УДК 81.255.2

ОЦЕНИВАНИЕ SPICE-ПАРАМЕТРОВ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

С.А.Попов, И.С.Васильев

ESTIMATION OF SPICE-PARAMETERS WITH REQUIRED ACCURACY

S.A.Popov, I.S.Vasilyiev

Политехнический институт НовГУ, stanislav.popov@novsu.ru

Рассматривается метод оценивания Spice-параметров и их ковариационной матрицы на основании многооткликовой модели эквивалентной схемы. Полученные параметры используются для расчета и коррекции электрического режима электронных устройств. Предлагается метод построения последовательного плана эксперимента, позволяющего получить необходимую точность оценивания.

Ключевые слова: оценивание Spice-параметров, многооткликовая модель, точность оценивания, план эксперимента

Spice-parameters and their covariance matrix are estimated on the basis of multiresponse model of equivalent circuit. The obtained parameters are used for calculation and correction of electrical mode of electron devices. The method is offered for construction of sequential design of experiment that allows to provide the required accuracy of estimation.

Keywords: Spice-parameters estimation, multiresponse model, accuracy of estimation, design of experiment

Для прогнозирования выходных электрических режимов электронных устройств, состоящих из транзисторов и других компонентов, величины параметров которых можно точно измерить, необходимо знание SPICE-параметров транзисторов. Задача оценивания SPICE-параметров транзисторов и их статистических характеристик с учетом многооткликового характера моделей этих приборов формулируется как задача определения статистических оценок параметров многооткликовой модели по экспериментальным данным. Такие задачи включают расчет вольт-амперных характеристик (ВАХ), анализ ошибок наблюдений и построение плана эксперимента для расчета параметров математической модели [1,2]. Затем эти параметры используются для расчета электрических режимов электронных устройств и сравнения их с допустимыми значениями.

Модель ВАХ транзистора с однородной ошибкой и расчет SPICE-параметров

Многооткликовая модель ВАХ транзистора с абсолютной ошибкой представляется в виде [1]

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})+\boldsymbol{R}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})$ — система уравнений Кирхгофа, описывающая эквивалентную схему транзистора, $\boldsymbol{I}=\{i_1,\ldots,i_k\}^T$ — вектор токов, $\boldsymbol{U}=\{u_1,\ldots,u_m\}^T$ — вектор напряжений, $\boldsymbol{B}=\{b_1,\ldots,b_l\}^T$ — вектор коэффициентов модели, которые и являются определяемыми SPICE параметрами, $\boldsymbol{R}=\{r_1,\ldots,r_m\}^T$ — абсолютная ошибка наблюдения.

При измерении тока в очень широких пределах абсолютная ошибка наблюдения также изменяется. На практике принимается, что абсолютная ошибка измерения пропорциональна величине измеряемой переменной. Таким образом, зависимая от величины тока абсолютная ошибка наблюдения тока $\boldsymbol{R}$ выражается через постоянную относительную ошибку наблюдения $\boldsymbol{E}$ в виде $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{E}^T$. Тогда

$$\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R})=\ln\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{E}^T\right)=\ln\boldsymbol{I}+\ln(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}),$$

где $\boldsymbol{J}=\{1,\ldots,1\}^T$.

Разлагая функцию $\ln(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E})$ в ряд Тейлора возле точки $\boldsymbol{E}$ = 0 и ограничиваясь одним членом для малых $\boldsymbol{E}$, получим

$$\ln(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E})\approx\boldsymbol{E}\frac{d[\ln(1+\boldsymbol{E})]}{d\boldsymbol{E}}=\frac{\boldsymbol{E}}{1+\boldsymbol{E}}\approx\boldsymbol{E}.$$

Таким образом, для приведения ошибки наблюдений к однородной можно принять, что

$$\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R})=\ln\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{E}^T\right)=\ln\boldsymbol{I}+\ln(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E})\approx\ln\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}.$$

Тогда модель ВАХ с однородной ошибкой наблюдений выражается в виде

$$\ln\boldsymbol{I}=\ln[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})]+\boldsymbol{E}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{E}=\{e_1,\ldots,e_m\}^T$ — однородная ошибка наблюдений с ковариационной матрицей $\boldsymbol{V_E}$.

