

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА С ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИЕЙ

М.С.Токмачев

EVALUATION OF INTEGRALS FOR SOME CLASS OF FUNCTIONS WITH PROBABILISTIC INTERPRETATION

M.S.Tokmachev

Институт электронных и информационных систем НовГУ, tokm@mail.natm.ru

На основе вычисления моментов случайных величин, имеющих распределение типа гиперболического косинуса, представлены значения интегралов для некоторого класса функций. Указанное трехпараметрическое распределение с параметрами $\mu, \beta, m \in \mathbf{R}$; $m > 0$, $\beta \neq 0$ является обобщением известного двухпараметрического распределения Майкснера. Значения моментов вычисляются путем дифференцирования характеристической функции, а соответствующие интегралы возникают как начальные моменты, выраженные через функцию плотности распределения вероятностей. В общем случае в структуре четырехпараметрической подынтегральной функции кроме степенного множителя имеется бета-функция комплексно-сопряженных переменных аргументов. В частных случаях при $m \in \mathbf{N}$ действительные подынтегральные функции, в зависимости от параметров вероятностного распределения, состоят из комбинаций функций: степенной, показательной, гиперболических косинуса или синуса и многочленов-множителей. Представлены многочисленные примеры вычисленных интегралов.

Ключевые слова: *распределение типа гиперболического косинуса, характеристическая функция, функция плотности, бета-функция, моменты*

The integrals for a definite class of functions are derived on the basis of calculations of moments for random variables having a distribution of the hyperbolic cosine type. This three-parameter distribution with parameters $\mu, \beta, m \in \mathbf{R}$; $m > 0$, $\beta \neq 0$ is a generalization of the well-known two-parameter Meixner distribution. The values of moments are calculated by taking derivatives of the characteristic function and the corresponding integrals are given as raw moments expressed via the probability density function. In general case the four-parameter integrated function contains not only the power function as a multiplier but also a beta-function of complex-conjugate variables. In the particular case of $m \in \mathbf{N}$ the real-valued integrated functions contain a combination of functions depending on the probability distribution parameters: power, exponential, hyperbolic cosine and sine and polynomial functions-multipliers. Some numerous examples of evaluated integrals are also presented.

Keywords: *distribution of the hyperbolic cosine type, characteristic function, density function, beta function, moments*

Введение

Трехпараметрическое вероятностное распределение с характеристической функцией

$$f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-m},$$

$$\text{где } \mu, \beta, m \in \mathbf{R}; m > 0, \beta \neq 0, i = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

названное автором распределением типа гиперболического косинуса, получено при решении задачи характеристики распределений свойством постоянства регрессии квадратичной статистики на линейную статистику для независимых одинаково распределенных случайных величин [1,2]. Данное распределение является обобщением двухпараметрического распределения с характеристической функцией

$$f(t) = (\operatorname{ch} t - i \theta \operatorname{sh} t)^{-m}, \text{ где } m, \theta \in \mathbf{R}; m > 0; i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

известного [3] как распределение Майкснера ($m = \beta$, $\mu = \theta$). Указанные распределения при $\mu = 0$ (соответственно для распределения Майкснера, $\theta = 0$), $m = 1$ сводятся к широко известному однопараметрическому распределению гиперболического косинуса (секанса).

Используя формулы связи начальных моментов с производными характеристической функции, в [4] найдены аналитические выражения для вычисления моментов распределения типа гиперболического косинуса при произвольных допустимых параметрах распределений. В [5] получены формулы плотности распределения типа гиперболического косинуса, в общем виде выраженной через бета-функцию с комплексно-сопряженными переменными аргументами. При $m \in \mathbf{N}$, $\beta > 0$ функция плотности оказывается [6] произведением показательной функции, гиперболических секанса или косеканса и некоторых многочленов. При вычислении моментов в подынтегральную функцию добавляется степенной множитель x^n . Аналитически вычисление интегралов от такой комбинации функций с различными параметрами весьма затруднительно. В данном случае значения этих интегралов, взятых по всей числовой прямой, как моменты распределения уже вычислены по характеристической функции. В работе представлены многочисленные примеры, в которых кроме общих формул приведены и значения конкретных интегралов с подынтегральными функциями рассматриваемого типа.

