

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

**ОСНОВЫ ИНЖЕНЕРНЫХ
РАСЧЕТОВ**

Учебно - методическое пособие

Великий Новгород
2014

УДК 539.3/.6

Рецензент

кандидат технических наук, доцент **А. А. Тихонов**

Арендателева С.И.

Основы инженерных расчетов: учеб.-метод. пособие / С. И. Арендателева; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2014. – 38 с.

В учебное пособие включены основные положения теории, необходимые методические указания, примеры решения типовых задач.

Учеб.-метод. пособие предназначено для студентов направлений подготовки 261400 – Технология художественной обработки материалов и 072500 – Дизайн.

© Новгородский государственный
университет, 2014

© С. И. Арендателева, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	4
1.1 Построение эпюр продольных усилий при растяжении (сжатии).....	6
1.2. Построение эпюр крутящих моментов.....	12
1.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	15
2. Расчеты на прочность.....	21
2.1. Определение напряжений и деформаций при растяжении (сжатии).	22
2.2 Определение напряжений и деформаций при кручении	
2.3. Определение напряжений, расчеты на прочность при изгибе.....	34
стержня круглого сечения.....	27
Используемая литература.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предусматривает изучение студентами высших учебных заведений основ инженерных расчетов и расширение на этой основе их профессиональных компетенций.

Пособие предназначено для расчетно-теоретической подготовки студентов, успешного освоения ими последующих профилирующих дисциплин и решения практических задач в будущей профессиональной деятельности.

Настоящее пособие облегчит процесс изучения и поможет овладеть методикой решения задач и получить необходимый навык в их решении. В учебное пособие включены основные положения теории, необходимые методические указания, примеры решения типовых задач.

1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

При действии на твердое тело внешних нагрузок (*активных и реактивных*) возникают *внутренние силы* – силы взаимодействия между частицами твердого тела, препятствующие его деформации. Как всякую систему сил, внутренние силы, распределенные в сечении нагруженного тела (стержня), можно привести к центру тяжести сечения, в результате получим главный вектор \bar{R} и главный момент $\bar{M}(R)$ внутренних сил в сечении. Метод сечений позволяет определить внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях стержня, через внешние нагрузки.

Главный вектор внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении нагруженного стержня, равен сумме всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения:

$$\bar{R} = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_i \quad (1)$$

Главный момент внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении нагруженного стержня, относительно центра тяжести сечения равен сумме моментов всех внешних нагрузок, приложенных по одну сторону от сечения:

$$\bar{M}(R) = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M(P_i), \quad (2)$$

где P_i – любая i -я внешняя нагрузка.

Проецируя главный вектор и главный момент на координатные оси, получим шесть составляющих: три составляющие главного вектора и три составляющие главного момента, которые носят название внутренних силовых факторов в сечении в соответствии с рисунком 1.1.

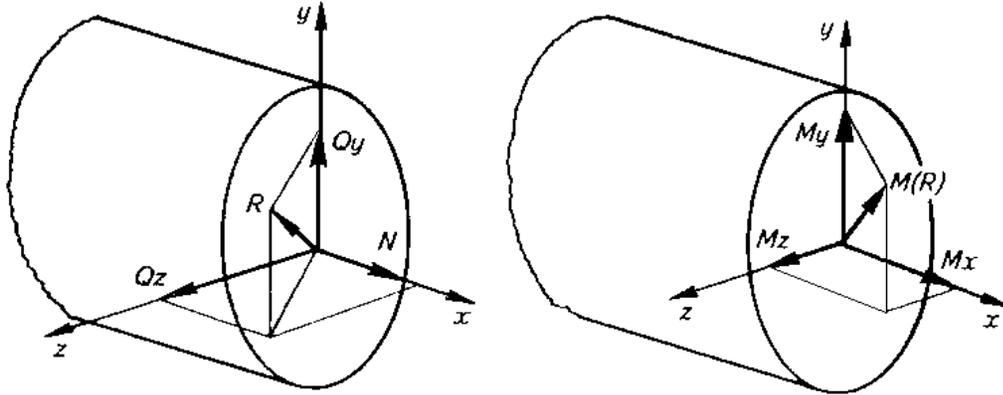


Рис. 1.1.

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{Q}_y + \bar{Q}_z, \quad (3)$$

где N – продольная сила; Q_y , Q_z – поперечные силы.

$$\bar{M}(R) = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z, \quad (4)$$

где M_x – крутящий момент; M_y , M_z – изгибающие моменты.

Внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади сечения, называется *напряжением*, выражается в паскалях ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$) или мегапаскалях ($\text{МПа} = 10^6 \text{ Па} = \text{Н}/\text{мм}^2$).

Напряжение принято выразить через его составляющие:

$$\bar{S} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}_y + \bar{\tau}_z, \quad (5)$$

где σ – нормальное напряжение; τ – касательное напряжение; τ_y, τ_z – составляющие касательного напряжения по осям y и z .

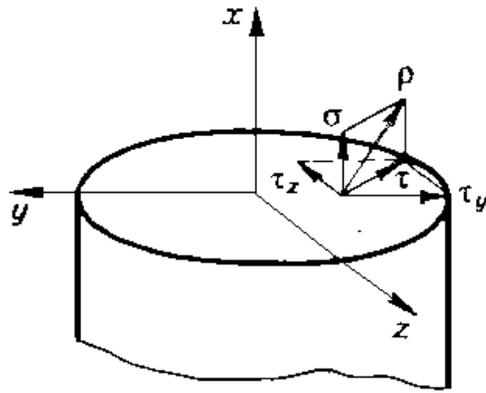


Рис. 1.2.

Эпюра внутреннего усилия – это график изменения внутреннего усилия по длине стержня. Цель построения эпюры – определить качественную и количественную картину деформации стержня, наиболее нагруженные участки, сечения.

Общий порядок построения эпюр внутренних силовых факторов:

- 1) Произвольно направляют реакции. Составляют уравнения равновесия, из которых определяют реакции опор.
- 2) Стержень разбивают на участки, проводят произвольные сечения, задают координаты сечений.
- 3) Для каждого участка записывают уравнения внутренних силовых факторов.
- 4) По полученным уравнениям строят графики – эпюры.

1.1 Построение эпюр продольных усилий при растяжении (сжатии)

Растяжение (сжатие) – деформация, вызванная силами или системами сил, равнодействующая которых или сами силы приложены в центре тяжести сечения и перпендикулярны сечению.

При растяжении (сжатии) в каждом сечении стержня действует только один внутренний силовой фактор – продольная сила N .

Продольная сила представляет собой равнодействующую внутренних нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении стержня, численно равную алгебраической сумме проекций на продольную ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, т.е.

$$N = \int_F \sigma dF = \sum_{\text{по одну сторону}} P_{xi}$$

При *растяжении* продольную силу принято считать *положительной*, а при *сжатии* – *отрицательной* (рис. 1.3).

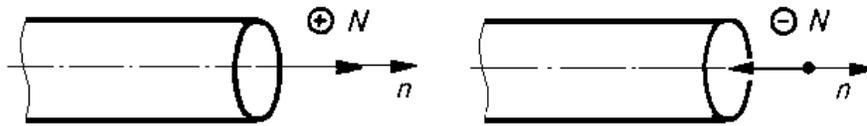


Рис. 1.3.

Внешние нагрузки, действующие на стержень могут быть сосредоточенными и распределенными. *Сосредоточенные нагрузки* передают свое действие через относительно небольшие участки стержня. *Распределенные нагрузки* действуют на все сечения стержня (силы веса, инерции – объемные нагрузки), либо на достаточно большие участки стержня (силы трения – поверхностные нагрузки).

Интенсивность распределенной нагрузки – нагрузка, приходящаяся на единицу длины стержня (выражается в Н/м):

$$q = P/a$$

При учете собственного веса стержня определяется интенсивность распределенной нагрузки от собственного веса (вес единицы длины стержня) (Н/м):

$$q = G/l = \gamma F/l = \gamma F,$$

где G – вес стержня; F – площадь поперечного сечения стержня; l – длина стержня; γ – удельный вес материала стержня.

Задача 1.1. Для стержня, рисунок 1.4, построить эпюру продольных сил.

1. В данной задаче не обязательно определять реакцию в заделке, так как, рассматривая нагрузки от свободного конца стержня, можно определить во всех сечениях продольную силу. Продольная сила, полученная для крайнего левого сечения стержня (т. е. для заделки), и будет представлять собой реакцию в заделке.

