РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

УДК 519.21

МАНИПУЛИРОВАНИЕ УЧАСТКАМИ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ В МОДЕЛИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

С.В.Гарбарь

MANIPULATING SEGMENTS OF PROBABILITY DENSITY FUNCTION IN MOVING AVERAGE MODEL FOR SIMULATING RANDOM SEQUENCES WITH UNIFORM DISTRIBUTION

S.V.Garbar'

Институт электронных и информационных систем НовГУ, Sergey.Garbar@novsu.ru

Предложена модификация модели скользящего среднего, позволяющая получать последовательность случайных величин с равномерным распределением и заданным коэффициентом корреляции между соседними членами. Представленный метод позволяет получать последовательности с коэффициентом корреляции между соседними членами в пределах [–0,423; 0,423].

Ключевые слова: случайные последовательности, модель скользящего среднего, равномерное распределение

Modification of moving average model which allows modeling of sequences of uniformly distributed random variables with specified correlation coefficient between its adjacent members is proposed. This method allows simulating sequences with correlation coefficient between their adjacent members in range [–0.423, 0.423].

Keywords: random sequences, moving average model, uniform distribution

Введение

Моделирование случайных процессов используется при имитации различных ситуаций, объектов и явлений. При этом важную роль играют стационарные случайные последовательности, использующиеся для описания временных рядов, течение которых стабилизировалось и происходит в неизменных условиях. Они применяются в радиотехнике, теории связи, механике жидкости и газа, океанологии, метеорологии и т.д.

Модель скользящего среднего первого порядка

$$Y(t) = a \cdot X(t-1) + b \cdot X(t)$$

при $a \geq 0, b \geq 0, a+b=1$ предполагает преобразование белого шума $\{X(t)\}$ в последовательность $\{Y(t)\}$ с корреляционной функцией $R(\tau)=0$ при $|\tau| \geq 2$.

Полученная при этом последовательность $\{Y(t)\}$ будет стационарной в широком смысле [1]. При этом если одномерное распределение $X(t)$ — нормальное, то последовательность $\{Y(t)\}$ будет стационарной и в узком смысле, так как заданное моделью линейное преобразование не влияет на «нормальность» распределения.

Рассмотренный в работе [2] метод модифицировал известные авторегрессионные алгоритмы таким образом, что для модели первого порядка удавалось сохранить «равномерность» распределения, т. е. описывал метод моделирования стационарной в узком смысле случайной последовательности с равномерным распределением и экспоненциальной автокорреляционной функцией.

Важность равномерного распределения заключается в том, что оно может быть использовано в качестве базового в методе обратного преобразования (обратной функции), т. е., имея последовательность с равномерным распределением, можно преобразовать ее и получить последовательность с заданной функцией распределения.

В данной работе рассматривается применение аналогичного рассмотренному в [2] подхода по отношению к модели скользящего среднего.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу моделирования стационарной последовательности стандартных равномерно распределенных случайных величин $\{Y(t)\}$ с заданным значением коэффициента корреляции между соседними членами (т. е. с заданным значением автокорреляционной функции в точке 1).

Под стандартной равномерно распределенной случайной величиной понимается случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$.

2. Описание алгоритма и исследование полученных последовательностей

Зафиксируем $a=1$ и будем считать, что $b \geq 1$. Линейная комбинация $Y^*(t) = X(t-1) + b \cdot X(t)$ двух стандартно равномерно распределенных случайных величин $X(t-1)$ и $X(t)$ имеет плотность распределения

$$g^*(y)=\begin{cases}0, & \text{при } y<0,\\ y/b, & \text{при } y\in[0;1];\\ 1/b, & \text{при } y\in[1;b];\\ \dfrac{b+1}{b}-\dfrac{y}{b}, & \text{при } y\in[b;b+1];\\ 0, & \text{при } y>b+1.\end{cases}$$

График функции плотности $g^*(y)$ будет иметь вид, представленный на рис.1.

Проведем преобразование полученной случайной величины $Y^*(t)$: если ее значение y^* будет принадлежать отрезку $[0;0{,}5]$, , то возьмем вместо него значение $1-y^*$. Если же $y^*\in[b+0{,}5;b+1]$, то изменим его на $2\cdot b-y^*+1$. Назовем это преобразование манипулированием участками функции плотности.

Таким образом, изменятся значения функции плотности на отрезках $[0;1]$ и $[b;b+1]$ и, соответственно, вероятности появления значений случайной величины в них. Обозначим полученную случайную величину $Y^{**}(t)$, а ее плотность — $g^{**}(y)$.

При $y\in[0;0{,}5]\cup[b+0{,}5;b+1]$ функция плотности $g^{**}(y)$ примет нулевое значение.

