

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ Е-ПОЛЯРИЗАЦИИ НА НЕЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В.С.Эминова

Институт электронных и информационных систем НовГУ, *eminovsi@mail.ru*

В работе исследовано интегральное уравнение задачи дифракции Е-поляризации на незамкнутой поверхности вращения. Для решения уравнения развита аналитическая модификация метода Галеркина. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: дифракция, коэффициенты Ламе, метод Галеркина, логарифмическая особенность

In the article the integral equation of the problem of E-polarization diffraction on open-ended surface of revolution is researched. The analytic modification of Galerkin method is developed for the equation solution. The results of numerical calculations are included.

Keywords: diffraction, Lamé coefficients, Galerkin method, logarithmic singularity

1. Сведение исходного уравнения к безразмерному интегральному уравнению

Рассмотрим незамкнутую поверхность S , образованную вращением гладкой кривой вокруг оси Z в декартовой системе координат X, Y, Z . Связь декартовых координат с криволинейными задается выражениями

$$x = \xi(\tau) \cos \varphi, \quad y = \xi(\tau) \sin \varphi, \quad z = \eta(\tau), \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi. \quad (1)$$

Учитывая выражения (1), вычислим коэффициенты Ламе:

$$H_\tau = \sqrt{x_\tau'^2 + y_\tau'^2 + z_\tau'^2} = \sqrt{\xi_\tau'^2 + \eta_\tau'^2}, \\ H_\varphi = \xi(\tau), \quad \xi(\tau) \geq 0.$$

Интегральное уравнение в осесимметричной задаче дифракции Е-поляризации имеет вид [1]

$$\iint_S K_\varphi^\varphi(\varphi, \varphi', \tau, t) j(t) d\varphi dt = -i\omega \varepsilon E_\varphi^0(\tau), \quad (2)$$

где $K_\varphi^\varphi = k^2 G \cos(\varphi - \varphi') H_\varphi H_t$,

$$G = \frac{e^{-ikr}}{4\pi R}, \quad H_t = \sqrt{\xi_\tau'^2 + \eta_\tau'^2}, \quad H_\varphi = \xi(\tau), \\ R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \\ = \sqrt{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2 + 4\xi(\tau)\xi(t) \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}}.$$

Введем новую неизвестную

$$I(t) = (kH_t) 2\pi H_\varphi j(t)$$

и перейдем в уравнении (2) к безразмерным переменным. В результате получим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^1 I(t) K(\tau, t) dt = -\frac{4\pi}{(kH_\tau)} (i) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (H_\tau E_\varphi^0(\tau)), \quad (3)$$

где

$$K(\tau, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-iR\varphi}}{R^\varphi} \cos \varphi d\varphi, \quad R^\varphi = \sqrt{(kR_0)^2 + 4(k\alpha)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \\ R_0^2 = [\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2, \quad \alpha^2 = \xi(\tau)\xi(t).$$

2. Выделение логарифмической особенности

Представим ядро интегрального уравнения (3) в виде

$$K(\tau, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-iR\varphi}}{R^\varphi} \cos \varphi d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{e^{-iR\varphi}}{R^\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{R} \right] d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R} d\varphi, \quad (4)$$

где $\tilde{R} = \sqrt{(kR_0)^2 + (k\alpha)^2 \varphi^2}$.

Последнее слагаемое в (4) можно вычислить аналитически:

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{(kR_0)^2 + (k\alpha)^2 \varphi^2}} d\varphi = \\ = \frac{1}{k\alpha} \ln \left(k\alpha + \sqrt{(k\alpha)^2 \pi^2 + (kR_0)^2} \right) + \frac{1}{k\alpha} \ln \frac{1}{kR_0}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$K(\tau, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{e^{-iR\varphi}}{R^\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{R} \right] d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi k\alpha} \ln \left(k\alpha + \sqrt{(k\alpha)^2 \pi^2 + (kR_0)^2} \right) + \\ + \frac{1}{\pi k\alpha} \ln \frac{|\tau - t|}{L} + \frac{1}{\pi k\alpha} \ln \frac{1}{|\tau - t|}.$$

Далее в уравнении (3) перейдем к новой неизвестной

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{k\xi(t)}} I(t)$$

и одновременно умножим обе части уравнения (3) на функцию $\sqrt{k\xi(\tau)}$. В результате получим окончательное уравнение с выделенным логарифмическим ядром