Однако для контроля правильности расчета продольных сил полезно в начале определить реакцию R из условия равновесия т. е. сумма проекций всех сил на продольную ось стержня должна быть равна нулю:

$$\sum_{\text{по одну сторону}} P_x = R - 3P + 2P - P = 0 \Rightarrow R = 2P$$

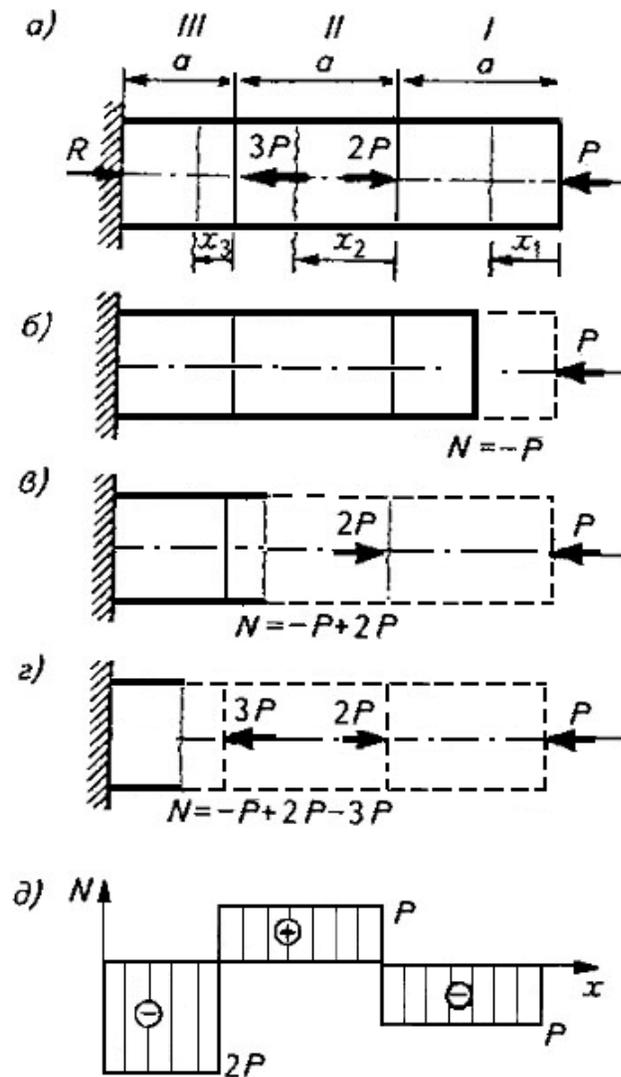


Рис. 1.4.

Полученный знак плюс для реакции свидетельствует о правильности выбранного направления вектора R . Если бы реакция получалась отрицательной, то следовало бы изменить направление вектора R на противоположное.

2. Разбиваем стержень на три участка. Проводим произвольные сечения, задаем координату сечения на каждом участке (рис.1.4, а). В данной задаче на каждом участке начало координат взято в крайнем правом сечении участка.

Задание координаты сечения на участке однозначно определяет, с какой стороны от сечения суммировать внешние силы при определении внутреннего силового фактора. Если начало координат находится справа, то рассматриваются все внешние нагрузки, лежащие справа от сечения, и наоборот.

Составляем уравнения для продольной силы по участкам.

I участок: пределы изменения координаты сечения $0 \leq x_1 \leq a$. Мысленно отбрасываем часть стержня слева от сечения. Согласно определению, продольная сила равна сумме всех внешних нагрузок, лежащих по одну сторону (справа) от сечения. Справа от сечения имеется только одна сила, которая действует на данное сечение, вызывая сжатие левой от сечения части стержня, поэтому (рис. 1.4, б)

$$N = -P.$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$. Продольная сила в сечении равна сумме всех внешних сил, действующих справа от сечения. Справа от сечения действуют сила P , вызывая сжатие, и сила $2P$, вызывая растяжение оставшейся левой части стержня, поэтому (рис. 1.4, в)

$$N = -P + 2P = P.$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$. Рассуждая аналогично, получим (рис. 1.4, г)

$$N = -P + 2P - 3P = -2P.$$

Продольная сила N в заделке совпала по величине и направлению с реакцией D (знак минус для N на *III* участке говорит о том, что на этом участке действует сжимающая сила), причем рассмотрение внешних сил справа от сечения позволяет определить продольную силу в каждом сечении, не определяя реакцию в заделке.

4. По полученным уравнениям строим эпюру продольных сил. Так как на каждом участке продольная сила – величина постоянная, то графики продольных сил – прямые, параллельные координатной оси x . Откладываем в произвольном масштабе значения N на каждом участке и строим эпюру (рис. 1.4, д).

Как видно из эпюры, в каждом сечении, в котором к стержню приложена сосредоточенная сила, продольная сила меняется скачком. Таким образом, на эпюре N в сечении, где приложена сосредоточенная сила, должен быть скачок на значение этой силы. В данной задаче на эпюре имеем четыре скачка N , каждый скачок соответствует сосредоточенной силе.

Эпюры принято штриховать прямыми линиями, перпендикулярными продольной оси x . Каждая ордината эпюры в принятом масштабе дает значение продольной силы в поперечном сечении бруса с данной координатой. На эпюре иногда указываются знаки продольных сил (плюс – для положительных, минус – для отрицательных сил).

Эпюра показывает, что брус под действием внешних сил на *I* и *III* участках испытывает сжатие, на *II* – растяжение с усилиями, известными из расчета.

Задача 1.2. Построить эпюру N для стержня, нагруженного сосредоточенной и распределенной нагрузками (рис.1.5), если известны величины $a, b, c, P_1 = P, P_2 = 3P, q = P/b$

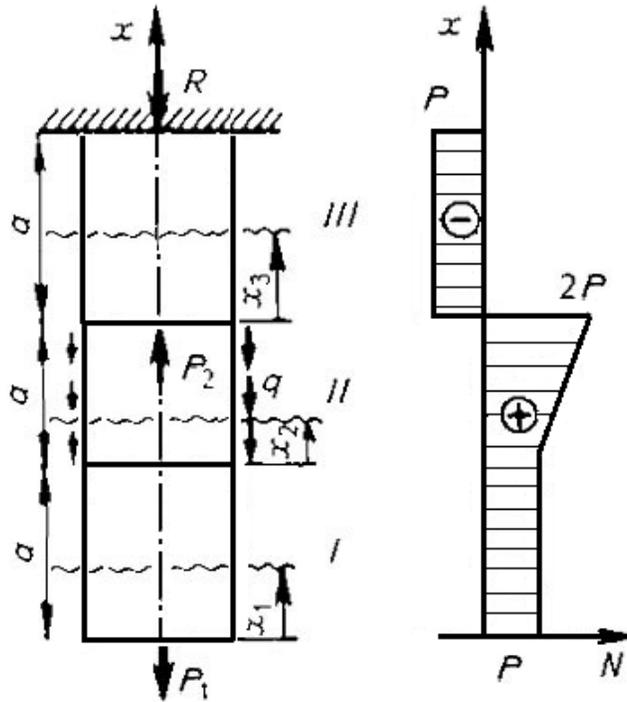


Рис. 1.5.

1. Разбиваем стержень на три участка, проводим произвольные сечения на каждом участке, задаем координаты этих сечений.

2. Определяем уравнения для N по участкам, рассматривая внешние нагрузки вниз от сечения:

$$I \text{ участок: } 0 \leq x_1 \leq a; N = P_1 = P;$$

$$II \text{ участок: } 0 \leq x_2 \leq b; N = P_1 + q x_2 = P + P/b \cdot x_2;$$

$$III \text{ участок: } 0 \leq x_3 \leq c; N = P_1 + qb - P_2 = P + P/b \cdot b - 3P = -P.$$

3. Строим эпюру N по полученным уравнениям.

На II участке функция N от x представляет собой линейную зависимость, график которой есть наклонная прямая. Строим график по двум крайним значениям в начале и в конце участка:

$$\text{при } x_2=0 \quad N = P;$$

$$\text{при } x_2=b \quad N = P + P/b \cdot b = 2P.$$

Соединяя эти точки прямой, получим график искомой линейной зависимости.

Как видно из эпюры, при действии на стержень распределенной осевой нагрузки продольная сила на участке, на котором такая нагрузка приложена, меняется непрерывно. Если интенсивность нагрузки на участке постоянная ($q = const$), то на эпюре будет наклонная прямая. На участках, где нет распределенной

нагрузки, на эпюре – прямые, параллельные оси x . Эпюра показывает, что участки I и II испытывают растяжение, участок III – сжатие, наиболее нагруженным является сечение с координатой $x_2=b$.

В этом сечении действует растягивающее усилие, равное $2P$. На эпюре три скачка, один соответствует реакции в заделке, второй – силе P_2 , третий – силе P_1 .

Задача 1.3. Построить эпюру N для стержня (рис. 1.6) с учетом собственного веса, если заданы $a, \gamma, F, P = 10\gamma Fa$.

