

Вопросы к экзамену по ТФДП, гр. 5131, 2009 г.

1. Понятие мощности множества. Счетные множества. Свойства счетных множеств.
2. Несчетность множества действительных чисел. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
3. Теорема Кантора о мощности множества подмножеств. Свойства множеств мощности континуума.
4. Структура открытых и замкнутых подмножеств прямой.
5. Теорема о мощности совершенного множества. Структура ограниченных совершенных множеств. Канторово совершенное множество.
6. Функции ограниченной вариации на отрезке и их основные свойства.
7. Теорема о структуре функций ограниченной вариации. Свойства точек разрыва функции ограниченной вариации.
8. Необходимое и достаточное условие спрямляемости плоской кривой.
9. Внешняя мера на прямой и ее свойства.
10. Внутренняя мера ограниченного множества. Корректность определения (независимость от выбора отрезка). Свойства внутренней меры.
11. Понятие измеримого множества и меры Лебега. Основные свойства измеримых множеств.
12. Критерий измеримости ограниченного множества.
13. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Лебега.
14. Измеримость счетных объединений и пересечений измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега. Свойства непрерывности меры Лебега.
15. Регулярность меры Лебега. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов. Пример неизмеримого множества.
16. Измеримые функции. Эквивалентность различных условий измеримости. Эквивалентные функции. Измеримость эквивалентных функций.
17. Измеримость суммы, произведения и частного измеримых функций.
18. Измеримость точной верхней (нижней) грани, верхнего (нижнего) предела ограниченной последовательности измеримых функций. Измеримость непрерывных функций.
19. Последовательности измеримых функций. Понятия сходимости "почти всюду" и "по мере". Теоремы Лебега и Рисса.
20. Соотношение между сходимостью "почти всюду" и равномерной сходимостью. Теорема Егорова.
21. Аппроксимации измеримых функций непрерывными (две леммы). Теорема Лузина.
22. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции. Свойства интегральных сумм. Определение интеграла.
23. Корректность определения интеграла Лебега. Оценки интеграла и их следствия. Счетная аддитивность интеграла по области интегрирования.
24. Равенство интегралов от эквивалентных функций. Свойства линейности интеграла Лебега.
25. Оценка модуля интеграла. Неравенство Чебышева и его следствия. Свойства неотрицательных измеримых функций с нулевым интегралом.
26. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
27. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
28. Приложения интеграла Лебега: восстановление дифференцируемой функции по ее производной.
29. Интеграл Лебега от неотрицательной суммируемой функции. Основные свойства.
30. Предельный переход под знаком интеграла. Теоремы Фату и Леви. Счетная аддитивность интеграла.
31. Интеграл Лебега от произвольной суммируемой функции и его свойства.
32. Банахово пространство суммируемых функций $L^1(E)$.
33. Пространство квадратично суммируемых функций $L^2(E)$. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского.
34. Полнота пространства $L^2(E)$.