

УДК 519.24; 511.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ КУМУЛЯНТОВ И МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАЙКСНЕРА

М.С.Токмачев

CALCULATING THE CUMULANTS AND MOMENTS OF THE MEIXNER DISTRIBUTION

M.S.Tokmachev

Институт электронных и информационных систем НовГУ, tokm@mail.natm.ru

Для трехпараметрического распределения Майкснера и различных частных случаев установлена связь кумулянтов и моментов с полиномами определенного класса. В зависимости от параметров распределений найдены теоретические выражения для кумулянтов и моментов произвольного порядка. Указаны рекуррентные дифференциальные и алгебраические соотношения. В частном случае, получены формулы связи между известными последовательностями секансных и тангенциальных чисел.

Ключевые слова: *распределение Майкснера, характеристическая функция, кумулянты, моменты, тангенциальные числа, секансные числа, обобщенные Эйлеровы числа*

For the three-parameter Meixner distribution and for several special cases, the connection of cumulants and moments to polynomials of a certain class is found. Depending on the distribution parameters some theoretical expression for cumulants and moments of random order are derived. The recurrence differential and algebraic relations are presented. For the special case, the formulae which reflect the relations between the sequences of secant and tangent numbers are derived.

Keywords: *Meixner distribution, characteristic function, cumulants, moments, tangent numbers, secant numbers, generalized Euler numbers*

Введение

Вероятностным распределением Майкснера [1-3] называют двухпараметрическое распределение с характеристической функцией

$$f(t) = (\operatorname{ch} t - i\theta \operatorname{sh} t)^{-m}, \text{ где } m, \theta \in \mathbf{R}; m > 0; i = \sqrt{-1}. \quad (1)$$

Это распределение допускает обобщение как трехпараметрическое распределение с характеристической функцией

$$f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-m}, \quad (2)$$

где $\mu, \beta, m \in \mathbf{R}; m > 0, \beta \neq 0$.

Двухпараметрическое распределение Майкснера получается, если в (2) положить $\beta = m$ и пере-

обозначить параметр $\frac{\mu}{\beta} = \frac{\mu}{m} = \theta$. Заметим, что в трехпараметрическом распределении параметр μ — математическое ожидание, а третий параметр можно ввести иначе, например, вместо β в (2) записать $\sqrt{\beta}$.

В указанном виде (2) трехпараметрическое распределение получено при решении задачи характеристики распределений свойством постоянства регрессии квадратичной статистики Q на линейную статистику Λ [4]:

$$E(Q | \Lambda) = E(Q), \quad Q = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} X_j X_k, \quad \Lambda = \sum_{j=1}^n X_j, \quad (3)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. В [4] трехпараметрическое распределение Майкснера фигурирует как распределение типа гиперболического косинуса (далее используем эту терминологию). В зависимости от соотношения коэффициентов статистики Q условие постоянства регрессии (3) является характеристическим для ряда известных распределений [5-6], входящих в класс распределений Майкснера [7]. Известны и другие характеристики распределения Майкснера и распределений класса Майкснера [8-9]. В 2002 г. Возном получено обобщение распределения Майкснера [10], которое затем изучалось многими авторами.

Отметим частные случаи. При $\mu = 0$ из (2) получаем характеристическую функцию двухпараметрического обобщенного распределения гиперболического косинуса [11]

$$f(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \beta t} \right)^m, \quad (4)$$

а при $\mu = 0, m = 1$ получаем характеристическую функцию

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta t} \quad (5)$$

широко известного однопараметрического распределения гиперболического косинуса (секанса). Осуществив сдвиг случайной величины, распределенной по закону гиперболического косинуса, на величину λ , получим двухпараметрическое распределение, известное как распределение Чампернауна [12] с характеристической функцией

$$f(t) = \frac{e^{i\lambda t}}{\operatorname{ch} \beta t}.$$

Таким образом, распределение типа гиперболического косинуса оказывается обобщением двухпараметрического распределения Майкснера, а также является обобщением двух- и однопараметрического распределений гиперболического косинуса (с характеристическими функциями (4), (5) соответственно) на случай $\mu \neq 0$, а при сдвиге значений — и распределения Чампернауна.