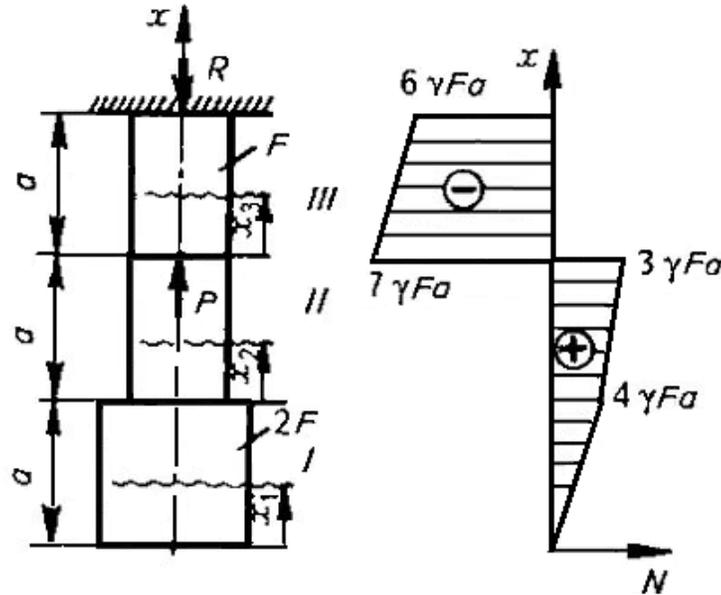


Рис. 1.6.

1. Разбиваем стержень на три участка.
2. Определяем N по участкам.

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$.

Продольное усилие в произвольном сечении на *I* участке равно сумме всех сил, лежащих вниз от сечения. Но вниз от сечения действует только вес вышележащей части стержня, который равен произведению удельного веса на объем нижележащей части: $\gamma 2Fx_1$. Определяем значение N в начале и в конце участка: при $x_1=0$ $N=0$, при $x_1=a$ $N=2\gamma Fa$.

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$.

Продольное усилие в произвольном сечении *II* участка равно весу *I* участка плюс вес вышележащей части стержня *II* участка:

$$N = \gamma 2Fa + \gamma Fx_2.$$

Определяем значения N в начале и в конце участка:

$$\begin{aligned} \text{при } x_2=0 \quad N &= 2\gamma Fa; \\ \text{при } x_2=a \quad N &= 3\gamma Fa. \end{aligned}$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$. Продольное усилие в произвольном сечении *III* участка равно сумме весов *I* и *II* участков, внешней силе и весу нижележащей части *III* участка:

$$N = 2\gamma Fa + \gamma Fa - P + \gamma Fx_3 = -7\gamma Fa + \gamma Fx_3.$$

Определяем значения N в начале и в конце участка:

при $x_3=0$ $N = -7\gamma Fa$;

при $x_3=a$ $N = -6\gamma Fa$.

3. Строим эпюру N . На всех участках это наклонные прямые, причем наклон прямых (коэффициент при x) определяется площадью сечения и удельным весом материала стержня. Наиболее нагруженным является сечение $x_3=0$, оно испытывает сжатие с усилием $7\gamma Fa$.

1.2. Построение эпюр крутящих моментов

Кручение – деформация, вызванная парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси стержня.

При кручении в каждом сечении стержня действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{кр}$.

Крутящий момент представляет собой результирующий момент всех внутренних касательных напряжений в рассматриваемом сечении и равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения, т. е.

$$M_{кр} = \int \tau \rho dF = \sum_{\text{по одну сторону}} M_{xi}$$

Условно принято считать крутящий момент положительным, когда внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения.

Внешние скручивающие моменты, как и внешние силы, могут быть сосредоточенными и распределенными.

Интенсивность распределенного крутящего момента – это момент, приходящийся на единицу длины стержня (Н м/м).

$$m = M/l.$$

Задача 1.4. Построить эпюру крутящих моментов для вала (рис. 1.7), если заданы a и M .

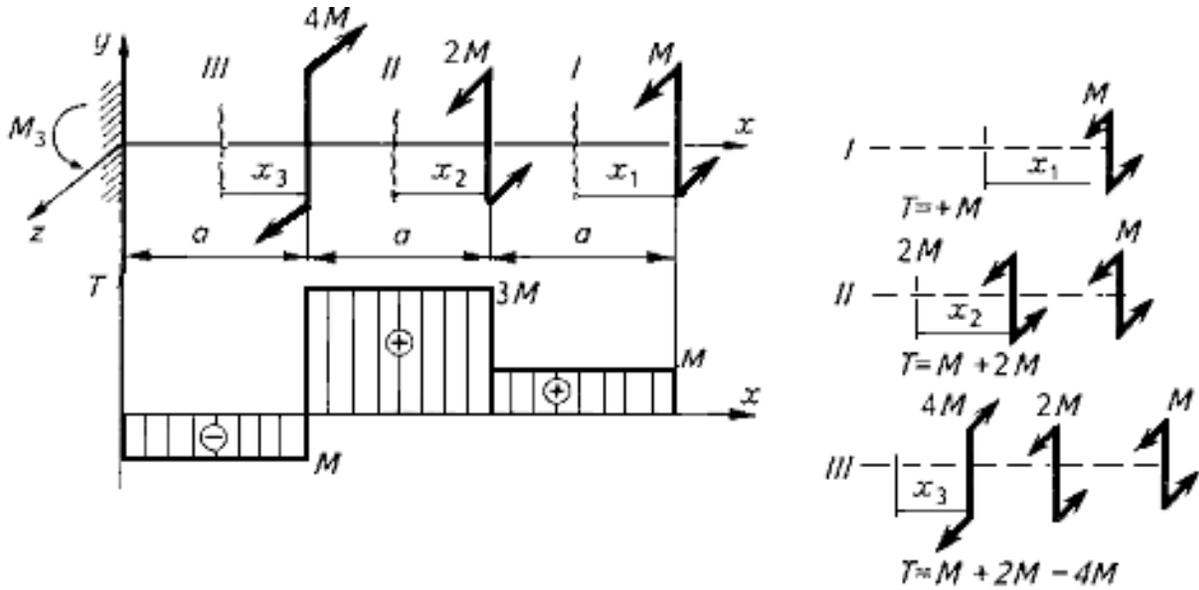


Рис. 1.7.

1. Составляем уравнение равновесия для определения момента в заделке:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_x = M + 2M - 4M + M_3 = 0$$

откуда $M_3 = M$. Знак плюс говорит о правильном выборе направления момента в заделке.

2. Разбиваем вал на три участка, проводим произвольные сечения, задаем координаты этих сечений, начало координат помещаем справа, это означает, что при определении крутящего момента будем рассматривать внешние моменты справа от сечения.

3. Записываем уравнения для $M_{кр}$ по участкам. По определению, крутящий момент в произвольном сечении равен сумме всех внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону (справа) от сечения.

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$, $M_{кр} = -M$.

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$; $M_{кр} = -M - 2M = -3M$.

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$; $M_{кр} = -M - 2M + 4M = -M$.

4. Строим эпюру $M_{кр}$. Эпюры – прямые, параллельные оси x .

Наиболее нагруженным является *II* участок. Скачки на эпюрах соответствуют действующим моментам.

Задача 1.5. Построить эпюру $M_{кр}$ для вала (рис. 1.8), если заданы a , m , $M = 2ma$.

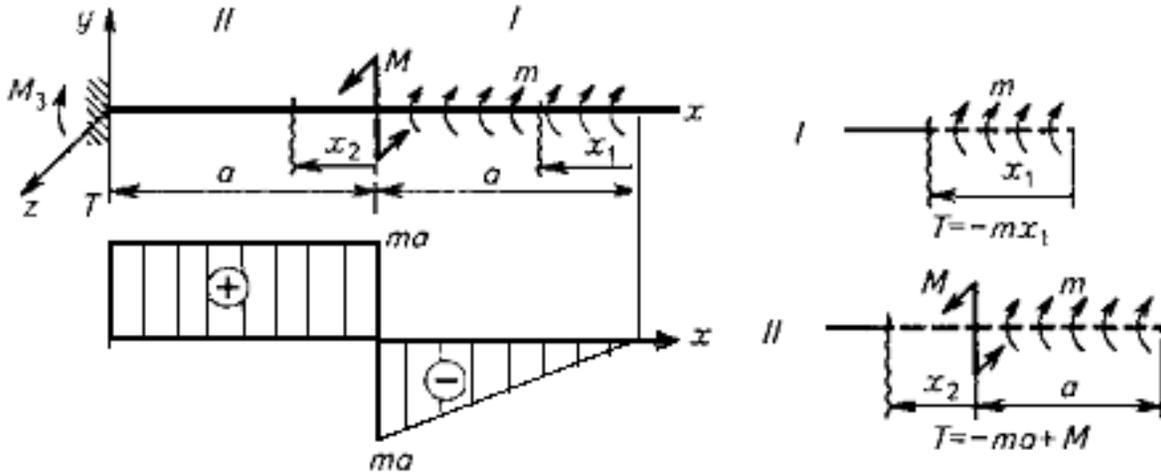


Рис. 1.8.

1. Разбиваем вал на два участка.