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u(t) \ln \frac{1}{|\tau - t|} dt + \int_{-1}^1 u(t) K_1(\tau, t) dt = \\ = -\frac{4\pi\sqrt{k\xi(\tau)}}{(kH_\tau)} (i) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (H_\tau E_\varphi^0(\tau)) \quad (6)$$

$$\text{где } K_1(\tau, t) = \frac{k\alpha}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{e^{-iR\varphi}}{R^\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{R} \right] d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} \ln \left(k\alpha \pi + \sqrt{(k\alpha)^2 \pi^2 + (kR_0)^2} \right) + \frac{1}{\pi} \ln \frac{|\tau - t|}{kR_0}.$$

3. Результаты численных расчетов

В качестве примера рассмотрим биконическую округленную поверхность. Такая поверхность задается системой уравнений

$$x = \xi(\tau) \cos \varphi, \quad y = \xi(\tau) \sin \varphi, \quad z = \eta(\tau), \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\xi(\tau) = \begin{cases} \alpha l |\tau| + a, & |\tau| \geq t_0, \\ \alpha l \left(\frac{\tau^2}{2t_0} + \frac{t_0}{2} \right) + a, & |\tau| < t_0, \end{cases} \quad \eta(\tau) = l\tau.$$

Первичное поле в этой задаче также полагаем постоянным $H_\tau E_\varphi^0(\tau) = 1$. Уравнение (6) будем решать методом Галеркина, развитым в работе [2].

Табл.1 иллюстрирует сходимость метода Галеркина в зависимости от числа базисных функций N . Наблюдается стабильная сходимость метода Галеркина для всех параметров.

В табл.2 приведены результаты исследования поведения тока в нулевом сечении при малых значениях параметра t_0 — параметра округления. Как следует из таблицы, при стремлении t_0 к нулю значение тока стремится к определенному значению.

Таблица 1

N	kα = 0,01		kα = 0,1	
	ReI, A	ImI, A	ReI, A	ImI, A
2	0,00005719	-0,00571193	0,00012138	-0,004925
4	0,00013694	-0,01064609	0,00022009	-0,009928
6	0,0001324	-0,01017	0,0002006	-0,009556
8	0,0001329	-0,01028	0,0001936	-0,009729
10	0,0001325	-0,01028	0,0001897	-0,009818
12	0,0001323	-0,01028	0,0001868	-0,009860
14	0,0001322	-0,01029	0,0001848	-0,009887
16	0,0001321	-0,01029	0,0001833	-0,009905
18	0,0001320	-0,01029	0,0001822	-0,009917
20	0,0001320	-0,01029	0,0001814	-0,009927

Таблица 2

kt ₀	kα = 0,01		kα = 0,1	
	ReI, A	ImI, A	ReI, A	ImI, A
0,09	0,0001319	-0,01029	-0,01029	0,0001840
0,08	0,0001318	-0,01028	-0,01028	0,0001832
0,07	0,0001317	-0,01028	-0,01028	0,0001825
0,06	0,0001316	-0,01028	-0,01028	0,0001817
0,05	0,0001316	-0,01028	-0,01028	0,0001811
0,04	0,0001315	-0,01028	-0,01028	0,0001805
0,03	0,0001314	-0,01027	-0,01027	0,0001799
0,02	0,0001314	-0,01027	-0,01027	0,0001794
0,01	0,0001314	-0,01027	-0,01027	0,0001789
0,00	0,0001313	-0,01027	-0,01027	0,0001775

Таким образом, в работе получены следующие результаты.

1. Развита метод выделения логарифмической особенности в аналитическом виде.

2. Двумерное интегральное уравнение дифракции E -поляризации на незамкнутой поверхности вращения сведено к одномерному каноническому уравнению с выделенным логарифмическим ядром.

3. В качестве примера рассмотрена задача дифракции на биконической округленной поверхности. Уравнение решено методом Галеркина на основе полиномов Чебышева первого рода, умноженных на весовую функцию. Продемонстрирована эффективность метода Галеркина.

4. Показана применимость численных методов к задачам дифракции на поверхностях, имеющих угловые точки.

1. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
2. Эминов И.С., Эминова В.С. Метод Галеркина в задаче дифракции E -поляризации на произвольной цилиндрической поверхности // Вестник НовГУ. Сер. Техн. науки. 2010. №60. С.62-64.

Bibliography (Transliterated)

1. Zakharov E.V., Pimenov Ju.V. Chislennyj analiz difrakcii radiovoln. M.: Radio i svjaz', 1982. 184 s.
2. Ehminov I.S., Ehminova V.S. Metod Galerikina v zadache difrakcii E -poljarizacii na proizvol'noj cilindricheskoj poverkhnosti // Vestnik NovGU. Ser. Tekhn. nauki. 2010. №60. S.62-64.