При $y\in[0{,}5;1]$:

$$g^{**}(y)=g^*(y)+g^*(1-y)=\frac{y}{b}+\frac{1-y}{b}=\frac{1}{b}.$$

При $y\in[b;b+0{,}5]$:

$$g^{**}(y)=g^*(y)+g^*(2b-y+1)=\frac{b+1}{b}-\frac{y}{b}+\frac{b+1}{b}-\frac{2b-y+1}{b}=\frac{1}{b}.$$

Таким образом, функция плотности распределения $Y^{**}(t)$ примет вид:

$$g^{**}(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y<0{,}5,\\ \dfrac{1}{b}, & \text{если } y\in[0{,}5;b+0{,}5],\\ 0, & \text{если } y>b+0{,}5,\end{cases}$$

что есть плотность равномерно распределенной на отрезке $[0{,}5;b+0{,}5]$ случайной величины. Взяв вместо полученного значения y^{**} линейно преобразованное $y=\dfrac{y^{**}-0{,}5}{b}$, получим реализацию случайной величины $Y(t)$ со стандартным равномерным распределением.

Если же вместо полученного на последнем шаге алгоритма значения y взять в качестве значения случайной величины $1-y$, то знак коэффициента корреляции поменяется на противоположный (так можно поступить, так как функция плотности $g(y)$ симметрична относительно точки 0,5).

Для получения наперед заданного требуемого значения коэффициента корреляции следует подобрать соответствующее значение коэффициента b. Для этого следует найти совместную плотность соседних членов последовательности, как дающую исчерпывающие сведения о модели скользящего среднего первого порядка.

Для начала найдем совместную плотность распределения $\tilde{g}(y_1,y_2)$ случайных величин $(X(t-1)+bX(t))/b$ и $(X(t)+bX(t+1))/b$ (т. е. рассмотрим случайные величины до манипулирования участками функции плотности, но после масштабирования их значений)

$$\tilde{g}(y_1,y_2)=\begin{cases}1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_0^*\\ bx_1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_1^*\\ bx_1-b^2x_2+b^2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_2^*\\ -b^2x_2+b^2+b, \text{при } (y_1,y_2)\in A_3^*\\ -bx_1+b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_4^*\\ -bx_1+b^2x_2+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_5^*\\ b^2x_2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_6^*\\ 0, \text{при } (y_1,y_2)\notin \bigcup_{i=0}^{6} A_i\end{cases}$$

для множеств A_i^* на рис.2.

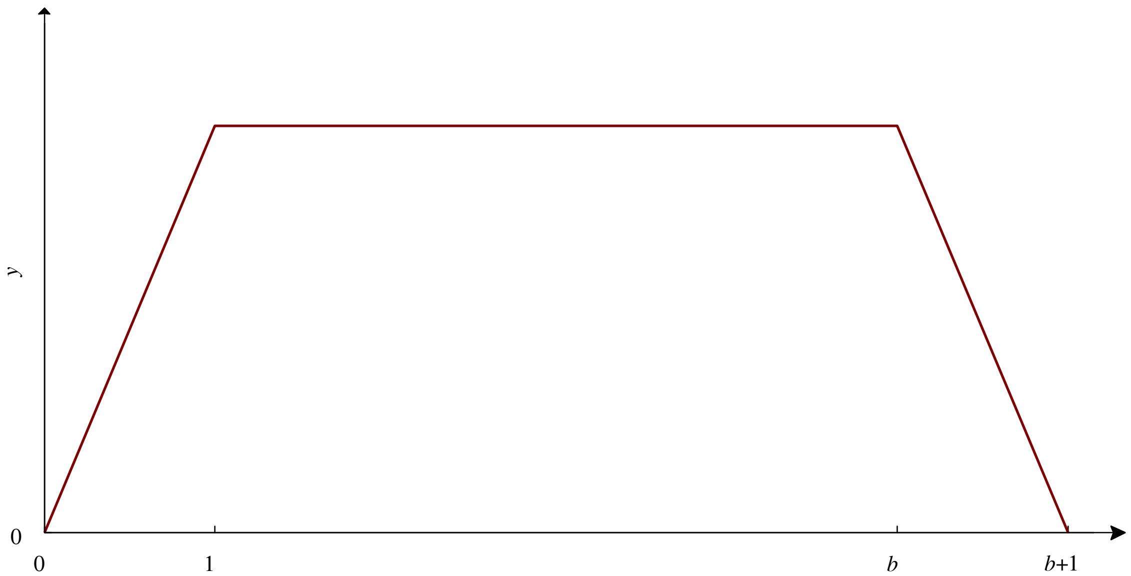

Рис.1. Плотность распределения линейной комбинации равномерно распределенных случайных величин $Y^*(t)=X(t-1)+b\cdot X(t)$