2. На I участке справа от сечения действует распределенный момент интенсивностью m . На участке вала до сечения его величина будет равна произведению интенсивности на длину его распределения до сечения: mx_1 . На II участке справа от сечения действуют распределенный по длине a момент ma и сосредоточенный момент другого знака M . Исходя из этих рассуждений записываем уравнения для крутящего момента по участкам:

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$; $M_{кр} = mx_1$;

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$; $M_{кр} = ma - M = -ma$.

3. Строим эпюру крутящих моментов. На I участке получили линейную зависимость. Определяем значения $M_{кр}$ в начале и конце I участка:

при $x_1 = 0$ $M_{кр} = 0$

при $x_1 = a$ $M_{кр} = ma$.

На эпюре два скачка. Один соответствует значению момента M , другой – значению момента в заделке.

1.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Прямой изгиб – деформация, вызванная системой сил, перпендикулярных оси стержня, и пар сил, лежащих в одной из главных плоскостей стержня. *Главная плоскость* – плоскость, проходящая через ось стержня и одну из главных центральных осей инерции сечения. Плоскость xOy – плоскость действия нагрузок – главная плоскость, т.е. она проходит через ось стержня x и главную центральную ось y .

При таком изгибе в каждом сечении стержня действуют только два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z . В дальнейшем при изгибе в одной плоскости будем писать просто Q и M .

Поперечная сила Q – результирующая всех внутренних касательных напряжений в рассматриваемом сечении, численно равная алгебраической сумме всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, т.е.

$$Q = \int_F \tau dF = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_{yi}$$

Изгибающий момент M – результирующий момент всех нормальных внутренних напряжений в рассматриваемом сечении относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной плоскости действия нагрузки, численно равный алгебраической сумме моментов всех внешних нагрузок, приложенных по одну сторону от сечения, т.е.

$$M = \int_F \sigma y dF = \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_{zi}$$

При построении эпюр принимают правило знаков для Q и M : положительные (рис. 1.9, а) и отрицательные (рис. 1.9, б) направления для Q и M зависят от того, рассматривается ли нагрузка слева или справа от сечения.

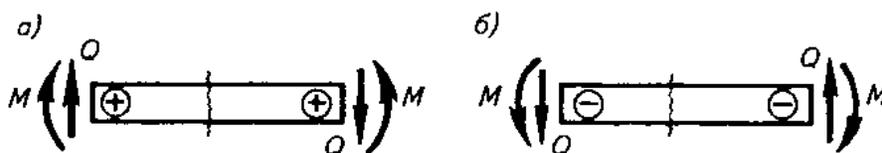


Рис. 1.9.

Для плоской системы сил уравнения равновесия, составляемые для определения опорных реакций, можно написать в трех различных вариантах:

а) в виде суммы проекций всех сил на две произвольные, не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно любой точки плоскости:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_x = 0, \quad \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_y = 0, \quad \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_a = 0$$

б) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_x = 0, \quad \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_A = 0, \quad \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_B = 0$$

в) в виде трех сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_A = 0, \quad \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_B = 0, \quad \sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_C = 0,$$

При составлении уравнений равновесия следует заменить распределенную нагрузку ее равнодействующей.

Желательно уравнения равновесия составлять так, чтобы по возможности обойтись без совместного их решения, т.е. так, чтобы в каждое уравнение входила только одна реакция.

Для проверки правильности определения опорных реакций рекомендуется подставить полученные значения в какое-либо уравнение равновесия, не использованное ранее. При правильном определении реакций должно получиться тождество $0=0$.

Задача 1.6. Построить эпюры Q и M для консольной балки длиной l , нагруженной распределенной нагрузкой постоянной интенсивности q (рис. 1.10).

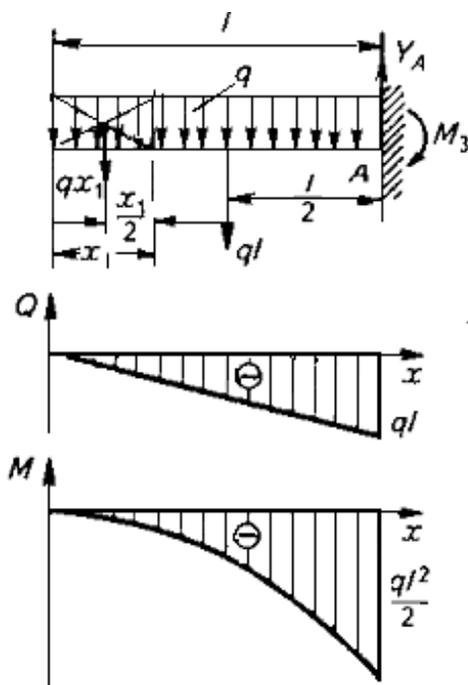


Рис. 1.10

1. Для всех задач с заделкой, рассматривая внешние нагрузки от свободного конца балки, можно построить эпюры Q и M , не определяя реакций.

Однако для дополнительного контроля правильности построения эпюр определим реакции, составив два уравнения равновесия. Предварительно направляем реакцию и момент в заделке в сторону, противоположную действию нагрузки:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_Y = -ql + Y_A = 0 \Rightarrow Y_A = ql$$

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_A = ql \frac{l}{2} - M_3 = 0 \Rightarrow M_3 = \frac{1}{2} ql^2$$

В случае действия распределенной нагрузки при определении реакций следует заменить эту нагрузку ее равнодействующей; она равна ql , приложена посередине, поэтому момент ее равен $ql \frac{l}{2}$.

2. Имеем один участок. Проводим произвольное сечение и задаем координату x сечения от левого конца балки. Пределы изменения координаты $0 \leq x \leq l$.

3. Определяем уравнения для Q и M . Поперечная сила в сечении будет равна сумме распределенных сил, а изгибающий момент – сумме моментов распределенных сил, действующих от конца балки до сечения. С учетом знаков получим:

$Q = -qx_1$ – наклонная прямая;

$M = -qx_1 \frac{x_1}{2} = -\frac{1}{2}qx_1^2$ – парабола.

4. Строим эпюры:

при $x_1 = 0$ $Q = 0$; $M = 0$;

при $x_1 = l$ $Q = -ql$; $M = -\frac{1}{2}ql^2$.

Для построения параболы определим изгибающий момент посередине:

при $x = l/2$ $M = -\frac{1}{8}ql^2$.

Для более точного построения эпюры M можно еще рассчитать несколько точек параболы.

Проверим эпюры по правилам контроля. На всей длине балки действует равномерно распределенная нагрузка q , по этому на эпюре Q – наклонная прямая, на эпюре M – парабола, выпуклостью направленная на встречу распределенной нагрузке. При $x = 0$, поперечная сила равна нулю ($Q = 0$), поэтому в этом сечении расположена вершина параболы. Поперечная сила отрицательная по всей длине балки поэтому на эпюре момент убывает от 0 до $-\frac{1}{2}ql^2$.

Скачки на эпюрах соответствуют сосредоточенным нагрузкам в заделке – реакции и моменту.

Задача 1.7. Построить эпюры Q и M для балки если заданы a , q , $P=qa$, $M_0=qa^2$.

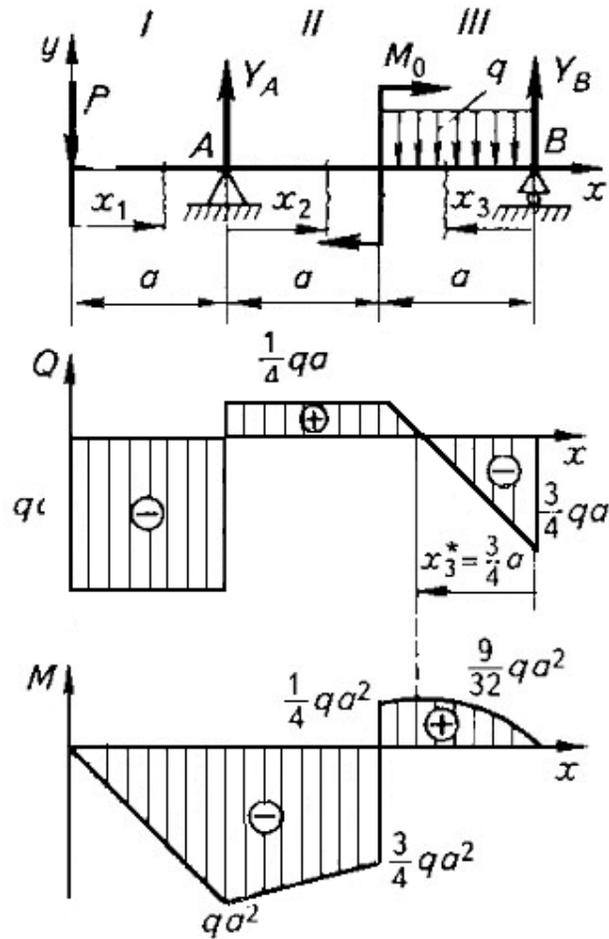


Рис. 1.11

1. Определим реакции. Предварительно направляем их вверх произвольно:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_A = P \cdot a - M_0 - qa \left(\frac{a}{2} + a \right) + Y_B \cdot 2a = 0$$

$$\text{или } qa^2 - qa^2 + \frac{3}{2} qa^2 + Y_B \cdot 2a = 0$$

$$\text{откуда } Y_B = \frac{3}{4} qa;$$

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} M_B = P \cdot 3a - Y_A \cdot 2a - M_0 - qa \frac{a}{2} = 0$$

$$\text{или } 3qa^2 + Y_A \cdot 2a - qa^2 + \frac{1}{2} qa^2 = 0$$

откуда $Y_A = \frac{5}{4}qa$

Решение со знаком плюс говорит о правильности выбора направления реакций.

