Министерствое образования и науки Российской Федерации
<<Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого>>
(НовГУ)
Великий Новгород

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**методические указания к решению задач
по теоретической механике
для студентов дневной и заочной сокращенной форм обучения
по направлениям:**

**Для студентов дневной и заочной сокращенной форм обучения
по направлениям:**

15.03.05 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника, 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 08.03.01 – Строительство, 35.03.06 – Агроинженерия, 15.03.06 – Мехатроника и робототехника

2016

Статика

1. Равновесие плоской системы сходящихся сил (условие равновесия в геометрической форме).

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакции связей;

5) построить замкнутый силовой многоугольник (построение надо начинать с силы, известной как по модулю, так и по направлению);

6) решив силовой многоугольник, определить искомые величины.

Если число активных сил и реакций связей, приложенных к твердому телу, находящемуся в равновесии, равно трем, то задача сводится к построению и решению силового треугольника.

2. Равновесие плоской системы сходящихся сил (условие равновесия в аналитической форме).

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, то есть, что число алгебраических неизвестных не более двух;

6) выбрать в плоскости действия сил систему осей декартовых координат x,y;

7) составить уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси декартовых координат;

8) решить систему составленных уравнений равновесия и определить искомые величины; если величина какой-либо из неизвестных сил окажется отрицательной, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было указано на рисунке.

При выборе осей декартовых координат целесообразно их направить так, чтобы они были параллельны либо перпендикулярны большинству слагаемых сил.

3. Равновесие пространственной системы сходящихся сил.

Решение задач следует проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) убедиться в том, что задача является статически определенной, то есть, что число алгебраических неизвестных величин не более трех;

6) выбрать систему осей декартовых координат x,y,z;

7) составить уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси декартовых координат;

8) решить полученную систему уравнений, то есть определить неизвестные величины;

Начало осей декартовых координат рекомендуется выбрать в точке пресечения линий действия слагаемых сил, а координатные оси направить параллельно либо перпендикулярно большинству сил.

4. Равновесие плоской системы параллельных сил.

Решение задач следует проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, то есть что число алгебраических неизвестных величин не более двух;

6) выбрать систему осей декартовых координат;

7) составить уравнения равновесия системы параллельных сил;

8) решив уравнения равновесия, определить неизвестные величины;

Если величина какой-либо неизвестной силы окажется отрицательной, то это означает, что направление этой силы противоположно тому, которое было изображено на рисунке.

Оси декартовых координат целесообразно направлять так, чтобы одна из них оказалась параллельной всем силам, приложенным к твердому телу. Уравнение моментов рекомендуется составлять относительно точки, лежащей на линии действия неизвестной силы. Это дает возможность определить одну из неизвестных величин непосредственно из уравнения моментов.

При решении задач с помощью двух уравнений моментов шестой пункт решения задачи отпадает. При этом не следует забывать, что точки, относительно которых составляются уравнения моментов, не должны лежать на прямой параллельной силам.

5. Равновесие произвольной плоской системы сил.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то, применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, то есть что число неизвестных величин не более трех;

6) выбрать направления осей декартовых координат и точку (или точки), относительно которой предполагается составить уравнение моментов;

7) составить уравнения равновесия твердого тела;

8) решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

Уравнения равновесия можно составить в любой форме.

Следует стремиться к получению таких уравнений равновесия, в каждое из которых входила бы одна неизвестная величина. В этом случае можно каждую из неизвестных величин непосредственно определить из соответствующего уравнения. Для этого оси координат целесообразно направить так, чтобы некоторые неизвестные силы оказались перпендикулярными к этим осям. Тогда величины этих неизвестных сил в соответствующее уравнение проекций не войдут. Центр моментов, т.е. точку, относительно которой должно быть составлено уравнение моментов, следует выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил. Это дает возможность непосредственно определить из соответствующего уравнения моментов величину третьей неизвестной силы. Если, однако, этот центр моментов расположен так, что вычисление плеч при определении моментов сил представляет значительные трудности, то лучше составить относительно другого центра такое уравнение моментов, в которое войдут величины двух неизвестных сил, и затем совместно решить полученную систему уравнений.