Для распределений с характеристической функцией вида (1)-(2) известны функция плотности и функция распределения, доказана безграничная делимость, вычислены математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Однако выражения через параметры для моментов и кумулянтов в общем виде (за исключением частных случаев: распределения гиперболического косинуса и распределения Чампернауна) в литературе не представлены. В данной работе найдены аналитические выражения для моментов и кумулянтов при произвольных параметрах распределений, а также приведен ряд сопутствующих результатов.

Вычисление кумулянтов

Используя характеристическую функцию, найдем в общем виде кумулянты распределения типа гиперболического косинуса (трехпараметрического распределения Майкснера). Применяя тождества $\operatorname{ch} z = \cos iz$ и $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, где i — мнимая единица, преобразуем выражение в формуле (2):

$$f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-m} = \left(\frac{1}{\cos \left(i \frac{\beta}{m} t \right) - \frac{\mu}{\beta} \sin \left(i \frac{\beta}{m} t \right)} \right)^m.$$

Введя обозначение $\frac{\mu}{\beta} = \operatorname{tga}$, получаем

$$f(t) = \left(\frac{\cos a}{\cos \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right)} \right)^m. \quad (6)$$

Характеристическая функция обобщенного распределения гиперболического косинуса ($\mu = 0$) соответственно имеет вид

$$f(t) = \left(\frac{1}{\cos \left(i \frac{\beta}{m} t \right)} \right)^m. \quad (7)$$

При $m=1$ выражение (7) представляет характеристическую функцию распределения гиперболического косинуса.

Для нахождения кумулянтов перейдем в (6) к натуральным логарифмам

$$h(t) = \ln f(t) = m \ln \cos a - m \ln \cos \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right), \quad h(0) = 0;$$

$$h'(t) = im \frac{\beta}{m} \operatorname{tg} \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right), \quad h'(0) = im \frac{\beta}{m} \operatorname{tg} a.$$

Производные от функции $\operatorname{tg} z$ являются многочленами от $\operatorname{tg} z$ (ради наглядности обозначим $\operatorname{tg} z = b$):

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \operatorname{tg}^2 z = 1 + b^2 = P_2(b);$$

$$(\operatorname{tg} z)'' = 2 \operatorname{tg} z (1 + \operatorname{tg}^2 z) = 2b(1 + b^2) = 2b^3 + 2b = P_3(b) \text{ и т.д.}$$

В общем виде имеет место рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(b) = P_n'(b)(1 + b^2), \quad P_1(b) = b, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Эти многочлены $P_n(b)$ известны в литературе (Derivative polynomials) [13,14]. Последовательность $\{P_{2k}(0)\}$, $k=1, 2, \dots$, представляет собой также известную последовательность тангенциальных чисел T_k (tangent numbers) [15]: 1, 2, 16, 272, 7936, 353792, 22368256, Заметим, что $P_{2k-1}(0) = 0$, $k=1, 2, \dots$.

Согласно алгоритму дифференцирования, многочлены $P_n(b)$ также можно представить как

$$P_n(b) = \sum_{j=0}^n V(n, j) b^j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$V(1; 1) = 1, \quad V(1; j) = 0 \text{ при всех } j \neq 1,$$

$$V(n+1; j) = (j-1)V(n, j-1) + (j+1)V(n, j+1) \text{ при } n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Значения коэффициентов $V(n, j)$, вычисляемые по рекуррентной формуле, представляют и самостоятельный интерес.

В нашем случае при дифференцировании $\operatorname{tg} \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right)$ по переменной t появляется сомножитель $\left(i \frac{\beta}{m} \right)$, и при $t=0$ оказывается

$$\operatorname{tg} \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right)_{t=0} = \operatorname{tg} a = b.$$

Таким образом,

$$h^{(n)}(0) = i^n m \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n(b), \quad b = \operatorname{tg} a = \frac{\mu}{\beta}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Следовательно, приходим к соотношению для кумулянтов.