Проверка:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_y = -P + Y_A - qa + Y_B = -qa + \frac{5}{4}qa - qa + \frac{3}{4}qa = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

2. Разбиваем балку на три участка проводим произвольные сечения задаем их координаты.

3. Составляем выражения для Q и M :

I участок:

$$Q = -P = -qa; \quad M = -Px_1 = -qax_1;$$

II участок:

$$0 \leq x_2 \leq a; \quad Q = -P + Y_A = -qa + \frac{5}{4}qa = \frac{1}{4}qa;$$

$$M = -P(a + x_2) + Y_A x_2 = -qa(a + x_2) + \frac{5}{4}qax_2 = -qa^2 + \frac{1}{4}qx_2;$$

III участок:

$$0 \leq x_3 \leq a; \quad Q = -Y_B + qx_3 = -\frac{3}{4}qa + qx_3; \quad M = Y_B x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 = \frac{3}{4}qax_3 - \frac{1}{2}qx_3^2$$

Строим эпюры Q и M :

I участок:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad Q = -qa; \quad M = 0$$

$$\text{при } x_1 = a \quad Q = -qa; \quad M = qa^2$$

II участок:

$$\text{при } x_2 = 0 \quad Q = \frac{1}{4}qa; \quad M = qa^2$$

$$\text{при } x_2 = a \quad Q = \frac{1}{4}qa; \quad M = -qa^2 + \frac{1}{4}qa^2 = -\frac{3}{4}qa^2$$

III участок:

$$\text{при } x_3 = 0 \quad Q = -\frac{3}{4}qa \quad M = 0$$

$$\text{при } x_3 = a \quad Q = -qa; \quad M = qa^2$$

Определяем максимальный момент на *III* участке. При $x_3 = x_3^*$ поперечная сила $Q=0$; следовательно, в этом сечении момент принимает максимальное значение. Найдем x_3^* :

$$Q = -\frac{3}{4}qa + qx_3^* = 0 \Rightarrow x_3^* = \frac{3}{4}a$$

Тогда

$$M_{max} = M_{x_3 = \frac{3}{4}a} = \frac{3}{4}qa\left(\frac{3}{4}a\right) - \frac{1}{2}q\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{9}{32}qa^2.$$

2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Построение эпюр внутренних силовых факторов преследует цель определить *качественную и количественную картину нагруженного стержня* и определить *наиболее нагруженные сечения*. Но если в сечении действует наибольшее суммарное внутреннее усилие, это еще не означает, что сечение будет наиболее опасным.

Опасным называется сечение, в котором возникают наибольшие напряжения. Напряжение в опасной точке сечения (наиболее нагруженной точке) прямо пропорционально величине внутреннего усилия в этом сечении и обратно пропорционально размерам сечения. Поэтому в стержне, где размеры сечения одинаковы, опасное сечение однозначно определяется по внутреннему усилию из эпюр, в противном случае опасное сечение определяется по напряжениям.

Расчеты на прочность основываются на *условии прочности*, которое заключался в том, что наибольшие напряжения в нагруженном стержне не должны превышать допусковых напряжений:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad \text{и} \quad \tau_{max} \leq [\tau]$$

Допускаемые напряжения определяются, как некое опасное напряжение, деленное на рекомендуемое значение коэффициента запаса:

$$[\sigma] = \sigma_{оп} / [n]; \quad [\tau] = \tau_{оп} / [n].$$

При статической нагрузке для хрупких материалов за опасное напряжение чаще всего принимается *предел прочности*, для пластичных – *предел текучести*.

Рекомендуемые значения коэффициента запаса $[n]$ для материалов: пластичных – 1,4...2; хрупких – 2,5...4.

Следует помнить, что в отличие от пластичных для хрупких материалов предел прочности на сжатие намного превышает предел прочности на растяжение. Соответственно это относится и к допусковым напряжениям. Поэтому условие прочности необходимо проверять отдельно по растягивающим и сжимающим напряжениям.

Расчеты на жесткость основываются на условии жесткости – деформации δ в нагруженном стержне не должны превышать допусковых $[\delta]$:

$$\delta \leq [\delta]$$

Но в большинстве случаев обеспечение прочности гарантирует и достаточную жесткость. Поэтому расчеты на жесткость проводятся в тех случаях, когда предъявляются особые требования к жесткости.

2.1. Определение напряжений и деформаций при растяжении (сжатии)

При растяжении (сжатии) в каждом сечении возникают внутренние *нормальные напряжения*, которые распределяются равномерно по сечению:

$$\sigma = N/F,$$

где N – продольная сила в рассматриваемом сечении; F – площадь сечения.

Деформация (удлинение или укорочение) при растяжении (сжатии):

$$\Delta l = N/EF,$$

где Δl – абсолютная деформация участка стержня; l – первоначальная длина участка стержня; E – модуль упругости первого рода материала стержня.

Если продольная сила и площадь сечения зависят от координаты сечения, то

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EF(x)}$$

Перемещение какого-либо сечения на i -м участке стержня относительно неподвижного сечения равно сумме деформаций всех предыдущих i -х участков и деформации рассматриваемой части i -го участка, т. е.

$$\Delta l = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta l_k + \int_0^{x_i} \frac{N_i(x)dx}{E_i F_i(x)}$$

В стержнях с заделкой за неподвижное сечение целесообразно принимать заделку.

Условие прочности при растяжении (сжатии) имеет вид

$$\sigma_{max} = \left(\frac{N}{F} \right)_{max} \leq [\sigma]$$

Из этого условия можно произвести *проверочный расчет на прочность* по определению коэффициента запаса:

$$n = \sigma_{оп} / \sigma_{max} \leq [n]$$

где $[n]$ – рекомендуемый для данных условий работы и материала коэффициент запаса.

Из условия прочности также можно произвести *проектный расчет* – определить площадь, а затем размеры сечения под заданную нагрузку, предварительно выбрав материал и форму сечения:

$$F \geq N / [\sigma]$$

Условие жесткости при растяжении (сжатии) имеет вид

$$\Delta l_{max} \leq [\Delta l]$$

на основе которого также можно провести проверочный и проектный расчеты.

Задача 2.1. Построить эпюру нормальных напряжений σ и перемещений сечений δ , подобрать размеры квадратного поперечного сечения для стержня (рис. 2.1), если заданы $P=20$ кН, $a=10$ см, $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\delta_{оп}=\delta_m=260$ МПа, $[n]=2$.

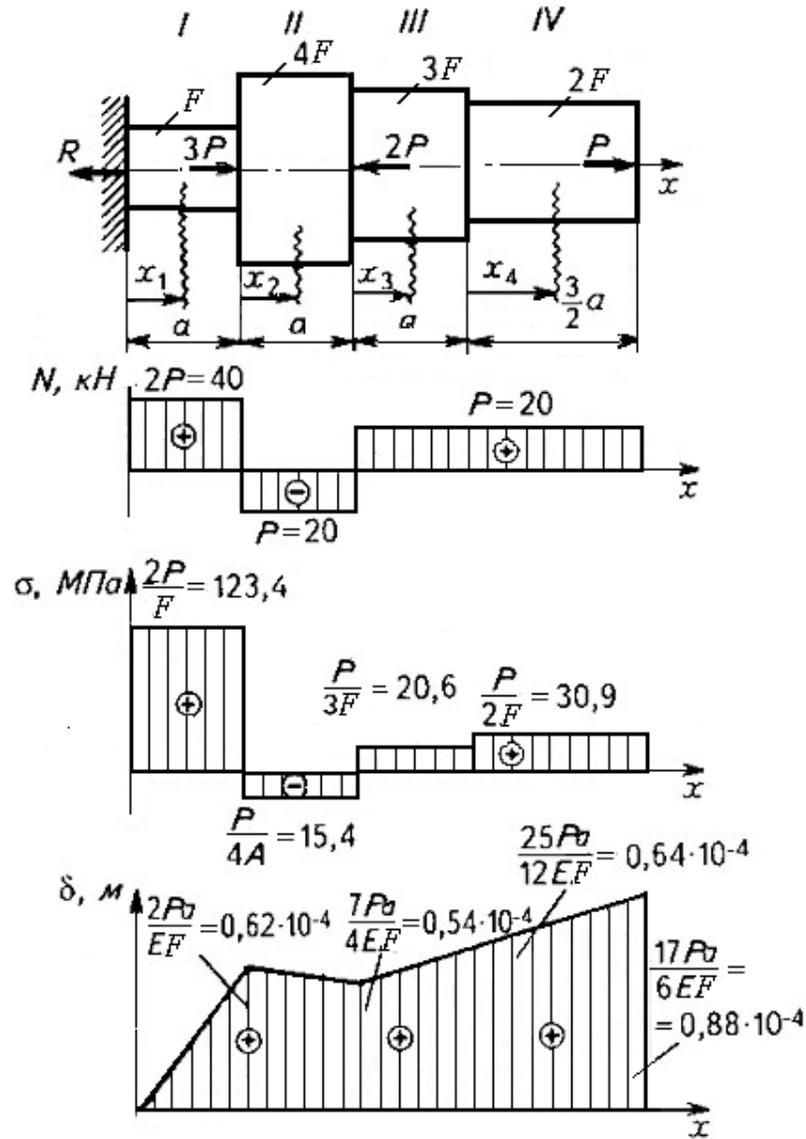


Рис. 2.1.

