представлено тремя динамическими рядами, показанными на рис. 7.1.

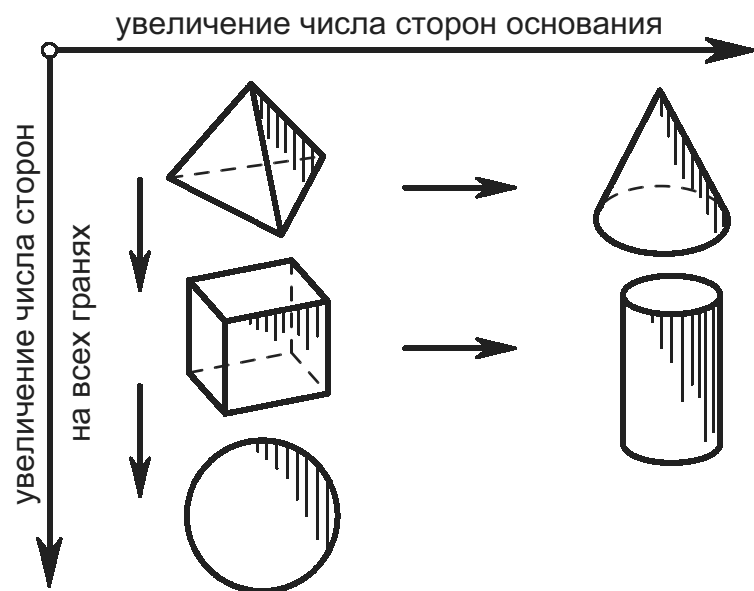


Рис. 7.1. Образование простых тел

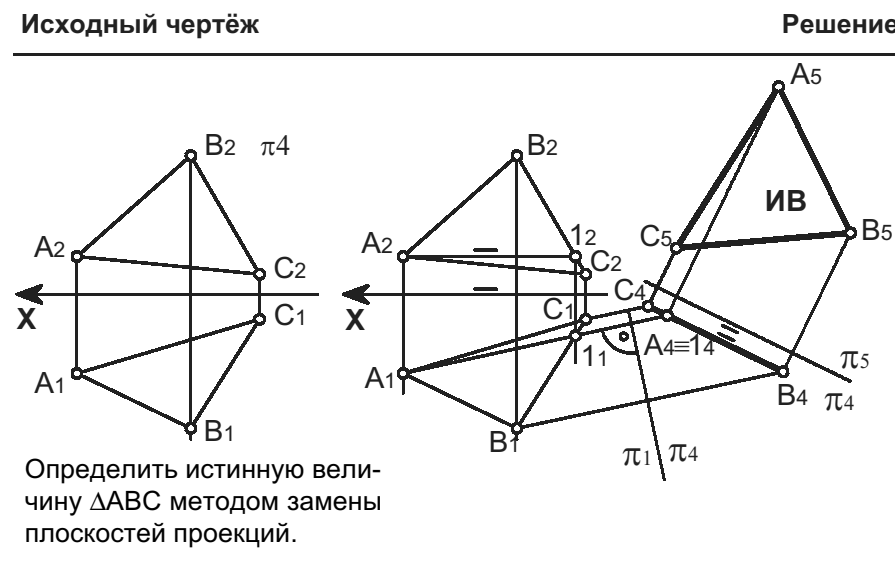
Исходным простым телом является тетраэдр, боковые грани которого - треугольники, простейшие плоские фигуры. При **одновременном** увеличении числа сторон каждой грани (вертикальный ряд), вначале появляется четырехгранник; параллелепипед и куб - его популярные разновидности. Эта линия развития заканчивается шаром.

Образование цилиндрических и конических поверхностей

В общем случае цилиндрическая и коническая поверхности образуются путем движения прямой линии (направляющая) вдоль криволинейной образующей (линейчатые поверхности) (рис. 7.2). Если при этом

Поэтому задача решается в два приема. Вначале плоскость π_4 ставится параллельно отрезку АВ (кстати, A_4B_4 - истинная величина), затем плоскость π_5 размещается перпендикулярно отрезку АВ.

Пример 6.2



Пояснение

Чтобы треугольник спроецировался в истинную величину, плоскость проекций должна быть расположена **параллельно** плоскости общего положения можно расположить новую плоскость проекций **перпендикулярно**, т.е. сделать эту плоскость **проецирующей**. Но для этого надо предварительно в плоскости общего положения провести линию, перпендикулярно которой будет проведена новая плоскость про-

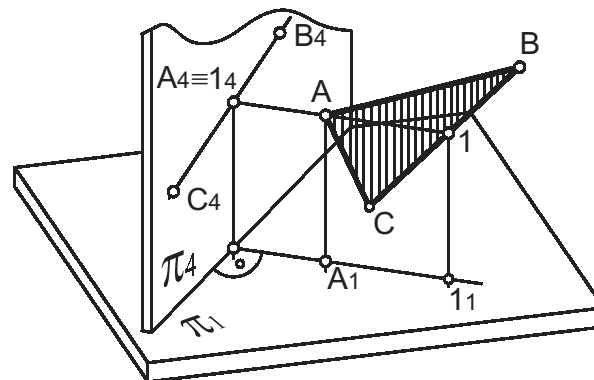
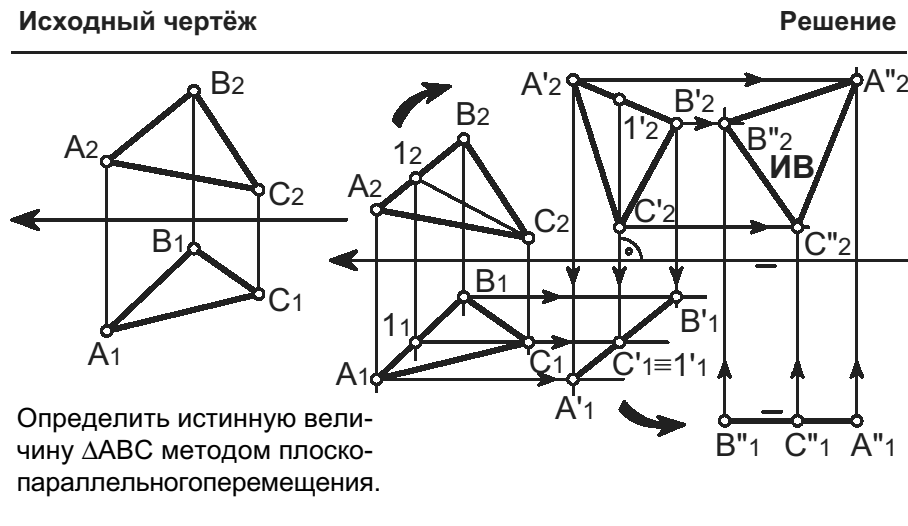