Если направление какой-либо реакции связи неизвестно, то следует заменить ее двумя составляющими, направив их параллельно осям координат в сторону положительного отсчета. Если в результате решения знак величины какой-либо силы окажется отрицательным, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было предварительно указано на рисунке.

В тех случаях, когда по условию задачи требуется определить давление твердого тела на опоры, нужно найти равные по модулю этим давлениям соответствующие реакции связей, а затем направить искомые давления противоположно этим реакциям.

6. Расчет плоских ферм способом вырезания узлов (аналитический метод решения)

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то, применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) определить реакции опор, пользуясь уравнением равновесия для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело;

6) вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и рассмотреть его равновесие под действием активных сил и реакций разрезанных стержней; определить эти реакции из двух уравнений проекций сил, приложенных к узлу, на декартовые оси координат;

7) переходя от узла к узлу, рассматривать аналогично равновесие каждого узла; при этом в каждом узле должно быть только два неизвестных усилия в стержнях; составляя для каждого узла уравнения равновесия в проекциях на оси x и y, определить все искомые усилия в стержнях.

7. Расчет плоских ферм методом сечений (методом Риттера)

При расчете ферм методом сечений рекомендуется такая последовательность действий:

1) определяем опорные реакции, рассматривая равновесие фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил; для этого составляем три уравнения равновесия;

2) разрезаем мысленно ферму, к которой приложены все внешние силы, на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех. и заменяем действие отброшенной части искомыми усилиями стержней, полагая все стержни растянутыми;

3) составляем уравнение равновесия для части фермы так, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие; для этого составляем уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий; если два стержня параллельны, то составляем уравнение проекции на ось, перпендикулярную этим стержням, в которое также войдет одно неизвестное усилие;

4) решая каждое из составленных уравнений, находим искомое усилие в стержнях; если в ответе получается знак минус, то это означает, что стержень сжат, а не растянут.

8. Равновесие произвольной пространственной системы сил.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то, применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, то есть что число алгебраических неизвестных величин не более шести;

6) выбрать направления осей декартовых координат;

7) составить шесть уравнений равновесия твердого тела.

В случае системы параллельных сил отпадают два уравнения проекций сил на оси, перпендикулярные к силам, и одно уравнение моментов сил относительно оси, параллельной силам;

8) решив систему уравнений, составленных в предыдущем пункте, найти неизвестные величины.

Оси декартовых координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными либо перпендикулярными к возможно большему числу неизвестных сил, а также, чтобы линии действия неизвестных сил пересекали эти оси.

9. Равновесие тел при наличии трения скольжения.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то, применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия , которые должны быть равны для статически определенных задач; при этом к уравнениям равновесия твердого тела следует добавить зависимость силы трения от нормального давления;

6) выбрать систему координат;

7) составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к твердому телу или системе твердых тел;

8) решив систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

10. Равновесие тел при наличии трения качения.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то, применив аксиому освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей; при этом следует реакцию шероховатой поверхности отложить из точки, отстоящей на расстоянии коэффициента трения качения от нормали, проведенной из центра катка, и заменить реакцию двумя составляющими – нормальной реакцией и силой трения;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) сопоставить число неизвестных и число уравнений равновесия, добавив к ним зависимость момента трения качения от нормального давления; число неизвестных должно быть равно числу уравнений, если задача является статически определенной;

6) составить систему уравнений равновесия для твердого тела;

7) решив полученную систему уравнений равновесия, определить искомые величины;

8) сопоставить величину силы трения с максимальной силой трения скольжения, убедиться в том, что первая сила меньше второй.

1. Определение закона движения и уравнения траектории точки.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выбирается система неподвижных координат – прямоугольная, полярная или какая-либо иная; начало координат и та, или иная система координат выбираются, исходя из условий задачи, так, чтобы дальнейшее решение было возможно более простым;

2) на основании условий задачи для избранной системы координат составляются уравнения движения точки, т.е. находится зависимость координат точки от времени;

3) имея уравнение движения точки, можно определить ее положение в любой момент времени, установить направление ее движения, найти траекторию и ответить на различные вопросы, касающиеся движения точки.

2. Определение скорости и ускорения точки.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) составить уравнение движения точки в выбранной системе координат;

3) по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат и скорости по величине и направлению;

4) зная проекции скорости, определить проекции ускорения на оси координат и ускорения по величине и направлению.

