

УДК 517.2

О ПРИМЕНЕНИИ S_w -КЛАССИФИКАЦИИ МАТРИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ ШВАРЦА

В.Г.Николаев

Институт электронных и информационных систем НовГУ, vg14@inbox.ru

Статья посвящена исследованию единственности однородной задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису. Построен пример неединственности в виде квадратичной формы. Получена классификация матриц, с помощью которой можно однозначно определить, возможен или нет такой пример для конкретной матрицы.

Ключевые слова: вектор-функция, собственное число, собственный вектор, аналитичность, жорданова форма

The article deals with the uniqueness of homogeneous problem of the Schwartz functions which are Douglis analytical. We construct an example of nonuniqueness in the quadratic form. A classification matrix one can use to determine if possible whether or not such an example for a particular matrix is found out.

Keywords: vector-function, eigen-value, eigenvector, analyticity, Jordan form

Сначала несколько вводных замечаний. Всюду для краткости будем обозначать ϕ_x и ϕ_y частные производные скалярной или вектор-функции $\phi(x, y)$ по x и по y соответственно. Символ $\operatorname{Re} \phi$ обозначает реальную часть функции ϕ .

Определение 1. Пусть комплексная n -вектор-функция $\phi(x, y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в области G первые частные производные по x и по y . Обозначим A ($n \times n$)-матрицу, все собственные числа которой лежат в верхней полуплоскости и пусть в области G выполнено равенство

$$\frac{d\phi}{dy} - A \cdot \frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (1.1)$$

Тогда функцию ϕ назовем аналитической по Дуглису, или J -аналитической с матрицей A в области G . Как показано А.П.Солдатовым (см. лит.), условия (1.1) достаточно для аналитичности функции ϕ . При этом не нужно требовать даже непрерывности первых частных производных.

Нелишне отметить, что аналитические по Дуглису функции широко применяются при исследовании решений краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных [1], поэтому их изучение представляет большой самостоятельный интерес.

1. Постановка задачи Шварца

Пусть область G ограничена гладким контуром Γ . Требуется найти J -аналитическую в области G функцию $\phi(z)$, которая непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$ и удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \phi|_{\Gamma} = f \quad (1.2)$$

где вещественная вектор-функция $f \in C(\Gamma)$ задана.

Наше дальнейшее исследование будет посвящено вопросу единственности задачи Шварца, т. е. для каких матриц A однородная ($f=0$) задача (1.2) имеет только постоянные решения.

2. Определение Sw -классификации 2×2 -матриц

Пусть $r^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Покажем, что

$$\begin{pmatrix} z^2 \\ ir^2 \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^2 \\ ir^2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Действительно, равенство $(z^2)_y - i(z^2)_x = 0$, представляющее первую строку, очевидно, так как z^2 — голоморфная функция. Вторая строка:

$$(ir^2)_y - i(ir^2)_x = (z^2)_x,$$

$$(r^2)_y = 2y; (r^2)_x = 2x,$$

$$2iy - i(2ix) = 2(x+iy),$$

$$2iy + 2x = 2x + 2iy,$$

что и требовалось.

Теперь покажем, как формулу (2.1) можно использовать для построения примеров неединственности для задачи Шварца.

Пусть 2×2 -матрица A имеет собственное число i кратности 2. Тогда ее жорданова форма J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Как известно, если столбцы матрицы B — жорданов базис матрицы A , то $J = B^{-1}AB$, т. е. $A = BJB^{-1}$. Базис B строится по следующему алгоритму. Обозначим E единичную матрицу. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A - iE = \begin{pmatrix} a_{11} - i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - i \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{y}$ — некоторый вектор. Тогда $B = (\bar{y}, (A - iE)\bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$, где вектор $\bar{x} = (A - iE)\bar{y}$ — собственный для матрицы A . Действительно, $A\bar{x} = (A - iE + iE)[(A - iE)\bar{y}] = (A - iE)^2\bar{y} + iE(A - iE)\bar{y} = i\bar{x}$ так как $(A - iE)^2 = 0$ согласно теореме Кэли — Гамильтона.