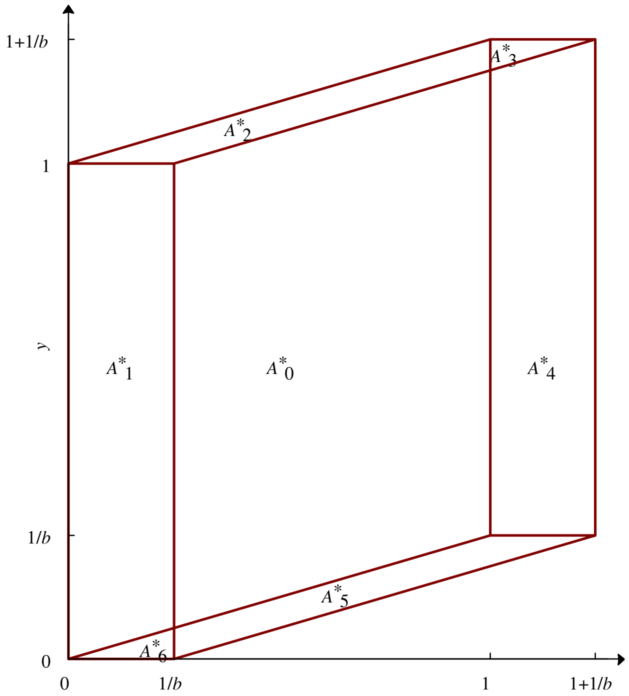

Рис.2. Носитель совместной плотности распределения случайных величин $(X(t-1)+bX(t))/b$ и $(X(t)+bX(t+1))/b$

Таким образом, аналогичным с нахождением итоговой одномерной функции плотности, рассмотрим, как изменится значение функции совместной плотности при манипулировании участками функции плотности и последующем линейном преобразовании.

Выпишем функцию совместной плотности распределения случайных величин $Y(t)$ и $Y(t+1)$:

$$g(y_1,y_2)=\begin{cases} 1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_0 \\ -2b^2x_2+2b^2-b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_1 \\ bx_1-b^2x_2+b^2-b/2+1/2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_2 \\ 2bx_1-b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_3 \\ 2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_4\cup A_{10} \\ bx_1+b^2x_2-b^2-b/2+3/2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_5 \\ 2b^2x_2-2b^2+b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_6 \\ 2b^2x_2-b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_7 \\ -bx_1+b^2x_2+b/2+1/2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_8 \\ -2bx_1+b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_9 \\ -bx_1-b^2x_2+b/2+3/2, \text{при } (y_1,y_2)\in A_{11} \\ -2b^2x_2+b+1, \text{при } (y_1,y_2)\in A_{12} \\ 0, \text{при } (y_1,y_2)\notin \bigcup_{i=0}^{14} A_i \end{cases}$$

для множеств A_i^* на рис.3. Подробные описания множеств не приводятся в силу их громоздкости.

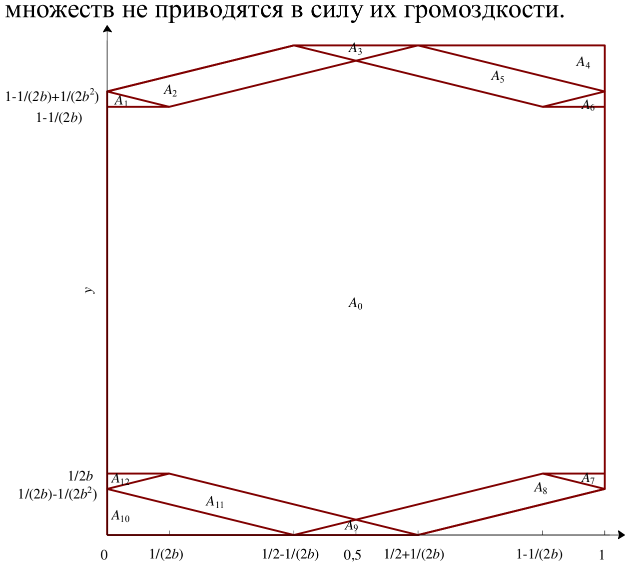

Рис.3. Носитель совместной плотности распределения случайных величин $Y(t)$ и $Y(t+1)$