Рис. 6.6. Плоскость π_4 перпендикулярна плоскости общего положения ABC

екций. Этой линией, как мы уже видели в примере 6.1, может быть только линия параллельная исходной плоскости. (рис. 6.6).

Поэтому задача в примере 6.2 также решается в два этапа. Вначале плоскость π_4 располагается перпендикулярно плоскости ABC (перпендикулярно горизонтали A_11_1) и на эту плоскость горизонталь проецируется в точку, а пл. ABC - в линию. Затем плоскость π_5 размещается параллельно плоскости ABC. На π_5 треугольник проецируется в истинную величину.

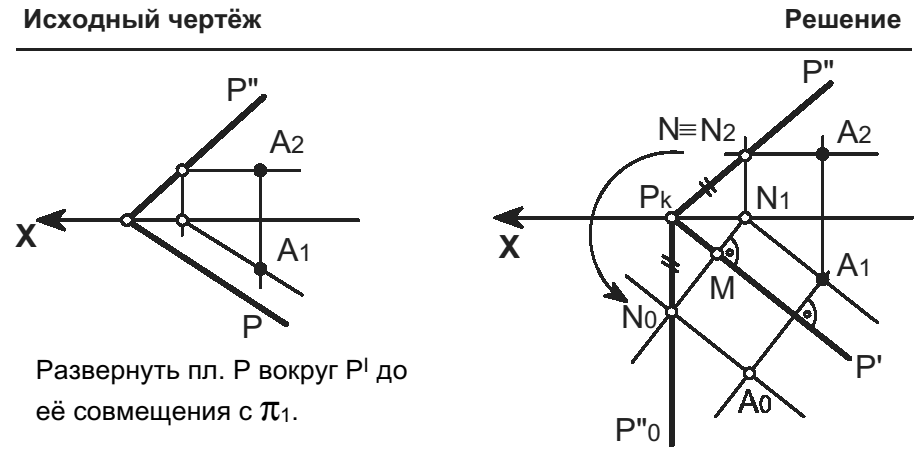
Пример 6.3



Пояснение

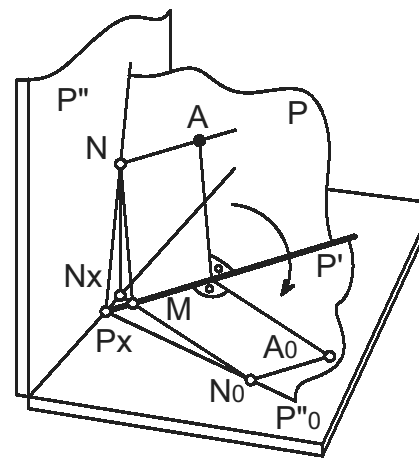
Как и в случае введения новых плоскостей проекций, невозможно прямую общего положения повернуть перпендикулярно к плоскости, но можно расположить ее **параллельно** плоскости. Аналогично и плоскость общего положения нельзя сразу повернуть до ее параллельности, но **перпендикулярно** поставить можно сразу. Для этого в плоскости проводят линию частного положения (на чертеже это горизонталь C_1) и разворачивают ее фронтальную проекцию $\perp$ к π_1 (а с ней и все остальные элементы проекций, сохраняя их взаимное положение). Если построение сделано верно, то на π_1 треугольник спроецируется в линию (его плоскость стала горизонтально-проецирующей). Теперь надо развернуть плоскость параллельно π_2 задача решена.

Пример 6.4



Пояснение

Если плоскость вращается вокруг ее следа до совмещения с плоскостью проекций, в которой расположен этот след, то отрезки линий и фигуры, расположенные в плоскости, изобразятся без искажения.



След P^I , как ось вращения, не меняет своего положения; точка пересечения следов P_x также не меняет своего положения, а поэтому, чтобы указать совмещенное положение следа P^{II} , достаточно найти еще одну точку этого следа в положении совмещения с плоскостью π_1 .

Выбираем некоторую точку N, лежащую на следе P^{II} . Эта точка опишет дугу окружности в плоскости Q, перпендикулярной к оси вращения; центр этой дуги лежит в точке M пересечения плоскости Q со следом P^I .

Описывая из точки M дугу радиусом MN в плоскости Q, получаем в пересечении этой дуги с Q точку N_0 на плоскости π_1 . Длину MN можно определить как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами MN_1 и N_1N_0 , где $N_1N_0 = N_2N_1$.

Аналогичные построения проводим при совмещении точки A, лежащей в плоскости P.

Если в плоскости дан отрезок прямой, то, найдя совмещенное положение концов этого отрезка, получим натуральную величину отрезка.