Вектор $\bar{y}$ здесь выбирается произвольно и называется присоединенным. Разумеется, при выборе $\bar{y}$ должно быть выполнено условие $\det B \neq 0$. Возьмем $\bar{y}$ попроще, например $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$B = (\bar{y}, \bar{x}) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} - i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} - i \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}.$$

Здесь элемент $a_{21} \neq 0$, так как матрица A а priori не-треугольная (для треугольных матриц, напомним, примеры неединственности невозможны). Следовательно, $\det B \neq 0$.

Так как жорданов базис определен с точностью до множителя, то поделим векторы $\bar{y}$ и $\bar{x}$, входящие в него, на элемент $a_{21} \neq 0$ матрицы A . Полученную таким образом матрицу обозначим B' :

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} - i \\ a_{21} & a_{21} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Далее обозначим $\phi^0 = \begin{pmatrix} z^2 \\ ir^2 \end{pmatrix}$. Тогда (2.1) пере-

пишется в виде $\phi_y^0 - J \cdot \phi_x^0 = 0$. Но $J = (B')^{-1}AB'$, т. е.

$\phi_y^0 - (B')^{-1}AB' \cdot \phi_x^0 = 0$, откуда, умножая обе части на B' , получим равенство

$$(B' \cdot \phi^0)_y - A \cdot (B' \cdot \phi^0)_x = 0.$$

Таким образом, функция $\phi = B' \cdot \phi^0$ будет J -аналитической с матрицей A , согласно определению 1. Вычислим ее с учетом (2.2):

$$\begin{aligned} \phi = B' \cdot \phi^0 &= \begin{pmatrix} 1 & a_{11} - i \\ a_{21} & a_{21} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^2 \\ ir^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 + (a_{11} - i) \cdot ir^2 \\ a_{21} \\ ir^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} P(x, y) + iQ(x, y) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — вещественные квадратичные формы.

Как видим, реальная часть нижнего элемента функции ϕ равна нулю. Поэтому если окажется, что $P(x, y)$ есть форма положительно определенная и неособая, то функция

$$\phi' = \phi - y = \begin{pmatrix} P(x, y) + iQ(x, y) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) - 1 + iQ(x, y) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

будет обладать свойством $\text{Re} \phi'|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma: P(x, y) = 1$. При этом ϕ' будет J -аналитической с той же матрицей A , поскольку такие функции определены с точностью до аддитивной константы. То же самое будет для отрицательно определенной формы $P(x, y)$. Такая функция ϕ будет являть собой пример неединственности однородной задачи Шварца.

Очевидно, что вид $P(x, y)$ целиком и полностью зависит от коэффициентов матрицы A . Таким образом, сама собой напрашивается следующая классификация 2×2 -матриц.

Определение 2. Будем говорить, что матрица A принадлежит классу Sw_+ , если в формуле (2.3) $P(x, y)$ — неособая положительно или отрицательно определенная квадратичная форма. Если $P(x, y)$ — знакопеременная форма, то $A \in Sw_-$. Если же $P(x, y) = a(bx + cy)^2$, то $A \in Sw_0$ (Символ Sw здесь происходит от фамилии Шварц (Shwarz)).

Таким образом, мы определили Sw -классификацию 2×2 -матриц, имеющих кратное собственное число $\lambda = i$. Можно показать, что подобную классификацию можно ввести для всех 2×2 -матриц, даже если собственные числа различны (кроме одного случая, когда $\lambda = i, \lambda_2 = -i$).

Имеют место следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть компоненты вещественной части J -аналитической функции $\phi(x, y)$ линейно зависимы в некоторой области $G' \subset G$. Тогда ϕ представляет собой сумму квадратичной и линейной форм.

Лемма 2. Пусть J -аналитическая функция ϕ с матрицей A имеет вид

$$\phi = \begin{pmatrix} \beta \cdot P(x, y) + iQ(x, y) \\ \alpha \cdot P(x, y) + iR(x, y) \end{pmatrix},$$

где α и β — вещественные числа (одно из них может быть нулем). Тогда для того, чтобы полином $P(x, y)$ был неособой положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, необходимо и достаточно, чтобы $A \in Sw_+$. Та же ситуация для классов Sw_- и Sw_0 .