Теорема 1. Для распределения типа гиперболического косинуса с характеристической функцией (2) формула для вычисления кумулянтов χ_n , $n = 1, 2, \dots$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \chi_n &= m \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n \left(\frac{\mu}{\beta} \right) = m \left(\frac{\beta}{m} \right)^n \sum_{j=0}^n V(n, j) \left(\frac{\mu}{\beta} \right)^j = \\ &= m^{1-n} \sum_{j=0}^n V(n, j) \mu^j \beta^{n-j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следствие 1.1. Для двухпараметрического распределения Майкснера ($\beta = m$) формула для вычисления кумулянтов имеет вид:

$$\chi_n = m P_n \left(\frac{\mu}{\beta} \right) = m \sum_{j=0}^n V(n, j) \left(\frac{\mu}{m} \right)^j = \sum_{j=0}^n V(n, j) \mu^j m^{1-j},$$

где $n = 1, 2, \dots$.

Следствие 1.2. Для обобщенного распределения гиперболического косинуса с характеристической функцией (4) ($\mu = 0$, $m > 0$) формула для вычисления кумулянтов имеет вид:

$$\chi_n = m \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k-1; \\ m \left(\frac{\beta}{m} \right)^n T_k & \text{при } n = 2k, \end{cases} \text{ где } k = 1, 2, \dots$$

Следствие 1.3. Для однопараметрического распределения гиперболического косинуса с характеристической функцией (5) ($\mu = 0$, $m = 1$) формула для вычисления кумулянтов имеет вид:

$$\chi_n = \beta^n P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k-1; \\ \beta^n T_k & \text{при } n = 2k, \end{cases} \text{ где } k = 1, 2, \dots$$

В приведенных соотношениях T_k — тангенциальные числа.

Вычисление моментов

По характеристической функции вычислим моменты случайной величины. Используем соотношение $f^{(k)}(0) = i^k M(X^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Запишем (6) в виде

$$f(t) = (\cos a)^m \left[\cos \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right) \right]^{-m}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f'(t) &= im \frac{\beta}{m} (\cos a)^m \left[\cos \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right) \right]^{-m} \operatorname{tg} \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right) = \\ &= im \frac{\beta}{m} f(t) \operatorname{tg} \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right); \end{aligned}$$

$$f'(0) = i \frac{\beta}{m} (mb) = i \frac{\beta}{m} P_1(m, b);$$

$$M(X) = \frac{\beta}{m} P_1(m, b) = \mu, \quad (13)$$

где $b = \operatorname{tg} a = \frac{\mu}{\beta}$, $P_1(m, b) = mb$ — полином двух аргументов.

Далее,

$$\begin{aligned} f''(t) &= i^2 \left(\frac{\beta}{m} \right)^2 (\cos a)^m \left[\cos \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right) \right]^{-m} \times \\ &\times \left[(m^2 + m) \operatorname{tg}^2 \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right) + m \right] = \\ &= i^2 \left(\frac{\beta}{m} \right)^2 f(t) \left[(m^2 + m) \operatorname{tg}^2 \left(a + i \frac{\beta}{m} t \right) + m \right]; \\ f''(0) &= i^2 \left(\frac{\beta}{m} \right)^2 \left[(m^2 + m) b^2 + m \right] = i^2 \left(\frac{\beta}{m} \right)^2 P_2(m, b), \\ M(X^2) &= \left(\frac{\beta}{m} \right)^2 P_2(m, b) = \mu^2 + \frac{\mu^2 + \beta^2}{m}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $P_2(m, b) = (m^2 + m)b^2 + m = m(1 + b^2) + m^2 b^2$.

Следовательно, согласно (14)-(13):

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\mu^2 + \beta^2}{m}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} f'''(0) &= i^3 \left(\frac{\beta}{m} \right)^3 [(m^3 + 3m^2 + 2m)b^3 + (3m^2 + 2m)b] = \\ &= i^3 \left(\frac{\beta}{m} \right)^3 P_3(m, b); \\ M(X^3) &= \left(\frac{\beta}{m} \right)^3 P_3(m, b), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{где } P_3(m, b) &= (m^3 + 3m^2 + 2m)b^3 + (3m^2 + 2m)b = \\ &= 2m(b + b^3) + 3m^2(b + b^3) + m^3b^3. \end{aligned}$$

Согласно алгоритму дифференцирования, приходим к рекуррентному соотношению для полиномов:

$$P_{n+1}(m, b) = mbP_n(m, b) + (1 + b^2) \frac{\partial P_n(m, b)}{\partial b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= i^n \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n(m, b); \\ M(X^n) &= \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n(m, b) = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n \left(m, \frac{\mu}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что и при $n = 0$, $P_0(m, b) = 1$ соотношения (16)-(17) также остаются справедливыми: $P_1(m, b) = mb$, $M(X^0) = 1$.