Теоретическое обоснование

Согласно [4], для вычисления начальных моментов справедливо утверждение:

Теорема. Для распределения типа гиперболического косинуса с характеристической функцией (1)

$$f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-m}, \quad \text{где } \mu, \beta, m \in \mathbf{R};$$

$$m > 0, \beta \neq 0, i = \sqrt{-1},$$

формула для вычисления моментов n -го порядка имеет вид:

$$M(X^n) = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n \left(m, \frac{\mu}{\beta} \right) = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) m^k \left(\frac{\mu}{\beta} \right)^j =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\{U(n; k, j)\}$ — система целочисленных коэффициентов, связанных соотношениями:

$$U(0; 0, 0) = 1, \quad U(0; k, j) = 0 \quad \text{для любых } k, j \neq 0,$$

$$U(n+1; k, j) = U(n; k-1, j-1) + (j-1)U(n; k, j-1) +$$

$$+ (j+1)U(n; k, j+1) \quad \text{при } n=0, 1, 2, \dots; \quad (4)$$

$P_n(m, b)$, $n=0, 1, 2, \dots$ — полиномы двух аргументов:

$$P_n(m, b) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) m^k b^j.$$

Для полиномов $P_n(m, b)$ справедливо рекуррентное дифференциальное соотношение

$$P_{n+1}(m, b) = mb P_n(m, b) + (1+b^2) \frac{\partial P_n(m, b)}{\partial b}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (5)$$

также позволяющее находить моменты распределения, исходя из первого равенства в (3).

$$\text{При этом } P_0(m, b) = 1, \quad P_1(m, b) = mb, \quad P_2(m, b) =$$

$$= (m^2 + m)b^2 + m = m(1+b^2) + m^2 b^2, \quad P_3(m, b) = (m^3 + 3m^2 + 2m)b^3 +$$

$$+ (3m^2 + 2m)b = 2m(b+b^3) + 3m^2(b+b^3) + m^3 b^3, \dots$$

Согласно [5], при $\beta > 0$ функция плотности распределения типа гиперболического косинуса $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx} dt}{\left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^m} =$$

$$= \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu} \right)^{\frac{imx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right), \quad (6)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $B(p; q)$ — бета-функция, $\mu, \beta, m \in \mathbf{R}$; $m > 0$, $\beta \neq 0$.

Можно показать, что сомножитель $\left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu} \right)^i$ с комплексной структурой равен действительному числу:

$$A \equiv \left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu} \right)^i = \begin{cases} e^{\operatorname{arctg} \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2}} & \text{при } \beta^2 - \mu^2 > 0, \\ e^{\operatorname{arctg} \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2} + \pi \operatorname{sign} \mu} & \text{при } \beta^2 - \mu^2 < 0, \\ e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \mu} & \text{при } \beta^2 - \mu^2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В частных случаях (частично представленных в [6]), при $m \in \mathbf{N}$, для функции плотности получаем следующие формулы

$$p_1(x) = \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}}; \quad p_2(x) = \frac{2xA^{\frac{x}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}}; \quad (8)$$

$$p_m(x) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} [(2s-1)^2 \beta^2 + m^2 x^2] \quad (9)$$

при нечетных $m=3, 5, 7, \dots$;

$$p_m(x) = \frac{m^2 x}{2(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m}{2}-1} (4s^2 \beta^2 + m^2 x^2) \quad (10)$$

при четных $m=4, 6, 8, \dots$.