Если траектория точки задана по условию задачи, то целесообразно применить естественную форму уравнений движения и искать ускорение точки через проекции на естественные оси координат.

3. Определение уравнений движения точки и ее траектории, если известно ускорение точки.

Решение задач рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) составить проекции ускорения на эти оси;

3) проинтегрировать полученные зависимости и найти проекции скорости;

4) в найденных выражениях определить произвольные постоянные интегрирования, пользуясь известными значениями проекций скорости в некоторый момент времени;

5) проинтегрировать полученные зависимости для проекций скорости и получить уравнения движения точки;

6) определить произвольные постоянные интегрирования, пользуясь значениями координат точки в некоторый момент времени;

7) исключив из уравнений движения время, получить уравнение траектории в координатной форме.

4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

При решении задач рекомендуется придерживаться такой последовательности действий:

Первый тип задач – дано уравнение вращения твердого тела, требуется определить угловую скорость, угловое ускорение, скорость и ускорение точки твердого тела.

1) выбираем систему координат так, чтобы одна из осей (для определенности ось z) совпадала с осью вращения;

2) составляем уравнение вращения твердого тела (зависимость угла поворота от времени);

3) дифференцируя по времени угол поворота, определяем проекцию угловой скорости на ось вращения;

4) вычисляя вторую производную от угла поворота по времени, находим проекцию углового ускорения на ось вращения;

5) пользуясь выражением проекции угловой скорости на ось вращения, вычисляем линейную скорость точки и ее нормальное ускорение;

6) пользуясь выражением проекции углового ускорения на ось вращения, определяем касательное ускорение точки;

7) по найденным нормальному и касательному ускорениям находим полное ускорение точки по величине и направлению.

Второй тип задач – задано угловое ускорение или угловая скорость твердого тела; требуется найти уравнение вращения, скорость и ускорение точки твердого тела:

1) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее проекцию углового ускорения на ось вращения, находим проекцию угловой скорости; произвольную постоянную интегрирования определяем по начальным данным;

2) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее проекцию угловой скорости на ось вращения, находим уравнение вращения твердого тела; произвольная постоянная интегрирования определяется по начальным данным;

3) пользуясь выражением проекции угловой скорости на ось вращения, вычисляем величину скорости и нормального ускорения точки;

4) определяем величину касательного ускорения точки, зная проекцию углового ускорения на ось вращения, и далее находим полное ускорение точки.

5. Абсолютное, переносное и относительное движения точки.

1) Первый тип задач: известны относительное и переносное движения точки; требуется определить уравнения абсолютного движения и абсолютную траекторию точки.

2) Второй тип задач: известны абсолютное и переносное движения точки; требуется определить уравнения относительного движения и относительную траекторию точки.

Первая задача сводится к сложению двух составляющих движения точки.

Вторая задача заключается в разложении известного абсолютного движения на заданное, переносное и неизвестное, подлежащее определению, относительное движение.

Рекомендуется такая последовательность действий при решении задач:

А. Заданы относительное и переносное движения; требуется определить абсолютное движение:

1) раскладываем абсолютное движение точки на два составных движения – переносное и относительное;

2) выбираем две системы координат: абсолютную, условно принимаемую неподвижной, и относительную;

3) составляем уравнения относительного движения точки;

4) составляем уравнения абсолютного движения точки;

5) исключая время из уравнений абсолютного движения точки, находим уравнения абсолютного движения точки в явном виде.

Б. Заданы абсолютное и переносное движения; требуется определить относительное движение:

1) раскладываем абсолютное движение точки на два движения – относительное и переносное;

2) выбираем абсолютную, условно неподвижную систему координат, и относительную систему координат;

3) составляем уравнения абсолютного движения точки;

4) находим уравнения относительного движения точки;

5) исключая время из уравнений относительного движения точки, находим уравнения относительной траектории точки в явном виде.

6. Определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях.

При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

1) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;

2) выбрать две системы координат: абсолютную и подвижную;

3) мысленно остановив переносное движение, найти скорость относительного движения точки;

4) мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти скорость переносного движения точки;

5) применив теорему сложения скоростей, определить искомую абсолютную скорость точки.

