

П.А.Прохоров

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В данной статье рассмотрены корреляционные свойства равномерно распределенных стационарных случайных последовательностей, полученных путем вероятностного интегрального преобразования последовательностей с показательным распределением.

Ключевые слова: коэффициент корреляции, случайная последовательность, вероятностное интегральное преобразование, авторегрессия

Введение

Равномерно распределенные случайные величины являются базовыми при моделировании случайных величин с другим распределением, например при использовании метода отбора или метода обратного преобразования. В литературе рассмотрено несколько способов моделирования, равномерно распределенных случайных последовательностей, однако у них есть свои недостатки. Рассмотрим задачу моделирования стационарных в узком смысле случайных последовательностей. При применении алгоритма авторегрессии первого порядка с постоянными коэффициентами [1] недостатком является то, что моделируемые случайные последовательности могут иметь лишь коэффициенты корреляции между соседними членами последовательности вида: $r = \pm 1/(n+1)$ при натуральных n . Для алгоритма авторегрессии со случайными коэффициентами [2] можно задавать последовательности соответствующей моделью произвольного порядка, но члены полученной последовательности могут повторяться, что может некорректно отражать суть моделируемых процессов. При преобразовании нормального распределения [3] можно также использовать модель авторегрессии произвольного порядка, но при этом требуется обращать неэлементарную функцию распределения, что не всегда является тривиальной задачей.

Для получения равномерно распределенной последовательности предлагается применить подход вероятностного интегрального преобразования к последовательности с показательным (экспоненциальным) распределением, которая может быть смоделирована методом авторегрессии, параметры которого в заданном случае описаны в [4]. При этом будет получена коррелированная случайная последовательность, с равномерным распределением, свойства которой изменены, по сравнению с исходной последовательностью, поэтому эти свойства необходимо исследовать, что и является темой данной работы.

Моделирование случайных последовательностей

Для моделирования случайных последовательностей $\{Y(t)\}$ с показательным распределением, задаваемым функцией плотности

$$f(x, l) = \begin{cases} l e^{-lx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где параметр $l > 0$, и функцией распределения

$$F(x, l) = \begin{cases} 1 - e^{-lx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

можно использовать алгоритм авторегрессии первого порядка. При этом следующий член последовательности $\{Y(t)\}$ задается соотношением

$$Y(t) = aY(t-1) + bX(t),$$

при $a, b > 0$, $a + b = 1$, а функция плотности независимой случайной величины $X(t)$ должна иметь вид

$$f_x(x) = ad(x) + bf(x, lb),$$

где $d(x)$ — дельта-функция Дирака, $f(x, lb)$ — функция плотности показательного распределения с параметром lb .

Коэффициент корреляции между соседними членами последовательности $\{Y(t)\}$ будет равен a ,

так как случайные величины $X(t)$ и $Y(t-1)$ являются независимыми.

$$\text{corr}(Y(t), Y(t+1)) = a.$$

Равномерно распределенная случайная последовательность $\{U(t)\}$ получается путем нахождения значения функции распределения показательного распределения, аргументы которой являются членами ранее полученной последовательности $\{Y(t)\}$ с показательным распределением:

$$u_i = F(y_i, l).$$

Исследование корреляционных свойств

Коэффициент корреляции между двумя соседними членами последовательности $\{U(t)\}$ можно найти следующим образом

$$r(a, l) = \text{corr}(U(t), U(t-1)) = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_{k+1} y_k \cdot \bar{g}(y_{k+1}, y_k) dy_{k+1} dy_k - M(U(t)) \cdot M(U(t-1)) \right)}{s(U(t)) \cdot s(U(t-1))},$$

где $M(U(t)) \cdot M(U(t-1)) = 1/4$, $s(U(t)) \cdot s(U(t-1)) = 1/12$ — произведение математических ожиданий и произведение среднеквадратических отклонений членов моделируемой случайной последовательности, а $\bar{g}(y_{k+1}, y_k)$ — совместная функция плотности соседних членов полученной случайной последовательности с равномерным распределением, которая имеет вид:

$$\bar{g}(y_{k+1}, y_k) = f(y_{k+1}, l) \cdot f(y_k, l) \cdot g(F(y_{k+1}), F(y_k)),$$

где $f(y, l)$, $F(y, l)$ — функция плотности и функция распределения показательного распределения, а $g(y_{k+1}, y_k)$ — совместная функция плотности двух соседних случайных величин с показательным распределением.