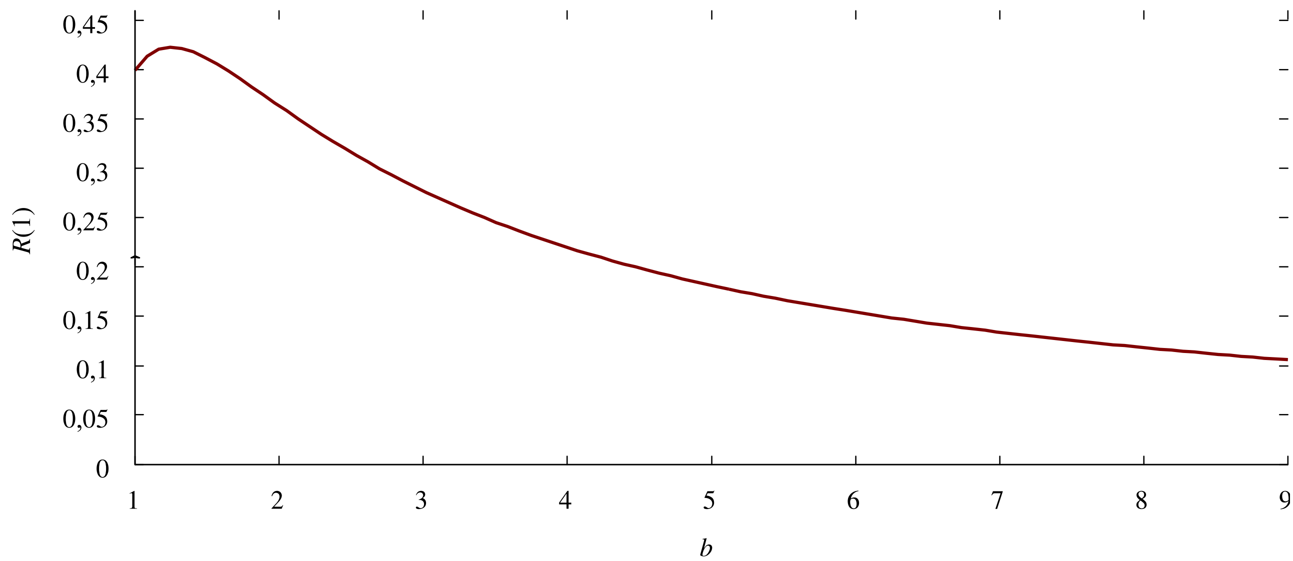

Рис.4. Зависимость значения коэффициента корреляции между соседними членами последовательности от значения коэффициента b

Теперь, когда известна совместная плотность распределения, по определению найдем коэффициент корреляции между соседними членами последовательности.

$$R(1)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(y_1,y_2)dy_1dy_2-M^2(Y(t))}{D(Y(t))}=$$

$$=\frac{40b^5-15b^4-20b^3+15b^2-5b+1}{40b^6}.$$

График зависимости коэффициента корреляции от значения коэффициента b представлен на рис.4.

Максимальное значение коэффициента корреляции $R(1)\approx 0{,}423194$ достигается при $b\approx 1{,}24855$.

Выводы

Таким образом, алгоритм моделирования требуемой последовательности состоит из следующих шагов:

1. Определить значение коэффициента b, обеспечивающее требуемый коэффициент корреляции $R(1)$.

2. Получить промежуточное значение $y^*\leftarrow x(t-1)+bx(t)$.

3. Если $y^*\in[0;0{,}5]$, то присвоить новое значение $y^{**}\leftarrow 1-y^*$.

Если $y^*\in[b+0{,}5;b+1]$, то $y^{**}\leftarrow 2b-y^*+1$.

4. Если $R(1)>0$, то линейно преобразовать y^{**}, чтобы получить $Y(t)$: $y(t)\leftarrow\frac{y^{**}-0{,}5}{b}$.

Иначе $y(t)\leftarrow 1-\frac{y^{**}-0{,}5}{b}$.

5. Повторить шаги 2–4.

Таким образом, следующий член последовательности либо равен линейной комбинации $\frac{1}{b}X(t-1)+X(t)$ двух независимых равномерно распределенных на единичном отрезке случайных величин, либо равен линейной функции от данной линейной комбинации.

Метод позволяет получить последовательности с $R(1)$, лежащим в пределах $[-0{,}423;0{,}423]$. Результаты численного моделирования подтверждают теоретические выводы.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект №1.949.2014/K.

1. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М, 1998. 528 с.
2. Гарбарь С.В. Манипулирование участками функции плотности при моделировании случайных последовательностей с равномерным распределением // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2010. №60. С.27-28.

References

1. Tiurin Iu.N., Makarov A.A. Statisticheskii analiz dannykh na komp'iutere [Statistical data analysis using computers]. Moscow, INFRA-M Publ., 1998. 528 p.
2. Garbar' S.V. Manipulirovanie uchastkami funktsii plotnosti pri modelirovanii sluchainykh posledovatel'nostei s ravnomernym raspredeleniem [Manipulating with density functions cells at modeling of uniformly distributed random sequences]. Vestnik NovGU. Ser. Tekhnicheskie nauki – Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences, 2010, no. 60, pp. 27-28.