Для расчета оценок параметров используется итерационная процедура, основанная на модифицированном методе Гаусса, который является достаточно быстродействующим и относительно устойчивым в вычислительном отношении. Оценки параметров, обеспечивающие максимум функции правдоподобия, в этом методе можно выразить в следующем виде [3]:

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{s+1}=\hat{\boldsymbol{B}}^s+\left[\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}\left(\hat{\boldsymbol{B}}^s,\boldsymbol{U}_j,\boldsymbol{I}_j\right)\boldsymbol{P}\left(\hat{\boldsymbol{B}}^s,\boldsymbol{U}_j,\boldsymbol{I}_j\right)^T\right]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}\left(\hat{\boldsymbol{B}}^s,\boldsymbol{U}_j,\boldsymbol{I}_j\right)\left[\ln\boldsymbol{I}_j-\ln\boldsymbol{I}_j^*\right], \qquad (3)$$

где s — номер итерации, n — количество наблюдений ВАХ, $\boldsymbol{I}_j^*$ — наблюденное значение тока, $\boldsymbol{I}_j$ — расчетное значение тока по модели при заданном напряжении в соответствии с выражением (2).

Векторная функция $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})$ определяется как производная неявной функции (2) следующим образом:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})=-\frac{1}{\mathbf{I}}\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})}{\partial\boldsymbol{B}}[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})]^{-1}, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{L}$ — единичная матрица, а $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})=$ $=\left[\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})}{\partial\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{L}\right]$.

Ковариационная матрица $\boldsymbol{V_B}$ оценок параметров рассчитывается по формуле

$$\boldsymbol{V_B}\approx\left\{\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{U}_j,\boldsymbol{I}_j\right)\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{E}}^{-1}\boldsymbol{P}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{U}_j,\boldsymbol{I}_j\right)^T\right\}^{-1}. \qquad (5)$$

Расчет модели ВАХ и предсказание по модели

Для реализации процедуры расчета (3) коэффициентов модели (2) на каждой итерации необходимо рассчитывать значение тока $\boldsymbol{I}$. Расчет выполняется путем решения системы уравнений ВАХ в виде

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})-\boldsymbol{I}=\Phi(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})=0. \qquad (6)$$

Эта система нелинейных уравнений решается методом Ньютона [4] линейным разложением нелинейной функции $\Phi(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})$ в окрестности точки $\boldsymbol{I}^*$ в виде

$$\Phi(\boldsymbol{U},\boldsymbol{B},\boldsymbol{I})\approx\Phi\left(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I}^*\right)+\left[\left.\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})}{\partial\boldsymbol{I}}\right|_{\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^s}\right]^T\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}^*\right).$$

Тогда итерационная процедура расчета вектора токов имеет вид

$$\boldsymbol{I}^{s+1}=\boldsymbol{I}^s-\Phi\left(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I}^s\right)\left[\left.\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{U},\boldsymbol{I})}{\partial\boldsymbol{I}}\right|_{\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^s}-\boldsymbol{L}\right]^{-1}. \qquad (7)$$

Исследования, проведенные методом статистического моделирования, показали, что итерационная процедура (7) имеет высокую скорость сходимости и обеспечивает устойчивое и точное решение системы (6) в диапазоне реальных значений параметров $\boldsymbol{B}$ внутри цикла (3).

Точность оценивания и планирование эксперимента

Основной целью построения математической модели транзистора является предсказание значений параметров-критериев годности транзисторных устройств (например, транзисторных ключей). Оценка токов $\hat{\boldsymbol{I}}$ при заданных напряжениях определяется решением системы уравнений в виде

$$\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{I}}\right)-\hat{\boldsymbol{I}}=0, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{I}}\right)$ — система уравнений Кирхгофа, описывающая электронное устройство, $\hat{\boldsymbol{B}}$ — оценки SPICE-параметров транзисторов, получаемые по формуле (3), $\boldsymbol{Z}$ — известные компоненты электрической схемы, параметры которых можно измерить.

Система уравнений (8) решается с помощью итерационной процедуры, аналогичной (7). Если признать, что модель транзистора сама по себе правильна, то существуют два возможных источника ошибок предсказания выходных параметров устройства: ошибки в оценках коэффициентов и ошибки наблюдения откликов. Тогда ковариационная матрица ошибок предсказания выходных параметров рассчитывается следующим образом:

$$\boldsymbol{V_Y}=\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{I}}\right)\boldsymbol{V_B}\left(\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{I}}\right)\right)^T+\boldsymbol{V_E}, \qquad (9)$$

где $\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{I}}\right)$ — матрица производных, получаемая по аналогии с (4).

Доверительные интервалы оцениваемых по модели (8) токов i_j выражаются в виде

$$\hat{i}_j-t_\alpha\sqrt{v_j}\le i_j\le\hat{i}_j+t_\alpha\sqrt{v_j}, \qquad (10)$$

где $\hat{i}_j$ — оценка j-го тока по формуле (7), v_j — дисперсия оценки тока (j-й диагональный элемент ковариационной матрицы $\boldsymbol{V_Y}$), t_α — квантиль распределения Стьюдента на уровне значимости α и с числом степеней свободы $f=n-l/k,\ \ j=\overline{1,k}$.