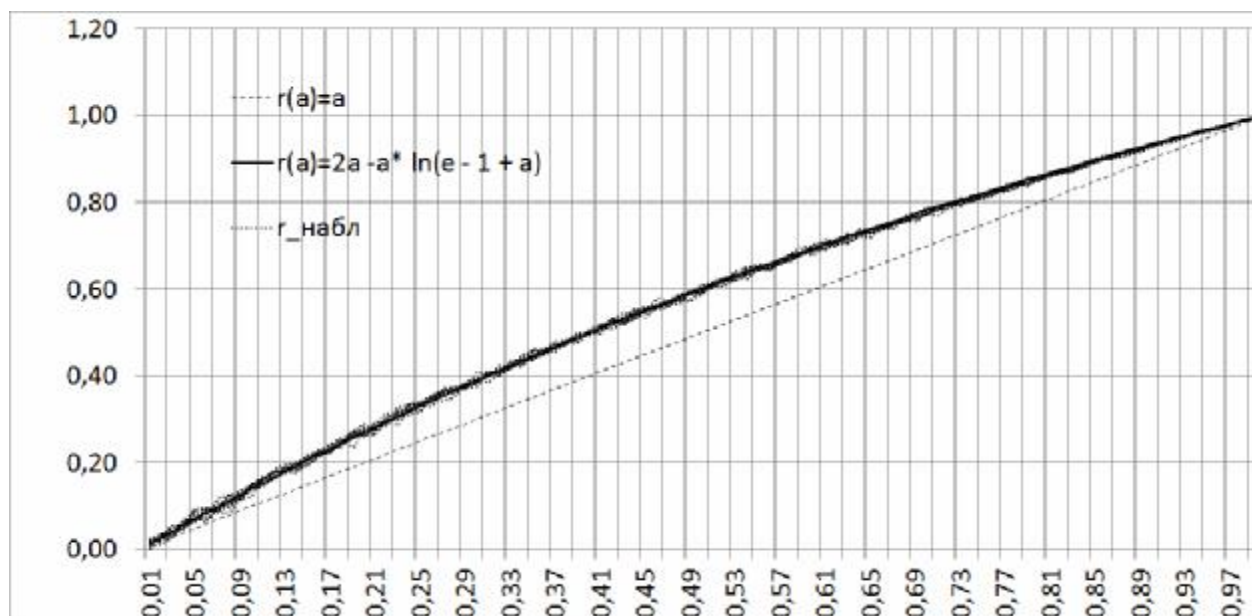


Рис. 1. График зависимости коэффициента корреляции от параметра a

Данный интеграл довольно сложен для интегрирования, поэтому оценим коэффициент корреляции, найдя аппроксимацию зависимости коэффициента корреляции от параметра a .

Для начала, необходимо выяснить от каких параметров зависит коэффициент корреляции. Было проведено множество моделирований случайных последовательностей с различными значениями параметров l и a . На основе посчитанных коэффициентов корреляции полученных последовательностей было выяснено, что при рассмотренных значениях l , а именно для $0 < l \leq 10$, взятых с шагом $h = 0,1$, и фиксированным параметром a значение коэффициента корреляции между соседними членами колебалось, однако колебания были незначительными и происходили независимо от значения параметра l . Следовательно, можно сделать

предположение о том, что $r(a, l) = r(a)$, т.е. коэффициент корреляции не зависит от параметра l , которым задается функция плотности членов стационарной последовательности $\{Y(t)\}$.

В дальнейшем, при моделировании случайных последовательностей, для удобства вычислений примем параметр $l = 1$.

Для того чтобы подобрать функцию, аппроксимирующую зависимость коэффициента корреляции от параметра a , было получено множество последовательностей с различными a , $a \in (0; 1)$ с шагом $h = 0,01$. Для каждого значения a , было найдено 10 последовательностей.

Для полученных последовательностей были вычислены коэффициенты корреляции, которые, вместе с соответствующими значениями a , расположили на плоскости. В итоге, было получено 990 точек, по которым выполнялась аппроксимация. Исходя из области, где они были сосредоточены, рассматривались различные виды аппроксимирующей функции: синусоидальные, экспоненциальные и логарифмические. Наилучшая из рассмотренных функций имеет вид

$$r^*(a) = 2a - a \ln(e - 1 + a).$$

На графике (Рис.1) расположены коэффициенты корреляции смоделированных последовательностей $r_{набл}$, коэффициент корреляции между соседними членами исходной последовательности $\{Y(t)\}$ $r(a) = a$, и найденная аппроксимирующая функция. Можно сделать вывод о том, что коэффициенты корреляции полученной последовательности больше, чем у исходной.

Для оценки качества аппроксимации воспользуемся коэффициентом детерминации R^2 . Для полученных последовательностей $R^2 = 0,985$, что позволяет говорить о том, что полученная функция хорошо аппроксимирует зависимость $r(a)$.

Зная функцию $r(a)$ можно найти обратную к ней функцию, что позволит моделировать равномерно распределенные случайные последовательности с заданным коэффициентом корреляции между соседними членами последовательности.