Если абсолютная скорость известна, то можно, пользуясь теоремой сложения скоростей, найти искомую относительную или переносную скорость точки.

7. Сложение ускорения при сложном движении точки.

А. Первый тип задач: известны относительно и переносное движения точки; необходимо определить абсолютное ускорение точки.

Б. Второй тип задач: известны абсолютное и переносное движения точки; необходимо определить относительное ускорение точки.

При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

1) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;

2) выбрать две системы координат: абсолютную и подвижную;

3) мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении;

4) мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти угловую скорость переносного движения и ускорение точки в переносном движении;

5) по известной угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти кориолисово ускорение точки;

6) пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютного ускорения на оси координат;

7) по найденным проекциям абсолютного ускорения найти искомое абсолютное ускорение по величине и направлению.

8. Определение уравнений плоского движения твердого тела, уравнений движения и траекторий точек плоской фигуры.

Рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбираем две системы координат неподвижную и подвижную, жестко связанную с плоской фигурой;

2) составляем уравнения движения плоской фигуры;

3) находим уравнения движения точки твердого тела;

4) исключая из уравнений движения точки время, определяем уравнение траектории точки.

9. Определение скоростей точек плоской фигуры аналитическим методом.

Рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбрать неподвижную и подвижную системы координат; начало подвижной системы осей взять в такой точке, уравнения движения которой известны или могут быть составлены без особых затруднений;

2) составить уравнения движения плоской фигуры: два уравнения движения полюса и уравнение вращения фигуры вокруг полюса;

3) пользуясь уравнениями движения плоской фигуры, получить уравнения движения точки, скорость которой требуется найти;

4) определить проекции скорости на неподвижные или подвижные оси координат и найти величину и направление искомой скорости.

10. Определение скоростей точек плоской фигуры при помощи мгновенного центра скоростей (МЦС).

При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

1) определить положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры;

2) найти величину мгновенного радиуса той точки плоской фигуры, скорость которой известна, и определить угловую скорость плоской фигуры, разделив величину скорости точки на величину мгновенного радиуса;

3) найти искомые величины скоростей точек плоской фигуры, умножая угловую скорость на мгновенный радиус соответствующей точки.

11. Определение ускорений точек плоской фигуры.

При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

А. Первый тип задач: заданы скорость и ускорение одной точки плоской фигуры, и направление скорости и ускорения другой точки фигуры; требуется определить ускорения точек плоской фигуры:

1) находим МЦС на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей двух точек плоской фигуры и определяем мгновенную угловую скорость фигуры;

2) определяем центростремительное ускорение второй точки вокруг первой;

3) приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения, находим из этого равенства величину неизвестного вращательного ускорения;

4) определяем мгновенное угловое ускорение плоской фигуры по найденному вращательному ускорению;

5) находим ускорение любой точки плоской фигуры при помощи теоремы о сложении ускорений.

Б. Второй тип задач: заданы ускорения двух точек плоской фигуры; требуется определить положение мгновенного центра ускорений и ускорение любой точки плоской фигуры.

1) рассматривая первую точку как полюс, проецируем на прямую, соединяющую обе точки равенство, выражающее теорему о сложении ускорений;

2) находим из полученного равенства величину центростремительного ускорения второй точки вокруг первой;

3) проецируя то же векторное равенство на направление, перпендикулярное к прямой, соединяющей точки, находим величину вращательного ускорения второй точки вокруг первой и, далее, мгновенное угловое ускорение плоской фигуры;

4) находим ускорение любой точки плоской фигуры, пользуясь теоремой о сложении ускорений при плоском движении;

5) находим положение мгновенного центра ускорений по соответствующим формулам.

Динамика

I Динамика точки.

1. Дифференциальные уравнения динамики материальной точки.

1.1 Определение сил по заданному движению (прямая задача динамики).

Прямые задачи динамики несвободной материальной точки, в которых требуется определить активную силу или реакцию связи, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней активные силы;
2) применив закон освобождаемости от связей, изобразить соответствующие реакции связей;
3) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;
4) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;
5) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, соответствующие принятой системе отсчета;
6) из системы составленных уравнений определить искомые величины.

1.2 Определение движения по заданным силам (обратная задача динамики).