Основной результат

Используя определение начальных моментов как функции плотности и формулу (3) для их вычисления, в общем виде при $n=0, 1, 2, \dots$ получаем

$$M(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_m(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}} A^{\frac{mx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n \left(m, \frac{\mu}{\beta} \right) = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) m^k \left(\frac{\mu}{\beta} \right)^j =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad (11)$$

В частности, из (11) следует: $M(X^0) = 1$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^{\frac{mx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) dx = \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}}; \quad (12)$$

$$M(X) = \mu, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x A^{\frac{mx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) dx = \frac{\pi \mu (\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}}; \quad (13)$$

$$M(X^2) = \frac{\beta^2 + (m+1)\mu^2}{m} = \frac{1}{m}(\beta^2 + \mu^2) + \mu^2, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 A^{\frac{mx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (\beta^2 + (m+1)\mu^2)}{2^{m-2} m^2 \beta^{m-1}}; \quad (14)$$

$$M(X^3) = \frac{1}{m^2} (2\beta^2 \mu + 2\mu^3) + \frac{1}{m} (3\mu \beta^2 + 3(m+1)\mu^3) - 2\mu^3, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 A^{\frac{mx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) dx = \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{m^2} (2\beta^2 \mu + 2\mu^3) + \frac{1}{m} (3\mu \beta^2 + 3(m+1)\mu^3) - 2\mu^3 \right); \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
M(X^4) &= \frac{1}{m^3} (2\beta^4 + 8\beta^2\mu^2 + 6\mu^4) + \\
&+ \frac{1}{m^2} (3\beta^4 + 14\beta^2\mu^2 + 11\mu^4) + \frac{1}{m} (6\beta^2\mu^2 + 6\mu^4) + \mu^4, \text{ т.е.} \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 A^{\frac{mx}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}, \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right) dx = \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}} \times \\
&\times \left(\frac{1}{m^3} (2\beta^4 + 8\beta^2\mu^2 + 6\mu^4) + \frac{1}{m^2} (3\beta^4 + 14\beta^2\mu^2 + 11\mu^4) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{m} (6\beta^2\mu^2 + 6\mu^4) + \mu^4 \right). \quad (16)
\end{aligned}$$

Соответствующие формулы, исходя из (11), можно выписать и для последующих моментов.

Рассматривая (11) для различных m , $m \in \mathbb{N}$, приходим к важным частным случаям.

При $m=1$ получаем, учитывая выражение для $p_1(x)$ в (8):

$$\begin{aligned}
M(X^n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \beta^{n-j} \mu^j, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (17)
\end{aligned}$$

При $m=2$ получаем, учитывая выражение для $p_2(x)$ в (8):

$$\begin{aligned}
M(X^n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+1} \frac{2A^{\frac{x}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{2^{n-k}}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (18)
\end{aligned}$$

При $m=3, 5, 7, \dots$ получаем, учитывая выражение для $p_m(x)$ в (9):

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_m(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} [(2s-1)^2 \beta^2 + m^2 x^2] dx = \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (19)
\end{aligned}$$

При $m=4, 6, 8, \dots$ получаем, учитывая выражение для $p_m(x)$ в (10):

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_m(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+1} \frac{m^2}{2(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m}{2}-1} (4s^2 \beta^2 + m^2 x^2) dx = \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (20)
\end{aligned}$$

Поделив обе части в каждом из соотношений (17)-(20) на числовой множитель, можно записать формулы вычисления интегралов с указанной структурой подынтегральной функции. Приведем соотношения при $\mu, \beta, m \in \mathbb{R}$; $m > 0$, $\beta > 0$; A вида (7); $n=0, 1, 2, \dots$ для интегралов.

$$\begin{aligned}
I_n(m, \mu, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n A^{\frac{mx}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}, \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right) dx = \\
&= \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-2}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-m+1-j} \mu^j}{m^{n-k+1}}. \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_n(1, \mu, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = \\
&= 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \beta^{n-j} \mu^j, \quad (22)
\end{aligned}$$