Рассмотрим на примере. Пусть необходимо смоделировать равномерно распределенную последовательность из 10000 случайных величин с коэффициентом корреляции между соседними членами последовательности равным $r = 0,42$. Исходя из полученной функции, находим значение параметра $a = 0,33$. Смоделируем последовательность с найденным параметром a по алгоритму, рассмотренному ранее и выпишем первые сто членов этой последовательности, округленные до четвертого знака после запятой;

0,3988; 0,8356; 0,7415; 0,5047; 0,4500; 0,2941; 0,3628; 0,1382; 0,8198; 0,6710; 0,7147; 0,4124; 0,1610; 0,6976; 0,8340; 0,9489; 0,7714; 0,6359; 0,5538; 0,2904; 0,4862; 0,1973; 0,2039; 0,0725; 0,0245; 0,0082; 0,3227; 0,2337; 0,0841; 0,0286; 0,4048; 0,1574; 0,2655; 0,6927; 0,6283; 0,6948; 0,5893; 0,2545; 0,7619; 0,8057; 0,4404; 0,1744; 0,6994; 0,5726; 0,8746; 0,5058; 0,5117; 0,4999; 0,8861; 0,5690; 0,2425; 0,3820; 0,2420; 0,3118; 0,1355; 0,0469; 0,3491; 0,3159; 0,8123; 0,4242; 0,1665; 0,0650; 0,1404; 0,5816; 0,7214; 0,6182; 0,9622; 0,7533; 0,3699; 0,4523; 0,1802; 0,0635; 0,0214; 0,1551; 0,0928; 0,0316; 0,7357; 0,3554; 0,3950; 0,1528; 0,0533; 0,0179; 0,0059; 0,0325; 0,0109; 0,0036; 0,5224; 0,4882; 0,6879; 0,4564; 0,6584; 0,2984; 0,1889; 0,0667; 0,3073; 0,1141; 0,8296; 0,5702; 0,2432; 0,3314.

Коэффициент корреляции полученной последовательности из 10000 случайных величин получился равным $r = 0,4154$, что вполне соответствует необходимому $r = 0,42$.

Заключение

Была поставлена задача, исследовать корреляционные свойства последовательности с равномерным распределением, полученной путем интегрального вероятностного преобразования из последовательности с показательным распределением. В ходе исследования была найдена оценка коэффициента корреляции между соседними членами последовательности с равномерным распределением. Качество оценки подтверждается высоким значением коэффициента детерминации, а полученные результаты подтверждены многочисленными численными испытаниями.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.949.2014/К.

1. Гарбарь С.В. Авторегрессия первого порядка для равномерно распределённых случайных последовательностей. // Вестник НовГУ. Сер: Технические науки. 2010. № 55. С. 53.
2. Кирьянов Б.Ф., Кознов А.В. Процессы авторегрессии со случайными коэффициентами и их применение при моделировании радиотехнических систем // Прикладная математика: Межвуз. сб. / Под ред. Б.Ф.Кирьянова; НовГУ. Новгород, 1994. Вып. 1. С. 3-8.

3. Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1996, 240 p.
4. Гарбарь С.В. Моделирование стационарных марковских случайных процессов с заданной плотностью распределения методом авторегрессии // Вестник НовГУ. 2012. № 67. С. 13-15.

References

1. Garbar' S.V. Avtoregressiya pervogo poryadka dlya ravnomerno raspredelennykh sluchaynykh posledovatel'nostey. // Vestnik NovGU. Ser: Tekhnicheskie nauki. 2010. № 55. S. 53.
2. Kir'yanov B.F., Koznov A.V. Protsessy avtoregressii so sluchaynymi koeffitsientami i ikh primeneniye pri modelirovanii radiotekhnicheskikh sistem // Prikladnaya matematika: Mezhd. sb. / Pod red. B.F.Kir'yanova; NovGU. Novgorod, 1994. Vyp. 1. S. 3-8.
3. Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1996, 240 p.
4. Garbar' S.V. Modelirovaniye statsionarnykh markovskikh sluchaynykh protsessov s zadannoy plotnost'yu raspredeleniya metodom avtoregressii // Vestnik NovGU. 2012. № 67. S. 13-15.

Prokhorov P.A. Transformation of sequences with exponential distribution for obtaining uniformly distributed stationary random sequences. This article describes the correlation properties of uniformly distributed stationary random sequences obtained by the probability integral transformation of sequences with exponential distribution.

Keywords: the correlation coefficient, a random sequence, the probability integral transformation, autoregression.

Сведения об авторе. П.А.Прхоров — студент ИЭУ НовГУ; prokhorovpa@mail.ru.

Статья публикуется впервые. Поступила в редакцию 01.12.2016.