В качестве критерия оптимальности плана в этом случае принимается определитель ковариационной матрицы $\det\boldsymbol{V_Y}$ [5]. Для расчета этого критерия оптимальности необходимо для заданного плана эксперимента рассчитать ковариационную матрицу оценок коэффициентов $\boldsymbol{V_B}$, а затем по формуле (9) рассчитать ковариационную матрицу оценок откликов $\boldsymbol{V_Y}$ и ее определитель. Оптимальные планы, полученные для этого критерия оптимальности, называются *G*-оптимальными. Известно [5], что при непрерывном планировании для построения *G*-оптимальных планов вместо критерия оптимальности в виде $\det\boldsymbol{V_Y}$ можно использовать критерий оптимальности в виде $\det\boldsymbol{V_B}$

(D-оптимальные планы). Это в значительной степени ускоряет процедуру планирования, поскольку упрощает вычисления критерия оптимальности.

В случае последовательного планирования задается некоторый начальный заранее заданный план эксперимента с небольшим количеством точек наблюдений. Используя этот план, выполняются измерения и рассчитываются оценки коэффициентов модели. На основании полученных оценок отыскивается следующая точка наблюдения, обеспечивающая наилучшую точность оценивания. Количество измерений увеличивается до достижения необходимой точности оценивания параметров данного конкретного прибора. Алгоритм построения последовательного плана может быть представлен следующим выражением:

$$\det \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}\left(\Pi+\boldsymbol{X}^{\mathrm{o}},\boldsymbol{B}\right)=\min_{\mathbf{X}\in\Sigma_{\mathbf{X}}} \det \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}(\Pi+\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}), \qquad (11)$$

где Π — построенный план эксперимента, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{o}}$ — следующая добавляемая в план Π точка.

При разработке электронных схем, например транзисторных ключей, в качестве параметров-критериев годности задаются точки на ВАХ и соответствующие допустимые значения, например, для токов i'_j в виде

$$i_{mj} \geq i_{lj}, \qquad (12)$$

где i_{mj} — измеренное значение тока, i_{lj} — нижнее допустимое значение тока годных изделий.

Чтобы сделать обоснованный (на уровне значимости α) вывод о годности прибора, необходимо, чтобы нижняя граница доверительного интервала (10) была больше допустимого значения i'_{lj}, т.е. требуется выполнение следующего неравенства:

$$\hat{i}_j - t_\alpha\sqrt{v_j} \geq i_{lj}. \qquad (13)$$

Если выполняется неравенство

$$\hat{i}_j + t_\alpha\sqrt{v_j} \leq i_{lj}, \qquad (14)$$

то прибор не соответствует ТУ по данному параметру. Если оба неравенства (13) и (14) не выполняются, то эксперимент нужно продолжать.

При выполнении неравенства (14) требуется коррекция технологического процесса с целью подгонки SPICE-параметров для получения требуемых значений параметров-критериев годности. Выражения (8) и (9) позволяют получать точечную и интервальную оценки параметров-критериев годности электронного устройства при заданных SPICE-параметрах транзистора, что дает возможность корректировать технологических процесс для обеспечения выполнения ТУ.

1. Попов С.А., Корчагин А.Ф. Использование многооткликовых моделей для расчета параметров электронных приборов // Измерительная техника. 2003. №4. С.47-51.
2. Попов С.А., Васильев И.С. Расчет параметров эквивалентной схемы IGB транзистора // Вестник НовГУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2014. №80. С.33-36.
3. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 349 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
5. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.

References

1. Popov S.A., Korchagin A.F. Ispol'zovanie mnogootklikovykh modelei dlia rascheta parametrov elektronnykh priborov [Using multiresponse models for calculating the parameters of electron devices]. Izmeritel'naia tekhnika – Measurement Techniques, 2003, no. 4, pp. 47-51.
2. Popov S.A., Vasil'ev I.S. Raschet parametrov ekvivalentnoi skhemy IGB tranzistora [Estimation of equivalent-circuit parameters of IGB transistor]. Vestnik NovGU. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki – Vestnik NovSU. Issue: Physico-Mathematical Sciences, 2014, no. 80, pp. 33-36.
3. Bard Y. Nonlinear Parameter Estimation. Academic Press, New York and London, 1974. (Russ. ed.: Bard I. Nelineinoe otsenivanie parametrov. Moscow, “Statistika” Publ., 1979. 349 p.).
4. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York, 1968. (Russ. ed.: G. Korn, T. Korn. Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Moscow, “Nauka” Publ., 1968. 720 p.).
5. Fedorov V.V. Teoriia optimal'nogo eksperimenta [Optimal experiment theory]. Moscow, “Nauka” Publ., 1971. 312 p.