в частности, при $n=0, 4$ получаем

$$I_0(1, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2}; \quad (23)$$

$$I_1(1, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = 2\mu\sqrt{\beta^2 + \mu^2}; \quad (24)$$

$$I_2(1, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} (\beta^2 + 2\mu^2); \quad (25)$$

$$I_3(1, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} (5\beta^2 \mu + 6\mu^3); \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
I_4(1, \mu, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}} dx = \\
&= 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} (5\beta^4 + 28\beta^2 \mu^2 + 24\mu^4). \quad (27)
\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
I_n(2, \mu, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+1} \frac{A^{\frac{x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \\
&= \frac{\beta^2 + \mu^2}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{2^{n-k}}, \quad (28)
\end{aligned}$$

в частности, при $n=0, 4$ получаем

$$I_0(2, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{A^{\frac{x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \frac{\beta^2 + \mu^2}{2}; \quad (29)$$

$$I_1(2, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{A^{\frac{x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \frac{\mu(\beta^2 + \mu^2)}{2}; \quad (30)$$

$$I_2(2, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{A^{\frac{x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \frac{(\beta^2 + \mu^2)(\beta^2 + 3\mu^2)}{4}; \quad (31)$$

$$I_3(2, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{A^{\frac{x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \frac{(\beta^2 + \mu^2)}{2} (2\beta^2 \mu + 3\mu^3); \quad (32)$$

$$I_4(2, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \frac{A^{\frac{x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}} dx = \frac{(\beta^2 + \mu^2)(2\beta^4 + 15\beta^2 \mu^2 + 15\mu^4)}{4}. \quad (33)$$

При $m=3, 5, 7, \dots$ получаем следующие выражения:

$$I_n(m, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} [(2s-1)^2 \beta^2 + m^2 x^2] dx =$$

$$= \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!}{m} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}. \quad (34)$$

В частности,

$$I_0(3, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{3x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{3\pi x}{2\beta}} (\beta^2 + 9x^2) dx = \frac{4(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{3}; \quad (35)$$

$$I_1(3, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{A^{\frac{3x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{3\pi x}{2\beta}} (\beta^2 + 9x^2) dx = \frac{4\mu(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{3}; \quad (36)$$

$$I_2(3, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{A^{\frac{3x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{3\pi x}{2\beta}} (\beta^2 + 9x^2) dx =$$

$$= \frac{4(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}} (\beta^2 + 4\mu^2)}{9}; \quad (37)$$

$$I_0(5, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{5x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{5\pi x}{2\beta}} (\beta^2 + 25x^2)(9\beta^2 + 25x^2) dx =$$

$$= \frac{48(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{5}{2}}}{5}; \quad (38)$$

$$I_1(5, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{A^{\frac{5x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{5\pi x}{2\beta}} (\beta^2 + 25x^2)(9\beta^2 + 25x^2) dx =$$

$$= \frac{48\mu(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{5}{2}}}{5}; \quad (39)$$

$$I_2(5, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{A^{\frac{5x}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{5\pi x}{2\beta}} (\beta^2 + 25x^2)(9\beta^2 + 25x^2) dx =$$

$$= \frac{48(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{5}{2}} (\beta^2 + 6\mu^2)}{25}. \quad (40)$$

При $m=4, 6, 8, \dots$ получаем следующие выражения

$$I_n(m, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+1} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m}{2}-1} (4s^2 \beta^2 + m^2 x^2) dx =$$

$$= \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!}{m^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}. \quad (41)$$