1. Определяем реакцию в заделке:

$$\sum_{\text{сторону}}^{\text{по одну}} P_x = -R + 3P - 2P + P = 0 \Rightarrow R = 2P$$

2. Разбиваем стержень на участки. При построение эпюры напряжений σ следует учитывать не только места приложения нагрузка, но и изменение поперечного сечения стержня. Перемещения сечений целесообразно определить относительно естественно неподвижного сечения - заделки. Это определяет порядок рассмотрения участков – слева направо, т. е. от заделки.

3. Определяем продольную силу по участкам, рассматривая внешние нагрузки слева от сечения:

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$; $N=2P=40$ кН;

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$; $N=-P=-20$ кН;

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$; $N=P=20$ кН;

IV участок: $0 \leq x_4 \leq \frac{3}{2}a$; $N=P=20$ кН.

4. Для определения опасного участка стержня, в котором возникают максимальные напряжения, строим эпюру напряжений σ в общем виде:

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$; $\sigma = 2P/F$;

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$; $\sigma = -P/(4F)$;

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$; $\sigma = P/(3F)$;

IV участок: $0 \leq x_4 \leq \frac{3}{2}a$; $\sigma = P/(2F)$.

5. Определяем размеры поперечного сечения стержня на опасном участке. Как видно из эпюры σ , опасным является *I* участок, в каждом сечении которого действует наибольшее напряжение

$$\sigma_{max} = 2P/F.$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \sigma_r/[n] = 260/2 = 130 \text{ МПа}$$

Из условия прочности находим площадь сечения:

$$F \geq \frac{2P}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Сторона квадратного сечения

$$b = \sqrt{F} = \sqrt{308} = 17,6 \text{ мм}$$

Принимаем $b_n = 18$ мм.

Определяем максимальное нормальное напряжение на *I* участке при выбранном размере b_n :

$$F = b_n^2 = 18^2 = 324 \text{ мм}^2 = 3,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$\sigma = \frac{2P}{F} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,24 \cdot 10^{-4}} = 123,4 \text{ МПа.}$$

Недогрузка бруса составит

$$\Delta = \frac{[\sigma] - \sigma}{[\sigma]} 100\% = \frac{130 - 123,4}{130} 100\% = 5,1\%$$

что допустимо.

6. Определяем нормальные напряжения по участкам:

I участок: $\sigma = 2P/F = 123,4$ МПа;

II участок: $\sigma = -P/(4F) = -15,4$ МПа;

III участок: $\sigma = P/(3F) = 20,6$ МПа;

IV участок: $\sigma = P/(2F) = 30,9$ МПа.

7. Определяем уравнения для перемещений сечений δ относительно заделки:

$$\text{I участок: } 0 \leq x_1 \leq a; \delta_{x_1} = \Delta l_{x_1} = \frac{2Px_1}{EF}.$$

$$\text{Удлинение всего I участка: } \Delta l_I = \frac{2Pa}{4EF}$$

$$\text{II участок: } 0 \leq x_2 \leq a; \Delta l_{x_2} = \frac{Px_2}{4EF}$$

$$\text{Укорочение всего II участка: } \Delta l_{II} = -\frac{Pa}{4EF}.$$

Перемещение произвольного сечения относительно заделки равно сумме деформаций *I* участка и части *II* участка:

$$\delta_{x_2} = \Delta l_I + \Delta l_{x_2} = \frac{2Pa}{EF} - \frac{Px_2}{4EF}.$$

$$\text{III участок: } 0 \leq x_3 \leq a; \Delta l_{x_3} = \frac{Px_3}{3EF}.$$

$$\text{Удлинение всего III участка: } \Delta l_{III} = -\frac{Pa}{3EF}.$$

Перемещение произвольного сечения относительно заделки

$$\delta_{x_3} = \Delta l_I + \Delta l_{x_2} + \Delta l_{III} = \frac{7}{4} \frac{Pa}{EF} - \frac{Px_3}{4EF}.$$

$$\text{IV участок: } 0 \leq x_4 \leq \frac{3}{2}a; \Delta l_{x_4} = \frac{Px_4}{2EF}.$$

Удлинение всего IV участка: $\Delta l_{IV} = -\frac{3Pa}{4EF}$.

Перемещение произвольного сечения относительно заделки

$$\delta_{x_3} = \Delta l_I + \Delta l_{x_{42}} + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = \frac{25}{12} \frac{Pa}{EF} - \frac{Px_4}{2EF}.$$

По уравнениям строим эпюру перемещений сечений относительно заделки:

при $x_1=0$ $\delta=0$; при $x_1=a$ $\delta = 2 \frac{Pa}{EF} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0.1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3.24 \cdot 10^{-4}} = 0,62 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_2=0$ $\delta = \frac{2Fa}{EA} = 0,62 \cdot 10^{-4}$ м; при $x_2=a$ $\delta = \frac{7Fa}{4EA} = 0,54 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_3=0$ $\delta = \frac{7Fa}{4EA} = 0,54 \cdot 10^{-4}$ м; при $x_3=a$ $\delta = \frac{25Fa}{12EA} = 0,64 \cdot 10^{-4}$ м;

при $x_4=0$ $\delta = \frac{25Fa}{12EA} = 0,64 \cdot 10^{-4}$ м; при $x_4=\frac{3}{2}a$ $\delta = \frac{17Fa}{6EA} = 0,88 \cdot 10^{-4}$ м.

2.2 Определение напряжений и деформаций при кручении стержня круглого сечения

При кручении в каждом сечении возникают внутренние *касательные напряжения*, которые в произвольной точке сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \cdot \rho,$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент в сечении стержня; ρ – расстояние от центра сечения до точки, в которой определяется напряжение; J_p – полярный момент инерции сечения.

Для круглого сечения

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot d^4 \cdot (1 - \alpha^4),$$

где $\alpha = d_g/d$ (рис. 2.2).

Максимальные касательные напряжения возникают на контуре сечения:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p},$$

где $W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{J_p}{(d/2)}$ – полярный момент сопротивления сечения.

Для круглого сечения $J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{16} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0.2 \cdot d^4 \cdot (1 - \alpha^4)$

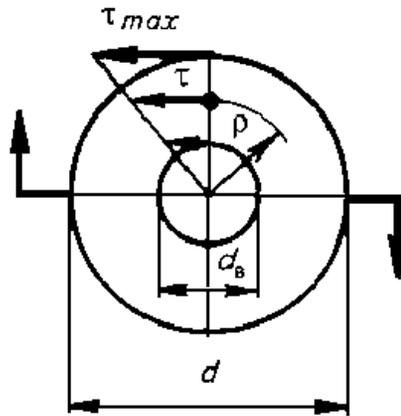


Рис. 2.2

Если крутящий момент и диаметр сечения на участке стержня зависят от координат сечения x , то угол закручивания сечения относительно начального сечения

$$\varphi_x = \int_0^x \frac{T dx}{G J_p},$$

где G – модуль упругости второго рода.

Если крутящий момент и диаметр сечения являются постоянными величинами, то на участке длиной l угол закручивания

$$\varphi_x = \frac{Tl}{G J_p}.$$

Угол закручивания сечения на i -м участке относительно неподвижного сечения равен сумме углов закручивания всех предыдущих $i-1$ участков плюс угол закручивания данного сечения с координатой x_i относительно начального сечения i -го участка, т. е.

$$\varphi_{0-x} = \sum_{k=1}^{i-1} \varphi_k + \int_0^{x_i} \frac{T_i}{G_i} \cdot \frac{dx_i}{J_{pi}}.$$

Для неподвижного бруса угол закручивания целесообразно определять относительно заделки.