Обратные задачи динамики материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;
2) записать начальные условия движения точки;
3) изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке;
4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки;
5) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения. Использовав начальные условия движения, определить постоянные интегрирования;
6) воспользовавшись уравнениями движения материальной точки, полученными в предыдущем пункте, определить искомые величины.

При составлении дифференциальных уравнений движения надо рассматривать материальную точку в текущем положении.

В случае движения свободной материальной точки удобно пользоваться системой осей декартовых координат. При криволинейном движении несвободной материальной точки часто проще решать задачу в проекциях на оси натурального триэдра (естественного трёхгранника).

2. Свободные линейные колебания материальной точки.

Решение задач на свободные колебания материальной точки рекомендуется выполнять в следующем п о р я д к е:

1) выбрать систему отсчета, взяв начало координат в положении статического равновесия материальной точки;
2) записать начальные условия движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке активные силы, приложенные к материальной точке. Применив закон освобождаемости от связей, добавить реакции связей;
4) составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на соответствующую ось;
5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, использовав начальные условия движения для определения постоянных интегрирования.

Для определения круговой частоты k и k_c и периода колебаний T и T_c нет необходимости в интегрировании дифференциального уравнения движения. Достаточно, составив дифференциальное уравнение движения, определить коэффициент k^2 при координате x, коэффициент $2n$ при проекции скорости точки $\dot{x}$ и вычислить круговую частоту и период колебаний по формулам.

При составлении дифференциального уравнения надо изобразить материальную точку в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, предположив при этом, что точка перемещается в сторону возрастания этой координаты. После составления дифференциального уравнения движения (пункт 4) следует рассмотреть условие статического равновесия материальной точки, совершающей колебания. Использовав это условие, часто удается уничтожить ряд постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения.

Рассматривая задачу о свободных колебаниях материальной точки при отсутствии силы сопротивления, можно довести решение до результата в общем виде и затем подставить в него численные данные. Решая же задачу о свободных колебаниях материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, надо подставить численные данные в составленное дифференциальное уравнение и определить n и k, так как в зависимости от соотношения коэффициентов n и k приходится записывать решение уравнения в тригонометрических либо в гиперболических функциях (случаи малого, большого сопротивлений и предельный случай).

3. Динамика относительного движения материальной точки.

Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) разложить «абсолютное» движение материальной точки на относительное и переносное; выбрать неподвижную систему отсчета и подвижную систему отсчета, связанную с подвижной средой, совершающей переносное движение;
2) записать начальные условия относительного движения материальной точки;
3) изобразить на рисунке силы F_k приложенные к материальной точке;
4) определить ускорение материальной точки в переносном движении w_e, ускорение Кориолиса w_c, найти силу инерции в переносном движении J_e, кориолисову силу инерции J_c. Добавить эти силы инерции к силам F_k, приложенным к материальной точке;
5) составить дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат;
6) проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения;
7) определить искомые величины.

При решении прямой задачи, т. е. при определении сил по заданному движению, пункты 2) и 6) надо опустить.

Материальную точку следует изображать в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

При относительном криволинейном движении материальной точки удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра (естественного трехгранника).

II Динамика механической системы и твёрдого тела. Общие теоремы динамики.

1. Теорема о движении центра масс механической системы. Динамика поступательного движения тела.

Задачи динамики поступательного движения твердого тела решаются посредством теоремы о движении центра масс системы материальных точек. Действительно, применив эту теорему, мы определим уравнение траектории, скорость и ускорение центра тяжести твердого тела. При поступательном же движении твердого тела траектории всех точек одинаковы, а скорости и ускорения их соответственно равны.

Посредством теоремы о движении центра масс можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики. Рекомендуем такую последовательность решения задач:

1) изобразить на рисунке все внешние силы системы;
2) выбрать систему осей координат;
3) записать теорему о движении центра масс в проекциях на декартовы оси координат;
4) вычислить суммы проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат и подставить их в уравнения пункта 3).
5) в зависимости от условия решать прямую, либо обратную задачи динамики.

В некоторых прямых задачах бывают заданы все внешние силы, кроме одной, массы всех материальных точек системы и законы их движения. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, для вычисления левых частей уравнений пункта 3) надо воспользоваться дополнительно формулами координат центра масс, перейдя в них к производным второго порядка по времени с учётом постоянства масс. Затем подставить эти результаты в уравнения пункта 3) и определить неизвестную силу.