Доказательства этих лемм мы здесь не приводим, поскольку ограничены рамками статьи.

Определение классов Sw будем считать корректным в смысле выполнения этих двух лемм. Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. Примеры неединственности задачи Шварца среди квадратичных форм возможны тогда и только тогда, если $A \in Sw_+$. Если же $A \in Sw_-$ или $A \in Sw_0$, то такие примеры, по крайней мере среди квадратичных форм, не существуют.

3. Примеры матриц, принадлежащих различным Sw -классам

Во всех этих примерах для простоты будем полагать, что матрица A имеет единственное собственное число $\lambda = i$ кратности 2. Как известно, такие матрицы однозначно определяются по следующим двум критериям: сумма элементов главной диагонали равна $2i$, а определитель равен -1 .

Прежде всего, рассмотрим матрицу $A_1 \in Sw_+$, которая дает пример неединственности задачи Шварца.

Пример 1. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3i & -2 \\ -2 & -i \end{pmatrix}, \quad A_1 - iE = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B = (\bar{y}, (A_1 - iE)\bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поделив все элементы матрицы B на $a_{21} = -2$, получим

$$B' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \phi &= B' \cdot \phi^0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 2ixy \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) - ixy + (x^2 + y^2) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - xyi \\ 0 + i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2$, т. е. $A \in Sw_+$. Как нетрудно видеть, для функции

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \bar{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - xyi \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 1 - xyi \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

будем иметь $\text{Re} \phi'|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma: \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$, откуда и вытекает *неединственность задачи Шварца для матрицы A_1* , так как ϕ не равна нулю тождественно. Ввиду особой важности этого примера проведем непосредственную проверку J -аналитичности функции ϕ' .

Нужно показать, что ϕ' удовлетворяет (1.1), т. е. $\phi'_y = A \cdot \phi'_x$. Распишем это равенство:

$$\begin{pmatrix} 3y - xi \\ 2yi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i & -2 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - yi \\ 2xi \end{pmatrix}.$$

Верхняя строка слева: $3y - xi$. Она же справа: $3i(x - yi) - 4xi = 3xi + 3y - 4xi = 3y - xi$. Нижняя строка слева: $2yi$. Она же справа: $-2(x - yi) + 2x = -2x + 2yi + 2x = 2yi$. Имеющее место совпадение подтверждает, что пример верен.

Пример 2. Пусть

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3i}{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 - iE = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B = (\bar{y}, (A_2 - iE)\bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в данном случае $a_{21} = 1$, то $B' = B$. Поэтому

$$\begin{aligned} \phi &= B \cdot \phi^0 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 2ixy \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 2ixy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2ixy \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$P(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2, \text{ т. е. } A \in Sw_-.$$

Пример 3. Пусть

$$A_3 = \begin{pmatrix} i+1 & i \\ i & i-1 \end{pmatrix}, \quad A_3 - iE = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B = (\bar{y}, (A_3 - iE)\bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Поделив все элементы матрицы B на $a_{21} = i$, получим

$$B' = \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\phi = B' \cdot \phi^0 = \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 2ixy \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i(x^2 - y^2 + 2ixy) + (x^2 + y^2) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 + 2xy + y^2 - i(x^2 - y^2) \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Здесь $P(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, т. е. $A \in Sw_0$.

Для матриц A_2 и A_3 согласно лемме 3 однородная задача Шварца имеет единственное решение, по крайней мере, если функция ϕ в (1.1) — квадратичная форма.

В заключение отметим, что Sw -классификацию можно определить для всех 2×2 -матриц, не имеющих вещественных собственных чисел. Но она достаточно сложна и выходит за рамки нашей статьи.

Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису. В. Новгород: НовГУ, 1995. 195 с.

Bibliography (Transliterated)

Soldatov A.P. Funkcii, analiticheskie po Duglisu. V. Novgorod: NovGU, 1995. 195 s.