Таким образом, моменты n -го порядка при конкретных параметрах изменяются как полиномы

$$P_n \left(m, \frac{\mu}{\beta} \right) \text{ и пропорционально } \left(\frac{\beta}{m} \right)^n.$$

В соответствии с алгоритмом дифференцирования, полиномы $P_n(m, b)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, можно представить иначе:

$$P_n(m, b) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n, k, j) m^k b^j, \quad (18)$$

где $\{U(n, k, j)\}$ — система целочисленных коэффициентов, связанных соотношениями:

$$\begin{aligned} U(0; 0, 0) &= 1, \quad U(0; k, j) = 0 \text{ для любых } k, j \neq 0, \\ U(n+1; k, j) &= U(n; k-1, j-1) + \\ &+ (j-1)U(n; k, j-1) + (j+1)U(n; k, j+1) \end{aligned} \quad (19)$$

при $n = 0, 1, 2, \dots$.

Заметим, что согласно (19) оказывается

$$U(1; 1, 1) = 1, \quad U(1; k, j) = 0 \text{ для любых } k, j \neq 1.$$

Последовательность $\{P_{2s}(1, 0)\}$, где $s = 0, 1, 2, \dots$, представляет собой известную последовательность «секансных чисел» [16]: 1, 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, В литературе эту последовательность, наряду со знакопередающей последовательностью (1, -1, 5, -61, 1385, -50521, 2702765, -199360981, ...) также называют «Эйлеровыми числами» (Euler numbers).

Последовательность $\{P_{2s}(2, 0)\}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, является последовательностью тангенциальных чисел $\{T_s\}$.

Последовательность $\{P_s(1, 1)\}$, где $s = 0, 1, 2, \dots$, является последовательностью обобщенных Эйлеровых чисел («Generalized Euler numbers» или «Springer numbers») [17, 18]: 1, 1, 3, 11, 57, 361, 2763, 24611,

Оформим найденные закономерности в виде утверждений.

Теорема 2. Для распределения типа гиперболического косинуса с характеристической функцией (2) формула для вычисления моментов n -го порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} M(X^n) &= \left(\frac{\beta}{m} \right)^n P_n \left(m, \frac{\mu}{\beta} \right) = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n, k, j) m^k \left(\frac{\mu}{\beta} \right)^j = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n, k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Следствие 2.1. Для двухпараметрического распределения Майкснера ($\beta = m$) формула для вычисления моментов n -го порядка имеет вид:

$$M(X^n) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n, k, j) m^{k-j} \mu^j, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Следствие 2.2. Для обобщенного распределения гиперболического косинуса ($\mu = 0$, $m > 0$) с характеристической функцией (7) формула для вычисления моментов n -го порядка имеет вид:

$$M(X^n) = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n \sum_{k=0}^n U(n, k, 0) m^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

В частности, при $\mu = 0$, $m = 2$ получаем

$$M(X^n) = \left(\frac{\beta}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n U(n, k, 0) 2^k = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2s + 1, \\ \left(\frac{\beta}{2} \right)^n T_s & \text{при } n = 2s, \end{cases} \quad (23)$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$; T_s — тангенциальные числа.

Следствие 2.3. Для однопараметрического распределения гиперболического косинуса ($\mu = 0$, $m = 1$) с характеристической функцией (5) формула для вычисления моментов n -го порядка имеет вид:

$$M(X^n) = \beta^n \sum_{k=0}^n U(n, k, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2s + 1, \\ \beta^n E_s & \text{при } n = 2s, \end{cases} \quad (24)$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$; E_s — секансные числа.

Соотношения (20)-(24) позволяют находить моменты произвольного порядка при любых допустимых значениях параметров рассматриваемых распределений.