2. Теорема об изменении кинетического момента (главного момента количества движения) механической системы. Закон сохранения кинетического момента.

Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующем порядке:

1) направить одну из осей координат вдоль неподвижной оси вращения:
2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения системы относительно соответствующей оси;
3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;
4) вычислить главный момент внешних сил относительно неподвижной оси;
5) вычислить главный момент количеств движения системы относительно неподвижной оси и затем взять его производную по времени;
6) подставить результаты пунктов 4) и 5) в 2) и затем, в зависимости от условия, решить прямую либо обратную задачу динамики.

Задачи с помощью закона сохранения главного момента количеств движения рекомендуется решать в такой последовательности:

1) выбрать координатные оси, направив одну из них вдоль неподвижной оси вращения;
2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно выбранной оси, например:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e);$$

3) изобразить на рисунке все внешние силы системы:
4) показать, что сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю;
5) вычислить и приравнять главные моменты количеств движения системы материальных точек относительно оси в начальный и конечный моменты времени:

$$L_{1z} = L_{2z}, \quad \text{где} \quad L_{1z} = \sum_{k=1}^{n} l_{1kz} \quad \text{и} \quad L_{2z} = \sum_{k=1}^{n} l_{2kz} \;;$$

6) решив уравнение $L_{1z} = L_{2z}$, определить искомую величину.

3. Динамика вращательного движения твёрдого тела.

Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси надо решать в такой последовательности:

1) направить одну из декартовых осей координат (ось *z)* по оси вращения твердого тела;
2) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;
3) вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения

$$\sum_{k=1}^{n} m_z\,(F_k^e);$$

4) записав дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси подставить в него выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента

$$I_z\,\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e),$$

инерции I_z твердого тела относительно оси вращения и решать, в зависимости от условия, прямую либо обратную задачи.

4. Динамика плоского движения твёрдого тела.

С помощью дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики.

При решении обратных задач динамики (определение движения по заданным силам) приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела. Для определения шести постоянных интегрирования должны быть заданы шесть начальных условий движения, имеющих вид:

при $t = 0$

$$x_C = x_{C0}\,,\ y_C = y_{C0}\,,\ \dot{x}_C = \dot{x}_{C0}\,,\ \dot{y}_C = \dot{y}_{C0}\,,\ \varphi = \varphi_0\,,\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\,.$$

Решение задач динамики плоского движения твердого тела рекомендуется выполнять в такой последовательности:

3) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;
2) выбрать систему координат и тем самым определить направление положительного отсчета угла поворота φ:

3) составить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела (не следует забывать, что в третьем уравнении

$$I_C\,\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C\,(F_k^e)$$

момент инерции твердого тела I_C и сумма моментов всех внешних сил

$$\sum_{k=1}^{n} m_C\,(F_k^e)$$

вычисляются относительно оси, проходящей через центр масс С твердого тела, перпендикулярно к неподвижной плоскости);

4) в случае решения прямой задачи искомые внешние силы и их моменты определяются из составленной в предыдущем пункте системы дифференциальных уравнений; в случае решения обратной задачи интегрированием системы дифференциальных уравнений движения определяют уравнения движения твердого тела:

$$x_C = f_1(t),\;\; y_C = f_2(t),\;\; \varphi = f_3(t).$$

Если по условию задачи известна зависимость двух координат от третьей (например, $x_C = F_1(\varphi)$, $y_C = F_2(\varphi)$) либо некоторые координаты заданы, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела, можно определить искомую координату (например φ) и, кроме того, найти величины двух неизвестных внешних сил (или силы и момента).

5. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

5.1. Вычисление работы сил.

Вычисление суммы работ сил, приложенных к материальной точке, либо к системе материальных точек, является одним из этапов решения задач, в которых применяется теорема об изменении кинетической энергии, либо составляются уравнения Лагранжа второго рода.

Вычисление суммы работ сил надо выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке либо к системе материальных точек;
2) изобразить элементарные перемещения точек системы;
3) вычислить элементарную работу сил, т. е. сумму работ всех сил на элементарных перемещениях точек системы;
4) вычислить искомую сумму работ сил на конечных перемещениях как сумму определенных интегралов, взятых в соответствующих пределах от элементарных работ, вычисленных в предыдущем пункте.

