ИНФОРМАТИКА И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ТЕОРЕМА ОБ ОБЩНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗАМКНУТЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

В.В.Болтянский

A THEOREM ON THE POSITION SIMILARITY OF THE SYSTEM OF CLOSED SUBSPACES OF A BANACH SPACE

V.V.Boltianskii

Институт электронных и информационных систем НовГУ, тел. (8162) 629-972

В работе дается обобщение определения общности положения двух замкнутых подпространств на случай системы конечного числа замкнутых подпространств банахова пространства. Получено и доказано необходимое и достаточное условие того, что система замкнутых подпространств находится в общем положении. Приведенные в теореме условия содержат существенно меньше требований, чем в цитируемых работах.

Ключевые слова: общность положения замкнутых подпространств банахова пространства, общность пересечения системы замкнутых подпространств

This paper presents a generalized definition of the position similarity of two closed subspaces if there is a system of a finite number of closed subspaces of a Banach space. We found and proved a necessary and sufficient condition for the closed subspaces system to be in the general position. The theorem conditions contain significantly less requirements than in the works of reference.

Keywords: position similarity of closed subspaces of a Banach space, the commonality of intersection of the closed subspaces system

В работах [1,2] развит аппарат теории шатров применительно к банаховым пространствам. Этот аппарат является эффективным средством получения необходимых условий экстремума в различных задачах оптимизации, задачах математического программирования и других экстремальных задачах.

Существенную роль в теории шатров играет общность положения двух плоскостей. Приведем определение этого понятия (в том виде, как оно дано в [1,2]) применительно к подпространствам некоторого банахова пространства B. Как обычно, расстояние от точки $\alpha \in B$ до подпространства $L \subset B$ определяется формулой $d(a, L) = \inf\limits_{x \in L} \|\alpha - x\|$.

Определение 1. Замкнутые подпространства L_1, L_2 банахова пространства B называются находящимися в общем положении, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in B$, что при любом $\alpha \in B$ из выполнения неравенств $d(\alpha, L_1) < \delta\|\alpha\|$, $d(\alpha, L_2) < \delta\|\alpha\|$ следует $d(\alpha, L_1 \cap L_2) < \varepsilon\|\alpha\|$.

В работах [1,2] рассматривается следующая ситуация. Имеются замкнутые подпространства $Q_0, Q_1, ..., Q_s$ банахова пространства B (в качестве этих подпространств в цитированных работах берутся несущие плоскости некоторых выпуклых конусов). Рассматриваются два подпространства L_1, L_2, каждое из которых представляется в виде пересечения некоторых из подпространств $Q_0, Q_1, ..., Q_s$, и ставится вопрос, в каких случаях L_1 и L_2 будут в общем положении. Мы здесь формализуем эту ситуацию в виде следующего определения.

Определение 2. Система замкнутых подпространств $Q_0, Q_1, ..., Q_s$ банахова пространства B называется обладающей свойством общности пересечений, если любые два подпространства L_1, L_2, каждое из которых представляется в виде пересечения некоторых из подпространств $Q_0, Q_1, ..., Q_s$, находятся в общем положении.

Таким образом, для выполнения свойства общности пересечений требуется, например, чтобы каждые подпространства Q_i, Q_j, входящие в рассматриваемую систему, находились в общем положении; далее, требуется, чтобы Q_i и $Q_j \cap Q_k$ находились в общем положении и т.д.

Распространим определение 1 на случай произвольного числа подпространств.

Определение 3. Систему замкнутых подпространств $L_1, L_2 ..., L_k$ $(k \geq 2)$ банахова пространства B будем называть находящейся в общем положении, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом $\alpha\in B$ из выполнения неравенств $d(\alpha, L_i)\le\delta\|\alpha\|$, $i=1,\ldots,k$ следует $d(\alpha, L_1\cap L_2\cap\ldots\cap L_k)<\varepsilon\|\alpha\|$.