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{max} \leq [\tau].$$

Из этого условия можно провести *проверочный расчет* по определению коэффициента запаса:

$$n = \tau_{оп} / \tau_{max} \leq [n],$$

где $[n]$ – рекомендуемый для данных условий работы и материала коэффициент запаса, или провести *проектный расчет* - определить диаметр сечения под заданную нагрузку, предварительно выбрав материал:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot (1 - \alpha^4) \cdot [\tau]}}.$$

Расчеты на жесткость основываются на *условии жесткости*.

$$\varphi \leq [\varphi] \text{ или } \varphi \leq [\varphi],$$

где $\varphi = T / (GJ_p)$ – относительный угол закручивания, т.е. угол закручивания, отнесенный к единице длины стержня. Из условия жесткости можно определить диаметр сечения по заданной жесткости:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot T}{\pi \cdot G \cdot 0,1 \cdot [\theta]}}$$

где $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины стержня.

Задача 2.2. Для стержня (рис. 2.3) построить эпюру максимальных касательных напряжений τ_{max} , углов закручивания φ , определить диаметр сечений и максимальный угол закручивания, если заданы $d' = 2d$, $a = 1\text{ м}$, $M = 5\text{ кН}\cdot\text{м}$,

$[\tau]=40\text{МПа}$, $G=0,4E=0,8\cdot 10^5\text{ МПа}$. Эюра крутящих моментов приведена на рис.2.3.

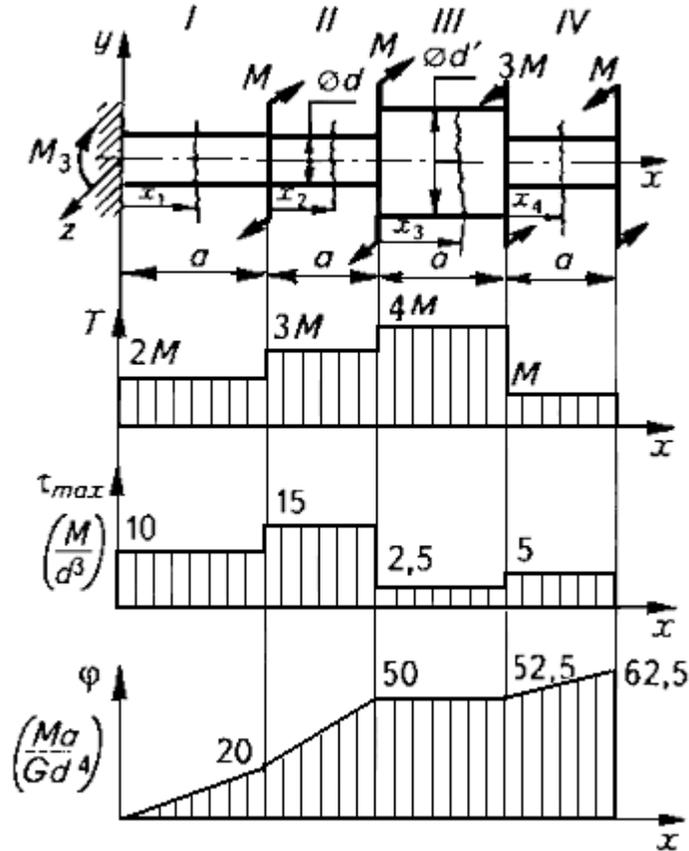


Рис. 2.3

1. Разбиваем брус на четыре участка. Нумерацию участков и координату произвольного сечения на каждом участке задаем слева. Такое направление обхода выбираем для того, чтобы сразу построить эюру углов закручивания сечения относительно единственного естественно неподвижного сечения – заделки.

Составляем уравнения для максимальных напряжений и углов закручивания:

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$;

$$W_p=0,2d^3, J_p=0,1d^4.$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{2M}{0,2d^3} = \frac{10M}{d^3};$$

$$\varphi_{x_1} = \int_0^{x_1} \frac{T dx_1}{GJ_p} = \frac{2Mx_1}{G0,1d^4} = \frac{20Mx_1}{Gd^4};$$

при $x_1=a$ $\varphi_{x_1}=\varphi_I=20 Ma/(Gd^4)$, где φ_I – угол закручивания крайнего сечения I участка.

II участок: $0 \leq x_2 \leq a$;

$$W_p=0,2d^3, J_p=0,1d^4.$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{15M}{d^3}; \quad \varphi_{0-x_2} = \varphi_I + \varphi_{x_2}$$

$$\varphi_{x_2} = \int_0^{x_2} \frac{Tdx_2}{GJ_p} = \frac{30Mx_2}{Gd^4};$$

при $x_2=a$ $\varphi_{x_2}=\varphi_{II}=30 Ma/(Gd^4)$.

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$;

$$W_p=0,2(2d^3)=1,6d^3, J_p=0,1(2d^4)=1,6d^4.$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{2,5M}{d^3}; \quad \varphi_{0-x_3} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{x_3};$$

$$\varphi_{x_3} = \int_0^{x_3} \frac{Tdx_3}{GJ_p} = \frac{2,5Mx_3}{Gd^4};$$

при $x_3=a$ $\varphi_{x_3}=\varphi_{III}=2,5 Ma/(Gd^4)$.

IV участок: $0 \leq x_4 \leq a$; $W_p=0,2d^3, J_p=0,1d^4$.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{5M}{d^3}; \quad \varphi_{0-x_4} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{x_4};$$

$$\varphi_{x_4} = \int_0^{x_4} \frac{Tdx_4}{GJ_p} = \frac{10Mx_4}{Gd^4};$$

при $x_4=a$ получим $\varphi_{x_4}=\varphi_{IV}=10 Ma/(Gd^4)$.

По полученным данным строим графики τ_{\max} и φ на каждом участке. Графики τ_{\max} – прямые, параллельные оси x , так как $\tau_{\max}=\text{const}$ на каждом участке; графики φ – наклонные прямые:

при $x_1=0$ получим $\varphi=0$; при $x_1=a$ получим $\varphi = \varphi_I=20 Ma/(Gd^4)$;

при $x_2=0$ получим $\varphi=\varphi_I$; при $x_2=a$ получим $\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} = 50 Ma/(Gd^4)$;

при $x_3=0$ получим $\varphi=\varphi_I + \varphi_{II}$; при $x_3=a$ получим $\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 52,5 Ma/(Gd^4)$;

при $x_4=0$ получим $\varphi=\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III}$; при $x_4=a$ $\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = 62,5 Ma/(Gd^4)$;

5. Анализ эпюры τ_{max} показывает, что наиболее нагруженным, т. е. опасным, является II участок, на котором все сечения равнонагружены. Исходя из условия прочности, определим диаметра в опасном сечении бруса:

$$\max[\tau_{max}] = \frac{15M}{d^3} \leq [\tau]$$

откуда $d \geq \sqrt[3]{15M/[\tau]}$.

Подставляем цифровые данные:

$$d \geq \sqrt[3]{15 \cdot 5 \cdot 10^3 / (40 \cdot 10^6)} = 0,123 \text{ м} = 123 \text{ мм}$$

По ГОСТ 6636-69 выбираем диаметра $d_H=130$ мм и проверяем его

$$\tau_{max} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 10^3}{(0,13)^3} = 34,14 \text{ МПа}$$

Недогрузка (напряжение меньше допускаемого) составляет

$$\Delta_\tau = \frac{[\tau] - \tau_{max}}{[\tau]} 100\% = \frac{40 - 34,14}{40} 100\% = 14,65\%$$

Полученная недогрузка в пределах рекомендуемой нормы – не более 15%.
На III участке, по условию, $d' = 2d = 260$ мм.

Таким образом, только на опасном участке напряжения будут близки к допускаемым, на остальных участках они будут значительно меньше.

6. Определяем угол закручивания крайнего сечения относительно заделки:

$$\max \varphi = \frac{62,5Ma}{Gd^4} = \frac{62,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot (0,13)^4} = 0,137 \text{ рад} = 7,8^\circ$$

$$W_p = 0,2d^3, J_p = 0,1d^4.$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{5M}{d^3}; \varphi_{0-x_4} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{x_4};$$

$$\varphi_{x_2} = \int_0^{x_4} \frac{T dx_4}{GJ_p} = \frac{10Mx_4}{Gd^4};$$

при $x_4 = a$ $\varphi_{x_4} = \varphi_{IV} = 10 Ma / (Gd^4)$.