Теорема 3. Секансные числа $\{E_j\} = \{1, 1, 5, 61, 1385, 50521, \dots\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ и тангенциальные числа $\{T_j\} = \{1, 2, 16, 272, 7936, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots$ связаны взаимно-обратными соотношениями, имеющими место для моментов $\{\alpha_{2j}\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ и кумулянтов $\{\chi_{2j}\}$, $j = 1, 2, \dots$, при условии $\alpha_{2j+1} = 0$, $\chi_{2j+1} = 0$, где $j = 0, 1, 2, \dots$, а именно:

$$E_0 = \alpha_0 = 1;$$

$$E_1 = \alpha_2 = \chi_2 = T_1 = 1;$$

$$E_2 = \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2 = T_2 + 3T_1^2 = 5;$$

$$E_3 = \alpha_6 = \chi_6 + 15\chi_2\chi_4 + 15\chi_2^3 = T_3 + 15T_1T_2 + 15T_1^3 = 61;$$

$$E_4 = \alpha_8 = \chi_8 + 28\chi_6\chi_2 + 210\chi_4\chi_2^2 + 35\chi_4^2 + 105\chi_2^4 = \\ = T_4 + 28T_3T_1 + 210T_2T_1^2 + 35T_2^2 + 105T_1^4 = 1385;$$

$$T_1 = \chi_2 = \alpha_2 = E_1 = 1;$$

$$T_2 = \chi_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2 = E_2 - 3E_1^2 = 2;$$

$$T_3 = \chi_6 = \alpha_6 - 15\alpha_4\alpha_2 + 30\alpha_2^3 = E_3 - 15E_2E_1 + 30E_1^3 = 16;$$

$$T_4 = \chi_8 = \alpha_8 + 420\alpha_4\alpha_2^2 - 630\alpha_2^4 - 28\alpha_6\alpha_2 - 35\alpha_4^2 = \\ = E_4 + 420E_2E_1^2 - 630E_1^4 - 28E_3E_1 - 35E_2^2 = 272;$$

Теорема 3 следует из следствий 1.3 и 2.3 при $\beta = 1$. Для нескольких первых элементов последовательностей, как видим, соотношения легко проверяемы.

Теорема 4. Для распределения типа гиперболического косинуса с характеристической функцией (2) формула для вычисления ее производной n -го порядка имеет вид:

$$f^{(n)}(t) = i^n \left(\frac{\beta}{m} \right)^n f(t) P_n \left(m, tg(a + i \frac{\beta}{m} t) \right) = \\ = \left(\frac{\beta}{m} \right)^n f(t) \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n, k, j) m^k tg^j(a + i \frac{\beta}{m} t),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 4 следует из приведенного выше алгоритма дифференцирования характеристической функции (2). Также легко можно рассмотреть и частные случаи при различных значениях параметров μ, β, m .

Заключение

В работе найдены соотношения для кумулянтов и моментов трехпараметрического распределения Майкснера и различных частных случаев. Установлена связь кумулянтов и моментов с определенного класса полиномами. Для построения полиномов введены новые функции дискретных целых неотрицательных аргументов $V(n, j)$ и $U(n, k, j)$, представляющие и самостоятельный интерес. Вычисления кумулянтов, моментов и соответствующих полиномов произвольного порядка при различных параметрах компьютеризированы. Известные в простейших частных случаях результаты полностью укладываются в данную теорию.

1. Johnson N.L., Kotz S. and Balakrishnan N. Continuous univariate distributions. V.2. N.Y.: Wiley & Sons, 1995. 719 p.
2. Meixner J. Orthogonale polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der erzeugenden function // J. London Math. Soc. 1934. V.9. P.6-13.
3. Meixner J. Umformung gewisser reihen, deren glieder produkte hypergeometrischer funktionen sind // Deutsche Math. 1942. V.6. P.341-349.
4. Токмачёв М.С. Характеризация распределения типа гиперболического косинуса свойством постоянства регрес-

сии / НовГУ. Новгород, 1994. 11с. Деп. в ВИНТИ 21.06.94. № 1542 – В94.