Учитывая это определение, удается получить условие, необходимое и достаточное для выполнения свойства общности пересечений. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ — система замкнутых подпространств банахова пространства *B*. Для того чтобы эта система обладала свойством общности пересечений, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее подсистема, содержащая не менее двух подпространств, находилась в общем положении.

Доказательство. Установим, прежде всего, необходимость, т.е. покажем, что если система $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ обладает свойством общности пересечений, то каждая ее подсистема (содержащая не менее двух подпространств) находится в общем положении. Мы обозначим через *k* число подпространств, входящих в рассматриваемую подсистему, $(2\le k\le s+1)$ и проведем индукцию по *k* от $k=2$ до $k=s+1$.

Пусть сначала $k=2$, тогда подсистема состоит их двух подпространств, т.е. имеет вид $\{Q_i, Q_j\}$. Так как система $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ обладает свойством общности пересечений, то, в частности, подпространства Q_i и Q_j находятся в общем положении. Но это и означает (в силу определений 1 и 2), что подсистема $\{Q_i, Q_j\}$ находится в общем положении. Это дает начало индукции.

Пусть при некотором *k*, где $2\le k<s+1$, необходимость уже доказана для любой подсистемы, содержащей не более *k* элементов. Иначе говоря, всякая подсистема системы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$, содержащая не более *k* подпространств, находится в общем положении. Докажем, что это справедливо и для любой подсистемы, содержащей $k+1$ элементов. Рассмотрим подсистему $\{Q_{i_0}, Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}\}$, содержащую $k+1$ элементов. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как система $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ обладает свойством общности пересечений, то подпространства $L_1=Q_{i_0}$ и $L_2=Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k}$ находятся в общем положении. Следовательно (см. определение 1), найдется такое число $\varepsilon'>0$, что при $d(\alpha, L_1)<\varepsilon'\|\alpha\|$, $d(\alpha, L_2)<\varepsilon'\|\alpha\|$ выполнено неравенство $d(\alpha, L_1\cap L_2)<\varepsilon\|\alpha\|$. Далее, так как подсистема $\{Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}\}$ содержит *k* элементов, то согласно предположению индукции, эта подсистема находится в общем положении. Следовательно (см. определение 3), найдется такое $\delta>0$, что при выполнении неравенств $d(\alpha, Q_{i_j})<\delta\|\alpha\|$, $j=1,\ldots,k$ мы имеем $d(\alpha, Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k})<\varepsilon'\|\alpha\|$, т.е. $d(\alpha, L_2)<\varepsilon'\|\alpha\|$. При этом мы можем считать, что $\delta<\varepsilon'$. Пусть теперь $\alpha\in B$ такой элемент, что $d(\alpha, L_2)<\delta\|\alpha\|$ при всех $j=0,1,\ldots,k$. Тогда $d(\alpha, L_1)=d(\alpha, Q_{i_0})<\delta\|\alpha\|<\varepsilon'\|\alpha\|$. Кроме того, согласно выбору числа δ мы имеем, как отмечено выше, $d(\alpha, L_2)<\varepsilon'\|\alpha\|$. Но из неравенств $d(\alpha, L_1)<\varepsilon'\|\alpha\|$, $d(\alpha, L_2)<\varepsilon'\|\alpha\|$ вытекает, в силу выбора числа ε, что $d(\alpha, L_1\cap L_2)<\varepsilon\|\alpha\|$, т.е. $d(\alpha, Q_{i_0}\cap Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k})<\varepsilon\|\alpha\|$. Итак, для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из выполнения неравенств $d(\alpha, Q_{i_j})<\delta\|\alpha\|$, $j=0,1,\ldots,k$ вытекает $d(\alpha, Q_{i_0}\cap Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k})<\varepsilon\|\alpha\|$. Это означает (определение 3), что подсистема $\{Q_{i_0}, Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_n}\}$ находится в общем положении. Этим и завершается очередной шаг индукции.

Проведенная индукция показывает, что каждая подсистема системы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ находится в общем положении, т.е. доказана необходимость содержащегося в теореме условия.