По полученным данным строим графики τ_{max} и φ на каждом участке. Графики τ_{max} – прямые, параллельные оси x , так как $\tau_{max} = const$ на каждом участке; графики φ – наклонные прямые:

при $x_1=0$ $\varphi=0$; $x_1=a$ $\varphi = \varphi_I = 20 Ma / (Gd^4)$;

при $x_2=0$ $\varphi=\varphi_I$; $x_2=a$ $\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} = 50 Ma / (Gd^4)$;

при $x_3=0$ $\varphi=\varphi_I + \varphi_{II}$; $x_3=a$ $\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 52,5 Ma / (Gd^4)$;

при $x_4=0$ $\varphi=\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III}$; $x_4=a$ $\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = 62,5 Ma / (Gd^4)$;

5. Анализ эпюры τ_{max} показывает, что наиболее нагруженным, т. е. опасным, является 2-й участок, на котором все сечения равнонагружены. Исходя из условия прочности, определим диаметра в опасном сечении бруса:

$$\max[\tau_{max}] = 15M / d^3 \leq [\tau],$$

откуда

$$d \geq \sqrt[3]{15M / [\tau]}.$$

Подставляем цифровые данные:

$$d \geq \sqrt[3]{15 \cdot 5 \cdot 10^3 / (40 \cdot 10^6)} = 0,123 \text{ м} = 123 \text{ мм}.$$

Выбираем диаметра $d = 130$ мм. и проверяем его

$$\tau_{max} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 10^3}{(0,13)^3} = 34,14 \text{ МПа}.$$

Недогрузка (напряжение меньше допускаемого) составляет

$$\Delta_{\tau} = \frac{[\tau] - \tau_{max}}{[\tau]} 100\% = \frac{40 - 34,14}{40} 100\% = 14,65\%$$

Полученная недогрузка в пределах рекомендуемой нормы – не более 15%. На III участке, по условию, $d' = 2d = 260$ мм.

Таким образом, только на опасном участке напряжения будут близки к допускаемым, на остальных участках они будут значительно меньше.

6. Определяем угол закручивания крайнего сечения относительно заделки:

$$\max \varphi = \frac{62,5 M n \square}{G d^4} = \frac{62,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot (0,13)^4} = 0,137 \text{ рад} = 7,8^\circ$$

2.3. Определение напряжений, расчеты на прочность при изгибе

При изгибе в каждом сечении в общем случае возникают внутренние нормальные и касательные напряжения. *Нормальные напряжения* при изгибе в произвольной точке поперечного сечения (рис. 2.4)

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} \cdot y,$$

где M_z – изгибающий момент в сечении, J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z , y – координата точки, в которой определяется напряжение.

В дальнейшем, так как рассматривается изгиб в одной плоскости, индекс z опускается.

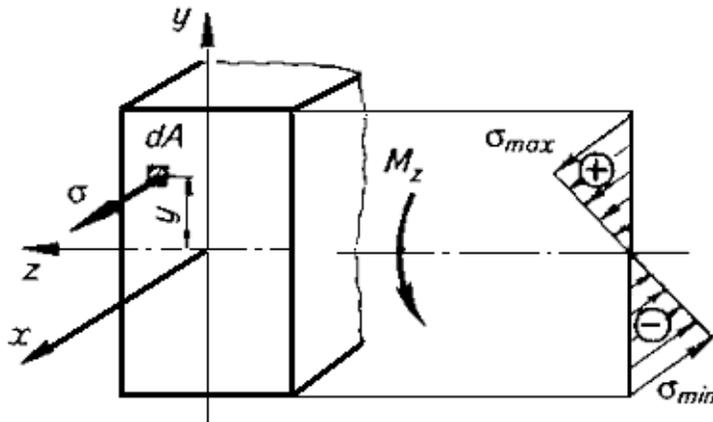


Рис. 2.4

Касательные напряжения, возникающие в сечениях при изгибе, на порядок меньше нормальных, поэтому при расчетах на прочность ими обычно пренебрегают.

Наибольшие напряжения возникают в наиболее удаленных от оси изгиба z точках сечения. Для симметричных относительно оси z сечений

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W},$$

где $W=J/(h/2)$ – осевой момент сопротивления (относительное оси z), h – высота сечения.

Для прямоугольного сечения с размерами b и h : $J = bh^3/12$; $W=bh^2/6$.

Для кольцевого сечения с наружным диаметром d и внутренним $d_в=ad$

Эпюры максимальных нормальных напряжений для балок не строят, так как балки, как правые, имеют одинаковое сечение по всей длине и эпюра напряжений повторяет эпюру изгибающих моментов. Поэтому опасное сечение определяется по эпюре моментов, так как в том сечении, где действует наибольший (по абсолютной величине) момент, возникают и наибольшие напряжения.

На основе условия прочности $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ проводят либо проверочный расчет на прочность – определяют коэффициент запаса n и сравнивают его с рекомендуемым значением $[n]$:

$$n = \sigma_{оп} \cdot \sigma_{max} \leq [n]$$

либо проектный – подбирают поперечное сечение балки по осевому моменту сопротивления сечения:

$$]W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

При заданной форме сечения по W определяют все размеры сечения. Для двутавра, швеллера из таблиц стандарта выбирают номер балки требуемого профиля с ближайшим к найденному значением W . При этом допускаемая перегрузка не должна превышать 5%, а недогрузка – 15%.

Задача 2.3. Подобрать прямоугольное ($h=2b$) сечение деревянной балки, если заданы $M_0 = 20$ кН, $q = 10$ кН/м, $a = 2$ м, допускаемое напряжение $[\sigma]=12$ МПа.

1. Определяем реакции и строим эпюры q и M . Эпюры приведены на рисунке 2.4. Изгибающий момент в опасном сечении $M_{max}=33,3$ кН·м.

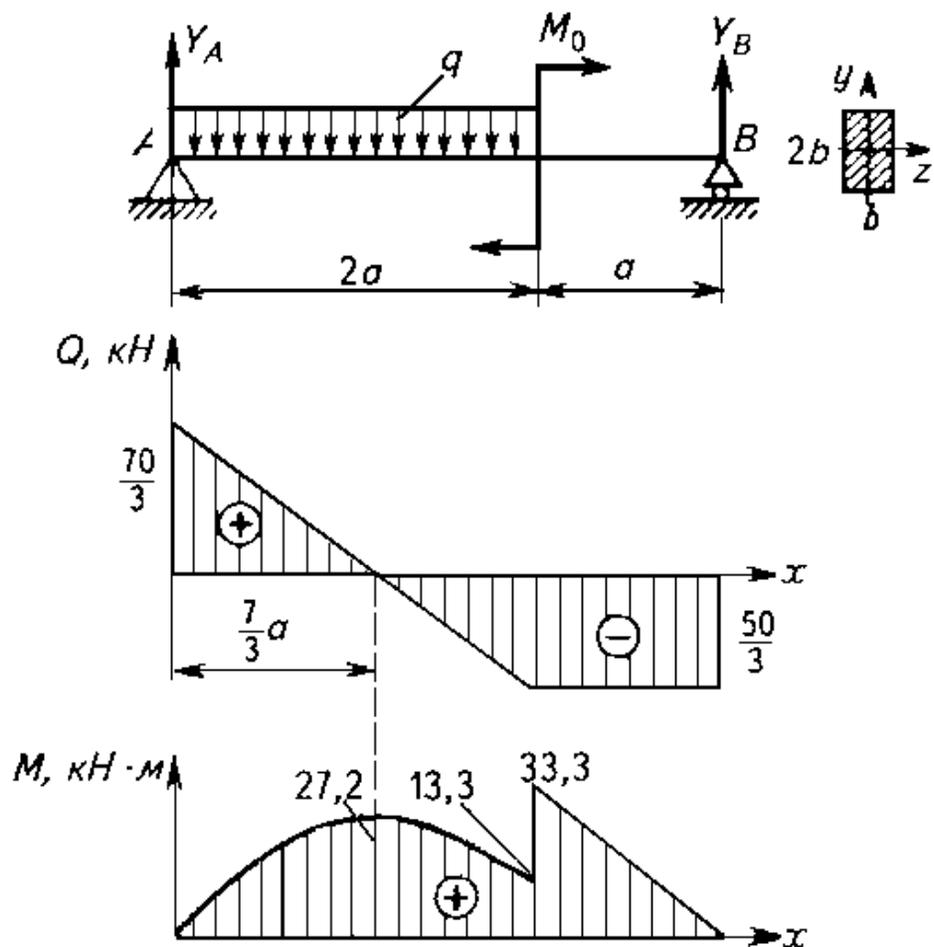


Рис. 2.5

2. Подбираем сечение. Из условия прочности находим осевой момент сопротивления сечения.

$$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{33,3 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Для прямоугольного сечения момент сопротивления

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3$$

откуда определяем

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3W}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,77 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,161 \text{ м} = 161 \text{ мм}.$$

Выбираем по ГОСТ 6636-69 $b_H = 160$ мм. Тогда высота сечения $h = 2b = 320$ мм. Определим перегрузку. При выбранных размерах

$$W_H = \frac{2}{3} b_H^3 = \frac{2}{3} 0,16^3 = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_H} = \frac{33,3 \cdot 10^3}{2,74 \cdot 10^{-3}} = 12,2 \cdot 10^6 = 12,2 \text{ МПа}$$

Перегрузка составит

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{12,2 - 12}{12} \cdot 100\% = 1,7\%$$

что в пределах допустимых значений.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Грес П.В. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для техн. вузов. - 3-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2010. – 133 с.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов / Под ред.: В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. - 49-е изд.,стер. - СПб.: Лань, 2008. – 447 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. - 17-е изд., стер. - М.: Высшая , 2007. – 415 с.