При наличии сил тяжести и сил упругости можно, минуя три последних пункта, выбрав систему координат, вычислить работу этих сил на конечных перемещениях по вышеприведенным формулам.

5.2 Вычисление кинетической энергии механической системы.

Вычисление кинетической энергии механической системы является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек, либо при составлении уравнений Лагранжа второго рода, либо при вычислении потери кинетической энергии при ударе.

При вычислении кинетической энергии системы материальных точек следует суммировать кинетические энергии всех масс, входящих в систему, вычисляя кинетическую энергию каждой из масс по формуле, соответствующей движению данной массы (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение и т.д.). Следует помнить, что кинетическая энергия является величиной положительной независимо от направлений движений масс, входящих в систему.

5.3 Применение теоремы об изменении кинетической энергии.

Теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек следует применять в тех случаях, когда число данных искомых величин входят инерционные характеристики систем (массы и моменты инерции), скорости (линейные угловые), силы и моменты сил, перемещения (линейные и угловые).

Если законы движения точек приложения сил неизвестны, то для вычисления работы силы должны быть постоянными либо зависящими от положений точек приложения сил.

Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме рекомендуется проводить в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы системы (в случае неизменяемой материальной системы —только внешние силы);
2) вычислить сумму работ всех внешних внутренних сил ил перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы—только сумму работ внешних сил);
3) вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях системы;
4) воспользовавшись результатами вычислении пунктов 2) и 3), записать теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек и определить искомую величину.

III Элементы аналитической механики.

1. Принцип Даламбера. Метод кинетостатики.

Методом кинетостатики можно пользоваться в случаях, когда в число заданных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, моменты инерции твердых тел, скорости и ускорения точек, угловые скорости и угловые ускорения твердых тел, силы и моменты сил.

Решение задач с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке активные силы, приложенные к каждой из материальных точек;
2) применив закон освобождаемости от связей, изобразить реакции связей, наложенных на каждую из материальных точек системы;
3) добавить *к* активным силам и реакциям связей фиктивные силы инерции материальных точек системы;
4) выбрать систему координат;
5) составить уравнения «равновесия» для каждой из материальных точек системы;
6) решив составленную систему уравнений, определить искомые величины.

2. Принцип возможных перемещений.

Задачи на равновесие твердых тел и систем твердых тел с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке активные силы;

2) при наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения);
3) в случае необходимости определить реакцию связи, мысленно отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией (если $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$). Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того, имеет система одну степень свободы или же несколько.

а) В случае системы с одной степенью свободы:
4) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения;
5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю;
6) решив составленное уравнение равновесия, определить искомую величину.

б) В случае системы с несколькими степенями свободы:
4) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;
5) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;
6) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и эту сумму приравнять нулю;
7) последовательно произведя выкладки пунктов 5) и б) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т. е. числу степеней свободы системы;
8) решив системы составленных уравнений равновесия, определить искомые величины.

3. Общее уравнение динамики.

С помощью общего уравнения динамики можно решать задачи динамики системы материальных точек в случаях, когда в число задаваемых и искомых величин входят: инерционные характеристики (массы и моменты инерции), ускорения точек системы (линейные и угловые), активные силы и моменты, коэффициенты трения (скольжения и качения), коэффициенты упругости пружин.

Из общего уравнения динамики вытекают дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, в которые не входят реакции идеальных связей. Возможно решение как прямых (определение сил по заданному движению), так и обратных задач (определение движения по заданным силам) динамики. При решении обратных задач приходится интегрировать составленную систему дифференциальных уравнений движения. Заметим, что использование общего уравнения динамики является *формальным* методом составления дифференциальных уравнений движения системы. Этот метод является менее удобным и менее эффективным по сравнению с применением уравнений Лагранжа второго рода.

Задачи с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в такой последовательности:
1) изобразить на рисунке активные силы и реакции, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения);
2) определить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы. Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того, имеет система одну степень свободы или же несколько.

а) Для системы с одной степенью свободы:

3) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах, через это возможное перемещение;
4) вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы; составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю;
5) после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину либо провести интегрирование дифференциального уравнения движения.