В частности,

$$I_0(4, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{A^{\frac{2x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi x}{\beta}} (4\beta^2 + 16x^2) dx = \frac{3(\beta^2 + \mu^2)^2}{4}; \quad (42)$$

$$I_1(4, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{A^{\frac{2x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi x}{\beta}} (4\beta^2 + 16x^2) dx = \frac{3\mu(\beta^2 + \mu^2)^2}{4}; \quad (43)$$

$$I_2(4, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{A^{\frac{2x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi x}{\beta}} (4\beta^2 + 16x^2) dx =$$

$$= \frac{3(\beta^2 + \mu^2)^2 (\beta^2 + 5\mu^2)}{16}; \quad (44)$$

$$I_0(6, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{A^{\frac{3x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{3\pi x}{\beta}} (4\beta^2 + 36x^2)(16\beta^2 + 36x^2) dx =$$

$$= \frac{20(\beta^2 + \mu^2)^3}{3}; \quad (45)$$

$$I_1(6, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{A^{\frac{3x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{3\pi x}{\beta}} (4\beta^2 + 36x^2)(16\beta^2 + 36x^2) dx =$$

$$= \frac{20\mu(\beta^2 + \mu^2)^3}{3}; \quad (46)$$

$$I_2(6, \mu, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{A^{\frac{3x}{\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{3\pi x}{\beta}} (4\beta^2 + 36x^2)(16\beta^2 + 36x^2) dx =$$

$$= \frac{10(\beta^2 + \mu^2)^3 (\beta^2 + 7\mu^2)}{9}. \quad (47)$$

Все представленные интегралы при произвольно выбранных конкретных значениях параметров численно проверены с использованием программного обеспечения *Maple*. Основание A показательной функции в интегралах согласно (7) может быть записано в виде e .

Отметим, что, несмотря на вероятностную интерпретацию, интегралы (11)-(47) и другие того же типа могут найти и иные приложения в различных разделах математики.

1. Токмачев М.С. Характеризация распределения типа гиперболического косинуса свойством постоянства регрессии // Деп. в ВИНТИ 21.06.94. № 1542 – В94. 11с.

2. Токмачев М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику // Вестник НовГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. 1995. №1. С.139-141.
3. Lai C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions // Aust. J. Stat. 1982. V.24. P.221-233.
4. Токмачев М.С. Вычисление кумулянтов и моментов распределения Майкснера // Вестник НовГУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2013. №75. Т.2. С.47-51.
5. Токмачев М.С., Токмачев А.М. Распределение типа гиперболического косинуса // Вестник НовГУ. 2001. №17. С.85-88.
6. Токмачев М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса // Вестник НовГУ. Сер.: Техн. науки. 2005. №34. С.96-99.

References

1. Tokmachev M.S. Kharakterizatsiia raspredeleniia tipa giperbolicheskogo kosinusa svoistvom postoianstva regressii [Characterization of a distribution of the hyperbolic cosine

type by the constancy of regression toward the mean]. Dep. in VINITI 21.06.94. № 1542 – B94. 11 p.

2. Tokmachev M.S. Postoianstvo regressii kvadrachnoi statistiki na lineinuiu statistiku [The constancy of regression of quadratic statistics on linear statistics]. Vestnik NovGU – Vestnik NovSU, 1995, no. 1, pp. 139–141.
3. Lai C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions. Aust. J. Stat., 1982, vol. 24, pp. 221–233.
4. Tokmachev M.S. Vychislenie kumuliantov i momentov raspredeleniia Maiksnera [Calculating the cumulants and moments of the Meixner distribution]. Vestnik NovGU – Vestnik NovSU, 2013, no. 75, vol. 2, pp. 47–51.
5. Tokmachev M.S., Tokmachev A.M. Raspredelenie tipa giperbolicheskogo kosinusa [Distribution of the hyperbolic cosine type]. Vestnik NovGU – Vestnik NovSU, 2001, no. 17, pp. 85–88.
6. Tokmachev M.S. Prikladnoi aspekt obobshchennogo raspredeleniia giperbolicheskogo kosinusa [Applications of the generalized hyperbolic cosine distribution]. Vestnik NovGU – Vestnik NovSU, 2005, no. 34, pp. 96–99.