Установим теперь достаточность, т.е. покажем, что если каждая подсистема системы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ (содержащая не менее двух подпространств) находится в общем положении, то система $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$ обладает свойством общности пересечений. Пусть L_1 и L_2 — два подпространства, каждое из которых представляется в виде пересечения некоторых из подпространств $Q_0, Q_1, \ldots, Q_s$. Мы можем считать, что $L_1=Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k}$, $L_2=Q_{i_{p+1}}\cap Q_{i_{p+2}}\cap\ldots\cap Q_{i_q}$, где $1\le p\le k\le q$, $p<q$. Таким образом, при $p<k$ подпространства $Q_{i_{p+1}}, \ldots, Q_{i_k}$ входят как в пересечение, определяющее L_1, так и в пересечение, определяющее L_2. Покажем, что L_1 и L_2 находятся в общем положении. Пусть ε — произвольное положительное число. Согласно предположению, подсистема $\{Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_q}\}$ находится в общем положении. Поэтому существует такое положительное число δ, что для любого $\alpha\in B$ из выполнения неравенств $d(\alpha, Q_{i_j})<\delta\|\alpha\|$, $j=1,\ldots,q$ следует $d(\alpha, Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_q})<\varepsilon\|\alpha\|$.

Пусть теперь $b\in B$ удовлетворяет $d(b, L_1)<\delta\|b\|$, $d(b, L_2)<\delta\|b\|$. Так как $L_1=Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_k}\subset Q_{i_j}$ при $j=1,\ldots,k$, то из неравенства $d(b, L_1)<\delta\|b\|$ вытекает, что $d(b, Q_{i_j})<\delta\|b\|$ при $j=1,\ldots,k$. Аналогично, из неравенства $d(b, L_2)<\delta\|b\|$ вытекает что $d(b, Q_{i_j})<\delta\|b\|$ при $j=p+1,\ldots,q$.

Таким образом, поскольку $d(b, L_1)<\delta\|b\|$, $d(b, L_2)<\delta\|b\|$, имеем $d(b, Q_{i_j})<\delta\|b\|$ при всех $j=1,\ldots,q$. Из этого вытекает, в силу выбора числа δ, что $d(b, Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_q})<\varepsilon\|b\|$. Но ясно, что $Q_{i_1}\cap\ldots\cap Q_{i_q}=L_1\cap L_2$. Итак, из выполнения неравенств $d(b, L_1)<\delta\|b\|$, $d(b, L_2)<\delta\|b\|$ вытекает, что

$d(b, L_1 \cap L_2) < \varepsilon \|b\|$. Этим и установлено, что подпространства L_1 и L_2 находятся в общем положении.

Мы видим, что любые два подпространства L_1, L_2, каждое из которых представляется в виде пересечения некоторых из подпространств $Q_0, Q_1, ..., Q_s$, находятся в общем положении. Иначе говоря, система $Q_0, Q_1, ..., Q_s$ обладает свойством общности пересечений. Этим установлена достаточность.

Заметим, что приведенное в этой теореме условие содержит существенно меньше требований, чем в определении 2.

1. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач // УМН. 1975. Т.30. Вып.3 (183). С.3-55.
2. Болтянский В.Г. Свойства подпространств общего положения в теории шатров // Проблемы компьютеризации и статистики в прикладных науках: Сб. науч. тр. М.: ВНИИСИ, 1990. 92 с.

References

1. Boltianskii V.G. Metod shatrov v teorii ekstremal'nykh zadach [The method of tents in the theory of extremum problems]. UMN Publ., 1975, vol. 30, issue 3 (183), pp. 3-55.
2. Boltianskii V.G. Svoistva podprostranstv obshchego polozheniia v teorii shatrov [The properties of subspaces of the general position in the theory of tents]. Trudy instituta VNII sistemnykh issledovanii AN SSSR "Problemy komp'iuterizatsii i staticheskoi obrabotki dannykh" [Proc. of the All-Union SRI of Systems Study of the AS USSR "The problems of computerization and statistical data manipulation"]. Moscow, 1990. 92 s.