б) Для системы с несколькими степенями свободы:
3) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;
4) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;
5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1) и 2), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения и приравнять эту сумму нулю;
6) последовательно произведя выкладки пунктов 4) и 5) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т.е. числу степеней свободы системы;
7) после сокращения каждого из составленных уравнений на соответствующее независимое возможное перемещение надо определить из полученной системы уравнений искомые величины.

При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и большим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, удобнее пользоваться следующими правилами:

а) сделать предположение о направлении ускорений точек системы;
б) направить на рисунке сил инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений;
в) записать алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции;
г) определить знаки работ сил инерции к моментов сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями возможных перемещений точек системы;
д) если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

Конечно, этот прием может быть использован и при решении о движении системы с одной степенью свободы.

4. Уравнения Лагранжа второго рода.

4.1 Определение обобщенных сил.

Определение обобщенных сил можно проводить двумя способами:

а) Наиболее распространенным приемом является вычисление обобщенных сил как коэффициентов в выражении суммы элементарных работ активных сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. В этом случае вычисление обобщенных сил следует проводить в следующем порядке:

1) выяснить число степеней свободы рассматриваемой системы материальных точек и выбрать соответствующие обобщенные координаты;
2) изобразить все активные силы системы;
3) если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, то добавить к активным силам соответствующие реакции связей (например, силы трения);
4) дать независимые обобщенные возможные перемещения системе в числе, равном числу обобщенных координат, т. е. числу s степеней свободы материальной системы;
5) для определения обобщенной силы Q_i соответствующей i-ой обобщенной координате q_i, надо вычислить сумму работ всех активных сил, включая реакции неидеальных связей, на обобщенном возможном перемещении δq_i. При этом все остальные обобщенные возможные перемещения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{i-1}, \delta q_{i+1}, \ldots, \delta q_s$ надо считать равными нулю, т. е $\delta q_i \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = \ldots = \delta q_s = 0$. Тогда обобщенная сила Q_i будет равна коэффициенту при δq_i. Аналогично определить все остальные обобщенные силы.

б) Если все силы, действующие на материальную систему, потенциальны, то после выбора обобщенных координат надо вычислить потенциальную энергию П системы, выразив ее в зависимости от обобщенных координат. Обобщенная сила определяется как взятая с обратным знаком частная производная потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, т. е.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

где $i = 1, 2,..., s$.

Этот способ определения обобщенных сил в случае систем с несколькими степенями свободы эффективнее предыдущего способа. Однако он пригоден лишь, когда все активные силы потенциальны.

4.2 Составление уравнений Лагранжа.

Трудность решения задач динамики систем материальных точёк с одной степенью свободы заключается, между прочил, и в удачном выборе соответствующей общей теоремы динамики. В случаях систем с несколькими степенями свободы решение задач значительно усложняется, так как при этом требуется совместное применение некоторых общих теорем и других соотношений динамики, выбор которых обычно представляет значительные трудности. В подобных случаях наиболее удобно использование уравнений Лагранжа, являющееся универсальным методом составления систем дифференциальных уравнений движения систем материальных точек.

Большое достоинство уравнений Лагранжа заключается в том, что при наличии идеальных и голономных связей в них не входят реакции связей. (При применении других методов решения задач приходится в ходе решения исключать реакции связей из системы составленных уравнений.)

Полученные выше при решении подавляющего большинства задач динамики системы уравнения могут быть непосредственно выведены с помощью уравнений Лагранжа. Если по условию задачи требуется найти реакции связей, то, определив с помощью уравнений Лагранжа ускорения точек системы, применяют закон освобождаемое от связей к соответствующей массе системы с последующим использованием одной из общих теорем динамики либо метода кинетостатики. Если при решении задачи динамики отсутствует ясный план применения тех или иных теорем, то следует остановиться на применении уравнений Лагранжа.

Все сказанное выше не умаляет значения общих теорем, которыми целесообразно пользоваться при решении ряда простых задач динамики.

Составление уравнений Лагранжа надо проводить в такой последовательности:
1) определить число степеней свободы материальной системы;

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

с о с т а в и т е л и:

Булгакова А. Ф.

Корнышова А. Л.