5. Токмачёв М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику // Вестник НовГУ. 1995. № 1. С.139-141.
6. Каган А.М., Линник Ю.В., РАО С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972. 656 с.
7. Lai, C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions // Aust. J. Stat. 1982. V.24. P.221-233.
8. Lai C.D. A characterization of gamma, Meixner hypergeometric and negative binomial distributions based on canonical measures // Ann. Inst. Stat. Math.6. 1982. V.34. Part A. P.359-363.
9. Morris C.N. Natural exponential families with quadratic variance functions // Ann. Statist. 1982. V.10. P.65-80.
10. Vaughan D.C. The generalized secant hyperbolic distribution and its properties // Commun. Stat. Theor. Meth. 2002. V.31. №2. P.219-238.
11. Harkness W.L. and Harkness M.L. Generalized hyperbolic secant distributions // J. Am. Stat. Assoc. 1968. V.63. P.329-339.
12. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.
13. Michael E. Hoffman. Derivative polynomials for tangent and secant // Amer. Math. Monthly. 1995. V.102. P.23-30.
14. Michael E. Hoffman. Derivative polynomials, Euler polynomials, and associated integer sequences // Electronic Journal of Combinatorics. 1999. V.6. #R21
15. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики / Пер. с англ. М.: Мир, 1998. 703 с.
16. Там же. С.603.
17. Arnold V.I. Springer numbers and Morsification spaces // J. Algebraic Geom. 1992. V.1. №2. P.197-214.
18. Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. 1992. Т.47. Вып. 1 (283). С.3-45.

Bibliography (Transliterated)

1. Johnson N.L., Kotz S. and Balakrishnan N. Continuous univariate distributions. V.2. N.Y.: Wiley & Sons, 1995. 719 p.
2. Meixner J. Orthogonale polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der erzeugenden function // J. London Math. Soc. 1934. V.9. P.6-13.
3. Meixner J. Umformung gewisser reihen, deren glieder produkte hypergeometrischer funktionen sind // Deutsche Math. 1942. V.6. P.341-349.
4. Tokmachev M.S. Kharakterizatsiia raspredeleniia tipa giperbolicheskogo kosinusa svoistvom postoiianstva regressii / NovGU. Novgorod, 1994. 11s. Dep. v VINITI 21.06.94. №1542 – V94.
5. Tokmachev M.S. Postoiianstvo regressii kvadratichnoi statistiki na lineiniu statistiku // Vestnik NovGU. 1995. № 1. S.139-141.
6. Kagan A.M., Linnik Iu.V., Rao S.R. Kharakterizatsionnye zadachi matematicheskoi statistiki. M.: Nauka, 1972. 656 s.
7. Lai, C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions // Aust. J. Stat. 1982. V.24. P.221-233.
8. Lai C.D. A characterization of gamma, Meixner hypergeometric and negative binomial distributions based on canonical measures // Ann. Inst. Stat. Math.6. 1982. V.34. Part A. P.359-363.
9. Morris C.N. Natural exponential families with quadratic variance functions // Ann. Statist. 1982. V.10. P.65-80.
10. Vaughan D.C. The generalized secant hyperbolic distribution and its properties // Commun. Stat. Theor. Meth. 2002. V.31. №2. P.219-238.
11. Harkness W.L. and Harkness M.L. Generalized hyperbolic secant distributions // J. Am. Stat. Assoc. 1968. V.63. P.329-339.
12. Vadzinskii R. N. Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam. SPb.: Nauka, 2001. 295 s.
13. Michael E. Hoffman. Derivative polynomials for tangent and secant // Amer. Math. Monthly. 1995. V.102. P.23-30.
14. Michael E. Hoffman. Derivative polynomials, Euler polynomials, and associated integer sequences // Electronic Journal of Combinatorics. 1999. V.6. #R21
15. Grekhem R., Knut D., Patashnik O. Konkretnaia matematika. Osnovanie informatiki / Per. s angl. M.: Mir, 1998. 703 s.
16. Tam zhe. S.603.
17. Arnold V.I. Springer numbers and Morsification spaces // J. Algebraic Geom. 1992. V.1. №2. P.197-214.
18. Arnol'd V.I. Ischislenie zmei i kombinatorika chisel Bernulli, Eilera i Springera grupp Kokstera // UMN. 1992. T.47. Vyp. 1 (283). S.3-45.